

Mémoire présenté devant l'Université de Paris-Dauphine
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine
et l'admission à l'Institut des Actuaires
le 27 Juin 2024

Par : Lucie AUBERT-LASSARADE

Titre : Modélisation et analyse d'un générateur de scénarios économiques non-paramétrique.

Confidentialité : Non Oui (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaires :*

Entreprise :
Nom : Prim'Act
Signature :

*Membres présents du Jury du Certificat
d'Actuaire de Paris-Dauphine :*

Directeur de Mémoire en entreprise :
Nom : Frédéric PLANCHET
Signature :

*Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise

Bibliothèque :

Signature du candidat

Résumé

La directive européenne Solvabilité II impose implicitement l'utilisation de générateurs de scénarios économiques (GSE) sous deux mesures de probabilité pour répondre à ses exigences. Une première étape consiste à évaluer la valeur de marché des actifs, suivie du calcul du *Best Estimate* avec un GSE sous probabilité risque-neutre. D'après le pilier 2 de la norme, les assureurs doivent mettre en place une évaluation et une gestion des risques, plus communément appelée ORSA (*Own Risk Solvency Assessment*). Pour se faire, l'assureur doit recourir à l'utilisation d'un GSE dit historique.

De manière générale, les GSE utilisés par l'assureur proviennent de modèles de diffusions paramétriques, qui admettent souvent des limites quant à leur capacité à reproduire les événements du passé. Dans ce mémoire, un modèle non paramétrique basé sur une méthode de *Machine Learning*, et plus particulièrement le réseau de neurones RVFL, sera introduit afin de construire un GSE historique.

Une étude comparative sera menée, confrontant le modèle non-paramétrique à d'autres méthodes usuelles. Cette analyse vise à examiner les résultats afin de déterminer la valeur ajoutée du modèle RVFL mais également ses limites.

Une méthode de risque-neutralisation sera proposée afin d'obtenir un GSE historique et risque-neutre issu d'un même et unique modèle. Cette approche garantirait alors une meilleure cohérence des calculs, puisque unique pour la valorisation et la projection. Plusieurs critères de risque-neutralisation seront testés et interprétés afin de vérifier la fiabilité des projections obtenues.

A l'issu des travaux, le mémoire aura pour objectif de répondre à la question suivante : Quels sont les avantages et les limites de l'utilisation d'un générateur de scénarios économiques non-paramétrique ?

Mots-clés : Générateur de scénarios économiques, Probabilités historique et risque-neutre, Machine learning, Réseau de neurones RVFL, Risque-neutralisation.

Abstract

The European Solvency II directive implicitly requires the use of economic scenario generators (ESG) under two probability measures to meet its requirements. The first step is to assess the market value of assets, followed by the calculation of the *Best Estimate* with a GSE under risk-neutral probability. According to Pillar 2 of the standard, insurers must implement a risk assessment and management system, more commonly known as ORSA (Own Risk Solvency Assessment). To do this, the insurer must use a historical GSE.

Generally speaking, the GSEs used by insurers are derived from parametric diffusion models, which often admit limitations in their ability to reproduce past events. In this thesis, a non-parametric model based on a *Machine Learning* method, and more specifically the RVFL neural network, will be introduced in order to build a historical GSE.

A comparative study will be carried out, comparing the non-parametric model with other common methods. The aim of this analysis is to examine the results in order to determine the added value of the RVFL model, as well as its limitations.

A risk-neutralization method will be proposed to obtain a historical and risk-neutral GSE from a single model. This approach would then guarantee greater consistency in calculations, since it would be the same for both valuation and projection. Several risk-neutralization criteria will be tested and interpreted to verify the reliability of the projections obtained.

At the end of the work, the dissertation will aim to answer the following question: What are the advantages and limitations of using a non-parametric GSE?

Keywords : Economic Scenario Generator, Historical and risk neutral probabilities, Machine learning, RVFL neural network , Risk-neutralization.

Note de Synthèse

Par sa nature prospective, la directive européenne solvabilité II implique l'utilisation de générateurs de scénarios économiques. D'après l'ACPR (2020) (Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution), un générateur de scénarios économiques (GSE) est un ensemble de modèles (taux, actions, spreads de crédit, inflation, etc.) permettant de simuler des scénarios d'évolution possibles des marchés financiers, qui ont une incidence sur la valeur et les performances de l'actif de l'organisme d'assurance.

Il existe deux types de GSE, chacun étant défini selon une mesure de probabilité spécifique : la probabilité historique et la probabilité risque-neutre. La nature de la mesure de probabilité utilisée détermine les différents usages du GSE. La probabilité risque-neutre est employée pour évaluer la valeur des engagements d'assurance, notamment dans le calcul du *Best Estimate* dans le cadre de Solvabilité II. En revanche, la mesure historique est utilisée pour anticiper les scénarios dans la gestion des risques ou la projection de l'activité financière de l'assureur, en se basant sur des données passées.

Traditionnellement, les assureurs ont recours à des générateurs de scénarios économiques qui reposent sur des modèles de diffusion paramétriques. Ces modèles, bien qu'utiles et largement utilisés, présentent des limites intrinsèques lorsqu'il s'agit de reproduire avec précision les événements passés, notamment ceux d'une gravité extrême ou d'une fréquence rare. En effet, les modèles paramétriques sont souvent construits sur la base d'hypothèses simplifiées, ce qui peut les rendre moins flexibles pour capturer toute la variabilité et la complexité des données réelles. Par conséquent, ces modèles peuvent parfois sous-estimer ou surestimer les risques, ce qui compromet leur capacité à fournir des prévisions et des évaluations précises.

De plus, le modèle de diffusion utilisé par les assureurs pour le GSE historique n'est pas nécessairement le même que celui utilisé pour le GSE risque-neutre. Toutefois, il est envisageable qu'un seul GSE puisse servir à la fois pour la valorisation et la projection, assurant ainsi une cohérence plus importante. La liaison entre les deux mesures de probabilité peut être réalisée en introduisant la notion du prix du marché du risque. Cependant, cette approche dépend de la définition des modèles paramétriques, représentant les facteurs de risque.

Dans ce mémoire, une approche non conventionnelle sera explorée : un modèle non paramétrique basé sur une méthode de *Machine Learning*, plus précisément le réseau de neurones RVFL (*Random Vector Functional Link*), dans le but de construire un GSE historique. La capacité de la méthode à capter et reproduire le comportement complexe et volatil des facteurs financiers sera alors mesurée, offrant ainsi une meilleure représentation des scénarios économiques.

Une méthode de risque-neutralisation sera également proposée pour générer un GSE historique et risque-neutre à partir d'un même modèle. Cette approche assurerait une meilleure cohérence des calculs, car elle serait utilisée à la fois pour la valorisation et la projection. Divers critères de risque-neutralisation seront évalués pour garantir la fiabilité des projections obtenues.

Mise en place du GSE historique non-paramétrique

Avant de pouvoir appliquer le modèle RVFL, il est essentiel de préparer et de retravailler la série temporelle multivariée (STM), qui servira de jeu de données d'entraînement et de test pour notre modèle.

L'étude des graphiques publiés par l'ACPR sur la composition de l'actif des assureurs français soumis à la directive européenne Solvabilité II est utilisée pour identifier les données pertinentes. Il s'agit plus précisément de la structure et des expositions géographiques des placements des assureurs (ACPR, 2023). Dans le cadre du mémoire visant à proposer un générateur de scénarios économiques illustratif, l'accent est mis sur deux facteurs de risque : les taux et les actions.

Série temporelle multivariée

Les données retenues pour modéliser les facteurs de risque sont : les indices de fermeture du CAC40 pour les actions et les taux swap par rapport à l'EURIBOR 6M, également appelés EUSA N, pour les taux.

Des retraitements sont nécessaires sur les données. Pour les actions, l'interpolation linéaire est sélectionnée pour combler les valeurs manquantes et les indices sont transformés en logarithme du rendement discret. Pour les taux, une méthode de *bootstrapping* issue du livre de ANDERSEN et PITERBARG (2010) est utilisée pour transformer les taux swap en taux spot. Ensuite, de manière à réduire la dimension des données de taux, la méthode de Nelson-Siegel est utilisée afin d'extraire les 3 composantes principales.

Les deux séries possèdent ainsi une granularité mensuelle et couvrent la même période d'observation, allant du 31 janvier 2001 au 31 mai 2023, totalisant ainsi plus de 22 années d'historique.

Machine Learning : le modèle RVFL

Les RVFL sont des outils utilisés pour projeter des séries temporelles avec de fortes corrélations et de grandes dimensions. Ils sont donc très adaptés pour projeter une série temporelle multivariée dans le cas d'un GSE. En effet, chaque facteur de risque modélisé par une série temporelle (univarié pour les actions ou multivarié pour les taux) est très corrélé aux autres. Le modèle peut alors prendre en compte cette corrélation dans la phase d'apprentissage sans pour autant sur-apprendre sur les données. Le nombre de paramètres ainsi que la présence de formules fermées permettent aux réseaux de type RVFL d'être plus facile à calibrer que des réseaux de neurones de type LSTM (*Long Short Term Memory*) ou GAN (*Generative Adversive Network*) et plus rapide. Ils sont également plus faciles à appréhender que les deux derniers modèles cités.

Après avoir construit la série temporelle multivariée, l'un des aspects essentiels concerne le choix du modèle utilisé pour projeter ces données. Il s'agit d'un réseau de neurones à propagation avant et plus précisément le RVFL à une couche cachée. Le RVFL se distingue d'un réseau à propagation avant classique à une couche intermédiaire par deux différences majeures : le lien direct entre les entrées et les sorties ainsi que les éléments de la couche cachée du RVFL sélectionnés de manière quasi-aléatoires. Afin d'améliorer la flexibilité dans la structure de covariance entre les prédicteurs et les sorties, une régression de Ridge est réalisée avec deux paramètres de régularisation différents sur les variables d'entrée et transformées.

Génération de l'aléa

Un point central et non trivial est de générer l'aléa. L'objectif est de créer plusieurs projections à partir du scénario central, afin d'anticiper les différentes trajectoires que peuvent emprunter les

facteurs de risque sur l’horizon de projection. Usuellement les différentes dynamiques sont générées à l’aide d’un processus brownien pour produire ces variations, ce qui n’est pas le cas avec une méthode de Machine Learning. C’est pourquoi la méthode du *Block Bootstrap* est utilisée. Pour chaque projection, un *Block Bootstrap* est lancé. Les résidus entre la série observée et prédite sur l’historique sont calculés de manière à former une nouvelle STM (de résidus). Les indices correspondants aux points de départ du bloc sont générés auxquels la longueur du bloc est ajouté dans le but d’extraire de la STM des résidus par bloc. Les blocs de résidus incrémentent ainsi le scénario central de manière à obtenir la projection.

Résultats des projections historiques

Une fois la base de données et le modèle développés, l’objectif est de projeter la série temporelle multivariée constituée des rendements actions et des taux sur un horizon de 20 années. Diverses analyses sont effectuées pour évaluer la pertinence des éléments construits.

Analyse prédictive avec le modèle VAR

Une analyse prédictive a été réalisée en amont afin d’évaluer si le modèle est capable de capter les tendances et prédire de manière robuste. Une comparaison est réalisée avec un modèle de série temporelle classique : le modèle VAR. La STM est scindée en deux parties : un échantillon d’entraînement et un échantillon de test composés respectivement, de 75 % et 25 % de l’échantillon total. Après l’entraînement des deux modèles, les pouvoirs prédictifs de chaque modèle sont mesurés via les mesures RMSE (*Root Mean Square Error*) et MAE (*Mean Absolute Error*). Ces calculs sont réalisés pour le logarithme du rendement action et le taux long (première composante de Nelson-Siegel).

<i>Mesure d’erreur</i>	RMSE Action	MAE Action	RMSE Taux long	MAE Taux long
<i>RVFL</i>	5,16	4,03	0,36	0,30
<i>VAR</i>	5,59	4,34	0,84	0,71

TABLE 1 : Comparaison des mesures d’erreur pour les actions et le taux long sur l’échantillon de test

Les résultats des deux mesures d’erreur, à savoir la RMSE et la MAE, convergent vers une même conclusion : le modèle RVFL présente une performance supérieure à celle du modèle VAR.

Comparaison du modèle RVFL avec des modèles paramétriques

Le modèle RVFL a montré ses pouvoirs prédictifs face au modèle VAR sur l’échantillon de test. Une validation croisée a été mise en place afin de déterminer les hyperparamètres qui minimisent l’erreur de prédiction. La STM est alors projetée sur les 20 prochaines années, avec un pas mensuel. Les projections relatives à l’évolution du CAC40 et du taux court ont été comparées respectivement au modèle de Black-Scholes (BS) et Vasicek.

Pour ce faire, l’évolution du prix des actions du CAC40 est calculée à partir des simulations du log-rendement. Pour l’évolution du prix, nous faisons l’hypothèse qu’à la dernière date connue, soit le 31 mai 2023, une action du CAC40 a une valeur de 100.

Le prix des actions double ou triple au minimum, étant plutôt réaliste. Les prédictions du modèle de Machine Learning semblent plus volatiles que celles du modèle Black-Scholes (BS), reconnu pour ne pas bien modéliser les périodes de crise.

Pour les taux, les deux méthodes produisent des projections similaires en termes d’intervalle de valeurs, mais présentent également une trajectoire centrale avec des sauts, en raison des caractéristiques intrinsèques du modèle (scénario central auquel l’aléa est ajouté).

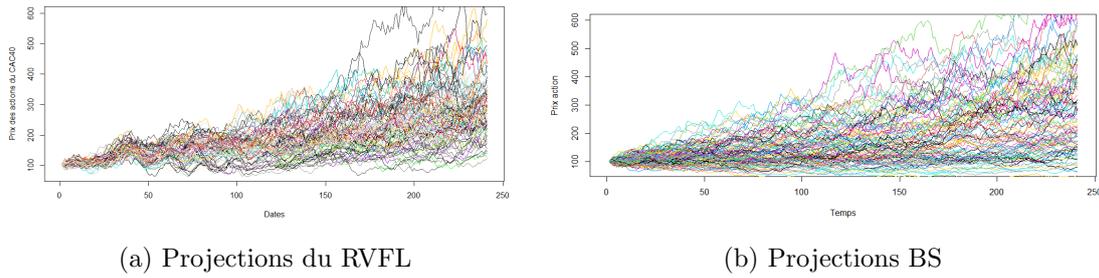


FIGURE 1 : Projection du prix de 100 simulations du CAC40 sur 20 ans

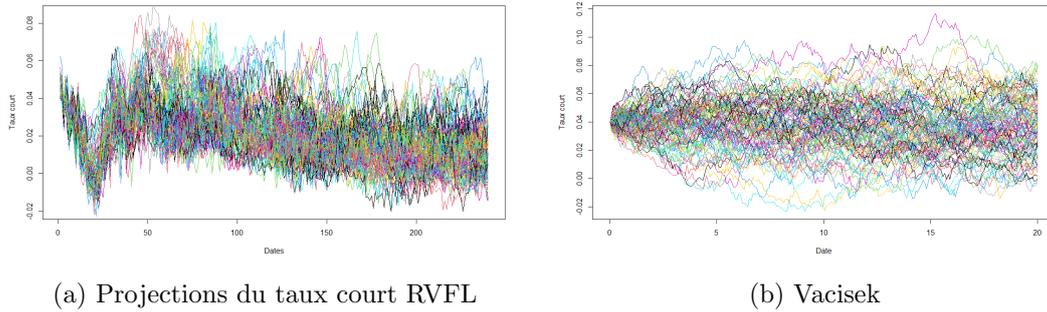


FIGURE 2 : Évolution du taux court pour 100 simulations sur 20 ans

Les deux études mettent en évidence la capacité du modèle RVFL à appréhender les périodes de crise tout en conservant des valeurs relativement proches de celles des modèles classiques. L'analyse prédictive ainsi que la comparaison avec des modèles paramétriques classiques confirment la pertinence du modèle RVFL développé.

Étude des quantiles

Une troisième et dernière analyse sur les projections historiques est réalisée. La métrique VaR (*Value-at-Risk*) est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la quantité considérée. Dans notre travail, la mesure est utilisée pour évaluer les quantiles des prix modélisés à partir des projections historiques concernant les actions et les obligations.

Dans la continuité de l'étude, nous allons observer la distribution (via des quantiles) des prix action dans un an pour les deux modèles. Cette fois-ci le prix initial est le dernier prix connu de l'historique, soit 121,65 €.

α	2,5%	5%	10%	50%	90%	95%	97,5%
<i>VaR RVFL Prix à 1 an</i>	101,89	108,01	111,29	124,61	137,84	142,82	146,41
<i>VaR BS Prix à 1 an</i>	110,20	112,83	116,10	127,67	140,50	143,87	147,16

TABLE 2 : Comparaison des *Value-at-Risk* sur les prix des actions pour les différents α considérés sur les prédictions à 1 an pour 1000 projections

Les quantiles confirment que le modèle non paramétrique propose une variance plus importante. Les moyennes des projections à 1 an sont proches : 128,15 pour BS contre 125,91 pour le modèle RVFL.

Afin d'analyser le comportement des courbes de taux généré par le modèle RVFL, les prix des obligations zéro-coupon (ZC) sont déterminés grâce à la courbe fournie par l'EIOPA (2023), au 31 mai 2023. Les quantiles des prix des obligations à maturité 2 ans sont comparés au prix de l'obligation ZC EIOPA.

α	2,5%	5%	10%	50%	90%	95%	97,5%
<i>VaR RVFL</i>	96,26	96,37	96,72	97,61	98,55	98,67	98,87
<i>Prix EIOPA ZC</i>	96,71						

TABLE 3 : Comparaison des *Value-at-Risk* sur les prix des obligations pour les différents α considérés pour 1000 projections sur la maturité 2 ans ayant une moyenne de 97,61 €

Les quantiles de prix des obligations ainsi que leur moyenne sont conformes au prix de l'obligation basé sur le taux de l'EIOPA. Le prix des ZC EIOPA est bien compris dans l'intervalle de valeurs proposé par le RVFL. De plus, l'augmentation de la maturité s'accompagne d'une augmentation de la volatilité des prix, marquée par des quantiles de plus en plus éloignés les uns des autres d'après une analyse complémentaire.

Pour conclure, les résultats pour les actions ou les obligations montrent que le RVFL produit des prix en cohérence avec des modèles classiques tout en modélisant des périodes plus volatiles. Il serait a priori plus proche de la réalité, ce qui est finalement recherché pour un GSE historique. Le modèle RVFL répond bien aux critères attendus.

Risque-neutralisation du GSE

Afin d'obtenir un GSE risque-neutre, une méthode de risque neutralisation sera retenue et appliquée aux résultats obtenus via le GSE historique.

Plusieurs méthodes de risque-neutralisation ont été testées. Seule l'approche fournissant les meilleurs résultats est présentée ci-dessous. Pour les taux, nous sommes revenus à la définition de la mesure de probabilité risque-neutre tandis que pour les actions nous avons reconstruit le prix du marché du risque grâce à des estimateurs.

Risque-neutralisation des taux

Par définition, la probabilité risque-neutre veut que chaque actif rapporte en moyenne le taux sans risque.

Un taux sans risque de référence a été choisi. Les taux ont été ajustés pour chaque maturité en y ajoutant le taux sans risque, assurant ainsi que les simulations pour chaque maturité génèrent en moyenne ce même rendement.

Risque-neutralisation du rendement action CAC40

La méthode visant à passer des trajectoires historiques à des trajectoires risque-neutres a été inspirée du concept de changement de mesure de Black-Scholes. Le modèle RVFL utilisé est non-paramétrique, ce qui implique le calcul d'estimateurs pour « reproduire » le prix du marché du risque BS. Ce dernier est défini comme l'excès de rendement par unité de volatilité. Par la suite, les rendements sont ajustés de sorte à retomber en pratique sur la volatilité implicite à 12 mois (pour que les simulations reproduisent bien le prix des options à 12 mois comme demandé par l'ACPR (2013)).

Résultats des faisceaux risque-neutres

L'évolution des prix action du CAC40 sous la mesure historique et les faisceaux risque-neutres construits auparavant sont tracés. Nous faisons l'hypothèse qu'à la dernière date connue, soit le 31 mai 2023, une action du CAC40 a une valeur de 100.

Les simulations sont tracées pour comparer l'allure de l'évolution des prix d'une action sur 20 ans. Pour l'approche risque-neutre, l'intervalle de prix est plus étroit et moins élevé. Le rétrécissement de la largeur des faisceaux est lié aux retraitements effectué lors de la risque-neutralisation, diminuant la volatilité.

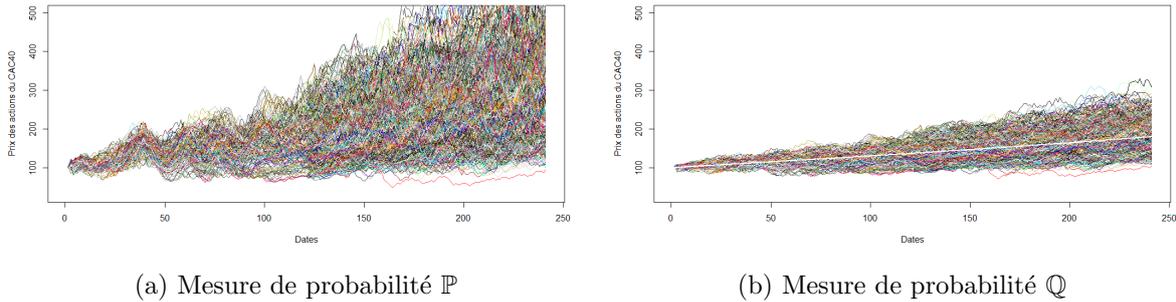


FIGURE 3 : Prix d'une action du CAC40 pour les 1000 projections sur l'horizon 20 ans de pas mensuel

L'évolution du prix d'un actif revalorisé mensuellement au taux sans risque est tracée en blanc. La trajectoire sur l'horizon de projection est très similaire aux faisceaux risque-neutres. Ce qui est en cohérence avec notre approche, l'idée étant que tous les actifs en moyenne rapportent le taux sans risque.

Hypothèses de martingalité et *market-consistent*

Tests de martingalité

La probabilité risque-neutre rend les actifs actualisés martingales. Ce qui signifie dans notre cas que les prix actualisés devraient être des martingales par rapport à la construction risque-neutre réalisée dans la section précédente. Les tests pour les actions et pour les déflateurs en temps discret sont respectivement :

$$\forall j, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{indice}_i(j) \times df_i(j) = 1 \quad \text{et} \quad \forall j, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N df_i(j) - ZC\left(\frac{j}{12}\right) = 0, \quad (1)$$

avec N le nombre de simulations et j les dates discrètes de projection.

La distribution montre un léger biais vers la droite, notamment pour les actions. Une faible détérioration au fil du temps est observée, due au caractère multiplication de la projection.

En somme, les deux tests confirment l'hypothèse de martingalité du GSE sous \mathbb{Q} .

Comparatif avec des prix d'options sur CAC40

Le GSE doit également être construit de manière à être « instantané », être mis en place pour être en phase avec la réalité des marchés. L'approche *market-consistent* répond à ce besoin en imposant un cadre dont les hypothèses sont cohérentes avec les prix du marché. Sur les actions, une note de l'ACPR existe, les simulations se doivent de reproduire le prix des options à 12 mois (ACPR, 2013).

Les valeurs d'un *call* et d'un *put*, de maturité (ou ténor) un an, à la monnaie sont calculées à l'aide des faisceaux risques neutres et des déflateurs.

Suite aux calculs effectués, les prix des options vanilles issus des faisceaux risque-neutres diffèrent nettement des prix des options selon le modèle de Black-Scholes. Le processus de risque-neutralisation ne semble pas adapter pour reproduire les prix des options sur action. Le modèle n'ayant pas été entraîné sur des données relatives à des produits dérivés, ne semble pas naturellement intégrer cette notion.

Conclusion

Ce mémoire a démontré la possibilité de construire un générateur de scénarios économiques à partir d'un modèle de *Machine Learning*. Les résultats pour les actions et les obligations indiquent que le modèle RVFL projette des valeurs en cohérence avec des modèles conventionnels, tout en présentant des fluctuations plus marquées. Le modèle RVFL répond aux critères attendus pour un GSE historique, visant à projeter le plus fidèlement possible à la réalité. Cependant, le processus de risque-neutralisation nécessite encore des améliorations. En effet, le test consistant à comparer les prix des options vanilles construites à partir des faisceaux risque-neutre avec ceux des options BS est perfectible, avec une disparité entre les prix observés. Bien que le volet de risque-neutralisation ne soit pas au centre du mémoire, son inclusion ici représente une extension visant à encadrer la réflexion et à souligner les points à prendre en considération lors de futurs travaux.

Synthesis note

The forward-looking nature of the European Solvency II Directive requires the use of economic scenario generators. According to ACPR (2020) (Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution), an economic scenario generator (ESG) is a set of models (rates, equities, credit spreads, inflation, etc.) used to simulate possible financial market scenarios, which have an impact on the value and performance of the insurance company's assets.

There are two types of GSE, each defined according to a specific probability measure: historical probability and risk-neutral probability. The nature of the probability measure used determines the different uses of GSE. Risk-neutral probability is used to assess the value of insurance commitments, notably in the calculation of the Best Estimate under Solvency II. On the other hand, the historical measure is used to anticipate scenarios in risk management or to project the insurer's financial activity, based on past data.

Traditionally, insurers have used economic scenario generators based on parametric diffusion models. Although useful and widely used, these models have intrinsic limitations when it comes to accurately reproducing past events, particularly those of extreme severity or rare frequency. Indeed, parametric models are often built on the basis of simplified assumptions, which can make them less flexible in capturing the full variability and complexity of real data. As a result, these models can sometimes underestimate or overestimate risks, compromising their ability to provide accurate forecasts and assessments.

Furthermore, the distribution model used by insurers for the historical GSE is not necessarily the same as that used for the risk-neutral GSE. However, it is conceivable that a single GSE could be used for both valuation and projection, thus ensuring greater consistency. The link between the two probability measures can be achieved by introducing the notion of the market price of risk. However, this approach depends on the definition of parametric models representing risk factors.

In this thesis, an unconventional approach will be explored: a non-parametric model based on a Machine Learning method, more precisely the RVFL (Random Vector Functional Link) neural network, with the aim of building a historical GSE. The method's ability to capture and reproduce the complex and volatile behavior of financial factors will then be measured, offering a better representation of economic scenarios.

A risk-neutralization method will also be proposed to generate a historical and risk-neutral GSE from the same model. This approach would ensure greater consistency in calculations, as it would be used for both valuation and projection. Various risk-neutralization criteria will be evaluated to ensure the reliability of the resulting projections.

Setting up non-parametric historical GSE

Before we can apply the RVFL model, it is essential to prepare and rework the multivariate time series (MTS), which will serve as a training and test dataset for our model.

A study of the charts published by the ACPR on the asset mix of French insurers, in compliance with the European Solvency II directive, is used to identify the relevant data (ACPR, 2023). As part of the brief to propose an illustrative economic scenario generator, the focus is on two risk factors: rates and equities.

Multivariate time series

The data used to model risk factors are: CAC40 closing indices for equities and swap rates against EURIBOR 6M, also known as EUSA N, for interest rates.

Data restatements are necessary. For equities, linear interpolation is selected to fill in missing values, and indices are transformed into logarithms of discrete returns. For rates, a bootstrapping method taken from the Andersen and Piterbarg (2010) book is used to transform swap rates into spot rates. Then, in order to reduce the size of the rate data, the Nelson-Siegel method is used to extract the 3 principal components.

Both series have a monthly granularity and cover the same observation period, from January 31, 2001 to May 31, 2023, totalling over 22 years of history.

Machine Learning: the RVFL model

RVFLs are used to project time series with high correlations and large dimensions. They are therefore highly suitable for projecting a multivariate time series in the case of a GSE. Indeed, each risk factor modeled by a time series (univariate for equities or multivariate for rates) is highly correlated with the others. The model can then take this correlation into account in the learning phase without over-learning the data. The number of parameters and the presence of closed formulas mean that RVFL-type networks are easier and faster to calibrate than neural networks such as LSTM (Long Short Term Memory) or GAN (Generative Adverse Network). They are also easier to understand than the last two models.

Once the multivariate time series has been constructed, one of the key aspects is the choice of model used to project the data. This is a forward-propagating neural network, more precisely the RVFL with a hidden layer. The RVFL differs from a conventional single-layer forward-propagation neural network in two major respects: the direct link between inputs and outputs, and the quasi-random selection of elements in the RVFL's hidden layer. To improve flexibility in the covariance structure between predictors and outputs, Ridge regression is performed with two different regularization parameters on the input and transformed variables.

Hazard generation

A central and non-trivial point is to generate the hazard. The aim is to create several projections from the central scenario, in order to anticipate the different trajectories that risk factors may take over the projection horizon. Usually, the different dynamics are generated using a Brownian process to produce these variations, which is not the case with a Machine Learning method. This is why the Block Bootstrap method is used. For each projection, a Block Bootstrap is run. The residuals between the observed and predicted historical series are calculated to form a new STM (of residuals). Indices corresponding to the starting points of the block are generated, to which the length of the block is added in order to extract residuals per block from the STM. The blocks of residuals then increment the central scenario to obtain the projection.

Results of historical projections

Once the database and model have been developed, the aim is to project the multivariate time series of equity returns and interest rates over a 20-year horizon. Various analyses are carried out to assess the relevance of the elements constructed.

Predictive analysis with the VAR model

A predictive analysis has been carried out upstream to assess whether the model is capable of capturing trends and making robust predictions. A comparison is made with a classic time series model: the VAR model. The STM is split into two parts: a training sample and a test sample made up, respectively, of 75 % and 25 % of the total sample. After training the two models, the predictive power of each model is measured by RMSE (Root Mean Square Error) and MAE (Mean Absolute Error). These calculations are performed for the logarithm of the equity return and the long rate (first Nelson-Siegel component).

<i>Error measurement</i>	RMSE Stock	MAE Stock	RMSE Long rate	MAE Long rate
<i>RVFL</i>	5,16	4,03	0,36	0,30
<i>VAR</i>	5,59	4,34	0,84	0,71

Table 4: Comparison of error measures for equities and long rates on the test sample

The results of the two error measures, RMSE and MAE, converge towards the same conclusion: the RVFL model outperforms the VAR model. However, it should be noted that the average prediction error for equities is higher, which can be attributed to the volatile nature of equities.

Comparison of the RVFL model with parametric models

The RVFL model demonstrated its predictive powers against the VAR model on the test sample. A cross-validation was carried out to determine the hyperparameters that minimize the prediction error. The STM is then projected over the next 20 years, with a monthly step. Projections for the CAC40 and short rates were compared with the Black-Scholes (BS) and Vasicek models respectively.

To do this, the price evolution of CAC40 shares is calculated using log-return simulations. For the price trend, we assume that on the last known date, May 31, 2023, a CAC40 share has a value of 100.

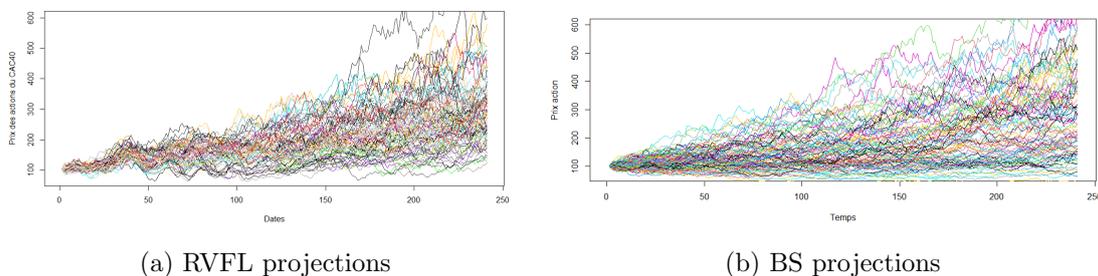


Figure 4: Price projection of 100 CAC40 simulations over 20 years

Share prices double or triple at the very least, being rather realistic. The predictions of the Machine Learning model seem more volatile than those of the Black-Scholes (BS) model, which is notorious for not modeling crisis periods well.

For rates, the two methods produce similar projections in terms of value intervals, but also present a central trajectory with jumps, due to the intrinsic characteristics of the model (central scenario to which the hazard is added).

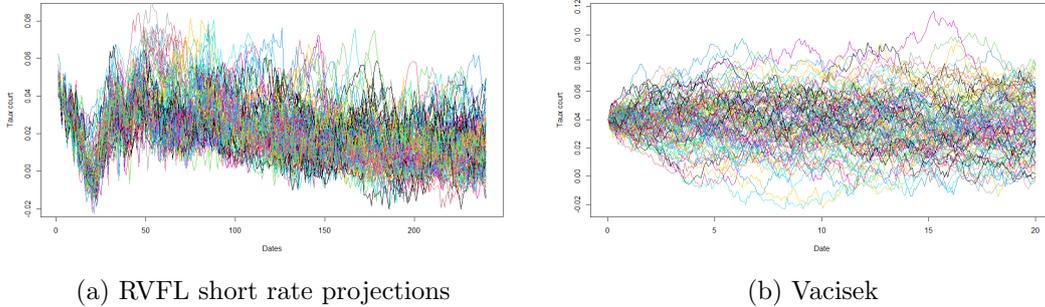


Figure 5: Evolution of the short rate for 100 simulations over 20 years

Both studies highlight the RVFL model’s ability to handle periods of crisis while maintaining values relatively close to those of conventional models. Both the predictive analysis and the comparison with conventional parametric models confirm the relevance of the RVFL model developed.

Quantile study

A third and final analysis is performed on historical projections. The VaR metric (Value-at-Risk) is the quantile of order $1 - \alpha$ of the quantity considered. In our work, the metric is used to evaluate the quantiles of prices modeled from historical projections for stocks and bonds.

Continuing the study, we’ll look at the distribution (via quantiles) of share prices in one year’s time for both models. This time, the initial price is the last known historical price, i.e. 121,65 €.

α	2,5%	5%	10%	50%	90%	95%	97,5%
<i>VaR RVFL 1-year price</i>	101,89	108,01	111,29	124,61	137,84	142,82	146,41
<i>VaR BS 1-year price</i>	110,20	112,83	116,10	127,67	140,50	143,87	147,16

Table 5: Comparison of Value-at-Risk on stock prices for the different α considered on 1-year predictions over the 1000 simulations

The quantiles confirm that the non-parametric model proposes a larger variance. The averages of the 1-year projections are close: 128,15 for BS versus 125,91 for the RVFL model.

In order to analyze the yield curve behavior generated by the RVFL model, zero-coupon (ZC) bond prices are determined using the curve provided by EIOPA EIOPA (2023), as at May 31, 2023. The quantiles of the 2-year bond prices are compared with the EIOPA ZC bond price.

α	2,5%	5%	10%	50%	90%	95%	97,5%
<i>VaR RVFL</i>	96,26	96,37	96,72	97,61	98,55	98,67	98,87
<i>EIOPA ZC Price</i>	96,71						

Table 6: Comparison of the Value-at-Risk on bond prices for the different α considered over the 2-year maturity with an average over the 1000 simulations of 97,61 €

The bond price quantiles and their average are in line with the EIOPA rate-based bond price. The EIOPA ZC price is well within the range of values proposed by the RVFL. What’s more, as maturity

increases, so does price volatility, with quantiles increasingly far apart according to further analysis.

In conclusion, the results for equities and bonds show that RVFL produces prices consistent with conventional models, while modeling more volatile periods. It would a priori be closer to reality, which is ultimately what we're looking for in a historical GSE. The RVFL model meets the expected criteria.

GSE risk-neutralization

In order to obtain a risk-neutral GSE, a risk-neutralization method will be applied to the results obtained using the historical GSE.

Several risk-neutralization methods were tested. Only the approach providing the best results is presented below. For rates, we returned to the definition of the risk-neutral probability measure, while for equities we reconstructed the market price of risk using estimators.

Risk-neutralization of rates

By definition, risk-neutral probability means that each asset yields the risk-free rate on average.

A reference risk-free rate was chosen. The rates were adjusted for each maturity by adding the risk-free rate, thus ensuring that the simulations for each maturity generated the same return on average.

Risk-neutralization of CAC40 share performance

The method for moving from historical trajectories to risk-neutral trajectories was inspired by Black-Scholes' concept of measurement change.

The RVFL model used is non-parametric, which involves calculating estimators for the market price of BS risk. The latter is defined as the excess return per unit of volatility.

Subsequently, returns are adjusted so that in practice they fall back on the implicit volatility at 12 months (so that the simulations reproduce the 12-month option price as required by the ACPR (2013)).

Results of risk-neutral projections

The evolution of CAC40 share prices under the historical measure and the risk-neutral bundles constructed earlier are plotted. We assume that on the last known date, May 31, 2023, a CAC40 share has a value of 100.

Simulations are plotted to compare the price trend of a stock over 20 years. For the risk-neutral approach, the price interval is narrower and lower. The narrowing in the width of the beams is linked to the restatements made during risk-neutralization, reducing volatility.

The evolution of the price of an asset revalued monthly at the risk-free rate is plotted in white. The trajectory over the projection horizon is very similar to the risk-neutral bundles. This is consistent with our approach, the idea being that all assets, on average, earn the risk-free rate.

Martingality and market-consistent assumptions

Martingality tests

Risk-neutral probability makes discounted assets martingales. This means in our case that discounted prices should be martingales with respect to the risk-neutral construct performed in the previous section. The tests for equities and for discrete-time deflators are respectively :

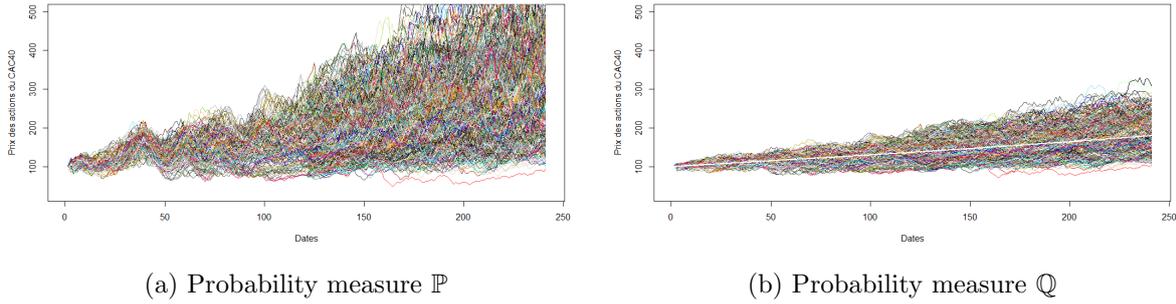


Figure 6: Price of a CAC40 share for 1000 projections over a 20-year horizon at monthly intervals

$$\forall j, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N index_i(j) \times df_i(j) = 1 \quad \text{and} \quad \forall j, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N df_i(j) - ZC\left(\frac{j}{12}\right) = 0, \quad (2)$$

with N the number of simulations and j the discrete projection dates.

The distribution shows a slight rightward bias, especially for equities. A slight deterioration over time is observed, due to the multiplying nature of the projection.

In short, both tests confirm the GSE martingality hypothesis under \mathbb{Q} .

CAC40 options price comparison

The GSE must also be built to be “instantaneous”, to be set up to be in phase with market reality. The market-consistent approach meets this need by imposing a framework whose assumptions are consistent with market prices. In the case of equities, simulations must reproduce 12-month option prices (ACPR, 2013). The values of a call and a put, with a maturity (or tenor) of one year, at the money are calculated using risk-neutral bundles and deflators.

Our calculations show that vanilla option prices derived from risk-neutral bundles differ markedly from Black-Scholes option prices. The risk-neutralization process does not appear to be suitable for reproducing stock option prices. As the model has not been trained on derivative data, it does not seem to naturally incorporate this notion.

Conclusion

This thesis demonstrated the possibility of building an economic scenario generator from a *Machine Learning* model. Results for equities and bonds indicate that the RVFL model projects values consistent with conventional models, while exhibiting more pronounced fluctuations. The RVFL model meets the criteria expected of a historical GSE, aiming to project reality as faithfully as possible. However, the risk-neutralization process still requires improvement. Indeed, the test consisting in comparing the prices of vanilla options constructed from risk-neutral bundles with those of BS options is perfectible, with a disparity between the observed prices. Although the risk-neutralization component is not the focus of the brief, its inclusion here represents an extension designed to frame thinking and highlight points for consideration in future work.

Remerciements

La réalisation de ce mémoire n'aurait pas été possible sans la contribution de plusieurs personnes à qui je souhaite témoigner toute ma gratitude.

Un grand merci à mon directeur de mémoire, Frédéric Planchet, pour ce sujet novateur, ces idées et qui à toujours su se montrer disponible, que ce soit pour de simples questions, des explications bien plus complexes ou des relectures.

Je tiens à adresser toute ma reconnaissance à Thierry Moudiki, mon tuteur académique qui a été plus que présent tout au long de ce travail. Il a su me transmettre ses connaissances et à toujours su trouver des solutions aux problèmes se présentant. Merci.

Je voudrais remercier toute l'équipe Prim'Act qui a été d'un grand soutien tout au long de ce mémoire. Merci à Alva, Jean-Kolbe, Mathilde, Matthieu, Paul, Sébastien et Victor pour leurs idées ou relectures.

Je souhaite remercier la formation de Dauphine pour la qualité des enseignements dispensés.

Enfin j'aimerais exprimer ma gratitude envers mon compagnon qui a su m'aider et me conseiller ainsi que mes proches pour leur soutien inconditionnel.

Table des matières

Résumé	3
Abstract	4
Note de Synthèse	5
Synthesis note	13
Remerciements	19
Table des matières	21
Acronymes	23
Introduction	25
1 Mesures de probabilité dans Solvabilité II	27
1.1 Double point de vue pour les assureurs	27
1.2 État de l’art des GSE	35
1.3 Une approche non-paramétrique	39
2 Construction d’un GSE historique non-paramétrique	49
2.1 Base de données : retraitement des séries temporelles	49
2.2 <i>Machine Learning</i> et GSE : implémentation du modèle RVFL	60
3 Modèle RVFL : projections historiques	73
3.1 Analyse de la performance du modèle	73
3.2 Comparaison avec des modèles paramétriques et interprétations	78
3.3 Étude de la <i>Value-at-Risk</i>	87

3.4	Limites et perspectives	90
4	Modèle RVFL et risque-neutralisation : projections risque-neutres	91
4.1	Prix du marché du risque	91
4.2	Risque-neutralisation du modèle	94
4.3	Les tests et limites de l'approche	102
	Conclusion	119
	Bibliographie	121
A	Annexes	125
A.1	Le modèle VAR	125

Acronymes

ACPR : Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution

AOA : Absence d'opportunités d'arbitrage

BE : *Best Estimate*

CAC : Cotation Assistée en Continu

EIOPA : *European Insurance and Occupational Pensions Authority*

EURIBOR : *Euro Interbank Offer Rate*

GSE : Générateur de scénarios économiques

ML : *Machine learning*

OA : Opportunités d'arbitrage

ORSA : *Own Risk and Solvency Assessment*

RN : Risque-neutre

RVFL : *Random Vector Functional Link*

SII : Solvabilité II

SCR : *Solvency Capital Requirement*

STM : Série temporelle multivariée

ZC : Zéro-coupon

Introduction

Depuis le 1er Janvier 2016, la directive Solvabilité II a été mise en place pour maintenir et améliorer la stabilité financière des compagnies d'assurances au sein de l'Union Européenne. Le poids de ces sociétés étant considérables dans l'économie européenne, il est nécessaire d'introduire des règles qui assurent la stabilité de tout un système. Son objectif est simple : mieux protéger les consommateurs en imposant aux assureurs et aux réassureurs un cadre prudentiel strict. En application de l'article 45, chaque entreprise d'assurance doit mettre en place un outil de modélisation prospective qui a pour vocation d'évaluer ses risques internes et sa solvabilité, communément appelé ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*). Un des points majeurs de ce dispositif consiste à projeter l'évolution des facteurs de risques financiers et économiques. Pour ce faire, un générateur de scénarios économiques est nécessaire.

D'après l'ACPR (2020) (Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution), un générateur de scénarios économiques (GSE) est un ensemble de modèles (taux, actions, spreads de crédit, inflation, etc.) permettant de simuler des scénarios d'évolution possibles des marchés financiers, qui ont une incidence sur la valeur et les performances de l'actif de l'organisme d'assurance.

La manière de projeter les facteurs de risque dépend de l'usage qui va être fait du GSE et conduira à définir les notions de probabilité historique et probabilité risque-neutre, notées respectivement \mathbb{P} et \mathbb{Q} dans la suite du texte. La directive Solvabilité II indique implicitement l'utilisation d'un GSE sous probabilité risque-neutre pour le calcul du *Best Estimate*, et sous probabilité historique pour l'évaluation interne des risques et de la solvabilité (ORSA). Le module financier de ce rapport nécessite l'utilisation d'un GSE dit « historique ».

Par ailleurs, l'utilisation des méthodes de *Machine learning* (ML) se démocratise de plus en plus au fil des années au sein du secteur assurantiel. Elles sont par exemple utilisées pour l'optimisation du parcours client, la gestion et l'anticipation du risque ou encore la détection de fraudes. Un GSE historique non-paramétrique construit à l'aide de méthodes de *Machine Learning* peut sembler prometteur. Cette démarche pourrait être une solution pour pallier aux limites des modèles paramétriques, notamment pour reproduire des événements passés.

Les assureurs soumis à la directive européenne utilisent généralement deux GSE. Il est alors envisageable de penser qu'un GSE puisse être utilisé à la fois pour la valorisation et la projection, ce qui garantirait une cohérence plus significative. Le passage d'une mesure à l'autre est possible en introduisant la notion du prix du marché du risque. Mais cette approche repose sur la définition des modèles paramétriques modélisant les facteurs de risque dans un cadre classique.

Après une mise en contexte dans le premier chapitre, le mémoire aura pour objectif de déterminer si l'approche envisagée est pertinente, en construisant un GSE historique basé sur un modèle de *Machine learning* établi sur des réseaux de neurones quasi-aléatoires, plus précisément le *Random Vector Functional Link* (RVFL). Les projections historiques seront alors analysés dans un troisième chapitre pour mesurer leurs avantages par rapport à un modèle usuel. Une seconde phase, plus expérimentale,

aura pour but d'explorer des moyens pour risque-neutraliser le générateur, de manière à obtenir un seul outil. Les résultats obtenus sous les deux probabilités permettront d'aboutir à une conclusion.

Chapitre 1

Contexte et problématiques liés aux deux probabilités contraintes dans la directive Solvabilité II

1.1 Double point de vue pour les assureurs

L'assurance est une opération pour laquelle une partie, l'assureur, s'engage à payer une prestation au profit d'une autre partie, l'assuré, en cas de réalisation d'un évènement aléatoire, souvent nommé *risque*, en contrepartie d'une contribution pécuniaire, la *prime*.

Les assureurs doivent faire face à ce que l'on appelle le cycle de production inversé, c'est à dire déterminer la prime à verser en évaluant le coût des évènements avant même que ces derniers ne se soient produits. Pour se faire, ils doivent mettre en place des techniques pour les estimer et ceci, le plus fidèlement possible avec la réalité (ou plus exactement avec le futur) afin de couvrir ces aléas. D'après

l'économiste Philippe TRAINAR (2008), « Les enjeux en matière stabilité financière ne se limitent pas à la solvabilité des compagnies d'assurance et de réassurance, ils touchent aussi au financement de l'économie et à la capacité de celle-ci à absorber des chocs financiers importants ».

En 2020, l'activité d'assurance-vie constitue environ 75 % du marché français assurantiel (en termes de cotisations). La gestion est donc centrale pour l'économie du pays afin de conserver une stabilité financière. Pour l'économiste, ni l'état ni les entreprises ne pourraient se substituer aux assureurs pour leur grand investissement en actions par exemple. Seul des investisseurs étrangers seraient une solution envisageable mais les conséquences économiques seraient catastrophiques selon lui.

En 2008, année de la rédaction du papier (TRAINAR, 2008), l'auteur liste les problèmes économiques liés à l'évaluation du bilan ainsi que de la justesse des normes comptables. Le premier point est que les passifs étant partiellement virtuels, longs, illiquides et sub-additifs implique la difficulté à les évaluer. A cause du cycle inversé (principe de base) propre au secteur de l'assurance, le montant de l'engagement est nul tant que l'évènement ne soit pas produit donc virtuel. Mais d'après les lois statistiques, la valeur des engagements ne serait pas nulle au terme du contrat. Ils sont alors dénommés passif partiellement virtuel. Le caractère long des passifs d'assurance a deux explications : la viscosité élevée des passifs et les engagements sur du long terme. Pour un contrat d'assurance-vie, les assurés ne peuvent pas réellement racheter leurs contrats quand ils le souhaitent à cause des pénalités qu'ils devront payer et des charges fiscales. De plus, un délai de plusieurs semaines est observé pour le traitement du rachat à l'inverse des banques où celui-ci se compte en heure pour les dépôts et sans aucune pénalité. En

moyenne un contrat d'assurance vie a une durée de 5 à 6 ans (avec option de rachat). Des passifs longs doivent donc être mesurés, beaucoup plus complexes que des passifs courts. Les potentiels changements économiques et évolution de comportements doivent être pris en compte, généralement corrélés.

Toutes ces contraintes liées à l'évaluation du bilan sont toujours d'actualité en 2023. D'où la nécessité de générer des scénarios qui permettront de mieux évaluer et également mieux maîtriser les risques auxquels la compagnie est soumise.

L'idée de la section suivante est de comprendre les problématiques liées à la valorisation des engagements, au calcul du SCR et la mise en place de l'ORSA induites par la directive européenne, et en particulier d'où provient la nécessité d'un changement de probabilité.

1.1.1 Premier point imposé : calcul des provisions techniques en *Best Estimate*

En assurance, les référentiels comptables actuellement utilisés se basent sur une valorisation du bilan de manière cohérente avec la valeur de marché : de façon *market-consistent*. Par exemple, la norme IFRS 17, le référentiel MCEV, ou encore le référentiel prudentiel Solvabilité II peuvent être cités, sur lequel nous nous concentrerons pour comprendre les problématiques que rencontrent les assureurs.

Comme énoncé en introduction, les assurances tiennent un rôle majeur dans l'économie nationale. La directive européenne a pour but de protéger les assurés. La vision comptable retenue par une grande majorité des standards locaux a dû être adaptée aux nouvelles demandes de l'Union Européenne. En France, nous parlons de comptabilité historique mais également de comptabilité en norme française.

La comptabilité en coût historique a pour philosophie de valoriser les actifs et les passifs à leur coût d'entrée ou coût amorti. Pour les assureurs et les réassureurs, il s'agit d'une méthode qui permet à leur bilan de refléter ce qu'ils connaissent. En effet, chacun a conscience de ce qu'il possède, de ses richesses.

En revanche, le bilan sous SII doit avoir une vision prospective. Contrairement à la précédente vision comptable, ils prévoient sans forcément avoir, d'où la vision dite prospective : ils se projettent dans le temps. Le bilan sous SII a été mis en place pour être plus en phase avec la réalité des marchés et plus « instantané ». Une des finalités de ce bilan est d'obtenir le ratio de couverture des fonds propres par le capital requis :

$$\frac{\text{Fonds Propres}}{\text{Capital de Solvabilité Requis}}$$

Grâce à cette quantité calculée dans le pilier 1 de la directive, les assureurs pourront mettre en place des méthodes pour répondre à cette exigence de capital. Notamment dans le pilier 2 et plus particulièrement au sein de l'ORSA, les risques majeurs ainsi que leurs dépendances et l'influence de ces derniers sur le ratio de couverture seront analysés.

La directive européenne Solvabilité II, guidée par la standardisation européenne, impose un bilan dit « prudentiel » ou « économique ». Une partie des réponses de valorisation de l'actif et du passif se trouve dans le Chapitre VI Section 1 Article 75 de la Directive (PARLEMENT EUROPÉEN ET CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE, 2009) :

« Les États membres veillent à ce que, sauf indication contraire, les entreprises d'assurance et de réassurance valorisent leurs actifs et leurs passifs comme suit :

a) les actifs sont valorisés au montant pour lequel ils pourraient être échangés dans le cadre d'une transaction conclue, dans des conditions de concurrence normales, entre des parties informées et consentantes ;

b) les passifs sont valorisés au montant pour lequel ils pourraient être transférés ou réglés dans le cadre d'une transaction conclue, dans des conditions de concurrence normales, entre des parties informées et consentantes. »

Valorisation de l'Actif :

La valorisation économique s'obtenant avec les valeurs de marché disponibles ou de manière cohérentes avec le marché, dite *market consistent*, les actifs sont évalués de la sorte et non plus en valeur d'achat i.e. *marked-to-market*. Même si l'idée de valoriser des actifs semble triviale, les assureurs doivent s'assurer que le marché sur lequel est coté l'actif est suffisamment profond, liquide et transparent. Dans le cas échéant, la valorisation des actifs financiers concernés se fait via un modèle financier (théorique) semblable au calcul du *Best Estimate* (concept défini par la suite). Pour ce faire, les flux futurs de cet actif sont évalués et actualisés pour avoir son prix aujourd'hui à la date $t = 0$.

Valorisation du Passif :

L'article 77 de la directive précédemment citée (PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE, 2009) spécifie le calcul des provisions techniques comme suit :

« [...] lorsque de futurs flux de trésorerie liés aux engagements d'assurance ou de réassurance peuvent être, de manière fiable, répliqués au moyen d'instruments financiers pour lesquels il existe une valeur de marché fiable observable, la valeur des provisions techniques liées à ces futurs flux de trésorerie est déterminée à l'aide de la valeur de marché de ces instruments financiers. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de procéder à un calcul séparé de la meilleure estimation et de la marge de risque. »

Le prix des passifs d'assurance n'étant pas observable sur un lieu d'échange, ces derniers ne sont pas des biens échangeables sur les marchés financiers. Il n'existe ni marché primaire, ni secondaire pour vendre ou acheter des contrats d'épargne euros par exemple.

Ce que la directive a retenu pour répondre à ce problème tout en restant cohérent avec les observations réalisées sur les marchés financiers, repose sur une théorie datant des années 1990. D'après plusieurs sources, ce sont BRIYS et DE VARENNE (1994) qui ont remarqué la ressemblance entre les flux de contrat intégrant une participation aux bénéficiaires (contrat épargne euros par exemple) à des flux de produits dérivés. Entre autres, pour l'option de rachat d'un contrat, on peut modéliser ce flux à l'aide d'une option de vente américaine (i.e. exerçable à tout moment entre la date d'émission et la maturité). Finalement, les engagements seraient évalués en les répliquant, à l'aide de produits dérivés, i.e. par rapport à la valeur de marché du portefeuille répliquant.

Provisions Techniques calculables en Valeur de Marché = Valeur de marché
--

Néanmoins, tous les engagements ne sont pas répliquables. Dans ce cas, l'approche retenue pour le référentiel comptable sera de considérer les *cash-flows* futurs nécessaires pour le calcul du *Best Estimate* en y ajoutant une marge de risque. Cet angle est décrit dans la suite de la directive article 77 :

« La valeur des provisions techniques est égale à la somme de la meilleure estimation et de la marge de risque [...]. »

Sachant que meilleure estimation est le terme français pour désigner le *Best Estimate*, cela se traduit d'un point de vue mathématique comme :

Provisions Techniques non calculables en Valeur de Marché = Provisions Techniques calculables en <i>Best Estimate</i> = <i>Best Estimate</i> + Marge de Risque

→ Les provisions *Best Estimate*

La directive précise dans l'article 77 :

« La meilleure estimation correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents. »

On peut traduire cette phrase par la formule suivante :

$$Best\ Estimate = \mathbb{E} \left(\sum_k \delta_k Flux_k \right)$$

avec :

- \mathbb{E} est une espérance mathématique ;
- δ_k est le facteur d'actualisation de la k-ème année ;
- Les $Flux_k$ sont « toutes les entrées et sorties de trésorerie nécessaires pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pendant toute la durée de ceux-ci ». Ce sont les engagements de l'assureur en prenant en compte le coût de gestion.

Cette formule n'est pas complètement correcte. Comme vu précédemment, l'assureur utilise une technique de valorisation répliquable ou non-répliquable. Mais il existe un lien également entre les risques auxquels fait face l'assureur : on dit qu'ils sont mutualisables ou non mutualisables. La meilleure estimation devient alors :

$$Best\ Estimate = \mathbb{E}^{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}} \left(\sum_k \delta_k Flux_k \right)$$

où :

- Les passifs mutualisables non répliquables sont quantifiés dans un cadre statistique ;
- Les passifs répliquables non mutualisables sont évalués grâce à la finance de marché c'est à dire avec la probabilité risque-neutre.

Cette explication et le schéma récapitulatif (Figure 1.1) sont tirés de l'article ARMEL et PLANCHET (2020).

	Risque	Mutualisable	Non mutualisable
Valorisation			
Répliquable		Globalement négligeables : quelques cas de titrisation	Finance de marché
Non répliquable		L'assurance « classique »	Perte d'indépendance dans les risques d'assurance, risques de modèle, erreurs de répliquations, etc.

FIGURE 1.1 : Tableau croisé des liens entre risque et méthode de valorisation

→ La Marge de Risque

Un coussin de sécurité, ou plutôt une marge supplémentaire, est ajouté aux provisions estimées en meilleure estimation. Il a pour objectif de capter, pour les flux de passifs non-réplicables, les aléas du marché financier ou bien les erreurs liés aux modèles ou encore une marge de sécurité. Le texte de loi indique dans l'article 77 que « La marge de risque est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance ». La marge de risque ne sera pas détailler dans ce paragraphe. Pour plus d'informations, le lecteur peut se référer à l'article 37 de la directive précédemment citée (PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE, 2009).

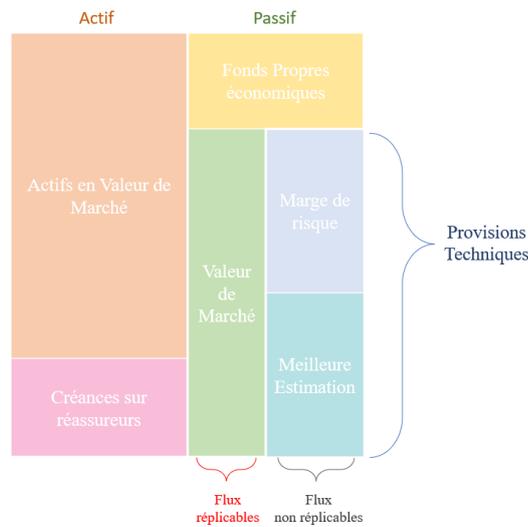


FIGURE 1.2 : Schéma du bilan sous Solvabilité II

Il est important de préciser que les flux de passifs répliquables sont peu fréquents en pratique. De plus, la marge de risque n'est pas le point central de ce mémoire. En effet, une application envisageable (lors d'un futur travail) pourrait être le calcul d'un BE, la marge de risque n'étant pas un élément indispensable pour l'étude.

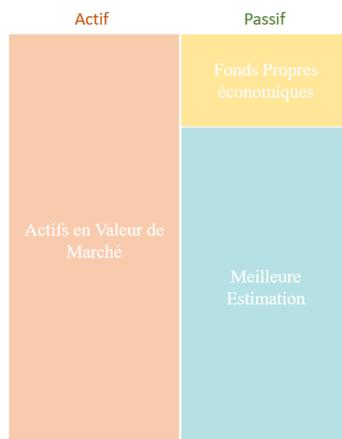


FIGURE 1.3 : Schéma du bilan sous Solvabilité II simplifié

Notons que la valorisation bilantielle s'effectue en run-off, i.e. sans considération de nouvel entrant.

Explication de la notion risque-neutre et justification d'utilisation

L'approche de valorisation décrite dans la directive suggère l'utilisation d'une probabilité risque-neutre usuellement employée dans la théorie financière. La notion de neutralité s'est développée dans les années 1970 avec notamment l'essor de méthodologies tirées de modèles mathématiques pour évaluer des produits dérivés.

Un produit dérivé est un contrat financier entre deux parties, un acheteur et un vendeur, basé sur le comportement d'un actif sous-jacent. Sa valeur dépendra de la valeur future du sous-jacent considéré. Le sous-jacent peut par exemple être : une action, un indice, une créance, une monnaie, un taux d'intérêt, une matière agricole ou un métal. Ces produits sont négociés sur des marchés de gré à gré ou sur des marchés organisés. Notons que 90 % des transactions sur les produits dérivés se déroulent bilatéralement entre deux parties (OOREKA, 2023).

D'après EL-KAROUI (2003-2004), le prix du produit dérivé devait être déterminé de sorte à ce que les deux parties se mettent d'accord, au vu des risques qu'elles supportent. Le vendeur a un risque lié à l'évolution du marché. Si le marché est haussier, le vendeur a un risque de vendre à un prix en dessous de sa valeur actuelle. Si un mouvement haussier se profile peu avant l'échéance, la maturité est aussi à craindre. L'acheteur, quant à lui, a un risque uniquement sur sa prime (le prix qu'il a payé). En effet, il ne veut pas perdre plus que le montant déboursé. Mais l'aléa sur le sous-jacent de l'option à maturité est la résultante d'un ensemble de petites variations quotidiennes observables. Il est alors possible de construire une dynamique correspondant au cours et réduire le risque final puisque le vendeur peut toujours vendre ou acheter d'autres options, financé avec la prime.

En 1973, Black, Scholes et Merton définissent le prix d'un produit dérivé comme « le prix de sa couverture ». Cette proposition rend les acteurs insensibles à la tendance du marché puisqu'ils sont couverts même dans les cas les plus extrêmes. Pour se faire, le processus de valorisation fonctionne par réplication en Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA). On dit qu'un marché financier comporte une opportunité d'arbitrage s'il est possible de réaliser un gain sans risque à partir d'un investissement initial nul. On parle de condition d'AOA s'il n'existe aucune opportunité d'arbitrage sur ce marché financier. De plus, si deux stratégies financières ont la même valeur à la date T sur un marché financier qui vérifie la condition d'AOA alors les deux stratégies auront le même prix à n'importe quelle date $t \in [0, T]$.

Ce résultat implique que si les flux d'un produit dérivé sont répliqués à l'aide d'actifs financiers alors le prix de ce produit dérivé sera égal à la valeur du portefeuille répliquant où valeur terminale du produit dérivé et du portefeuille répliquant coïncide. Comme indiqué, cette méthodologie d'évaluation nécessite deux hypothèses : l'AOA et la possibilité de construire un portefeuille répliquant et ceci pour n'importe quel produit dérivé, ce qui est la définition même des marchés complets.

Pour récapituler les éléments précédents :

- La condition d'existence d'une mesure de probabilité risque-neutre, notée \mathbb{Q} , est l'AOA ;
- Si la mesure de probabilité \mathbb{Q} existe et que le marché est complet alors on a bien l'unicité de la mesure risque-neutre \mathbb{Q} ;
- Si on dispose des hypothèses d'AOA et de complétude des marchés alors le prix à la date t du produit dérivé est égale à l'espérance conditionnelle sous \mathbb{Q} du cash-flow terminal du produit

dérivé, actualisé au taux sans risque, sachant l'information disponible.

En pratique, la probabilité \mathbb{Q} sera utilisée pour la génération de scénarios. Sous \mathbb{Q} les processus de prix actualisés vont être martingales ce qui implique l'AOA sur le marché financier (au moment du calibrage du GSE). En supposant la complétude des marchés le prix peut être évalué avec l'espérance conditionnelle sous \mathbb{Q} .

Comme la directive le préconise pour obtenir la meilleure estimation, la valeur actualisée des cash-flows futurs de passif est calculée sur la base de la courbe des taux sans risque avec un générateur de scénarios économiques sous la probabilité risque-neutre. D'après le point précédent et la technique utilisée pour valoriser la meilleure estimation, la provision *Best Estimate* à la date t peut être formulée comme suit :

$$Best\ Estimate_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}} \left(\sum_{k>t} \delta_k Flux_k | \mathcal{F}_t \right)$$

Où $\mathcal{F}_t, t > 0$ est une tribu contenant toute l'information disponible à la date $t > 0$. En pratique, le *Best Estimate* est déterminé à la date $t = 0$, pour le bilan de l'année en cours. Finalement, la formulation mathématique est :

$$Best\ Estimate_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}} \left(\sum_{k>0} \delta_k Flux_k \right)$$

En réalité, les assureurs ne calculent jamais directement une telle espérance : ils utilisent une méthode par simulation. Grâce à un générateur de scénarios économiques (GSE) sous la probabilité risque-neutre, ils vont produire un grand nombre de scénarios possibles qui vont avoir un impact sur les flux utilisés dans le calcul de la meilleure estimation. La notion de GSE sera développée dans la section suivante.

$$Best\ Estimate_0 \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{k>0} \delta_{k,i} Flux_{k,i}$$

avec :

$$\text{Un facteur d'actualisation : } \delta_{k,i} = e^{-\int_0^k r_s^i ds}.$$

Où r_s^i le taux court instantané dans s-années obtenu via la i-ème simulation du GSE risque-neutre. Dans le cas discret, on aurait $\delta_{k,i} = e^{-\sum_{s=0}^k r_s^i}$.

1.1.2 Deuxième exigence : estimation du SCR

Une fois le calcul de la meilleure estimation réalisé, le capital demandé par Solvabilité II, communément appelé *Solvency Capital Requirement (SCR)*, peut être déterminé. Deux approches sont alors envisageables :

- La formule standard avec l'utilisation de la matrice de corrélation donnée par l'EIOPA ;
- L'approche dite « Modèle interne » conseillée par l'EIOPA puisque la démarche est adaptée au portefeuille de l'assureur.

Dans ce mémoire, le principe du modèle interne sera brièvement introduit : calculer un quantile sur les pertes du portefeuille de la compagnie à horizon 1 an. Pour la formule standard, le lecteur

pourra trouver une documentation très riche sur le sujet, notamment dans de nombreux mémoires.

Le SCR est usuellement défini comme :

Le niveau de fonds propres à détenir en face des engagements de l'assureur pour faire face à une situation de ruine économique sur un horizon de 1 an.

3 notions fondamentales doivent être spécifiées pour la compréhension de la définition :

1. La ruine économique : État où la valeur de marché de l'actif est inférieure à la meilleure estimation des passifs ;
2. L'horizon d'une année impose de pouvoir disposer de la distribution des fonds propres économiques dans un an ;
3. Le seuil 99,5 % représente la probabilité de solvabilité requise, ce qui implique que la probabilité de l'évènement « Ruine économique » est dans ce cas inférieure à 0,5 %.

Il faut comprendre cette notion de SCR comme le montant que l'entreprise doit posséder pour se protéger des différents risques à horizon 1 an. Autrement dit, c'est la somme qui permettrait à l'entreprise de se couvrir des évènements dans 99,5 % des cas. Dans différents ouvrages, une équivalence est faite entre la probabilité que l'évènement se produise à 0,5 % de chance et le fait que l'évènement se produise une fois tous les 200 ans, ce qui rendrait la compagnie insolvable. Notons qu'il s'agit d'une affirmation approximative puisque nous n'avons pas un historique assez long de la solvabilité des assureurs (seulement une trentaine d'année).

Comme pour le calcul du *BE*, notre travail ne reposant pas sur le principe même du SCR, nous allons simplifier l'approche de ce dernier. Voici une des simplifications souvent utilisée :

$$\text{SCR}_0 = \underbrace{\text{FP}_0}_{\text{Fonds propres économiques initiaux}} - \underbrace{q_{0,5\%} \left(\overbrace{\delta_1}^{\text{Facteur d'actualisation à 1 an}} \cdot \text{FP}_1 \right)}_{\text{Surplus de capital à ajouter en } t=0}$$

Il apparaît clairement que la difficulté majeure est de déterminer le quantile 0,5% actualisé de la distribution des fonds propres à horizon 1 an : $q_{0,5\%}(\delta_1 \cdot \text{FP}_1)$. Ce quantile repose comme pour la valorisation de la meilleure estimation sur une méthode par simulation (Méthode de « type » Monte Carlo) car il peut être mis sous la forme d'un quantile d'une espérance conditionnelle. Mais cette fois-ci on aura besoin de manier deux couches de simulations : on parlera d'approche par Simulations imbriquées ou Simulations dans les simulations (SdS). Plusieurs scénarios générés par un GSE ou plutôt des GSE sont nécessaires :

1. Les simulations primaires (ou externes) sont réalisées avec un GSE sous probabilité historique pour tenir compte des facteurs de risque par rapport à un historique (plus réaliste). Les conditions de marché dans un an sont ainsi obtenues ;
2. Puis des simulations secondaires avec un GSE probabilité risque-neutre sont effectuées pour tenir compte du réalisé de première période. Les fonds propres économiques dans un an (valorisation) sont ainsi déterminés ;
3. Enfin, le SCR est estimé en calculant le quantile empirique associé à l'échantillon.

Pour l'estimation du SCR (dans le cas du modèle interne), une probabilité historique est également nécessaire, notée usuellement \mathbb{P} pour la simulation de scénarios. Cette mesure permet d'avoir une cohérence des résultats avec le passé puisque basée sur un historique de données.

1.1.3 Au delà du plan quantitatif, une analyse qualitative : l'ORSA

L'évaluation interne des risques et de la solvabilité (EIRS) plus connue sous le nom de *Own Risk and Solvency Assessment (ORSA)* a pour but la compréhension et l'appréhension des risques de l'assureur ainsi que de ses besoins de solvabilité. D'une manière plus concrète, ce processus prospectif peut être vu comme une évaluation des risques et besoins de fonds propres indépendamment de la formule standard.

Cette démarche est définie dans la politique ORSA approuvée annuellement par le conseil d'administration.

Cette évaluation doit permettre une meilleure prise en compte des risques auxquels l'assureur est exposé. Il doit être en mesure d'assurer le contrôle et la gestion de sa solvabilité sur un horizon temporel défini. La vision prospective de l'ORSA induit une projection des risques dans une logique de continuité d'activité, en cohérence avec le niveau de risque auquel l'assureur est prêt à s'exposer, c'est-à-dire son appétence au risque, et son profil de risque.

Ce processus prospectif doit comporter trois évaluations distinctes :

1. L'évaluation du besoin global de solvabilité (BGS) ;
2. L'évaluation du respect permanent des obligations réglementaires concernant la couverture du *SCR*, *MCR* et de la meilleure estimation ;
3. L'évaluation de la mesure dans laquelle le profil de risque de l'organisme s'écarte des hypothèses qui sous-tendent le calcul du *SCR*.

Le processus *ORSA* doit être réalisé à minima tous les ans et de manière générale à chaque fois que le profil de risque de l'organisme a une évolution notable.

C'est dans ce contexte qu'intervient pour évaluer le besoin global de solvabilité le générateur de scénarios sous une probabilité historique pour déformer à court et moyen terme (en général de 3 à 5 ans) les facteurs de risque. Leurs impacts sur la solvabilité de l'organisme peuvent être quantifiés et de manière plus large mesurer la résilience d'un assureur à une situation difficile voir de crise.

Pour résumer cette partie, la directive Solvabilité II impose un bilan prudentiel dans son premier pilier. Pour ce faire, les actifs sont évalués dans un premier temps en valeur de marché puis les provisions techniques sont calculées sous forme *Best Estimate* à l'aide d'un GSE sous probabilité risque-neutre. Enfin à l'aide d'un GSE sous probabilité historique, les quantiles de la distribution des fonds propres sont déterminés. Pour être plus précise, la distribution de la valeur nette de l'actif est définie, afin de parvenir au *SCR*. Dans le cas où les entreprises ne construisent pas leur propre modèle interne, elles mettent au moins en place au sein du pilier 2 le processus *ORSA*. Cette analyse qualitative décrite ci-dessus, nécessite l'utilisation de la probabilité historique. Plusieurs interrogations se profilent :

1. Un GSE est nécessaire pour les différents calculs. Mais comment peut-il être défini ?
2. Comment le construire ? Et quel est le lien avec les deux probabilités ?
3. La construction d'un GSE étant coûteux, est-il possible de trouver une solution pour passer d'un GSE sous probabilité historique à risque-neutre et inversement ?

Dans les sections suivantes nous allons essayer de répondre à l'ensemble de ces questions.

1.2 État de l'art des GSE

Les projections obtenues grâce à des générateurs de scénarios économiques peuvent être utilisées :

- Cas 1 : Dans une logique *market-consistent* pour calculer des provisions sur des portefeuilles épargnes ou plus généralement sur les portefeuilles avec des clauses de participation aux bénéfices. Comme expliqué dans la partie 1.1.1, le calcul de la meilleure estimation sous la directive Solvabilité 2 dépend des simulations du GSE ;
- Cas 2 : Dans une démarche économétrique pour déterminer la meilleure allocation stratégique en fonction des informations obtenues sur les futurs rendements des différents actifs composant le portefeuille de l'assureur. Il s'agit alors de gestion des risques financiers : prédire et se protéger en conséquence. Ces projections sont obtenues grâce à un GSE historique. Il s'agit d'une des fonctionnalités de l'*ORSA* comme évoquée dans la partie 1.1.3.

Nous allons dans cette section présenter les deux types de générateurs précédemment évoqués afin de mettre en lumière leurs différences mais aussi leurs similitudes. Nous discuterons également de ce qui est fait usuellement et des problématiques que cela soulève.

1.2.1 Comparaison de l'approche historique et risque-neutre

Définition de la mesure historique

C'est la mesure la plus naturelle quand le terme « probabilité » est invoqué. Il s'agit de celle observée, autrement dit, elle traduit les probabilités qu'un évènement se produise. C'est donc naturellement que générer des scénarios économiques sous cette probabilité revient à répliquer les comportements tirés de l'historique des données. Elle est notée \mathbb{P} dans le présent mémoire.

Définition de la mesure neutre au risque

Pour rappel, il s'agit d'une mesure conceptuelle qui découle de l'hypothèse d'AOA. Elle sert à valoriser des objets financiers. La probabilité risque-neutre ne modifie pas les prix mais les probabilités et ceci dans le cas des marchés complets. En effet, l'aversion au risque de l'investisseur n'est pas prise en compte. Ce qui signifie que le rendement est au taux sans risque. Donc la valeur dite risque-neutre est uniquement liée aux sous-jacents et non au profil de risque de l'investisseur ou à son comportement. L'investisseur n'est aucunement impacté par les fluctuations du marché par exemple.

Notons qu'en pratique, les marchés peuvent être incomplets ce qui impliquent une infinité de probabilités risque-neutre et donc une infinité de prix. A ce moment là, le prix pourra être différent d'une probabilité à une autre.

Illustrons ces deux points de vue grâce à un exemple.

On considère deux actifs : un sans risque et un risqué, tous deux de valeur initiale 100 à $t = 0$. Celui sans risque rapporte 3% dans 1 an dans tous les cas alors que celui risqué rapporte 12% dans 50% des cas ou fait perdre 2% pour le reste. Les probabilités associées aux gains ou pertes sont celles observées, c'est-à-dire sous probabilité historique.

Nous cherchons à nous immuniser contre le risque de perte de l'actif risqué dans un cadre d'AOA. La méthode financière repose sur un changement de probabilité où les investisseurs seront neutres au risque. L'aversion de ces derniers se manifestera au travers des probabilités d'occurrence des scénarios défavorables puisque ce n'est pas le gain qui change mais la probabilité. Dans l'exemple, cela se traduit par :

$$p^{\mathbb{Q}}(1 - 2\%) + (1 - p^{\mathbb{Q}})(1 + 12\%) = 1 + 3\%$$

$$p^{\mathbb{Q}} \simeq 0,643$$

La probabilité d'occurrence de l'évènement défavorable, soit la baisse du taux de rendement, augmente considérablement sous la probabilité risque-neutre passant de 50 % à 64,3 %.

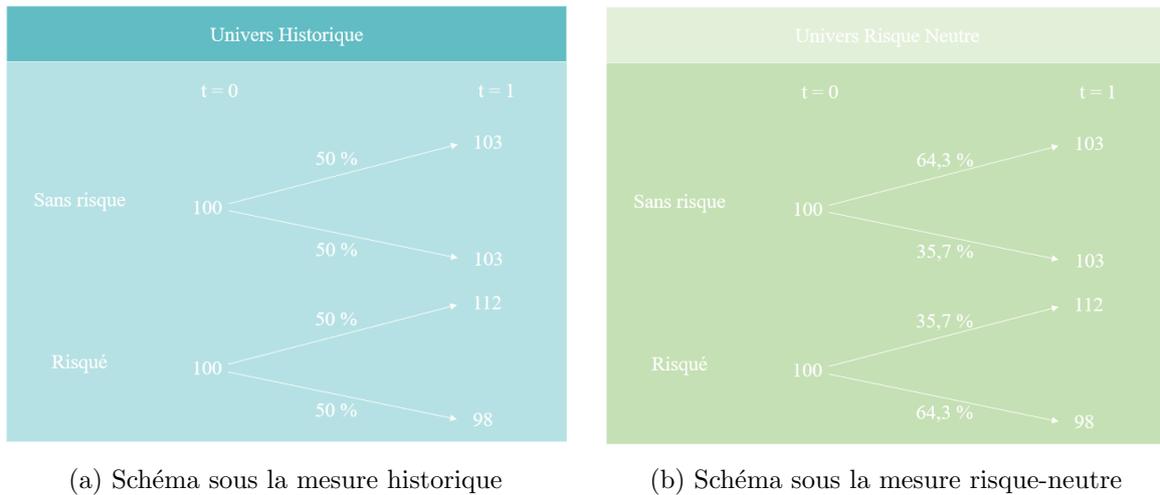


FIGURE 1.4 : Représentation de l'exemple sous les deux probabilités

1.2.2 Présentation des GSE

Comme indiqué dans l'introduction (ACPR, 2020), un GSE, générateur de scénarios économiques, est un ensemble de modèles (taux, actions, spreads de crédit, inflation, etc.) permettant de simuler aléatoirement des scénarios d'évolution possibles des marchés financiers, qui ont une incidence sur la valeur et les performances de l'actif de l'organisme d'assurance.

Généralement, le développement d'un GSE est conçu en 3 phases principales :

1. L'environnement de modélisation :

- Choix de la mesure risque-neutre ou/et historique ;
- Choix des variables économiques à modéliser.

2. Les modèles :

- Choix des dynamiques pour représenter le plus fidèlement les variables économiques ;
- Choix de copule pour expliquer la structure de dépendance entre les dynamiques.

3. Les paramètres et le calibrage :

- Choix des produits financiers dérivés pour le calibrage ;
- Choix des données (granularité) ;
- Choix des méthodes d'estimation des paramètres des modèles ;
- Choix des méthodes de validation : de la qualité des données extraites et sur les procédures d'ajustement des données, de la procédure d'estimation et de calibrage ainsi que de la procédure de génération des scénarios.

Résumons la modélisation de cet outil grâce au schéma issu du papier de ARMEL et PLANCHET (2018) :

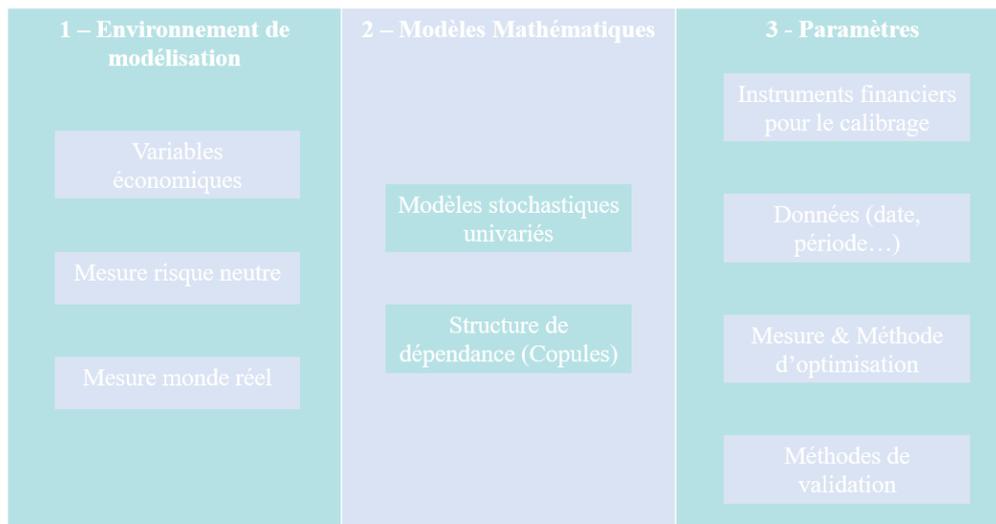


FIGURE 1.5 : Représentation des 3 principales étapes de construction d'un GSE

En pratique, les assureurs construisent un GSE neutre au risque pour calculer leur BE et utilisent généralement la formule standard et la matrice de corrélation fournies par l'EIOPA. Seuls les assureurs de grande envergure se munissent d'un GSE historique pour calculer leur SCR. En revanche, tous les assureurs possèdent un GSE historique pour l'ORSA et l'allocation stratégique. Ils utilisent donc généralement deux GSE distincts qui n'ont pas de « cohérence » puisque construits dans deux entités différentes du groupe (par exemple la section financière et celle qui s'occupe de l'ORSA) donc indépendamment.

Un GSE devrait pouvoir servir à la fois pour la valorisation et la projection assurant une cohérence plus importante.

1.2.3 Lien entre un GSE historique et risque-neutre : introduction au Prix de marché du risque

L'idée dans ce chapitre est uniquement d'évoquer la notion. Le lecteur pourra se référer au Chapitre 3 où l'explication du prix du marché du risque est plus détaillée.

La prévision des facteurs de risques économiques et financiers est un élément essentiel au centre des analyses prospectives réalisées par les compagnies d'assurance-vie. En effet, les résultats globaux dépendent beaucoup de la performance financière de la compagnie. Savoir gérer ces risques, c'est être compétitif et performant sur le marché. De plus, le lien entre facteur de risque et prix d'actif est plus ou moins direct :

- Action / Immobilier : le facteur modélisé est le prix de l'actif ou la rentabilité d'un indice ;
- Obligation : le facteur modélisé est seulement dans 20 % des cas, le taux court (ACPR, 2020). Dans la majorité des cas (les 80 % restant), un modèle de marché plus complexe est utilisé. Ces modèles ont alors beaucoup de paramètres, ce qui nécessite un grand nombre de données de marché.

Des dynamiques de diffusion browniennes sont généralement utilisées pour décrire les risques.

- Modèles Action / Immobilier : de Black-Scholes, à changement de régimes de Hardy, à volatilité déterministe, de Heston, de Merton, etc. ;

- Modèles de Taux :

- Taux court : Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross (CIR), Hull et White, etc. ;
- De marché : CIR2++, Hull et White à deux facteurs, Libor Market Model (LMM), etc.

Chacune des dynamiques peut être exprimée sous les deux probabilités, mais les propriétés de chacune ne permettront pas les mêmes calculs. La probabilité historique \mathbb{P} sera utilisée pour projeter et visualiser l'évolution des facteurs de risque alors que la probabilité risque-neutre est faite pour valoriser. Une solution envisageable pour le passage entre \mathbb{P} et \mathbb{Q} (et inversement) est le prix de marché du risque.

Le prix du marché du risque est « par définition l'excès de rendement par rapport au taux sans risque offert par un support risqué par unité de volatilité » (CAJA et PLANCHET, 2010). Quant à la prime de risque, il s'agit de la version observable (et donc approchée) du prix du marché du risque. Toujours d'après CAJA et PLANCHET (2010), « la prime de risque sert à compenser la perte de rentabilité qui peut se produire à cause d'un facteur de risque sous-jacent ».

L'idée du mémoire est de construire un générateur de scénarios économiques non paramétrique i.e. sans considérer de dynamiques pour décrire l'évolution des facteurs de risque.

L'objectif est donc de construire un GSE non-paramétrique historique, de manière à pouvoir reproduire le passé. Les dynamiques des facteurs de risque ne seront pas définies et le GSE sera basé sur un modèle de ML. Les projections seront analysées et comparées à un modèle classique de ST et des modèles paramétriques usuels. Une étude sera également réalisée sur la risque-neutralisation, permettant de passer de la probabilité historique à la probabilité risque-neutre, notamment grâce à la notion du prix du marché du risque.

Dans la prochaine section, nous allons discuter de l'approche non-paramétrique choisie.

1.3 Une approche non-paramétrique

Comme il a été évoqué précédemment, les GSE sont généralement construits avec des dynamiques modélisant chaque facteur de risque. Les assureurs doivent faire un choix parmi les différents modèles existants, chaque modèle impliquant ses intérêts et ses limites. En modélisant les facteurs de risque avec des historiques de valeurs passées sans dynamique, l'assureur n'a plus à choisir. Par définition un modèle doit reproduire un phénomène observé mais comprend rarement toutes ses spécificités impliquant des différences entre « le simulé » et « l'observé ». Le Machine Learning et plus précisément le réseau de neurone de type RVFL va permettre d'avoir un niveau d'abstraction supplémentaire en écartant la notion de dynamique.

Il est indéniable que les méthodes de Machine Learning sont des outils qui développent positivement la profession d'actuaire. Les exemples indiqués en introduction l'illustre parfaitement. JACOB et al. (2021) l'affirment, elles permettent « d'affiner la connaissance du risque et d'améliorer la prédictibilité des modèles, ce qui ouvre la voie vers l'exploration de nouvelles gammes de produits, d'autres zones géographiques et de nouveaux segments de clientèle ».

La place et la légitimité du Machine Learning ne sont que croissantes au sein de l'assurance. Des mémoires sur le sujet sont fréquemment publiés : le lecteur pourra se référer au mémoire de Rémi Gauville, Prix Scor 2018, « Projection du ratio de solvabilité : des méthodes de machine learning pour contourner les contraintes opérationnelles de la méthode des SdS ».

C'est pourquoi il semblait légitime de réaliser un mémoire autour d'un sujet actuel, celle des GSE et du Machine Learning. Pour cela, en plus du papier de CAJA et PLANCHET (2010) d'autres papiers confirment l'intérêt et la curiosité des travaux effectués par la suite : celui de MOUDIKI et al. (2018)

sur les réseaux de neurones RVFL dans le cadre assurantiel.

Nous allons présenter le type de réseau de neurone évoqué dans ce papier ainsi que les données utilisées qui nous serviront lors de la construction du GSE dans le second chapitre.

1.3.1 Présentation générale de la méthode envisagée : RVFL

Les explications et les schémas de cette section sont tirées du cours INSA (2021) et du papier de recherche MOUDIKI et al. (2018) (plus largement décrit lors de la construction du GSE).

Les réseaux de neurones à propagation avant ou *feedforward*

Le Perceptron ou neurone formel est un réseau de neurones artificiel composé d'une couche d'entrée (mono-couche) et d'un neurone de sortie. Il y a plusieurs variables d'entrée auxquelles sont affectées des poids. Les poids d'entrée sont ensuite multipliés par la valeur respective d'entrée, avant de passer dans la fonction d'activation f . La sortie déterminera si la valeur de sortie vaut 0 ou 1. Il s'agit d'un classifieur linéaire qui, une fois entraîné, déterminera l'étiquette de l'ensemble d'entrée.

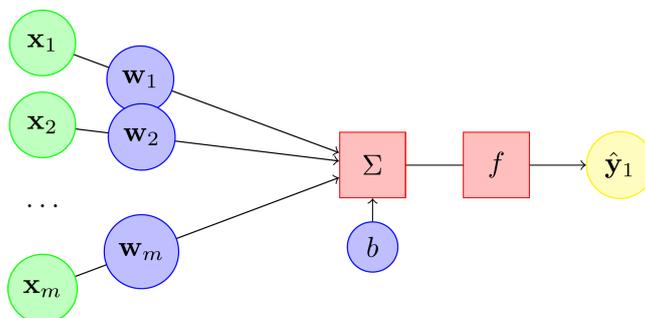


FIGURE 1.6 : Exemple d'un neurone formel

Sur la Figure 1.6 ci-dessus, il est observé :

- x les entrées (de taille m);
- w les poids reliés à la i ème entrée;
- b le biais;
- Σ qui indique que le produit variables d'entrée et poids est sommé sur toutes les entrées, auquel le biais b est ajouté;
- f la fonction d'activation;
- \hat{y}_1 la sortie définie par $\hat{y}_1 = f(\sum_{i=1}^m w_i x_i + b)$.

Les paramètres w et b sont déterminés pendant l'apprentissage par descente de gradient.

Le Perceptron ne permet pas de résoudre des problèmes complexes puisque les données ne peuvent être séparées que par une droite. C'est pour cette raison qu'on a introduit des réseaux plus complexes organisés en plusieurs couches : les réseaux de neurones multicouches ou feedforward (à propagation avant). Voici un exemple issu de INSA (2021) :

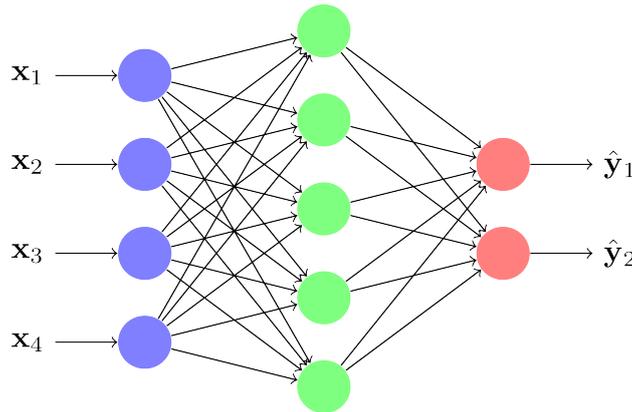


FIGURE 1.7 : Exemple d'un réseau multicouche

De la même manière que précédemment, « les paramètres » peuvent être déterminés par descente de gradient. En revanche, quand il commence à avoir beaucoup de couches, on parlera de rétropropagation du gradient. Il faudra calculer le gradient des paramètres de la dernière couche puis propager le gradient à la couche précédente, et ainsi de suite afin de remonter toutes les couches.

Contrairement aux réseaux de neurones récurrents (RNN), les réseaux à propagation avant n'ont pas de couche récurrente : l'information circule de l'entrée vers la sortie sans boucle, en passant par des couches intermédiaires dites cachées ou directement de l'entrée vers la sortie. En général, plus il y a d'informations dans la base de données plus il y a aura de neurones dans la ou les couches cachées.

Les réseaux *Random Vector Functional Link Neural Network* (RVFL)

Les réseaux de type RVFL ont été introduits par Pao en 1994, connu grâce à sa grande capacité d'adaptation. D'après WIKIPEDIA (2023b), George Cybenko démontre en 1989 le théorème d'approximation universelle. Ce dernier indique qu'un réseau à propagation avant à une couche intermédiaire contenant un nombre fini de neurones peut approximer des fonctions continues sur des sous-ensembles compacts de \mathbb{R}^n mais uniquement pour des fonctions d'activation de type sigmoïde.

Kurt Hornik en 1991 démontre que ce résultat n'est pas dépendant de la fonction d'activation choisie mais de la structure du réseau qui lui donne la possibilité d'être un approximateur universel. Les RVFL étant un type de réseau feedforward à une couche cachée, il peut donc être un approximateur universel sous réserve de choisir la bonne structure, c'est à dire les bons hyperparamètres.

Le RVFL est un réseau de neurones à propagation avant c'est-à-dire que l'information circule de gauche à droite. Le modèle choisit à une seule couche cachée. Il se distingue d'un réseau à propagation avant classique à une couche intermédiaire par deux différences majeures :

1. Les liens directs entre les entrées et les sorties permettent de modéliser les dépendances linéaires ;
2. Les éléments de la couche cachée sont déterminés de manière quasi-aléatoires. Cela permet de parcourir efficacement l'hypercube :une manière économe de considérer l'espace.

Afin d'améliorer la flexibilité dans la structure de covariance entre les prédicteurs et les sorties, une régression de Ridge est réalisée avec deux paramètres de régularisation différents sur les variables d'entrée et transformées. Cela contraint les régresseurs à ne pas trop bouger et permet de les stabiliser dans la phase d'apprentissage. Cela permettrait d'éviter les phénomènes de sur-apprentissage. Le modèle considéré sera plus largement développé dans le troisième chapitre.

Prenons un exemple. On suppose qu'il y a N observations pour une seule variable où chaque entrée est noté x_i où $1 \leq i \leq N$ pour la i ème observation de l'unique variable. On note P le nombre de neurones composant la couche cachée et $F()$ la fonction d'activation. $a_{k,i}$ est le poids entre l'observation x_i et le neurone k de la couche cachée (flèches bleues sur le graphique), où $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq k \leq P$. b_k est le biais associé à chaque neurone de la couche cachée (en vert sur le schéma) où $1 \leq k \leq P$. On note également w_j le vecteur des poids entre les couches d'entrée et sortie ainsi que, entre les couches cachées et de sortie (les flèches pleines de couleur orange sur l'illustration), il sera de taille $N + P$. Chaque w sera différent suivant la sortie j considérée, notée y_j où y le vecteur des sorties de taille M .

On aura donc pour chaque variable de sortie y_j où $1 \leq j \leq M$:

$$y_j = \sum_{i=1}^N w_{i,j} x_i + \sum_{k=1}^P w_{(i+N),j} F\left(\sum_{k=1}^P \alpha_{k,i} x_k + b_i\right).$$

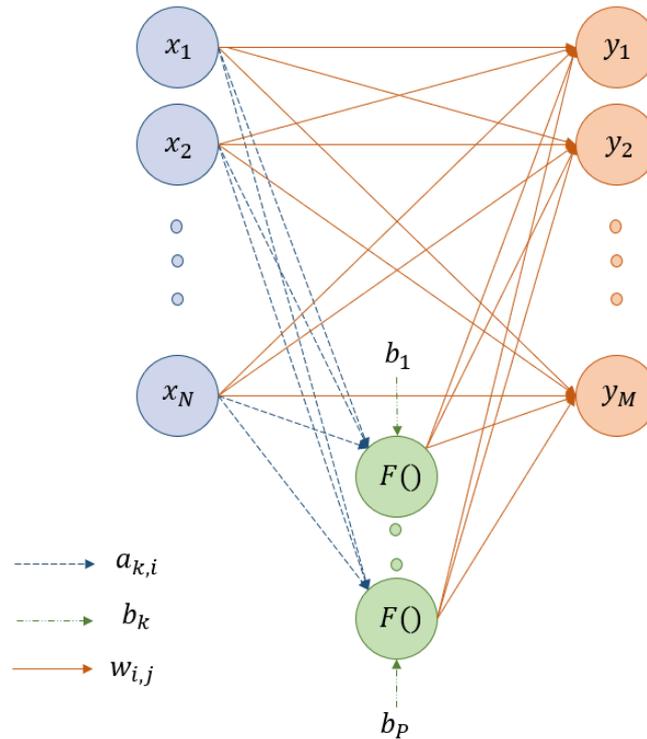


FIGURE 1.8 : Illustration du réseau type RVFL dans le cadre de notre exemple

Ce modèle est basé sur les données d'entrée. Sans ces dernières, le modèle ne peut pas s'entraîner ce qui signifie aucune projection. Il s'agit du premier maillon de la chaîne et c'est dans cette logique que nous allons présenter nos données.

1.3.2 Données et hypothèses considérées : justification dans notre contexte

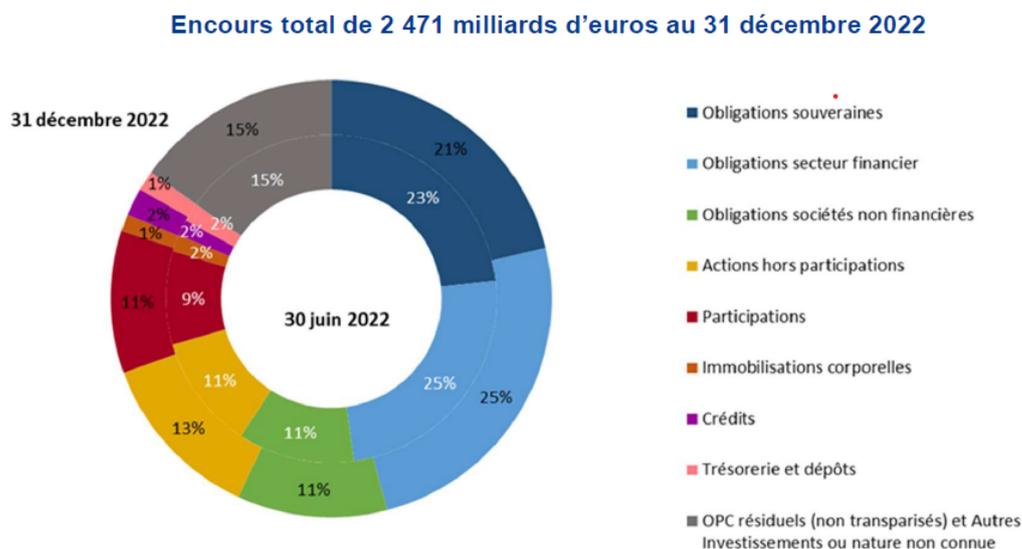
Les scénarios économiques sont projetés pour pouvoir se préparer aux aléas. En effet, les différents actifs des assureurs peuvent être soumis à plusieurs risques. Les actifs couvrent les passifs, dont une partie sont les engagements de l'assureur envers l'assuré. La structure des investissements des assureurs est donc un point majeur dans les choix à adopter pour pouvoir assurer ses engagements. Ainsi, les facteurs de risque les plus représentés au sein de leur actif doivent être modélisés dans leur GSE.

L'ACPR (2023) a publié la composition de l'Actif des assureurs français soumis à la directive européenne Solvabilité II.

La mise en transparence est le processus de substituer, quand l'information est disponible, les titres d'Organismes de Placements Collectifs (noté usuellement OPC) par les titres où ces organismes investissent en réalité.

Les différences sont minimales entre le 30 juin 2022 et le 31 décembre 2022. La décomposition la plus récente est alors choisie, soit celle du 31 décembre 2022.

Les assureurs investissent majoritairement dans les obligations, à hauteur de 57 % fin 2022. Elles proviennent en premier du secteur financier, suivi des obligations émises par les États et enfin des sociétés non financières, respectivement 25 %, 21 % et 11 %. Le deuxième placement préféré des assureurs sont les OPC résiduels (OPC que l'on ne peut pas transparer). Notons que l'on dispose ici uniquement de la structure des placements post-transparisation, ce qui rend cette catégorie difficilement interprétable. Pour des raisons évidentes de modélisations futures, la deuxième plus grande catégorie de placement sera les Actions hors participations et Participations, soit 24 % des placements.



Périmètre : organismes d'assurance soumis aux remises trimestrielles sur base sociale.

Note : - Y compris placements en unités de compte. L'actif du bilan se compose des placements et d'autres actifs.

Source : ACPR et Banque de France

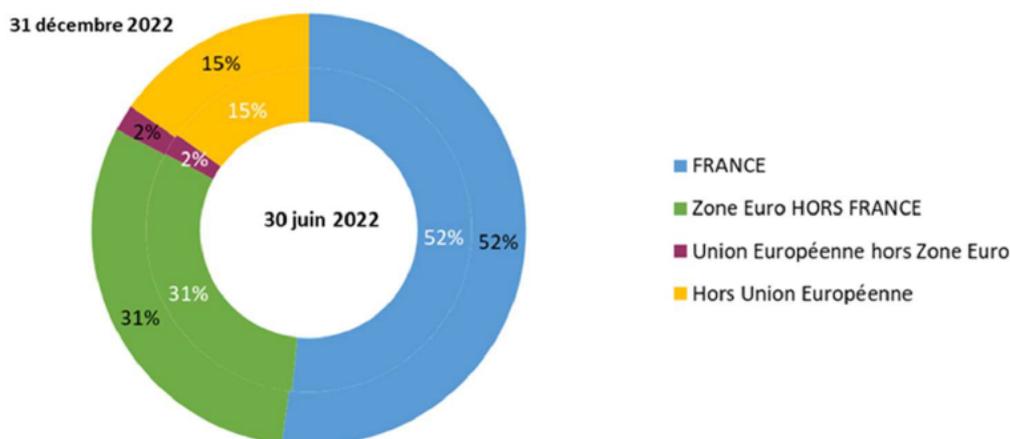
FIGURE 1.9 : Structure de placements des assureurs (après mise en transparence), fin décembre 2022

L'analyse de ce graphique permet d'avoir une première idée des facteurs de risque les plus importants chez les assureurs en France : les obligations et les actions. La deuxième question est de savoir d'où ces placements proviennent. Pour cela, l'ACPR (2023) a également publié un graphique pour décrire la structure des expositions géographiques associées aux placements, présenté sur la Figure 1.10 ci-dessous. Les assureurs investissent majoritairement dans des placements d'origine français ou de la Zone Euro, respectivement à hauteur de 52 % et 31 %, représentant 83 % de l'encours total soit plus de quatre cinquièmes. Il reste 17 % pour l'Union Européenne hors Zone Euro et le reste du monde.

La structure des assureurs français vie et non-vie traduit des placements majoritairement sous forme d'actions et d'obligations d'origine française et de la Zone Euro.

Néanmoins, notre étude porte sur les assureurs vie. Comme ces derniers représentent les trois quarts des primes sur le marché de l'assurance française, l'analyse est conservée telle quelle. Pour confirmer ceci, prenons en exemple un des plus grands assureurs vie français : CNP Assurances.

Encours total de 2 471 milliards d'euros au 31 décembre 2022



Périmètre : organismes d'assurance soumis aux remises trimestrielles sur base sociale

Source : ACPR et Banque de France

FIGURE 1.10 : Expositions géographiques des placements des assureurs (après mise en transparence), fin décembre 2022

La globalité du portefeuille d'actifs s'élève à 406,1 Md€, où environ un cinquième est en unités de comptes, soit 82,8 Md€. La structure du portefeuille est répartie en juin 2022 (comptabilité IFRS) :

1. 71,49 % d'obligations détenues en direct (principalement des dettes souveraines) et OPCVM ;
2. 22,33 % d'actions détenues en direct et OPCVM ;
3. 4,63 % d'immobilier ;
4. 1,55 % d'autres actifs.

Les deux premiers points représentent environ 94 % des actifs, ce qui confirme notre précédente analyse.

Le but de ce mémoire étant de proposer un GSE illustratif dans le monde assurantiel, deux facteurs de risques seront intégrés : les taux et les actions.

Le risque d'action et de taux sont des risques « visibles » puisque qu'ils apparaissent dans l'actif. Mais les assureurs sont aussi soumis à des risques intrinsèques. Le risque de crédit comprenant le risque de défaut, le risque de changement de notation et le risque de variation des *spreads* aurait également pu être intégré. Un risque actuel comme l'inflation aurait pu être ajouté, de la même manière que le risque de change. Des améliorations sont possibles et restent envisageables par la suite lors de prochains travaux plus poussés. Les limites du modèle et de ses améliorations seront discutées à la fin du mémoire.

Les données risque action

D'après le Ministère de l'Economie et des Finances, une action est une part du capital d'une entreprise. En achetant des actions, l'acheteur investit dans une entreprise et perçoit des dividendes si celle-ci réalise des bénéfices et en distribue. En effet, une entreprise peut faire des bénéfices sans pour autant décider de verser des dividendes. Le risque action est donc lié à la variation de valeur des supports actions.

Comme nous avons pu l'observer au travers des graphiques de l'ACPR (2023) (cf Figures 1.9 et 1.10), la part Action au sein de la structure des assureurs français est importante. Aussi, les assureurs français investissent pour moitié de leur actif en France. C'est pour ces raisons que notre choix s'est porté sur le CAC 40.

Toujours d'après le Ministère de l'Economie et des Finances, le CAC 40 est le principal indice boursier de la place de Paris. Il est composé de 40 valeurs de sociétés françaises, choisies parmi les 100 sociétés françaises avec les plus fortes capitalisations, c'est à dire celles dont les volumes d'échanges de titres sont les plus importants. CAC est l'acronyme de Cotation Assistée en Continu, ce qui signifie que sa valeur varie en permanence de 9h00 à 17h30 et ceci pour tous les jours ouvrés.

Les données des indices du CAC 40 sont disponibles sur plusieurs plateformes (gratuites). Nous utiliserons dans ce mémoire celles du site Yahoo-Finance. Les données sont initialement journalière du 1er Mars 1990 au 31 Mai 2023. Nous les avons transformées de manière mensuelle en sélectionnant le dernier jour de chaque mois. Nous avons également réduit la plage d'observation de Janvier 2001 à Mai 2023 pour être en accord avec les taux.

Nous avons sélectionné l'indice *Fermeture* parmi les quatre disponibles : Ouverture, le plus Haut, le plus Bas et Fermeture.

Les indices actions sont tracées sur le graphique 1.11, sur la période indiquée. Sur les 22 dernières années, l'indice a fluctué de manière assez importante. L'analyse peut être scindé en 4 périodes :

1. Janvier 2001 - Juin 2007 :

- Première phase jusqu'au début 2003 : Chute de l'indice de 6000 à 2400 points à cause de la « bulle Internet » ;
- Deuxième phase de remontée jusqu'en Juin 2007. L'indice atteint 6000 points.

2. Juillet 2007 - fin 2011 :

- Crise des « Subprimes » et crise de la dette publique grecque en 2008 qui entraîne une chute de l'indice passant de 6000 à 2500 point ;
- Période de remontée de l'indice à partir de mi-2009.

3. Janvier 2012 - Mars 2020 :

- 2012 : crise des dettes publiques en zone Euro (à la suite de la Grèce) ;
- 2012 - 2020 : Remontée de l'indice jusqu'à 6000 points ;
- Mars 2020 : Crise sanitaire Covid19, ce qui entraîne une chute de l'indice à 4500 points.

4. Depuis 2021 :

- Remontée à 7200 points puis chute en 2022 à 5800 points à cause de la Guerre en Ukraine ;
- Remontée historique en Janvier 2023 à plus de 7500 points.

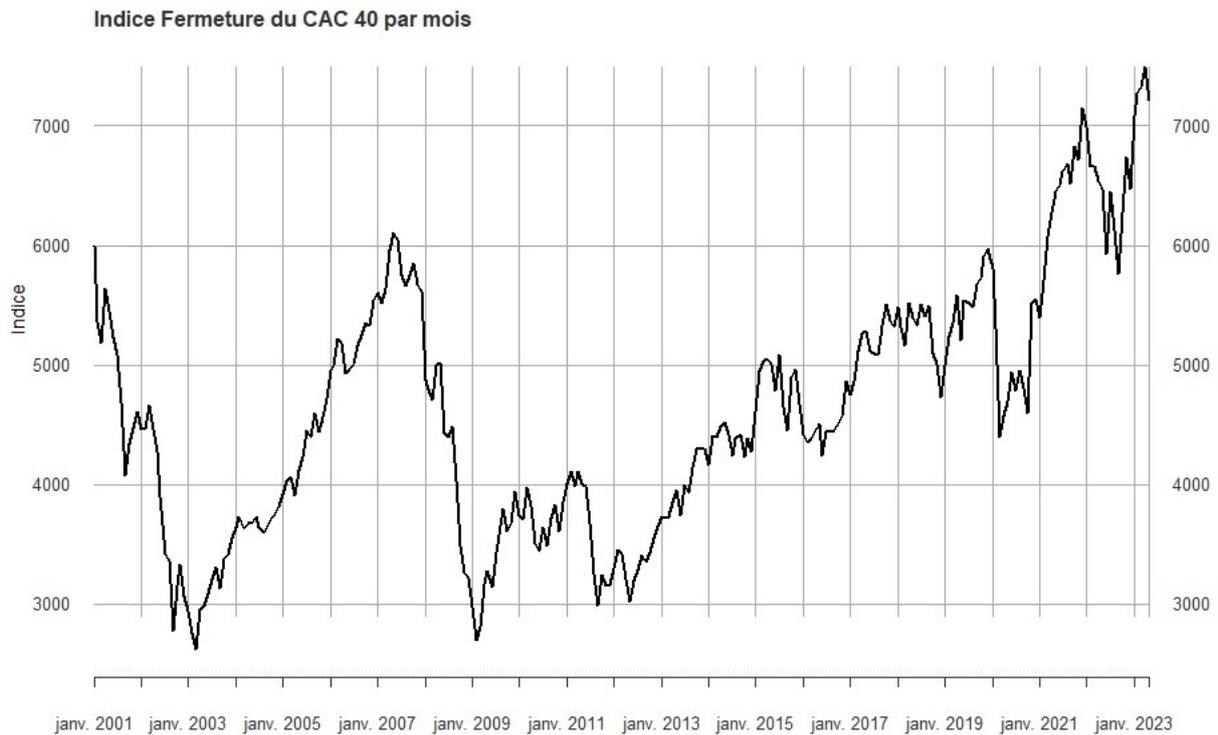


FIGURE 1.11 : Graphique de l'indice Fermeture du CAC 40 entre le 31/01/2001 - 31/05/2023

Cette brève analyse permet de mettre en avant le fait que l'indice est relativement volatile. Les crises économiques, sanitaires, les guerres ou tout autres évènements extrêmes ont un impact considérable sur l'indice action du CAC40. C'est pour cette raison qu'il est primordial de le choquer pour voir les possibles scénarios, afin de se préparer au meilleur comme au pire, du point de vue de l'assureur.

Les données risque de taux

D'après THÉRON (2013), « la modélisation des taux d'intérêt est le coeur d'un générateur de scénarios économiques ». THÉRON (2013) définit la structure par terme des taux d'intérêt (ou courbe des taux) comme la fonction qui, à une date, associe pour chaque maturité le niveau du taux d'intérêt associé. D'après son cours, il existe deux familles de courbes des taux :

- Courbe de marché : construites directement grâce à des cotations sur le marché :
 - Courbe de Taux swap ;
 - Courbe de rendement des obligations d'Etat ;
- Courbes implicites : construites indirectement grâce à des cotations de marché d'instruments financiers comme les obligations et les swaps :
 - Courbe de Taux Zéro-Coupons ;
 - Courbe des Taux *forwards* ;
 - Courbe des Taux *forwards* instantanés.

En pratique, les GSE sont construits avec la mesure risque-neutre pour répondre aux attentes de Solvabilité II. Les flux de passifs et d'actifs sont actualisés au taux sans risque fourni mensuellement

par l'*European Insurance and Occupational Pensions Authority* (EIOPA). Le taux sans risque publié permet, pour chaque maturité, d'obtenir un taux de rendement sans risque, c'est-à-dire pour un investissement non soumis au risque de défaut.

D'après l'EIOPA (2019), « Par défaut, le taux d'intérêt sans risque est principalement dérivé des taux auxquels deux parties sont prêtes à échanger des obligations à taux d'intérêt fixe et variable. En l'absence de marchés de swaps financiers, ou lorsque les informations relatives à ces transactions ne sont pas suffisamment fiables, le taux d'intérêt sans risque est basé sur les taux des obligations d'État du pays ». Pour la monnaie Euro, ces derniers utilisent des taux swaps contre EURIBOR 6 mois comme données. Elles sont issues du fournisseur de données Refinitiv. Néanmoins, l'EIOPA affirme qu'il n'existe aucune preuve qu'un fournisseur de données est supérieur à un autre.

Un swap de taux est un contrat dans lequel deux contreparties s'engagent mutuellement à se verser des flux financiers (les « jambes » du swap). La contrepartie « jambe fixe » paye les intérêts à taux fixe pour recevoir un taux variable. À l'inverse, la « jambe variable » paye un taux variable et reçoit un taux fixe (WIKIPEDIA, 2023a).

Pour rappel, le taux EURIBOR est le taux d'intérêt moyen auquel les établissements financiers consentent à se prêter de l'argent à court terme sur le marché interbancaire de la zone euro. Il est calculé en se référant aux cinquante plus grands établissements bancaires européens.

Le risque de taux ou risque de taux d'intérêt est la variation instantanée du niveau des taux touchant la valeur de marché des instruments financiers, notamment les obligations. Ce risque est prépondérant au vu de la part obligataire au sein de l'actif des assureurs français.

Dans notre mémoire, nous avons fait le choix d'utiliser un historique de taux swap issus du fournisseur de données Bloomberg. Nous avons les maturités suivantes : 6M, 1Y, 2Y, 3Y, 4Y, 5Y, 6Y, 7Y, 10Y, 12Y, 15Y, 20Y, 25Y et 30Y, où M et Y correspondent respectivement au mois et aux années. Les données ont une fréquence mensuelle (dernier jour de chaque mois) et couvrent la période de Janvier 2001 à Mai 2023.

La série observée correspond au taux swap contre EURIBOR 6 mois pour une maturité de N années, noté EUSA N. Il s'agit du taux swap EUR de maturité N. Par rapport à la définition des taux swaps, les taux EURIBOR 6M sont les taux variables et les EUSA N les taux fixes.

Ce choix est motivé par la structure et l'exposition géographique des placements des assureurs français mais aussi par la construction de l'EIOPA pour la courbe des taux sans risque.

Notons que d'après SÉLIM (2021), l'EIOPA utilise les taux swaps plutôt que les taux des obligations souveraines à la suite de la crise de 2008 qui a démontré que les taux swaps étaient plus sûrs (les Etats peuvent faire défaut – décrit page 33 de ce même mémoire). A ces taux swap, il ajoute un *Credit Risk Adjustments* (CRA). L'auteur du mémoire indique : « Dans le cas des taux swap contre Euribor 6M, cet ajustement correspond à 50 % de la moyenne sur 1 an de l'écart entre le taux Euribor 6M et le taux OIS (*Overnight Indexed Swap*) à 3 mois de même échéance ». La courbe des taux sans risque (courbe des taux spots) avec ou sans *Volatility Adjustment* (VA) est ainsi obtenue.

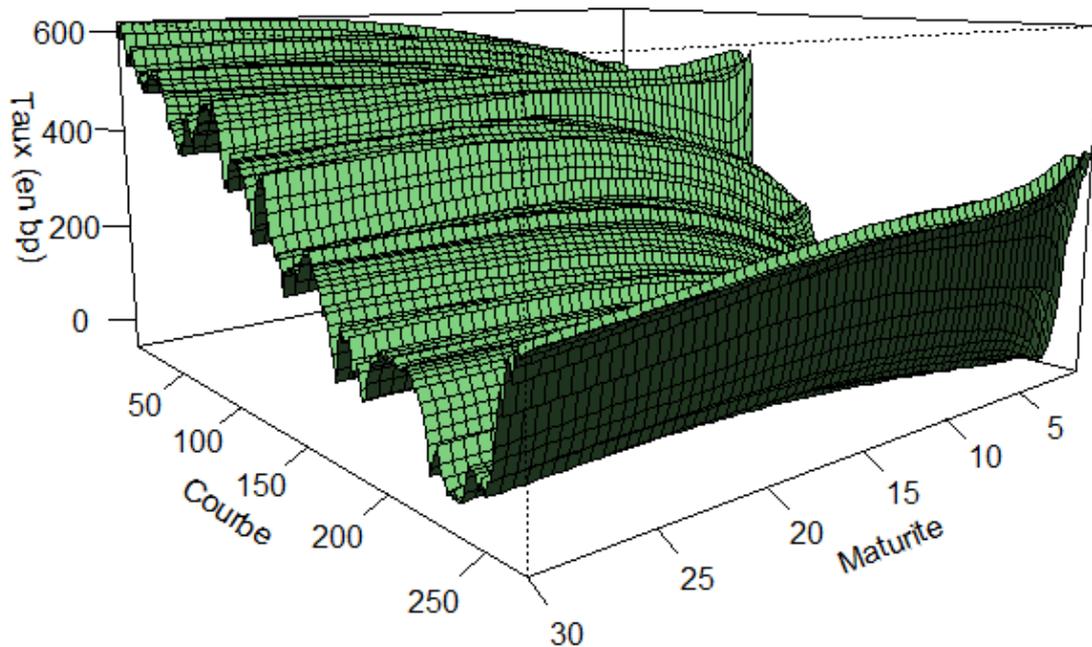


FIGURE 1.12 : Graphique de la courbe des taux entre le 31/01/2001 - 31/05/2023

Pour les lecteurs intéressés, 3 étudiants de l'EURIA (DE CHRISTEN et al., 2018) ont réalisé un travail sur la construction de la courbe des taux sans risque de l'EIOPA. Ils expliquent (en simplifiant) la démarche avec un outil pour reconstruire la courbe à partir de taux swaps. Ce que l'on retient lorsqu'on clique sur l'onglet « Philosophie du modèle », ce sont :

1. L'utilisation de taux swaps contre EURIBOR 6M de maturité 1 à 20 ans ;
2. L'application du CRA avec la formule communiquée ;
3. L'interpolation (s'il manque des valeurs) avec la formule de Smith-Wilson mais qui ne se fait plus depuis 2017 car résultats finaux trop peu améliorés donc interpolation abandonnée ;
4. L'extrapolation pour aller jusqu'à 100 ans voire plus ;
5. La *Volatility Adjustment* (VA) qui s'ajoute avant l'extrapolation pour contrer l'impact de la volatilité de court terme dans le bilan d'un assureur, et pour en limiter les effets sur le SCR ;
6. Le *Matching Adjustment* (MA) a les mêmes objectifs que la VA mais pour contrer les effets de la volatilité sur les engagements de court terme.

Ne possédant pas les taux d'échange avec la banque centrale européenne (OIS : *Overnight Index Swap*) qui interviennent dans la formule du CRA, il a été décidé de faire l'approximation de conserver les taux swap ainsi.

La transformation des taux swaps en taux spots sera développée dans le prochain chapitre de même pour les transformations effectuées sur l'indice CAC 40.

Chapitre 2

Construction d'un GSE sous probabilité historique non-paramétrique

Après avoir expliqué brièvement la méthode de Machine Learning RVFL utilisée pour prédire les différentes simulations et justifié le choix de nos données, nous allons présenter la construction du GSE qui a été réalisée, tout en détaillant les outils utilisés.

2.1 Base de données : retraitement des séries temporelles

Le traitement des données est une partie très importante puisque notre modèle repose en grande partie sur les données et leur qualité. C'est pour cela qu'une attention toute particulière doit être dédiée à cette partie.

2.1.1 Série temporelle des indices du CAC40

La première étape a donc été de traiter les données relatives au CAC40.

Après avoir importé les indices fermeture du CAC40, nous avons dû effectuer trois modifications et ajouts au sein de cette dernière. Pour rappel, nous avons choisi la série des indices du CAC40 entre le 1er Mars 1990 et le 31 Mai 2023, qui possède initialement une granularité quotidienne.

Les analyses de données ont démontré qu'il manquait 147 valeurs. Nous avons donc choisi l'interpolation linéaire pour répondre à ce problème. L'idée est la suivante : pour chaque indice des valeurs manquantes on applique ces étapes en partant du premier indice pour finir par le dernier.

1. Les indices des valeurs précédentes maximales et suivantes minimales non manquantes sont identifiés : $precMax$ et $postMin$;
2. L'interpolation s'effectue à l'aide de la formule suivante :

$$y = y_{precMax} + (x - x_{precMax}) \frac{y_{postMin} - y_{precMax}}{x_{postMin} - x_{precMax}}$$

où y et x sont respectivement la valeur manquante et l'indice de la valeur manquante.

La plage de données est réduite en sélectionnant le dernier jour de chaque mois pour avoir la même fréquence que les données de taux.

La seconde étape a été de transformer les indices en rendements logarithmiques. Pour cela, la formule suivante a été appliquée :

$$\text{LogReturn}_t = \ln \left(\frac{\text{Close}_t}{\text{Close}_{t-1}} \right) \times 100$$

où les indices t représentent la date à laquelle on observe l'indice de fermeture entre le 31 Mars 1990 et le 31 Mai 2023. Puis la première cellule vide à cause du décalage entre $t - 1$ et t est supprimée (une valeur en moins). Les rendements logarithmiques sont finalement obtenus entre le 30 Avril 1990 et le 31 Mai 2023.

Pourquoi avoir transformé les indices bruts de fermetures du CAC40 ?

Dans la littérature, les rendements sont plus présents que les indices puisqu'ils illustrent mieux les évolutions.

La dernière transformation concerne l'ajout d'une variable en plus de celle des rendements logarithmiques. Il s'agit de la volatilité historique. La volatilité se réfère aux changements de valeur d'un instrument financier, représentant ainsi l'évaluation de l'écart dans les prix d'un actif, qu'ils soient à la hausse ou à la baisse.

Il existe deux types de volatilités :

- La volatilité historique : elle est mesurée dans le temps sur un nombre de pas arrière donné. Il s'agit d'une mesure de volatilité sur les valeurs passées de la série ;
- La volatilité implicite : la mesure est orientée vers le futur. Elle est basée sur le prix des options sur indice car le prix des options refléterait les attentes des prix futurs des investisseurs.

Il serait préférable dans un prochain travail de projeter le *smile* de volatilité à 1 an qui est un bon indicateur mais surtout utile pour calculer le prix des dérivés. A défaut d'avoir les volatilités implicites, les volatilités historiques sont calculées sur les log-rendements. Cette deuxième variable permet de mieux décrire la série des actions du CAC40. Dans le mémoire, cette dernière sera considérée comme « illustrative » ou encore « synthétique ».

La formule suivante est appliquée sur chaque ligne :

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}$$

avec :

- N le nombre total d'observations de la série x ;
- n le nombre de pas arrière utilisés ;
- x_i la i -ème valeur de la série x dans l'intervalle $[x_{k+1}, x_{k+n}]$ où k varie entre 0 et $N - n$;
- m la moyenne des valeurs sur l'intervalle $[x_{k+1}, x_{k+n}]$ où k varie entre 0 et $N - n$.

Notons que la valeur de σ_k sera associée au $k + n$ ème rendement logarithmique.

Nous choisissons de prendre un nombre de pas arrière égal à 6 (mois). Cela permet d'avoir une vue à moyen terme de l'évolution de la série, c'est-à-dire sur les 6 derniers mois. De la même manière que pour les rendements, nous utilisons des valeurs passées pour calculer la volatilité. Les $(6 - 1) = 5$

premières valeurs doivent donc être supprimées, pour lesquelles nous n'avons pas de valeur. Puis les données sur la plage du 31 Janvier 2001 au 31 Mai 2023 sont sélectionnées, toujours dans l'idée d'avoir des dates qui coïncident avec celles des taux. Les rendements logarithmiques sur l'indice de fermeture sont exprimées en pourcentage.

Date	Close	Vol
2001-01-31	1.208745	3.739002
2001-02-28	-11.114925	4.907589
2001-03-30	-3.546660	4.823397
2001-04-30	8.499746	6.343801
2001-05-31	-3.350526	5.908815
2001-06-29	-4.286617	5.958316

TABLE 2.1 : Extrait des 6 premières lignes des données retraitées du CAC40

On obtient deux fichiers R avec en sortie la série temporelle multivariée spécifiée ci-dessous :



FIGURE 2.1 : Schéma des deux fichiers utilisés pour le retraitement des données action

Les fonctions développées dans l'explication précédente sont regroupées dans le fichier de droite *fonctions_traitements_donnees.R* et l'appel se fait dans le fichier *traitements_donnees.R*.

2.1.2 Série temporelle des taux swaps contre EURIBOR 6 mois : *Bootstrapping*

Après avoir retraité les données relatives au risque action, l'objectif de cette section est de transformer les taux swaps en taux spots. Rappelons que la série des taux swaps contre EURIBOR 6M a été extraite mais également que le taux EURIBOR 6M est la branche variable du swap et le taux EUSA N la branche fixe.

L'explication est tirée du livre ANDERSEN et PITERBARG (2010) et plus précisément du Chapitre 6 intitulé *Yield Curve Construction and Risk Management*.

Nous faisons le choix d'expliquer la démarche pour une date t , par exemple au 31 Janvier 2001, pour plus de clarté. Cette méthodologie sera appliquée ensuite à chacune des lignes, où chaque ligne correspond à une date d'évaluation des taux swaps contre EURIBOR 6M pour chacune des maturités. Un extrait des données brutes qui sont importées dans le fichier *traitements_donnees.R* est disponible à la table 2.2.

L'idée du papier est de dire que le notionnel de chaque produit de taux peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des flux actualisés produit par le zéro-coupon aux différentes maturités. En supposant que :

- Le notionnel à $t = 0$ s'écrit $v_i = v_i(0)$ où i varie entre 1 et N , N étant le nombre de zéro-coupons. Il s'agit du montant à partir duquel vont être calculés les flux d'intérêt échangés pendant toute

Date	EUR6M	EUSA1	EUSA2	EUSA3	EUSA4	EUSA5	EUSA7
2001-01-31	4.628	4.5650	4.6038	4.7050	4.7900	4.8950	5.1070
2001-02-28	4.639	4.6050	4.6050	4.6900	4.7800	4.8640	5.0885
2001-03-30	4.424	4.3575	4.3725	4.4750	4.5900	4.7065	4.9500
2001-04-30	4.741	4.8225	4.8550	4.9050	5.0190	5.1170	5.2810
2001-05-31	4.446	4.4835	4.6000	4.7445	4.8975	5.0420	5.2980
2001-06-29	4.373	4.3915	4.4800	4.6435	4.7840	4.9340	5.2340

Date	EUSA10	EUSA12	EUSA15	EUSA20	EUSA25	EUSA30
2001-01-31	5.3370	5.4540	5.5970	5.7420	5.7800	5.7870
2001-02-28	5.3060	5.4255	5.5580	5.7060	5.7600	5.7685
2001-03-30	5.2030	5.3270	5.4860	5.6460	5.7325	5.7210
2001-04-30	5.4770	5.5970	5.7370	5.8820	5.9225	5.9435
2001-05-31	5.5575	5.6820	5.8250	5.9655	6.0225	6.0330
2001-06-29	5.5165	5.6530	5.8075	5.9525	6.0075	6.0235

TABLE 2.2 : Extrait des 6 premières lignes des données brutes des taux swaps en pourcentage

la durée de vie du swap ;

- Le prix du swap est noté $p(T) = p(0, T)$ où p une application de sorte que $p : [0, \tau] \rightarrow (0, 1]$ est continue et strictement décroissante ;
- τ est la maturité maximale parmi les N produits de taux considérés ;
- L'intervalle entre 0 et τ peut se subdiviser en M morceaux de sorte que $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M \leq \tau$;
- La matrice C est la matrice des flux où on retrouve les intérêts et les coupons.

L'égalité suivante peut ainsi être écrite :

$$v_i = \sum_{j=1}^M C_{i,j} p(t_j), \quad i = 1, \dots, N.$$

Notons que si le j -ème temps est supérieur strictement à la maturité i , le flux sera nul. Ce qui se traduit pas $C_{i,j} = 0$ si $t_j > T_i$.

Le but est de résoudre l'équation $v = Cp$, où p est l'inconnu. Pour rappel, p est le prix du swap au temps considéré avec T_i la maturité de chaque swap considéré. L'objectif est d'extraire de ces prix les taux spots. Pour cela, la formule qui permet de passer de l'un à l'autre et d'obtenir le résultat escompté :

$$e^{r(T) \cdot T} = p(T) \Leftrightarrow r(T) = \frac{-1}{T} \ln(p(T)).$$

Finalement les taux spots seront exprimés de la forme suivante, pour toutes les dates considérées en t_j :

$$r(T) = \left(\frac{-1}{t_1} \ln(p(t_1)), \dots, \frac{-1}{t_M} \ln(p(t_M)) \right)^T.$$

La seule étape restante est de résoudre l'équation $v = Cp$. Une méthode itérative commune est utilisée : le *Bootstrapping*. Il s'agit d'une procédure utilisée notamment en finance, pour construire une

courbe de rendements à partir des prix d'un ensemble de produits de taux notamment les obligations ou les swaps. Cette définition correspond à la problématique que nous rencontrons et c'est pour cette raison que nous allons l'appliquer.

L'idée de la méthode est résumée dans cet algorithme (issu en totalité du papier ANDERSEN et PITERBARG (2010)) :

1. Soit $p(t_j)$ connu pour $t_j \leq T_{i-1}$, tel que les prix pour les produits de taux coïncident pour $1, \dots, i-1$;
2. Poser une valeur aléatoire pour $p(T_i)$;
3. Utiliser un type d'interpolation pour trouver les valeurs manquantes de $p(t_j)$, $T_{i-1} < t_j \leq T_i$. Nous choisissons l'interpolation linéaire et donc faisons l'hypothèse d'une relation linéaire par morceaux des taux entre les différentes maturités. On utilisera la formule suivante pour interpoler linéairement :

$$r(T) = r(T_i) \frac{T_{i+1} - T}{T_{i+1} - T_i} + r(T_{i+1}) \frac{T - T_i}{T_{i+1} - T_i}, \quad T \in [T_i, T_{i+1}]$$

Sachant que $r(T) = \frac{-1}{T} \ln(p(T))$, cela revient à calculer :

$$p(T) = p(T_i) \cdot \exp\left(\frac{T_{i+1} - T}{T_{i+1} - T_i}\right) + p(T_{i+1}) \cdot \exp\left(\frac{T - T_i}{T_{i+1} - T_i}\right), \quad T \in [T_i, T_{i+1}];$$

4. Calculer v_i avec les valeurs connues de $p(t_j)$, $t_j \leq T_i$;
5. Si le v_i calculé à l'étape précédente est le même que celui observé sur le marché alors on arrête et on passe à l'étape suivante sinon on retourne à l'étape n°2 ;
6. Si $i < N$, $i \leftarrow i + 1$ et on recommence i.e. on repart de l'étape n°1. Sinon on arrête l'algorithme.

Dans le présent mémoire :

- Les produits de taux considérés sont des swaps ;
- $N = 13$ pour les 13 swaps considérés ;
- $v = \mathbb{1}_N$ où il est supposé que le notionnel de chaque swap est égal à 1€ ;
- C est la matrice des flux des swaps, qui correspond à nos données EUSA N contre EURIBOR 6 M retraitées en flux suivant le Ténor choisi. Le Ténor doit être calculé au prorata d'une année. Dans notre cas, le Ténor correspond à la fréquence de paiement.

Pour illustrer ce dernier point, reprenons notre exemple. Dans un premier temps, les *cash-flows* des taux swaps renseignés sont extraits. Le Ténor est supposé de 6 mois autrement dit, il y aura un paiement à cette date sous forme de coupon. Donc tous les 6 mois les intérêts sont versés (le taux renseigné) et à l'échéance (la maturité) le paiement du coupon et du notionnel sont payés. Le tableau de flux est composé de 13 lignes pour les 13 swaps et 60 colonnes pour les dates de paiement (30/6 mois = 30/0.5).

Il y a $13 \times \frac{30}{0.5} = 13$ lignes \times 60 colonnes pour la matrice des *cash flows* et les flux sont nuls pour les temps supérieurs à la maturité du swap considéré. Par exemple pour le premier swap, la maturité est 6 mois. Sur la Table 2.3, pour les dates supérieures à 1 an, le flux est nul.

Une fois le tableau de flux obtenu, l'algorithme de *Bootstrapping* est appliqué. On spécifie deux points :

	0.5Y	1Y	1.5Y	2Y	...	30Y
swap 1	1.023140	0.000000	0.000000	0.000000	...	0.000000
swap 2	0.022825	1.022825	0.000000	0.000000	...	0.000000
...
swap 13	0.028935	0.028935	0.028935	0.028935	...	1.028935

TABLE 2.3 : Extrait des flux obtenus avec les données de taux pour le 31 Janvier 2001

- Pour l'initialisation, l'objectif est de déterminer $p(t_1) = p(T_1)$ tel que p de $C_{1,1}p - v_1 = 0$. La valeur de p qui vérifiera cette égalité sera notée $p(T_1)$;
- Pour les autres itérations de l'algorithme, le même principe que l'initialisation est utilisé de sorte à retomber sur le notionnel du swap. L'objectif est de trouver la valeur de p qui minimise l'écart entre v_i calculé à l'étape 4 et le prix défini initialement. Pour chaque maturité, $p(T_i)$ sera approché et une interpolation linéaire entre $p(T_{i-1})$ et $p(T_i)$ sera réalisée.

Enfin la formule liant le prix du swap et le taux spot sera appliquée pour obtenir les taux.

On obtient donc pour le 31 Janvier 2001 les résultats suivants :

Date	t_1	t_2	t_3	t_4	...	t_{59}	t_{60}
2001-01-31	4.575266	4.512979	4.539287	4.552441	...	5.887772	5.885976

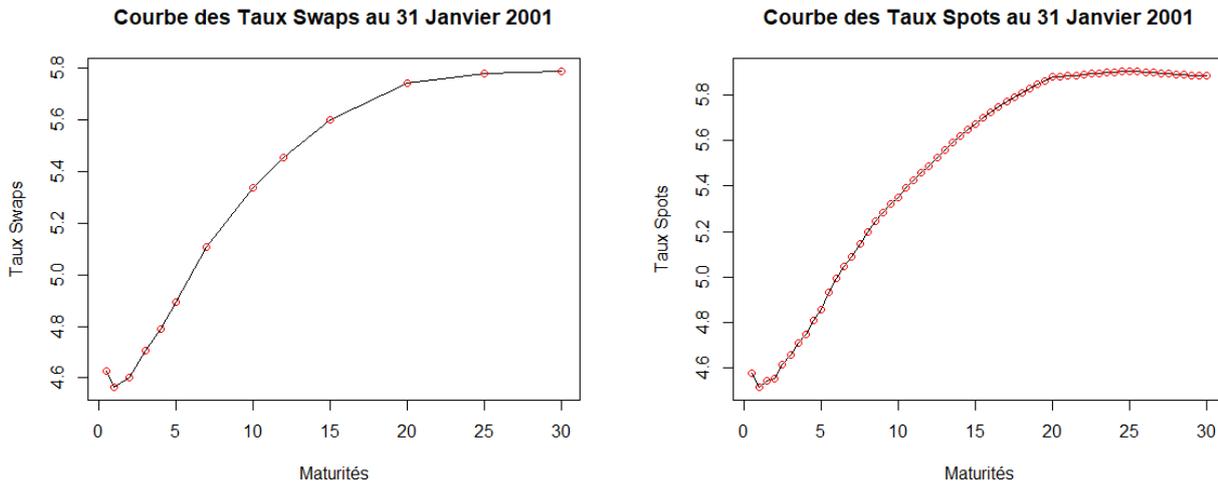
TABLE 2.4 : Extrait des taux spots (en pourcentage) obtenus après application du *Bootstrapping*

FIGURE 2.2 : Comparaison des deux courbes de taux (en pourcentage)

Les valeurs de la courbe des taux swaps sont conservées tout en donnant une maille plus fine pour les maturités non spécifiées pour la courbe des taux swaps.

Les deux fichiers R permettant de réaliser cette transformation sont *Bootstrap_Yield_Curve.R* pour les fonctions et *TauxSwap_TauxSpot.R* pour le bouclage sur toutes les dates, en particulier l'exemple au 31 janvier 2001.

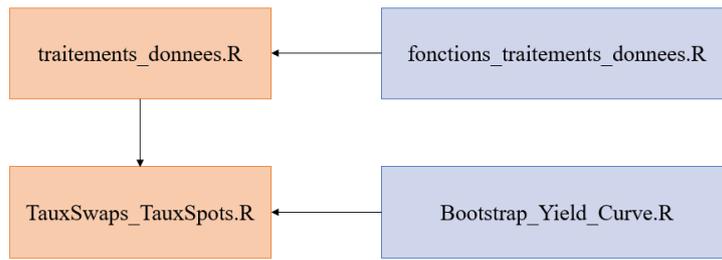


FIGURE 2.3 : Schéma composé des deux nouveaux fichiers utilisés pour le retraitement des Taux Swaps en Taux Spots

Grâce à la méthodologie précédemment développée, les taux spots peuvent être calculés pour toutes les dates. Les résultats suivant sont alors obtenus :

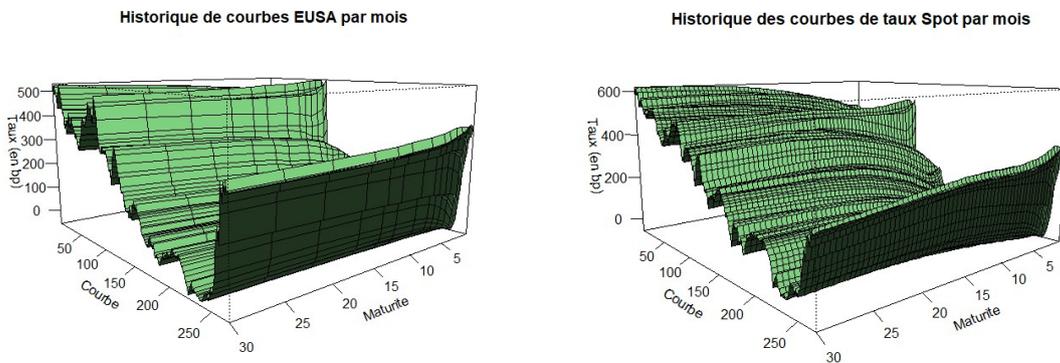


FIGURE 2.4 : Comparaison des deux courbes de taux (en pourcentage) : Taux swaps et Taux spots du 31 Janvier 2001 au 31 Mai 2023

2.1.3 Série temporelle des taux swaps contre EURIBOR 6 mois : Nelson-Siegel

La dernière étape du retraitement des données, avant l’assemblage, est d’utiliser la formule de Nelson-Siegel sur la courbe des taux spots afin d’en extraire les composantes. Nelson-Siegel est un modèle d’économétrie financière classique utilisé sous la probabilité historique pour le risque de taux. Il est défini par la formule suivante :

$$R(t, T) = \mu_{1,t} + \mu_{2,t} \frac{1 - e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} + \mu_{3,t} \left(\frac{1 - e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} - e^{-T/\alpha} \right);$$

avec :

- α un paramètre d’échelle ;
- $\mu_{1,t}$ le facteur de niveau pour le taux long ;
- $\mu_{2,t}$ le facteur de rotation correspondant à l’écart taux long - taux court ;
- $\mu_{3,t}$ le facteur de pentification.

Nous avons fait le choix de fixer le paramètre d’échelle α et d’extraire les composantes $\mu_{1,t}$, $\mu_{2,t}$ et $\mu_{3,t}$ pour les dates t considérées. Le lecteur peut alors s’interroger sur le choix d’extraire les composantes au lieu de directement projeter les taux spots ?

Le fait de projeter trois composantes au lieu de 60 taux spots, et ceci pour chaque date, permet de réduire la dimension du problème de 20 fois.

Fixer le paramètre d'échelle est un choix non-négligeable. Il s'agit d'un des points majeurs qui pourrait être amélioré. Pour essayer de rester cohérent, nous avons étudié son impact sur la reproduction de la courbe. Il s'agit d'une analyse simplifiée qui consiste en :

1. Fixer le paramètre α ;
2. Extraire les 3 composantes de Nelson -Siegel (méthodologie développée ci-dessous) pour 5 dates réparties sur les 269 disponibles entre le 31 Janvier 2001 et le 31 Mai 2023 ;
3. Reconstruire la courbe des taux avec la formule de Nelson-Siegel et les composantes extraites au point précédent ;
4. Tracer les deux courbes sur le même graphique pour observer les différences et ceci pour plusieurs dates ;
5. Calculer la mesure d'erreur *Scaled Pinball Loss* entre la courbe de taux observée et celle reconstruite avec Nelson-Siegel. La mesure d'erreur *Scaled Pinball Loss* sera définie dans la sous-section concernant la validation croisée. Cette mesure est initialement utilisée lors de la validation croisée pour le *tuning* des paramètres. Pouvant difficilement intégrer le paramètre α dans la validation croisée, nous avons décidé de réaliser une analyse en amont de ce paramètre notamment avec l'utilisation de la mesure *Scaled Pinball Loss* ;
6. Déterminer la représentation de Nelson Siegel qui minimise cette mesure.

Les douze α candidats sont les suivants : 0,5, 1, 2, 2,25, 2,5, 2,75, 3, 4, 6, 10, 20 et 30. Puis les 6 étapes développées ci-dessus sont réalisées. Nous choisissons d'observer les différences pour la première date disponible, soit le 31 Janvier 2001. Même s'il s'agit d'une simple analyse graphique, cela permet d'avoir une idée de comment peut influencer le paramètre d'échelle dans la formule de Nelson-Siegel.

La courbe en rouge représente celle reconstruite avec la formule de Nelson-Siegel et celle en bleu la courbe des taux spots observée (pour être précis la courbe des taux spots reconstruites par *Boots-trapping* sur les taux swaps).

Plus α est petit, plus il y a un grand rebond pour les maturités allant de 1 à 5, correspondant aux maturités 6 mois à 5 ans avec un pas fixe de 6 mois. Lorsque la valeur de α est inférieure ou égale à 1, on constate une différence importante entre les deux courbes.

Pour les α compris entre 2 et 3, il est plus compliqué d'avoir un avis aussi tranché sur l'analyse. En effet, on peut voir que la courbe rouge épouse les formes de la courbe observée (en bleu). On constate une différence sur la concavité des courbes pour les maturités entre 15 et 30 ans. La courbe reconstruite avec Nelson-Siegel est moins concave que celle des taux spots. Néanmoins la courbe reconstruite capte bien le petit rebond pour les maturités allant de 1 à 2.

Pour les α compris entre 4 et 10, la forme générale est bonne. On observe des différences pour les petites maturités (1 à 2 ans) et les grandes (celles allant de 15 à 30 ans).

Pour les valeurs de α supérieures ou égales à 20, on observe une concordance assez importante pour toute la courbe. L'unique différence est la forme de la courbe pour les petites maturités où le rebond n'est pas bien capté.

Cette brève analyse nous laisse penser que les paramètres d'échelle α compris entre 2 et 3 ou entre 20 et 30 peuvent être les plus adaptés. Cette analyse visuelle nous aura permis de savoir que le α égal à 0,5 ou 1 est à éviter.

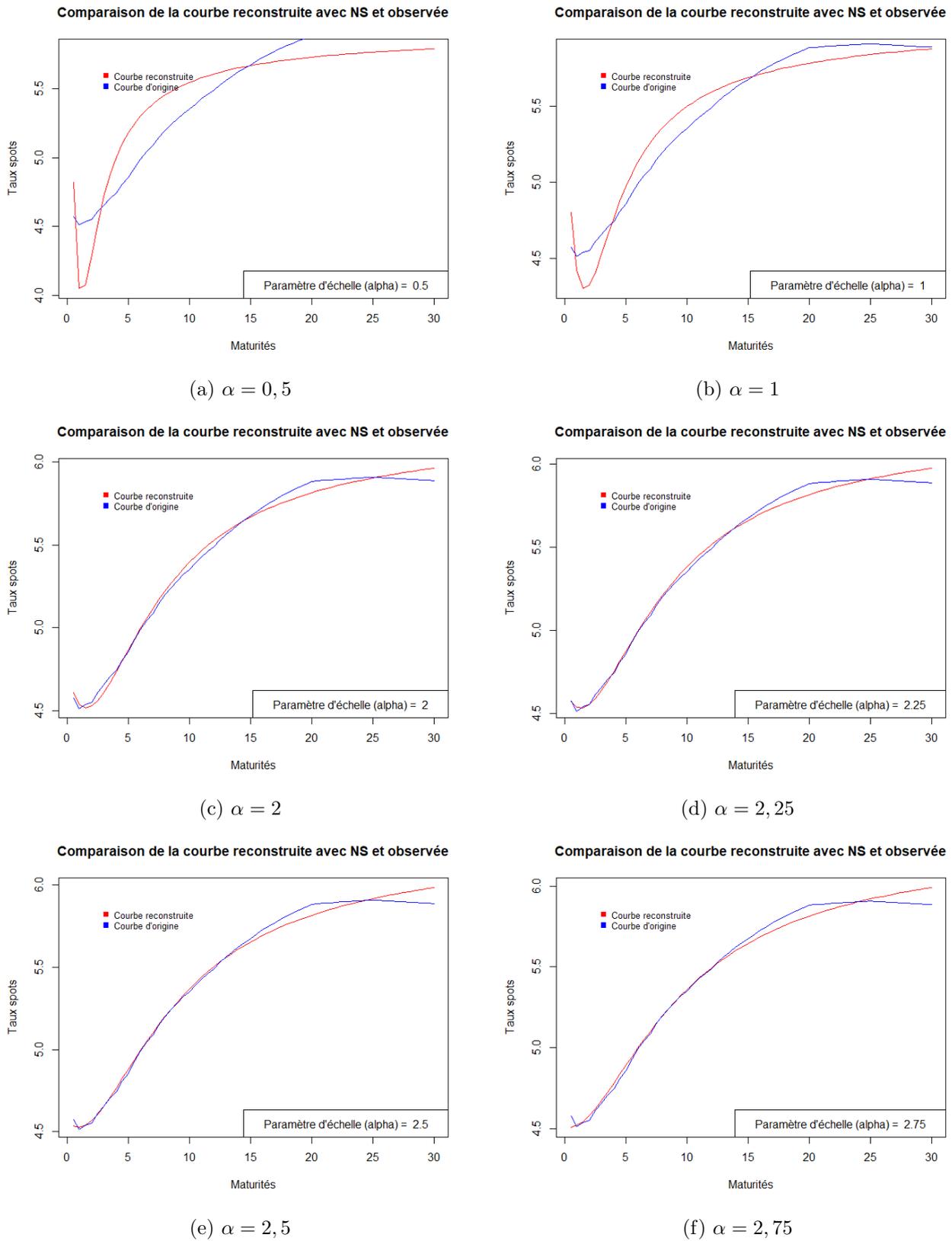


FIGURE 2.5 : Comparaison entre la courbe observée et la courbe reconstruite avec Nelson Siegel au le 31 Janvier 2001 pour 6 valeurs arbitraires de α (paramètre d'échelle)

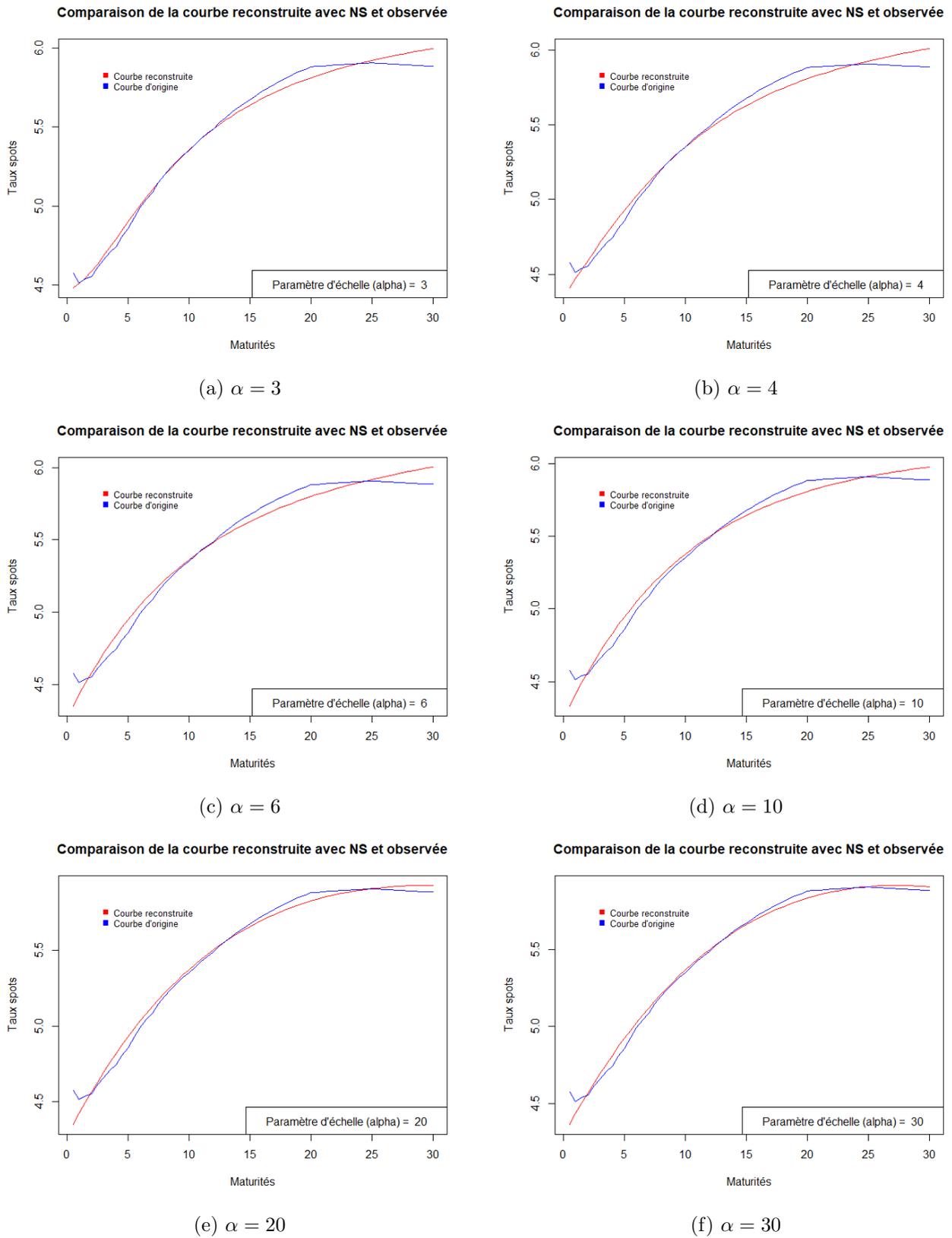


FIGURE 2.6 : Comparaison entre la courbe observée et la courbe reconstruite avec Nelson Siegel au le 31 Janvier 2001 pour 6 valeurs arbitraires de α (paramètre d'échelle)

Par la suite, la comparaison est réalisée mais cette fois-ci pour les 268 autres dates disponibles en plus de celle-ci. Sur chaque ensemble, la mesure *Scaled Pinball Loss* (SPL) est déterminée, pour un α fixé.

α	0,5	1	2	2,25	2,5	2,75
SPL	2,170877	2,157967	2,152237	2,152183	2,152300	2,152504

α	3	4	6	10	20	30
SPL	2,152723	2,153484	2,153900	2,153215	2,152392	2,152217

TABLE 2.5 : Mesure d'erreur *Scaled Pinball Loss* pour les douze valeurs de α pour les 269 dates du 31 Janvier 2001 au 31 Mai 2023

Le minimum est atteint pour $\alpha = 2,25$. Le paramètre d'échelle est fixé à cette valeur pour le reste de l'étude. Ce travail est réalisé dans le fichier *Test_influence_NS_paramEchelle.R*.

Revenons à un point que nous avons juste énoncé sans l'expliquer : Comment extraire les composantes de Nelson-Siegel ?

Il existe une fonction intitulée *NSf* dans le package *NMOF* (SCHUMANN, 2023). Les variables explicatives des facteurs de Nelson-Siegel sont donc calculés pour un α fixé et des maturités précises. Pour chaque maturité, sont obtenus 3 coefficients. Une régression est réalisée entre ces 3 variables explicatives, calculées avec *NSf*, et chacun des taux spots. Autrement dit, une régression entre y le taux spot à une maturité et x les 3 variables explicatives est faite et pour chaque maturité, des coefficients sont obtenus. Les coefficients optimaux sont retenus de sorte à ce que le modèle explique au mieux la courbe des taux à une date. Ces calculs sont réalisés pour les 269 dates. Les composantes de Nelson-Siegel correspondent donc aux régresseurs des variables explicatives pour expliquer les taux spots pour chacune des dates. Ce qui correspond bien à la formule définie auparavant.

A l'issu de toutes ces étapes, deux bases de données retraitées sont obtenues, une pour les taux et une pour les actions. Une jointure est alors réalisée entre les deux bases, sur les dates qui sont communes.

On obtient alors la série temporelle multivariée utilisée pour être projetée :

Date	Close	VOL	Comp1	Comp2	Comp3
2001-01-31	1,2087450	3,739002	6,274292	-1,57809255	-2,75384032
2001-02-28	-11,1149246	4,907589	6,256207	-1,49987693	-2,89126679
2001-03-30	-3,5466600	4,823397	6,300355	-1,75556556	-3,28066817
2001-04-30	8,4997460	6,343801	6,393242	-1,48735784	-2,64693400
2001-05-31	-3,3505264	5,908815	6,564374	-2,12150732	-2,50469673
2001-06-29	-4,2866167	5,958316	6,606830	-2,23514144	-2,78886612

TABLE 2.6 : Extrait de la série temporelle multivariée après retraitement

On note :

- Close : Rendements des indices de fermeture du CAC40 ;
- VOL : La volatilité historique sur l'indice CAC40 avec un pas arrière égal à 6 ;

- Comp1 : La première composante dans la formule de Nelson-Siegel i.e. le taux long ;
- Comp2 : La deuxième composante dans la formule de Nelson-Siegel i.e. le facteur de rotation correspondant à l'écart entre taux long et taux court ;
- Comp3 : La troisième composante dans la formule de Nelson-Siegel i.e. le facteur de pentification ou convexité.

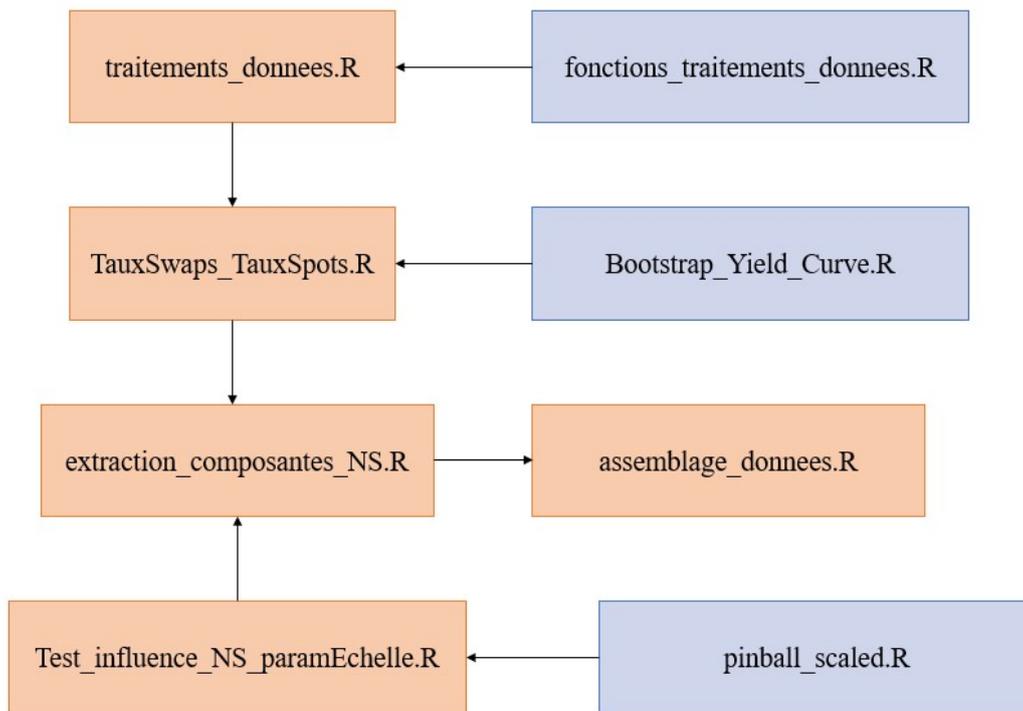


FIGURE 2.7 : Schéma des fichiers utilisés pour le retraitement des données dont l'extraction des composantes de Nelson-Siegel

2.2 *Machine Learning* et GSE : implémentation du modèle RVFL

Après avoir obtenu la série temporelle multivariée (Table 2.6), nous allons présenter le modèle de projection basé sur les réseaux de neurones RVFL. L'explication et le *package ahead* sont tirés du travail de MOUDIKI et al. (2018).

2.2.1 Présentation de la méthode utilisée dans le *package ahead*

Dans le précédent chapitre, nous avons brièvement introduit les réseaux de neurones à propagation avant. Le modèle considéré par MOUDIKI et al. (2018) possède une base de RVFL sous deux contraintes de régularisation sur les paramètres de régression.

Modèle RVFL à une couche (cachée)

L'explication ci-dessous développe uniquement le fonctionnement général du RVFL mais sans intégrer la notion de série temporelle, décrite plus tard.

Le modèle de réseau de neurones considéré possède une unique couche cachée à plusieurs noeuds. En considérant y comme la variable de sortie, $y \in \mathbb{R}^n$ peut être expliqué par un ensemble de prédicteur

$Z^{(j)} \in \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, \dots, p\}$ où p est le nombre de séries temporelles constituant la série temporelle multivariée. La i -ème sortie, i étant le nombre d'observations de la série temporelle multivariée (STM), peut être décrite comme :

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j Z_i^{(j)} + \sum_{l=1}^L \gamma_l g \left(\sum_{j=1}^p W^{(j,l)} Z_i^{(j)} \right) + \epsilon_i.$$

Composée des paramètres suivant :

- g la fonction d'activation ;
- L le nombre de noeuds de la couche cachée ;
- $W^{(j,l)}$ sont les éléments de la couche cachée où $j \in \{1, \dots, p\}$ et $l \in \{1, \dots, L\}$;
- Les paramètres β_j et γ_j sont appris grâce aux données observées $Z_i^{(j)}$ avec $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$;
- Les résidus ϵ_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, qui sont la différence entre la valeur observée et estimée grâce au modèle RVFL.

En considérant que les données sont sous la forme d'une matrice 2×2 , avec deux variables ($p = 2$) et deux observations chacune ($n = 2$), le réseau de neurone précédemment décrit peut être représenté de la façon suivante :

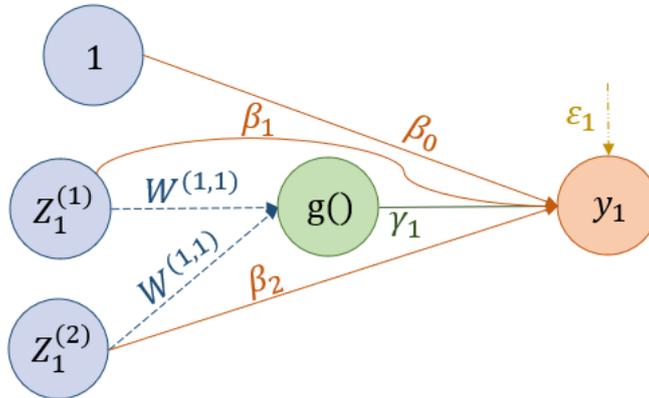


FIGURE 2.8 : Schéma simplifié d'un RVFL à une couche pour $i = 1$

Ce type de modèle peut être interprété comme l'idée de trouver un compromis entre les effets linéaires et potentiellement non-linéaires entre les prédicteurs originaux $Z^{(j)}$ et les prédicteurs transformés $\Phi(Z)^{(l)} = g \left(\sum_{j=1}^p W^{(j,l)} Z_i^{(j)} \right)$ (en sortie de la couche cachée).

Plusieurs fonctions d'activation sont généralement utilisées :

- La fonction sigmoïde :

$$g : x \mapsto \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad ;$$

- La fonction tangente hyperbolique :

$$g : x \mapsto \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad ;$$

- La fonction Unité Linéaire Rectifiée connue sous le nom de ReLU (*Rectified Linear Units*) :

$$g : x \mapsto \max(x, 0) \quad .$$

Il y a deux différences majeures entre un réseau à propagation avant usuelle à une couche intermédiaire et un RVFL :

1. Le lien direct entre les entrées et les sorties qui permet d'avoir une dépendance linéaire entre ces deux quantités. Il s'agit des liaisons directes entre les prédicteurs ou variables d'entrée $Z^{(j)}$ et les variables de sortie $y_i : \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j Z_i^{(j)}$;
2. Les éléments de la couche cachée, généralement non entraînés, sont choisis aléatoirement et dans un intervalle donné.

En général, les paramètres optimaux β_j et γ_j sont déterminés à l'aide d'une régression des moindres carrés sur les variables estimées par le modèle RVFL et les valeurs observées. Dans le cas des STM, la corrélation entre les différentes séries est importante. On ne va pas chercher leurs valeurs sur tout \mathbb{R}^* mais sur une région réduite de sorte que l'on ait une contrainte sur chacun des paramètres de régression (ou régresseurs) :

$$\sum_{j=1}^p \beta_j^2 \leq u \quad \text{et} \quad \sum_{l=1}^L \gamma_l^2 \leq v.$$

Pour cela on va réaliser une régression de Ridge de y (variable de sortie) sur l'ensemble des valeurs observées et sur les prédicteurs transformés. Toujours d'après MOUDIKI et al. (2018), le fait de faire varier les paramètres dans deux boules séparées permet plus de flexibilité dans la structure de covariance entre les prédicteurs et les sorties. De plus, les auteurs indiquent que ces restrictions permettraient au modèle d'éviter les phénomènes de sur-apprentissage. Une formule fermée pour déterminer les valeurs optimales pour chaque régresseur sera explicitée ci-dessous.

Ce type de réseaux de neurones n'est pas choisi pas hasard. Les RVFL sont des outils utilisés pour projeter des séries temporelles avec de fortes corrélation et de grandes dimensions. Ils sont donc très adaptés pour projeter une série temporelle multivariée dans le cas d'un GSE. En effet, chaque facteur de risque modélisé par une série temporelle (univarié pour les actions ou multivariée pour les taux) est très corrélé aux autres. Le modèle peut alors prendre en compte cette corrélation dans la phase d'apprentissage sans pour autant sur-apprendre sur les données. Le nombre de paramètres ainsi que la présence de formules fermées permettent aux réseaux de type RVFL d'être plus facile à calibrer que des réseaux de neurones de type LSTM (*Long Short Term Memory*) ou GAN (*Generative Adverse Network*) et plus rapide. Ils sont aussi plus faciles à appréhender que les deux derniers modèles cités.

Les poids $W^{(j,l)}$ entre les variables d'entrée et la couche cachée sont déterminés de manière aléatoire. Ils sont donc dépendants de la graine. Pour rappel, la graine est utilisée lors de l'utilisation d'un générateur pseudo-aléatoire. En résumé, pour chaque graine on obtiendra un ensemble de paramètres β_j et γ_l différents. En général, la graine est fixée afin de ne plus faire varier les résultats et obtenir à chaque simulation les mêmes résultats. En revanche, si les noeuds de la couche cachée sont quasi-aléatoires, le générateur ne cherche plus à reproduire du hasard mais à générer des points uniformément distribués dans l'espace (à la manière d'une grille et sans doublon). C'est pour cette raison que l'on introduit la notion de quasi-aléatoire. Les éléments de la couche cachée $W^{(j,l)}$ seront extraits d'un générateur de nombre quasi-aléatoire et plus précisément d'une suite de Sobol ou de Halton sur $[0, 1]$ qui est décalée de telle sorte que la suite appartient à l'intervalle $[-1, 1]$ ou d'une suite uniforme sur $[-1, 1]$.

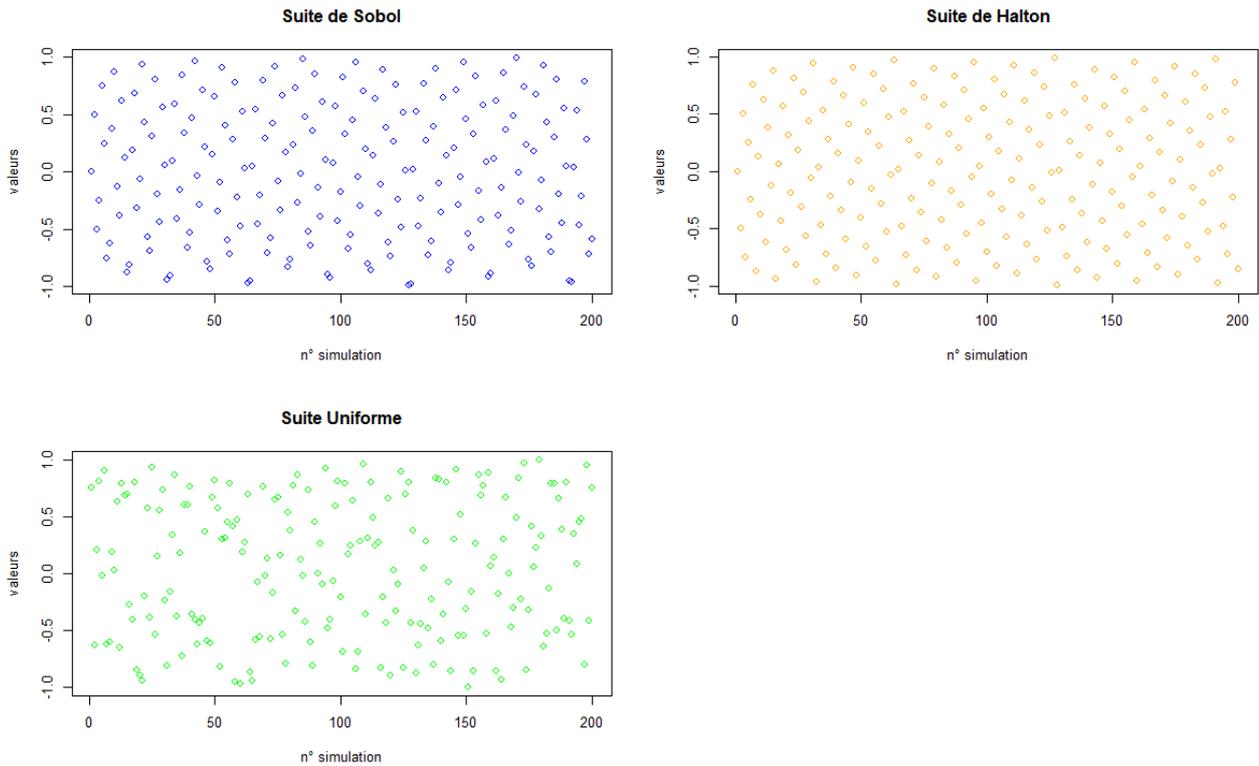


FIGURE 2.9 : Exemple des différentes suites possibles pour fixer les poids de la couche cachée

Les poids fixés de manière aléatoires permettent une certaine rapidité d'entraînement.

Le lecteur intéressé peut se référer à la page 4 du papier de recherche MOUDIKI et al. (2018) pour plus de détails sur la suite de Sobol dans la couche cachée.

Présentation du RVFL appliqué aux séries temporelles multivariées

Après avoir vu les grands principes du RVFL, le modèle va être appliqué aux STM.

On considère une série temporelle multivariée composée de p séries temporelles telle qu'elle soit définie par $\left((X_t^{(j)})_{t \geq 0}\right)$ où $j \in \{1, \dots, p\}$. On observe la série temporelle multivariée en $n \in \mathbb{N}^*$ dates discrètes, autrement dit on considère chaque série temporelle aux dates n .

Pour rappel, l'objectif est de prédire sur un horizon noté h les prochaines valeurs de la STM. En considérant que l'on a n valeurs pour chaque ST, on veut obtenir pour chacune les valeurs comprises comprises entre $n + 1$ et $n + h$ où $h \in \mathbb{N}^*$. Ceci de manière simultanée pour les p variables ce qui permet aux séries temporelles d'interagir sur les prédictions de chacune.

Pour entraîner notre modèle avec nos données, on doit créer 2 matrices : une matrice X et Y où, respectivement, les prédicteurs et les variables de sorties seront stockés.

Pour la matrice Y , on va utiliser $k < n$ valeurs passées dites « lags » pour chaque série temporelle de sorte que l'on ait pour $j \in \{1, \dots, p\}$: $Y^{(j)} = \left(X_n^{(j)}, \dots, X_{(k+1)}^{(j)}\right)^T$ où $X_n^{(j)}$ est la valeur la plus récente observée et $X_{(k+1)}^{(j)}$ la $k + 1$ ème plus récente pour la série j . On aura alors en colonne pour chaque série temporelle la date la plus récente sur la première ligne et la $k + 1$ ème sur la dernière ligne. La matrice contenant les variables de sortie Y appartient à $\mathbb{R}^{(n-k) \times p}$.

La matrice X , contenant les prédicteurs, appartient à $\mathbb{R}^{(n-k) \times (k \times p)}$. On va créer une sorte de décalage pour conserver la séquence des séries temporelles. C'est pour cela que l'on aura p blocs (pour les différentes ST) de k lags. Les k « sous séries temporelles » correspondent au décalage effectué pour avoir des séries de longueur $n - k$ mais qui balayent toutes les valeurs entre 1 et k . De sorte que l'on ait en colonne : $X^{(j_0)} = \left(X_{n-i}^{(j_0)}, \dots, X_{k+1-i}^{(j_0)} \right)^T$, avec l'indice j_0 , le j_0 ème bloc de k lags de la variable j_0 . On note que j_0 appartient à $\{1, \dots, p\}$. L'indice i permet quant à lui de balayer tout le bloc j_0 de longueur k puisque que i est dans l'intervalle $\llbracket 1; k \rrbracket$.

$$X^{(j_0)} = \begin{bmatrix} X_{n-1}^{(j_0)} & X_{n-2}^{(j_0)} & X_{n-3}^{(j_0)} & \dots & X_k^{(j_0)} \\ X_{n-2}^{(j_0)} & X_{n-3}^{(j_0)} & X_{n-4}^{(j_0)} & \dots & X_{k-1}^{(j_0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n-k}^{(j_0)} & X_{n-k+1}^{(j_0)} & X_{n-k+2}^{(j_0)} & \dots & X_1^{(j_0)} \end{bmatrix}$$

L'exemple de MOUDI KI et al. (2018) permet de fixer toutes les notations :

Soit une série temporelle multivariée où $p = 2$ et $n = 5$, i.e. composées de 2 séries temporelles chacune

avec 5 observations aux mêmes dates $t_1 < \dots < t_5$:

$$\begin{pmatrix} X_{t_1}^{(1)} \\ X_{t_2}^{(1)} \\ \vdots \\ X_{t_5}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t_1}^{(2)} \\ X_{t_2}^{(2)} \\ \vdots \\ X_{t_5}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

On choisit arbitrairement de considérer $k = 2$ lags et $L = 3$ neurones dans la couche cachée. On aura Y la matrice des variables de sorties, X la matrice des prédicteurs et W la matrice des poids de la couche cachée :

$$Y = \begin{bmatrix} X_{t_5}^{(1)} & X_{t_5}^{(2)} \\ X_{t_4}^{(1)} & X_{t_4}^{(2)} \\ X_{t_3}^{(1)} & X_{t_3}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X_{t_4}^{(1)} & X_{t_3}^{(1)} & X_{t_4}^{(2)} & X_{t_3}^{(2)} \\ X_{t_3}^{(1)} & X_{t_2}^{(1)} & X_{t_3}^{(2)} & X_{t_2}^{(2)} \\ X_{t_2}^{(1)} & X_{t_1}^{(1)} & X_{t_2}^{(2)} & X_{t_1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} W^{(1,1)} & W^{(1,2)} & W^{(1,3)} \\ W^{(2,1)} & W^{(2,2)} & W^{(2,3)} \\ W^{(3,1)} & W^{(3,2)} & W^{(3,3)} \\ W^{(4,1)} & W^{(4,2)} & W^{(4,3)} \end{bmatrix}$$

Prédiction avec h pas en avant

Pour rappel k est le nombre de pas arrières. On utilise k prédicteurs pour prédire les $n - k$ valeurs suivantes. L'idée est d'avoir k valeurs peu importe l'itération. Pour cela, l'auteur a effectué un décalage en enlevant la valeur la plus ancienne et en la remplaçant par la 2ème plus ancienne. Puis de décaler toutes les valeurs d'un pas. Enfin ajouter à la dernière valeur, donc la plus récente, l'ancienne valeur réponse qui fait maintenant partie des prédicteurs. La nouvelle valeur de la variable réponse estimée sera calculée grâce aux nouveaux prédicteurs et aux coefficients estimés avec Ridge. La régression est refaite à chaque itération sur le X et Y du tour précédent.

On aurait alors comme nouveaux prédicteurs :

$$X_n^* = (X_n^{(1)}, \dots, X_{n-k+1}^{(1)}, \dots, X_n^{(p)}, \dots, X_{n-k+1}^{(p)}).$$

La prévision du premier, $h = 1$, pas en avant est alors donnée par :

$$\left(\hat{X}_{n+1}^{(1)}, \dots, \hat{X}_{n+1}^{(p)} \right) = \left(X_n^* \quad \Phi(X_n^*) \right) \begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Deux points sont à préciser :

- On estime la première prédiction avec les valeurs non-estimées, c'est-à-dire celles en entrée. On réinjecte ensuite dans les nouveaux prédicteurs la valeur estimée. Par exemple à la première itération ($h=1$), on aura $n - k$ valeurs d'origine « observées » et 0 d'origine « estimées » dans les prédicteurs. En revanche, à la deuxième itération ($h=2$), on aura $n - k - 1$ valeurs d'origine « observées » et 1 d'origine « estimées » dans les prédicteurs. Et ainsi de suite ;
- On obtient $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ grâce à la régression présentée ci-dessus.

Les h prochains pas seront obtenus de la même manière en ajoutant cette fois $\hat{X}_{n+1}^{(1)}, \dots, \hat{X}_{n+1}^{(p)}$ et non $X_{n+1}^{(1)}, \dots, X_{n+1}^{(p)}$ aux prédicteurs de manière à ce que ce soit :

$$X_{n+1}^* = (\hat{X}_{n+1}^{(1)}, X_n^{(1)}, \dots, X_{n-k+1}^{(1)}, \dots, \dots, \hat{X}_{n+1}^{(p)}, X_n^{(p)}, \dots, X_{n-k+1}^{(p)}).$$

Régression de ridge sur les paramètres β_j et γ_j

Tout l'intérêt du RVFL repose sur le fait d'avoir 2 paramètres de régularisation différents pour les 2 groupes de variables. C'est ce qui différencie le travail de MOUDIKI et al. (2018) avec une régression de Ridge usuelle.

On considère que y est la j_0 ème colonne de la matrice de réponse Y (matrice des sorties) et que $\Phi(X)$ est la matrice des prédicteurs transformés obtenue à partir de la matrice des observations notée X après passage de la couche intermédiaire. De plus, on note l'ensemble des paramètres de la régression associé à la j_0 ème série temporelle $\beta_m^{(j_0)} := \beta_m$ et $\gamma_l^{(j_0)} := \gamma_l$, pour $m \in \{1, \dots, k\}$ et $l \in \{1, \dots, L\}$.

Trouver les paramètres de régression pour la j_0 ème série temporelle sous les contraintes

$$\sum_{m=1}^{k \times p} \beta_m^2 \leq u \quad \text{et} \quad \sum_{l=1}^L \gamma_l^2 \leq v$$

pour $u, v \in \mathbb{R}^*$, conduit à minimiser la somme des carrés d'un résidu pénalisé.

Ce qui nous amène à considérer les vecteurs $\beta \in \mathbb{R}^{k \times p}$ et $\gamma \in \mathbb{R}^L$ qui contiennent l'ensemble des paramètres de régression. On obtient alors le Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}(X; \beta; \gamma) = (y - X\beta - \Phi(X)\gamma)^T (y - X\beta - \Phi(X)\gamma) + \lambda_1 \beta^T \beta + \lambda_2 \gamma^T \gamma$$

où λ_1 et λ_2 sont les multiplicateurs de Lagrange.

On va alors prendre la dérivée partielle du Lagrangien noté \mathcal{L} par rapport à β puis par rapport à γ . On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(X; \beta; \gamma)}{\partial \beta} &= -y^T X - X^T y + 2(X^T X)\beta + X^T \Phi(X)\gamma + (\Phi(X)\gamma)^T X + 2\lambda_1 \beta \\ &= 2(X^T X + \lambda_1 I_{k \times p})\beta - y^T X - X^T y + X^T \Phi(X)\gamma + (\Phi(X)\gamma)^T X \\ &= 2(X^T X + \lambda_1 I_{k \times p})\beta - 2X^T y + 2X^T \Phi(X)\gamma \end{aligned}$$

où $I_{k \times p}$ est la matrice identité de dimension $(k \times p) \times (k \times p)$.

D'un manière similaire, on obtient la dérivée partielle du Lagrangien par rapport à γ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(X; \beta; \gamma)}{\partial \gamma} = 2(\Phi(X)^T \Phi(X) + \lambda_2 I_L) \gamma - 2\Phi(X)^T y + 2\Phi(X)^T X \beta$$

où I_L est la matrice identité de dimension $L \times L$.

Afin de trouver les valeurs qui minimisent le Lagrangien par rapport à β et γ , on regarde lorsque les deux dérivées partielles sont égales à 0. On obtient les égalités suivantes :

$$\begin{cases} (X^T X + \lambda_1 I_{k \times p}) \beta + X^T \Phi(X) \gamma = X^T y \\ (\Phi(X)^T \Phi(X) + \lambda_2 I_L) \gamma + \Phi(X)^T X \beta = \Phi(X)^T y \end{cases}$$

Ce qui revient en formulation matricielle à :

$$\begin{pmatrix} X^T X + \lambda_1 I_{k \times p} & X^T \Phi(X) \\ \Phi(X)^T X & \Phi(X)^T \Phi(X) + \lambda_2 I_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^T y \\ \Phi(X)^T y \end{pmatrix}$$

Maintenant, si on pose que :

$$A = \begin{pmatrix} X^T X + \lambda_1 I_{k \times p} & X^T \Phi(X) \\ \Phi(X)^T X & \Phi(X)^T \Phi(X) + \lambda_2 I_L \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} B & C^T \\ C & D \end{pmatrix}$$

et $S = D - CB^+C^T$. En utilisant l'algorithme décrit dans CORMEN (2009) pour l'inversion des matrices par bloc, on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^+ + B^+C^T S^+ C B^+ & -B^+C^T S^+ \\ -S^+ C B^+ & S^+ \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_1^+ & A_2^+ \\ A_3^+ & A_4^+ \end{pmatrix}$$

où S^+ et B^+ sont les matrices S et B pseudo-inverses de Moore-Penrose (PENROSE, 1955).

Donc pour chaque colonne y de Y (pour chaque série temporelle), on a les solutions suivantes :

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^+ & A_2^+ \\ A_3^+ & A_4^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^T y \\ \Phi(X)^T y \end{pmatrix}$$

On peut généraliser cela sur les p séries temporelles de sorte que l'on ait :

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^+ & A_2^+ \\ A_3^+ & A_4^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^T Y \\ \Phi(X)^T Y \end{pmatrix}$$

Comme la fonction à minimiser est convexe et qu'il existe une solution alors les solutions du problème $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ sont donc les minimums globaux (et non juste locaux).

Ces estimateurs dépendent du choix de λ_1 et λ_2 . Il sera donc très primordiale de l'intégrer dans la validation croisée pour optimiser les paramètres de pénalisation.

2.2.2 Validation croisée de la série temporelle multivariée

Avant de projeter la STM à l'aide du RVFL du *package ahead*, il est généralement conseillé d'optimiser les hyperparamètres. Pourquoi et comment le faire ?

Tout d'abord, définissons ce que sont les hyperparamètres : « Ce sont les paramètres ayant une valeur qui permet de contrôler le processus d'entraînement du modèle ». Optimiser les hyperparamètres permet tout simplement d'avoir un meilleur résultat lors de la projection, puisque le modèle sera calibré sur les données. Une méthode généralement utilisée est la validation croisée ou *Cross Validation*.

Nous avons finalement opté pour une grille d'hyperparamètres à optimiser. La méthode consiste à définir un ensemble de valeurs que peuvent prendre les paramètres puis de réaliser l'ensemble des combinaisons possibles. Toutes ces combinaisons sont testées dans la validation croisée. Enfin le modèle sélectionné est celui qui possède le score le plus petit (puisque l'on doit minimiser la MSPL, développée par la suite).

Technique d'échantillonnage

Lors de la mise en place de la validation croisée, l'algorithme doit diviser en plusieurs sous-ensembles l'échantillon. Chacun des sous ensembles sera divisé de nouveau en un échantillon d'apprentissage et de test.

Grâce à cette multitude de sous-échantillons, le modèle sélectionné (avec des paramètres fixés) est testé afin de savoir si il est robuste face à cette diversité. Dans le cas des séries temporelles, l'aspect séquentiel doit être pris en compte contrairement au cas des échantillons « classiques ». En effet, les séries temporelles sont ordonnées : elles possèdent un ordre précis, de la première date à la dernière. C'est pour cette raison que l'on utilise une méthode basée sur les fenêtres roulantes (ou glissantes) pour définir les sous-échantillons :

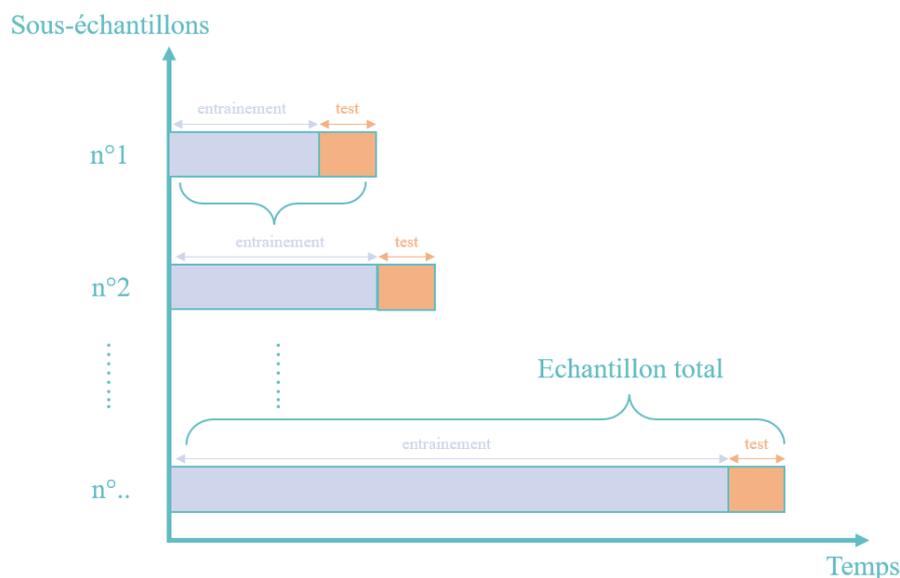


FIGURE 2.10 : Schéma des sous-échantillons construits avec un principe de fenêtre roulante pour la validation croisée

Le principe permet de conserver la chronologie de la série tout en la scindant en différents échantillons. Notons qu'une fenêtre de taille fixe aurait pu être choisie pour la validation croisée suivant le même principe. Néanmoins, la taille du bloc étant fixe, le sous-échantillon précédent de test est ajouté au nouveau échantillon d'apprentissage mais les premières valeurs de l'ancien échantillon d'apprentissage (de longueur du bloc de test) sont retirées. L'évaluation sur le nouvel échantillon est alors réalisée avec le modèle. Le même principe est de nouveau appliqué jusqu'à balayer toutes les dates de l'échantillon total (d'entraînement).

Mesure de l'erreur : *Scaled Pinball Loss*

Le dernier point à préciser pour la validation croisée est la mesure de l'erreur utilisée. En effet, en notant y les valeurs observées et \hat{y} les valeurs prédites avec n occurrences chacune, les mesures généralement utilisées sont :

- La racine de l'erreur quadratique moyenne ou *Root Mean Square Error (RMSE)* :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2};$$

- L'erreur absolue moyenne ou *Mean Absolute Error (MAE)* :

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|.$$

L'objectif étant de minimiser chacune de ces erreurs afin que les valeurs estimées soient les plus proches possibles des valeurs observées.

Nous pouvons constater que ces mesures peuvent être utilisées dans le cadre des séries temporelles univariées. Cependant, l'étude implique plusieurs séries temporelles, ce qui signifierait que nous aurions une valeur de mesure par série temporelle. Comment agréger ces résultats pour obtenir une mesure cohérente avec nos données ? Nous allons utiliser la *Scaled Pinball Loss* ([The M5 Competition : Competitor's Guide 2020](#)).

Il s'agit d'une mesure adaptée dans le cadre de notre validation croisée car elle prend en compte les différentes projections. L'idée est de mesurer l'écart entre la valeur de la série temporelle observée et le quantile u de la série multivariée obtenue avec le modèle de sorte que :

$$SPL(u) = \frac{1}{h} \frac{\sum_{t=n+h}^{n+h} ((Y_t - Q_t(u))u \mathbb{1}_{(Q_t(u) \leq Y_t)} + (Q_t(u) - Y_t)(1-u) \mathbb{1}_{(Q_t(u) > Y_t)})}{\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n |Y_t - Y_{t-1}|}$$

avec :

- Y_t la valeur observée de la série temporelle à la date t pour chaque variable ;
- $Q_t(u)$ le quantile u de la série temporelle multivariée prédite à la date t ;
- h l'horizon de projection ;
- n la longueur de l'ensemble d'entraînement ;
- $\mathbb{1}$ la fonction indicatrice.

L'opération est ainsi répétée sur tous les quantiles puis la moyenne de tous ces résultats est réalisée :

$$MSPL = \sum_{i=1}^p w_i \frac{1}{\text{card}(U)} \sum_{j=1}^{\text{card}(U)} SPL(u_j)$$

avec :

- p le nombre de séries temporelles ;

- w_i le poids associé à chaque série temporelle. Dans notre cas, nous considérerons que toutes les variables ont le même poids ;
- U l'ensemble des valeurs des quantiles tel que $U = \{0, 005, 0, 025, 0, 165, 0, 25, 0, 5, 0, 75, 0, 835, 0, 975, 0, 995\}$. On a alors $\text{card}(U) = 9$.

Finalement, on a la formule suivante :

$$MSPL = \frac{1}{9} \sum_{j=1}^9 SPL(u_j)$$

Ces étapes sont répétées pour tous les sous-ensembles définis lors de la validation croisée. La moyenne de la SPL est réalisée pour tous les sous-échantillons. Enfin, le score du RVFL par rapport aux hyperparamètres fixés précédemment est obtenu. Notons que plus la MSPL est petite, meilleure les projections sont supposées être.

L'architecture finale pour la génération des scénarios sous la probabilité historique se présente donc de la manière suivante :

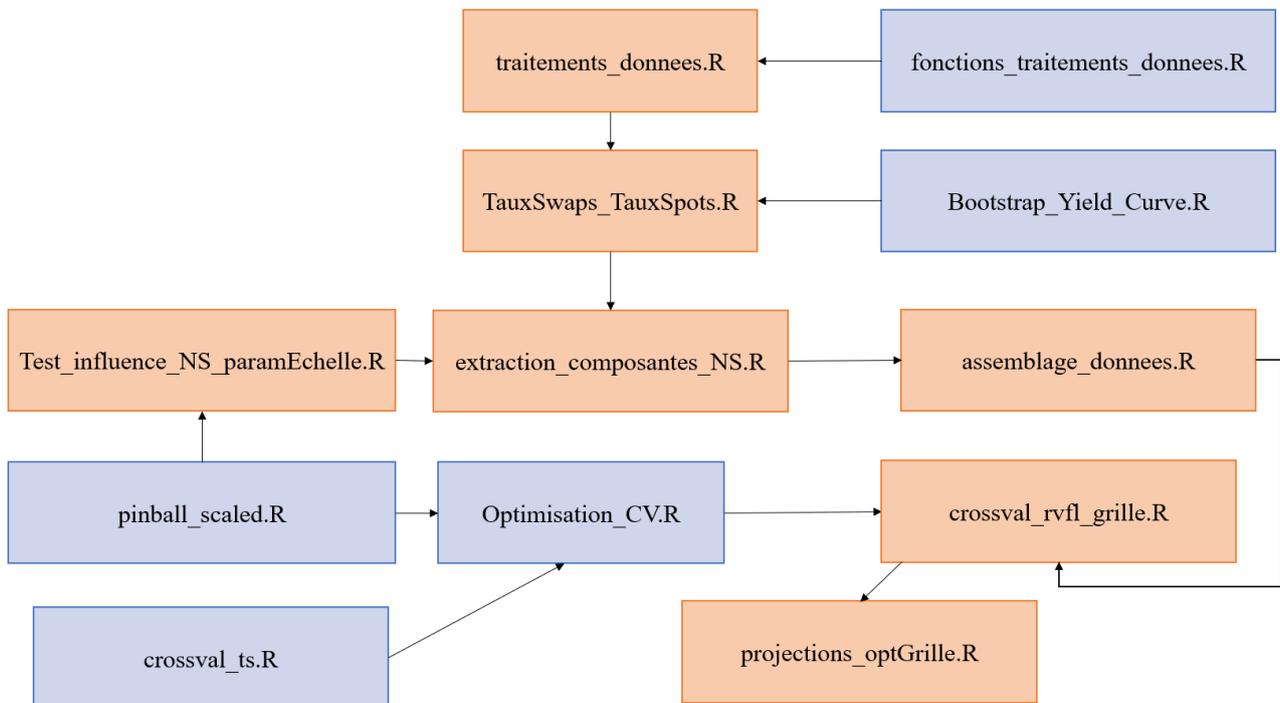


FIGURE 2.11 : Schéma des fichiers R utilisés pour le GSE sous la mesure historique \mathbb{P}

2.2.3 Mécanisme pour générer plusieurs scénarios : le *Block Bootstrap*

Un dernier point est à spécifier est la manière de produire « l'aléa ». Cette quantité n'a pas été intégrée dans les hyperparamètres à optimiser pour des raisons de temps de calcul. Il s'agit d'un autre point que nous aurions pu améliorer.

Le *Block Bootstrap*

Pour rappel, l'objectif est de produire plusieurs prévisions pour une même série temporelle. Ces diverses projections nous permettront d'anticiper les différentes trajectoires que les facteurs de risque

pourraient suivre sur l'horizon sélectionné.

Dans l'approche usuelle, les différentes dynamiques possèdent un brownien pour générer ces déformations. Ne suivant pas la méthode dite conventionnelle, le *Block Bootstrap* est une alternative. Les résidus entre les valeurs observées de la série et les valeurs prédites par un modèle sont calculés avec des paramètres fixés. Une série de résidus pour chaque série temporelle est ainsi obtenue, formant une nouvelle STM des résidus. Pour chaque projection, un *Block Bootstrap* est généré. Ce qui se traduit en pratique par :

1. Les indices correspondant aux points de départ du bloc sont générés. Puis la longueur *block_length* du *Block Bootstrap* est ajoutée pour en extraire le bloc de résidus de taille $(block_length \times p)$ (pour les p variables) ;
2. Les résidus sont intégrés aux projections initiales ;
3. Ces étapes sont répétées autant de fois que nécessaire pour couvrir toute la période de projection. Pour un horizon h et une longueur de bloc *block_length*, le nombre de points de départ requis est donné par l'arrondi supérieur de $\frac{h}{block_length}$. Par exemple, pour $h = 10$ et *block_length* = 3, 4 points de départ seront nécessaires et le dernier bloc sera composé d'un seul élément.

Cette technique a pour avantage d'être plutôt simple à mettre en oeuvre. Contrairement au *Bootstrap* classique, elle conserve les p séries temporelles d'un bloc lors de l'affectation. En revanche, elle suppose en partie la stationnarité de la série. Pour illustrer ces différents aspects, prenons un exemple.

Exemple : illustration du mécanisme

Soit une série temporelle à deux variables, notée, $X(t) = (X_1(t)X_2(t))$ avec t les dates comprises dans l'ensemble dénombrable $\{01 - 01 - 2023, 01 - 02 - 2023, 01 - 03 - 2023, \dots, 01 - 12 - 2023\}$ (les premiers de chaque mois pour l'année 2023).

Date	Variable 1	Variable 2
2023-01-01	129	138
2023-02-01	147	90
2023-03-01	209	93
2023-04-01	85	31
2023-05-01	124	68
2023-06-01	185	112
2023-07-01	228	101
2023-08-01	252	77
2023-09-01	140	101
2023-10-01	140	103
2023-11-01	121	65
2023-12-01	173	153

TABLE 2.7 : Série temporelle fictive de l'exemple (valeurs observées)

Nous supposons que l'algorithme du RVFL est appliqué sur la série temporelle avec un pas arrière de 3. Les résidus suivant sont obtenus :

Date	Résidus Variable 1	Résidus Variable 2
2023-04-01	12	6
2023-05-01	20	9
2023-06-01	18	12
2023-07-01	25	7
2023-08-01	22	10
2023-09-01	17	15
2023-10-01	10	13
2023-11-01	12	18
2023-12-01	14	11

TABLE 2.8 : Résidus de la série temporelle fictive (différence entre l'observé et le simulé)

Dans le cadre de l'exemple, il est supposé que la longueur du *Block Bootstrap* $block_length$ soit de 4 pour une projection sur 6 mois. L'algorithme est lancé de manière à obtenir les résidus en bloc suivant la méthode.

Pour la projection n°	Résidus Variable 1	Résidus Variable 2
1	25	7
2	22	10
3	17	15
4	10	13
5	12	6
6	20	9

Comme indiqué précédemment, l'algorithme génère autant d'indices de départ que nécessaire :

$$\text{arrondi_supérieur}\left(\frac{6}{4}\right) = 2.$$

Les indices sont choisis parmi le nombre de ligne du tableau des résidus, ici 2 parmi 9 (avec remise). Le premier indice tiré est 4. Par conséquent, à l'issue de la première étape, le bloc orange est choisi, comme indiqué dans le tableau ci-dessous.

Date	Résidus Variable 1	Résidus Variable 2
2023-04-01	12	6
2023-05-01	20	9
2023-06-01	18	12
2023-07-01	25	7
2023-08-01	22	10
2023-09-01	17	15
2023-10-01	10	13
2023-11-01	12	18
2023-12-01	14	11

Un deuxième indice est tiré : 1. Comme 2 valeurs suffisent à compléter les 4 autres pour en avoir 6 au total, les 2 premières lignes sont extraites du tableau de résidus (en bleu sur le tableau ci-dessus). Pour finir, ces résidus sont sommés avec les prédictions pour obtenir une nouvelle simulation. Puis l'algorithme est relancé pour obtenir de nouveau un tableau de résidus. Ces étapes sont réalisées autant de fois que nécessaires pour obtenir le nombre de projections voulu.

Limite de la méthode

La longueur du bloc a été choisi de manière à préserver l'aspect séquentiel dans le but d'obtenir des trajectoires plus homogènes. La valeur retenue est 120, une longueur de bloc plutôt longue. Ainsi, grâce à cette méthode, nous obtenons 1000 projections distinctes.

Néanmoins, la méthode a un nombre de combinaisons de points de départs restreint. Le nombre de possibilités de points de départs avec les choix d'hyperparamètres effectués est de $block_length^s = 269^2$ où $block_length$ la longueur du bloc et $s = \text{arrondi_supérieur}(\frac{h}{block_length})$. Or $269^2 = 72361 > 1000$, ce qui nous assure l'unicité des trajectoires sachant la graine est générée à chaque simulation pour ne pas avoir les mêmes points de départ.

Chapitre 3

Modèle RVFL : projections historiques

Dans ce chapitre, nous allons discuter des analyses mises en place en amont de la projection suite à la construction de l'outil, notamment pour juger de la pertinence du modèle par rapport à un autre. Aussi, les résultats obtenus seront analysés et mis en concurrence avec des modèles classiques.

Pour rappel, le *package* utilisé provient de MOUDIKI (2023), nommé `ahead`, en particulier la fonction `ahead::ridge2f`. Certaines modifications ont été apportées au *package* `ahead` avant de l'utiliser pour la projection de la série temporelle multivariée (cf. Chapitre 2).

3.1 Analyse de la performance du modèle

Le modèle RVFL décrit dans le chapitre précédent a déjà prouvé sa pertinence dans le cas des séries temporelles multivariées, comme le montre le papier de MOUDIKI et al. (2018) et plus généralement, comme il est lu dans la littérature. Une analyse prédictive est néanmoins nécessaire afin de s'assurer que le modèle est bien adapté à notre série temporelle multivariée. De plus, une comparaison avec un modèle classique de séries temporelles sera réalisée : la méthode VAR (*Vector Autoregressive model*).

3.1.1 Explication de l'analyse prédiction

Pour pouvoir apprécier la qualité de la méthode appliquée dans la section suivante, la démarche est réalisée sur un échantillon plus petit. L'idée est de conserver une partie des données afin de pouvoir juger de la cohérence de la prédiction obtenue avec le modèle RVFL. Une seconde analyse est faite en comparant les résultats précédemment obtenus avec une méthode classique : le modèle VAR. Le lecteur se rapportera en Annexe A.1 pour plus de détails sur la méthode VAR utilisée.

Modèle RVFL

La STM a été scindée en deux échantillons : un échantillon d'apprentissage à hauteur de 75 % des données et un échantillon de test avec 25 % des données. Sur l'échantillon d'apprentissage, une validation croisée est appliquée afin de déterminer les paramètres qui sembleraient les plus adaptés pour prédire la série. La méthode est plus largement développée dans la section relative à la validation croisée (cf. chapitre 2.2.2), seul les résultats seront analysés ici.

Dans la validation croisée nous faisons le choix d'optimiser 6 hyperparamètres :

1. Le nombre de pas arrière intitulé *lags*. Il s'agit du nombre de valeurs passées de la série utilisé pour prédire les valeurs (sur l'horizon voulu) ;
2. Le nombre de noeuds dans la couche cachée noté *nb_hidden* dans le *package* `ahead` ;

3. Le paramètre λ_1 intervenant dans la régression de Ridge sur les prédicteurs originaux ($lambda_1$);
4. Le paramètre λ_2 intervenant dans la régression de Ridge sur les prédicteurs transformés ($lambda_2$);
5. La suite utilisée pour générer les poids de la couche cachée $W^{(j,l)}$ ($nodes_sim$);
6. La fonction d'activation qui permet d'obtenir les prédicteurs transformés en sortie de la couche cachée ($activ$).

Tous les paramètres énumérés ont été développés dans le chapitre précédent.

Les valeurs ont été choisies manière à balayer un éventail assez grand tout en conservant une durée d'exécution raisonnable. La grille d'hyperparamètres est la suivante :

$lags$	1	2	4	6	10	12	18	24
nb_hidden	5	10	20	30	40	50	70	100
$lambda_1$	0.1	1	6	10	20	30	100	1000
$lambda_2$	0.1	1	6	10	20	30	100	1000
$nodes_sim$	Sobol			Halton		Uniforme		
$activ$	ReLU			Sigmoidé		Tanh		

TABLE 3.1 : Grille pour le *tuning* des hyperparamètres pour la méthode RVFL

On obtient donc 36 864 combinaisons. Pour accélérer l'exécution du code, le code est parallélisé. Sachant que chaque opération est indépendante, chaque tâche peut être lancée sur un coeur du processeur en utilisant le *package* `foreach` (FOLASHADE, 2022).

Il est nécessaire de fixer certains paramètres pour la validation croisée car très complexe voir impossible à intégrer dans le mécanisme. C'est pour cette raison, comme pour le paramètre d'échelle dans Nelson-Siegel, que ces derniers sont fixés au préalable.

- La fenêtre d'entraînement initiale est fixée à 60 (utilisée dans le principe de fenêtre roulante);
- L'horizon de projection est fixé à 67 (le nombre de dates de l'échantillon test);
- La longueur du *Block Bootstrap* n'est pas spécifiée car elle n'impacte pas le score de la validation croisée.

L'intégralité des données (échantillon d'entraînement) pour la validation croisée est utilisée.

Notons que dans cette analyse prédictive, seul le scénario central est analysé. Il s'agit de la projection « pure » tirée du RVFL, sans générer d'aléa, autrement dit sans créer de variations.

Finalement les hyperparamètres minimisant la mesure d'erreur sur l'échantillon d'apprentissage sont :

$lags$	nb_hidden	$lambda_1$	$lambda_2$	$nodes_sim$	$activ$
24	50	1000	1	Sobol	ReLU

TABLE 3.2 : Hyperparamètres minimisant l'erreur : 0,31

Modèle VAR

Pour le modèle VAR, le même échantillon d'entraînement est utilisé. Le *package* utilisé provient de MOUDIKI (2023), nommé `ahead`, en particulier la fonction `ahead::VAR` adaptée de `vars::VAR` (PFAFF

et STIGLER, 2024).

Comme indiqué dans l'Annexe A, la première étape est de stationnariser la STM si la série n'est pas stationnaire : c'est le premier point que nous allons vérifier en traçant l'auto-corrélation (corrélation de la variable avec elle-même).

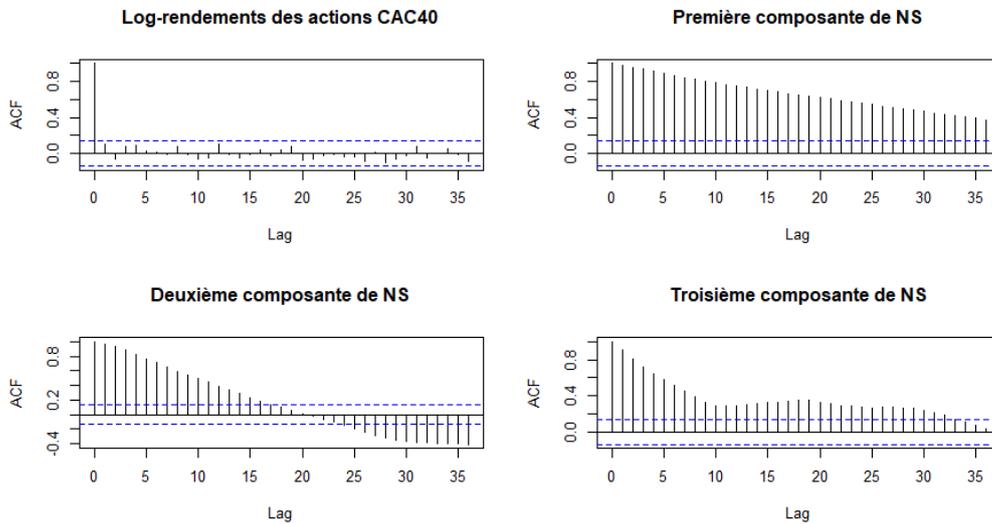


FIGURE 3.1 : Graphique de l'auto-corrélation pour chaque série temporelle sur 36 lags

Les graphiques relatifs aux taux montrent que les séries ne sont pas stationnaires contrairement à la série des actions. Les trois séries sont donc différenciées une première fois.

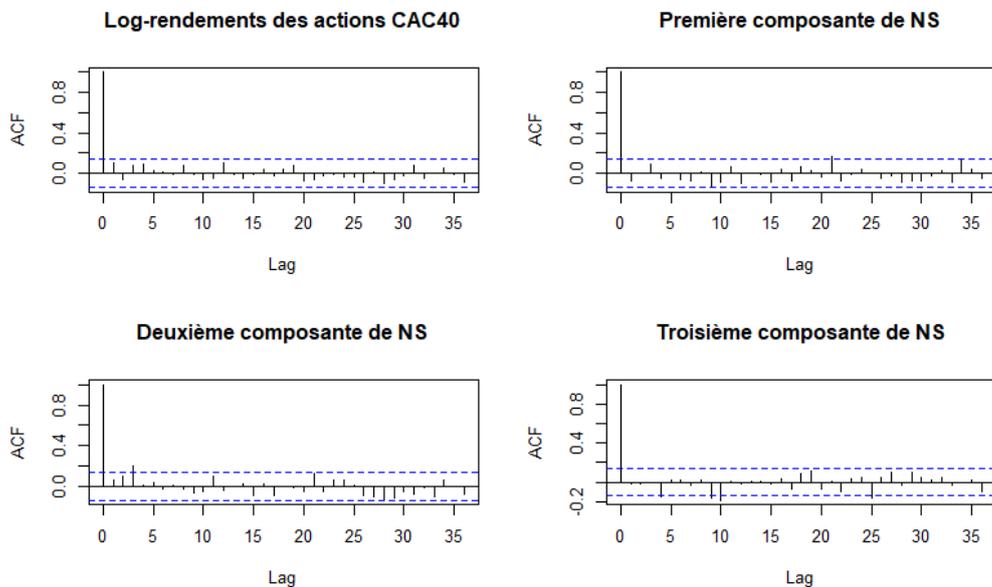


FIGURE 3.2 : Graphique de l'auto-corrélation pour chaque série temporelle différencié une fois sur 36 lags

Les 4 graphiques de l'auto-corrélation montrent que les séries sont a priori stationnaires. Pour confirmer cette observation, nous allons tracer de la même manière les graphiques de l'auto-corrélation

partielle. Puis nous observons les valeurs de p -value après application du Test de Dickey-Fuller (cf. Annexe A).

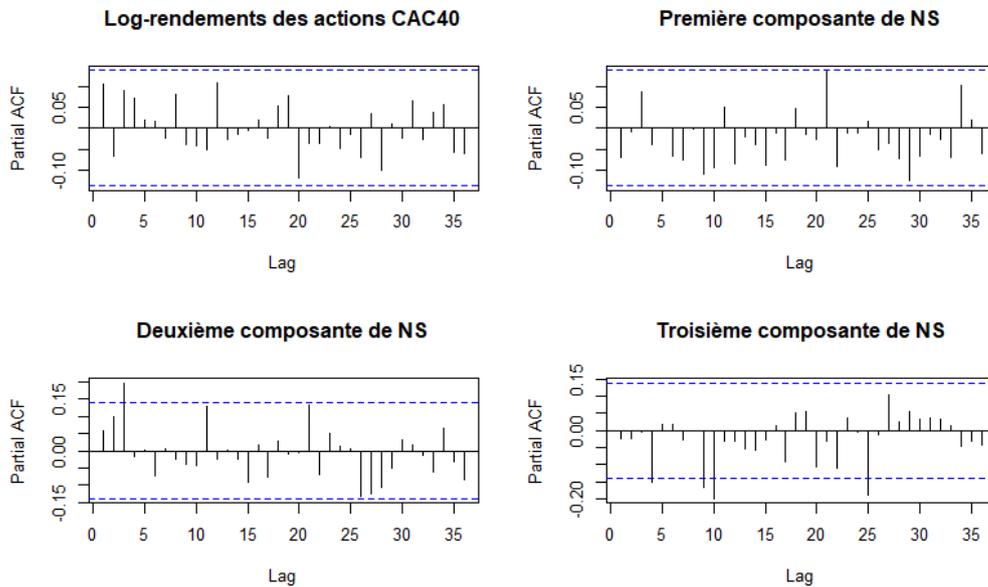


FIGURE 3.3 : Graphique de l'auto-corrélation partielle pour chaque série temporelle différencié une fois sur 36 lags

Les résultats relatifs à l'auto-corrélation partielle confirment les premières observations.

<i>Test de Dickey-Fuller</i>	Actions	Comp1 NS	Comp2 NS	Comp3 NS
<i>p-value</i>	< 0,01	< 0,01	< 0,01	< 0,01

TABLE 3.3 : Résultats du test de Dicket-Fuller sur la STM différenciée une fois au niveau 95 %

Etant donné que la p -value calculée est inférieure au niveau de significativité $\alpha = 5\%$, l'hypothèse nulle H_0 est rejetée au risque 5%. On suppose alors, au risque 5% que la STM est stationnaire.

La deuxième étape est de d'optimiser le nombre de lags. Le nombre de lags optimal est 24 minimisant l'erreur (MSPL), avec une valeur de 0,52.

3.1.2 Résultats de l'analyse prédictive

Les résultats présentés sont donc issus du modèle minimisant l'erreur pour le RVFL et le VAR. Le rendement logarithmique des actions du CAC40 et le taux long (première composante projetée de Nelson-Siegel) sont tracés ci-dessous.

Rendements logarithmiques des actions du CAC40

En ce qui concerne le rendement logarithmique, il est notable que pour les deux méthodes, le scénario central suit en moyenne les variations du CAC40. Les valeurs du scénario central concordent avec celles observées sur les marchés financiers à ces dates. De plus, il n'est pas surprenant que le scénario central semble plus stable que le rendement logarithmique observé puisqu'il s'agit d'une série très volatile.

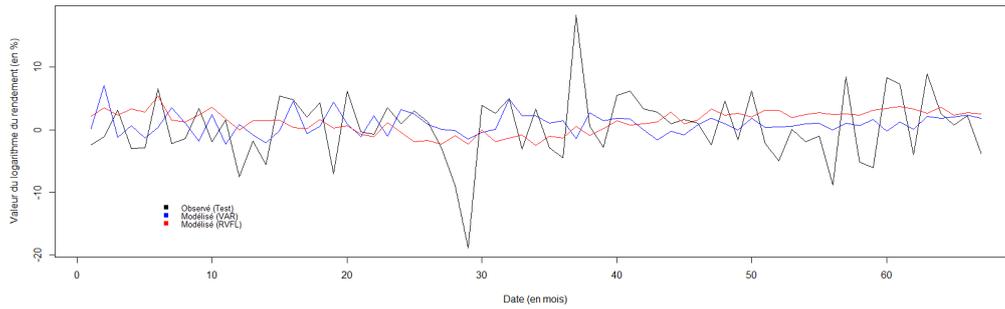


FIGURE 3.4 : Comparaison entre les modèles du logarithme du rendement projeté (observé vs modélisé) sur la période du 30 novembre 2017 au 31 mai 2023

Néanmoins, la projection issue du modèle RVFL semble mieux capter les variations à la hausse ou à la baisse. Pour mieux quantifier l'écart entre les deux séries temporelles, la racine de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) et l'erreur absolue moyenne (MAE) seront comparées. Ces mesures ont du sens dans ce cas, puisque l'on compare deux séries temporelles univariées.

Mesure d'erreur sur les actions	RMSE	MAE
<i>RVFL</i>	5,16	4,03
<i>VAR</i>	5,59	4,34

TABLE 3.4 : Comparaison des mesures d'erreur pour les actions sur l'échantillon de test

Les valeurs des deux mesures confirment l'analyse graphique qui laissait penser que la série modélisée par le RVFL était légèrement plus proche de la série observée.

Pour confirmer cette première observation, une deuxième variable est analysée.

Taux long (première composante de NS)

Pour le taux long, la projection modélisée par le RVFL suit la tendance du taux observé. Contrairement aux actions, le modèle RVFL ne capte pas seulement en moyenne les fluctuations futures mais de manière générale. En revanche, le modèle VAR semble moins bien prédire le taux long.

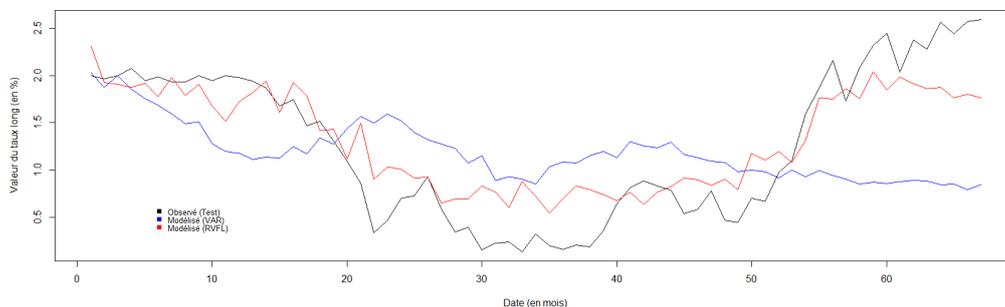


FIGURE 3.5 : Comparaison du taux long projeté (observé vs modélisé) sur la période du 30 novembre 2017 au 31 mai 2023

Comme pour le rendement, les deux mesures d'erreur seront observées afin de mieux quantifier l'écart des deux séries. Les mesures confirment que le taux long modélisé par la méthode RVFL est

meilleur que le modèle VAR et proche de la série observée.

Mesure d'erreur sur le taux long	RMSE	MAE
RVFL	0,36	0,30
VAR	0,84	0,71

TABLE 3.5 : Comparaison des mesures d'erreur pour le taux long sur l'échantillon de test

Le modèle RVFL a montré qu'il réussissait à capter les tendances et prédire de manière plutôt robuste. La mesure de la validation croisée, la RMSE, la MAE et l'analyse graphique convergent vers la même conclusion : le modèle RVFL semble être meilleur que le modèle VAR.

Plus généralement, les projections issues du RVFL sont très proches de ce qui a pu être observé.

Le modèle RVFL ayant su montrer sa robustesse, il peut être utilisé dans la phase de projection.

3.1.3 Résultats validation croisée

La grille de *tuning* des hyperparamètres est la même qu'en Table 3.1. La validation croisée est appliquée cette fois-ci à toute la série temporelle multivariée.

Les paramètres fixés sont les mêmes que définis précédemment mis à part l'horizon de projection, fixée à 240 mois (20 ans). Étant composé de 269 valeurs, l'horizon de projection doit rester en cohérence avec l'historique de données. La fenêtre d'entraînement initiale est fixée à 60 (pour ne pas être trop long en temps de calcul). On fixe également le nombre de simulations à 100 pour des soucis de temps de calcul. Sachant que l'objectif est de projeter 1000 fois pour être en accord avec des modèles de gestion actif-passif classiques.

A l'issue des 36 864 itérations, les « meilleurs paramètres » au sens de la minimisation de la MSPL sont la combinaison n°1528 :

<i>lags</i>	<i>nb_hidden</i>	<i>lambda_1</i>	<i>lambda_2</i>	<i>nodes_sim</i>	<i>activ</i>
24	70	1000	6	Sobol	ReLU

TABLE 3.6 : Hyperparamètres minimisant la MSPL avec une valeur de 0,37

Ces paramètres vont permettre de projeter la série sur l'horizon souhaité, c'est-à-dire sur 20 ans.

3.2 Comparaison avec des modèles paramétriques et interprétations

Après avoir implémenté tous les fichiers nécessaires au GSE sous la probabilité \mathbb{P} , réalisé les tests et la validation croisée, le tout peut être lancé pour obtenir les simulations.

Pour rappel, les choix effectués sont les suivants :

- Un horizon de projection h de 240 (mois) égal à 20 ans. En général, cette période est sélectionnée car elle offre un temps de calcul raisonnable tout en couvrant une période assez longue. Cela implique que les contrats prennent fin au maximum après 20 ans. Idéalement, un horizon plus profond serait choisi mais ce choix est plus raisonnable au vu de l'historique que nous possédons ;
- Un nombre de simulations B égal à 1000 puisque généralement on choisit entre 1000 et 2000 scénarios en entrée d'un modèle ALM ;
- On définit la valeur des hyperparamètres par rapport à l'optimisation réalisée lors de la validation croisée :

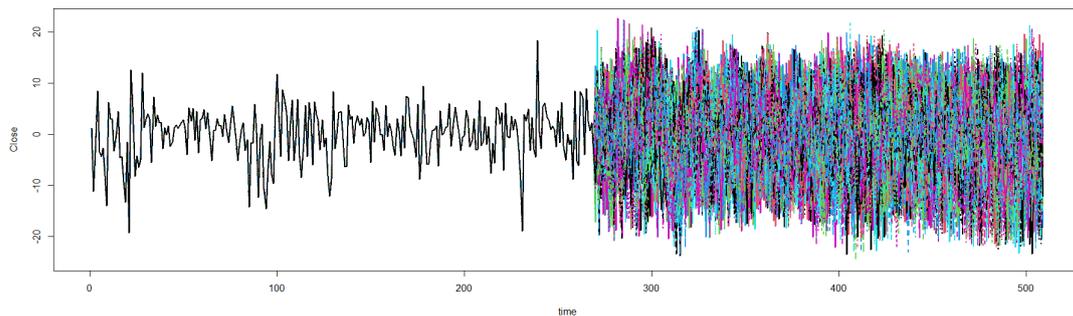
- $lags = 24$;
- $nb_hidden = 70$
- $lambda_1 = 1000$;
- $lambda_2 = 6$;
- $nodes_sim = Sobol$;
- $activ = ReLU$.

Pour avoir une première idée de nos résultats, nous débutons notre analyse en observant l'ensemble des projections des rendements logarithmiques. Les actions sont immédiatement exploitables mais les composantes projetées doivent être intégrées dans la formule de Nelson-Siegel pour avoir la courbe des taux pour une simulation donnée. Commençons donc par les projections des actions.

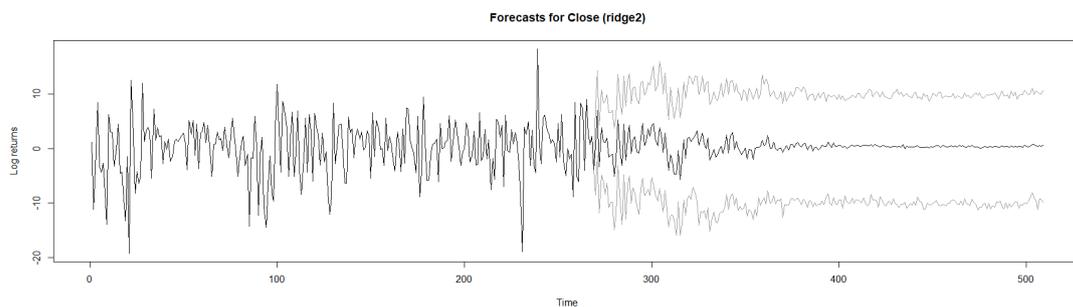
3.2.1 Projections relatives aux actions CAC40

Simulations obtenues avec le RVFL

Les valeurs dites historiques correspondent à nos données initiales. Elle sont représentées sur le graphique de la 1ère à la 269ème valeur. Puis de la 270 à la 629ème valeur les simulations (i.e. les projections) peuvent être observées.



(a) Historique et 1000 projections des rendements logarithmiques



(b) Historique et bornes droite, gauche et moyenne des simulations du rendement logarithmique

FIGURE 3.6 : Historique et projections pour le rendement logarithmique du CAC40

Sur le second graphique, la borne *lower* est représentée par la courbe grise claire. De même, la borne *upper* est la courbe grise claire située en haut du graphique. Enfin la moyenne est le tracé noir. L'algorithme détermine pour chacune des séries temporelles projetées la borne gauche et droite de l'intervalle de confiance à 95 % sur les 1000 simulations, respectivement notée *lower* et *upper*. Pour ce faire, les simulations sont ordonnées par série temporelle de la plus petite à la plus grande. Le quantile

à 2,5% pour la borne *lower* et 97,5% pour la borne *upper* sont ainsi déterminés. Les bornes obtenues ne sont donc pas systématiquement une même simulation. De même pour la série nommée *mean*, où il s'agit de la moyenne sur toutes les valeurs d'une date pour les 1000 projections.

Une première chose à remarquer est le fait que l'intervalle à 95 % semble cohérent dans le sens où il encadre les mêmes valeurs que dans la période passée. Comme dans le passé, les rendements semblent beaucoup varier à la hausse comme à la baisse. Observons la distribution des projections :

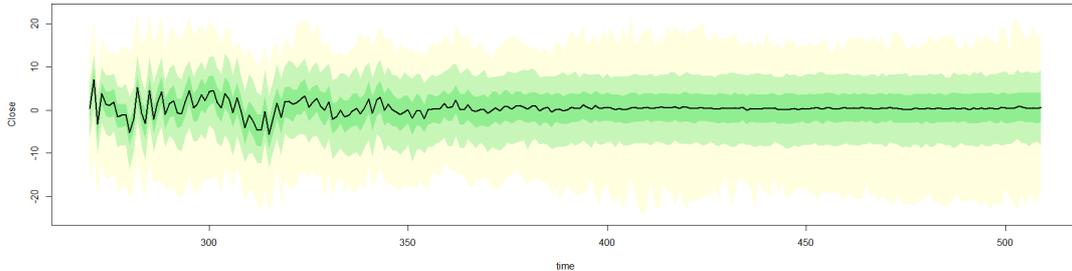


FIGURE 3.7 : Graphique de la distribution des 1000 projections du log-rendement pour le CAC40

Nous observons à partir de la 400ème date, qui correspond au 31 Mai 2034, un phénomène ressemblant à une stagnation des rendements. Ce phénomène est probablement lié à la taille des données par rapport à l'horizon de projection. Une fois toutes les données du *lags* épuisées, les nouvelles valeurs (obtenues avec le modèle) elles-même utilisées pour les nouvelles simulations. En prenant la moyenne de toutes ces valeurs, les variations sont moindres.

Pour conclure, les valeurs prédites sont dans la continuité de l'historique (pas de saut observé) et comprises dans l'intervalle de valeurs formé par les valeurs extrêmes de l'historique. La moyenne est également en cohérence avec ce qui a pu être observé précédemment.

Pour donner une autre dimension à l'analyse, les simulations sont comparées à un modèle paramétrique classique : le modèle de Black-Scholes.

Évolution du prix d'une action et comparaison avec le modèle de Black-Scholes

Pour ce faire, l'évolution du prix des actions du CAC40 est calculée à partir des simulations du log-rendement. Ce calcul est réalisé sur les simulations RVFL mais également sur des trajectoires de Black-Scholes. Le modèle de BS permet de dériver le prix d'un actif S_t sous la probabilité historique avec $S_0 = s_0$ et W_t un brownien géométrique :

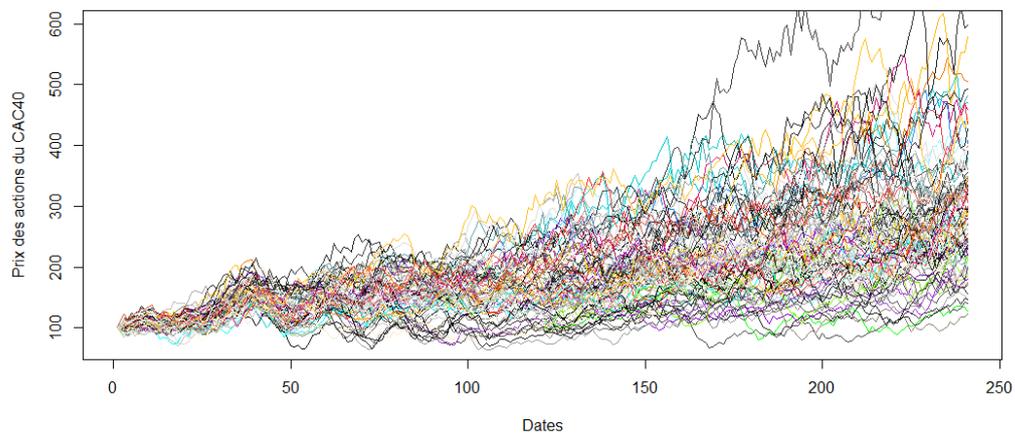
$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t.$$

Cette dynamique satisfait :

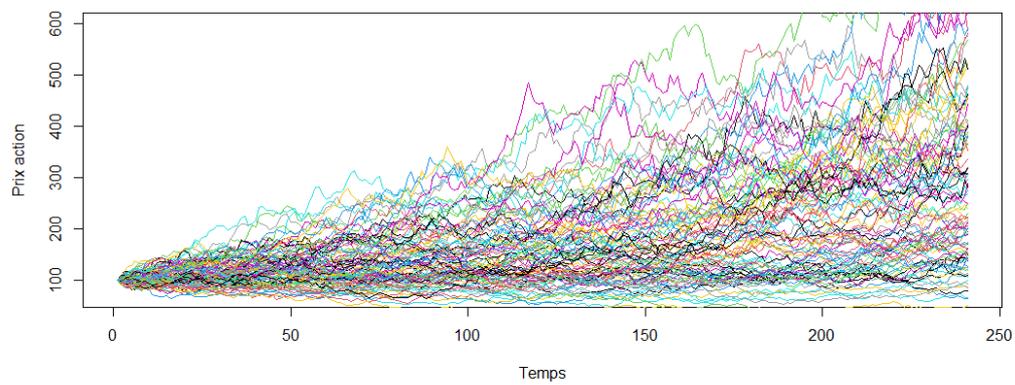
$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right).$$

Avec le drift qui est $\mu = 0,05$ et la volatilité $\sigma = 0,15$ (valeur usuelle autour de 15 %) pour comparer les deux méthodes de manière cohérente. En supposant que le prix initial en $t = 0$ est fixé à 100 ($S_0 = 100$), les évolutions qui suivent sont obtenues.

Les deux méthodes semblent produire des projections similaires au sens où elles forment toutes les deux une forme de cône avec un écartement similaire. Néanmoins, les prédictions issues du modèle de *Machine Learning* semblent être moins structurées. Ce phénomène est particulièrement visible sur



(a) Projections du RVFL



(b) Projections BS

FIGURE 3.8 : Projection du prix de 100 simulations du CAC40 sur 20 ans

les 50 premières dates, qui s'apparente à un rebond. Le modèle RVFL propose un vrai parti pris (une projection) autour duquel les autres projections sont disposées, essence même du modèle.

Il est reconnu que ce modèle classique ne modélise pas bien les périodes de crise, contrairement au modèle non-paramétrique qui s'inspire du passé.

De manière générale, les prévisions concernant les actions semblent plutôt cohérentes par rapport à un modèle classique comme celui de BS mais moins structuré, ce qui était recherché puisque potentiellement plus proche de la réalité.

3.2.2 Projections relatives aux taux

Simulations obtenues avec le RVFL

Comme pour les actions, les projections pour les trois composantes de Nelson-Siegel sont analysées. Avant d'observer les courbes de taux, un point concernant la formule doit être spécifié. En effet, les composantes de Nelson-Siegel ont un sens économique à une composante près qui doit être additionnée à une autre pour avoir du sens.

$$R(t, T) = \mu_{1,t} + \mu_{2,t} \frac{1 - e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} + \mu_{3,t} \left(\frac{1 - e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} - e^{-T/\alpha} \right),$$

avec :

- α un paramètre d'échelle ;
- $\mu_{1,t}$ le facteur de niveau pour le taux long ;
- $\mu_{2,t}$ le facteur de rotation correspondant à l'écart taux long - taux court ;
- $\mu_{3,t}$ le facteur de pentification ;
- Les dates t considérées correspondent au dernier jour de chaque mois entre le 31 Janvier 2001 et le 31 Mai 2043 (historique et projections).

Le paramètre d'échelle α est fixé à 2,25. Les éléments associés à chaque composante sont obtenus en effectuant la limite. Par exemple, pour une grande maturité tel que $T \rightarrow +\infty$, $R(t, T)$ tend vers la première composante $\mu_{1,t}$ puisque : $\lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-T/\alpha} = 0$ et $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} = 0$. Le taux long est ainsi approché.

Deuxième exemple avec une maturité très petite de sorte que $T \rightarrow 0$, $R(t, T)$ tend vers la somme des deux premières composantes $\mu_{1,t} + \mu_{2,t}$. Le premier résultat immédiat est $\lim_{T \rightarrow 0} e^{-T/\alpha} = 1$. Puis en effectuant un développement limité en 0 sur l'exponentielle, on a bien que $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} = 1$. Il est ainsi obtenu, pour les maturités de petites tailles, le taux court approché par la somme des deux premières composantes.

Le taux court est donc le taux sans risque à chaque date t qui est le taux valable sur l'intervalle $[t; t + \Delta t]$. Il s'agit aussi sous \mathbb{Q} du taux d'actualisation puisque usuellement on choisit le taux sans risque pour actualiser les flux. Finalement les éléments suivant sont obtenus :

- $\mu_{1,t} = l_t$ où $\mu_{1,t}$ la première composante et l_t le taux long ;
- $\mu_{2,t} + \mu_{1,t} = r_t$ où $\mu_{2,t}$ la deuxième composante et r_t le taux court ;
- $\mu_{3,t} = c_t$ où c_t la convexité.

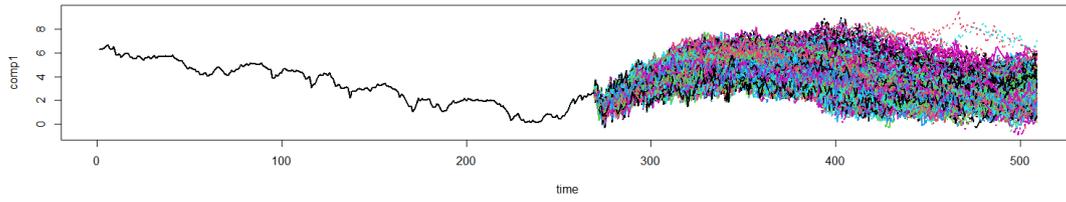


FIGURE 3.9 : Historique et projections du taux long

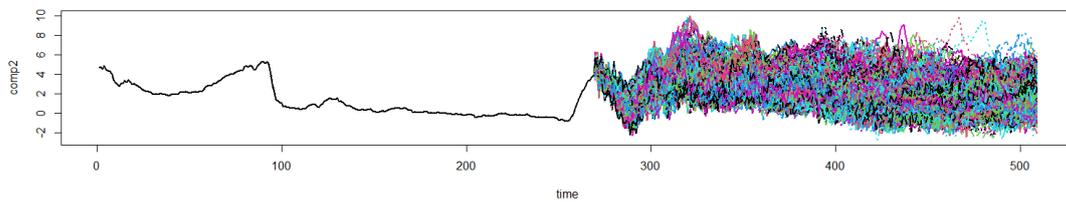


FIGURE 3.10 : Historique et projections du taux court

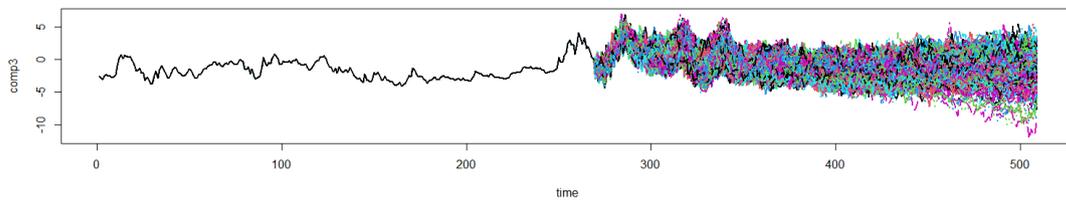


FIGURE 3.11 : Historique et projections de la convexité

Les valeurs des taux semblent cohérentes par rapport aux valeurs passées au sens où elles sont dans le même intervalle. Leurs distributions peuvent également être observées pour mieux les décrire :

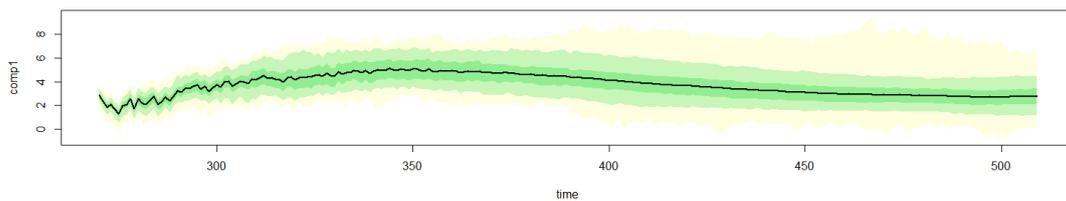


FIGURE 3.12 : Graphique de la distribution des 1000 projections du taux long

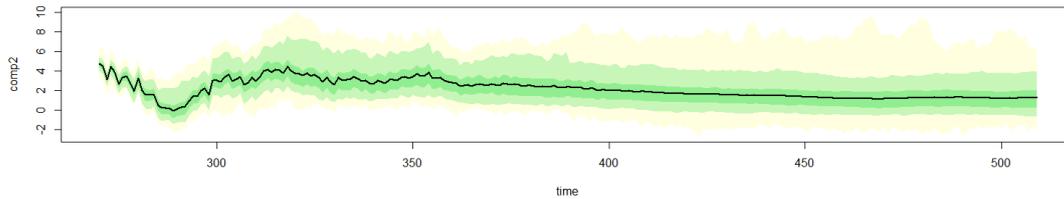


FIGURE 3.13 : Graphique de la distribution des 1000 projections du taux court

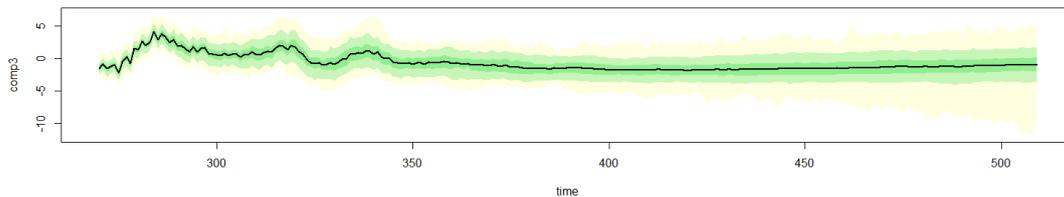


FIGURE 3.14 : Graphique de la distribution des 1000 projections de la convexité

Contrairement aux actions où l'intervalle de confiance semblait constant sur toute la durée de projection, l'intervalle augmente avec l'horizon de prédiction. Ce qui est plutôt cohérent puisque les actions sont bien plus volatiles que les taux, l'intervalle est important dès le début.

Par ailleurs, pour obtenir les courbes de taux, nous utilisons les maturités des taux spots, entre 0,5 et 30, mais également la formule de Nelson-Siegel. Pour chaque maturité, le taux est déterminé puis les calculs sont répétés pour chaque date, soit 240 fois.

Comme plusieurs courbes de taux ne peuvent être tracées sur le même graphique, un choix est fait parmi les projections. Il est présenté ci-dessus les projections : 1, 366, 500, 650, 788 et 1000. Les simulations des courbes de taux semblent toutes cohérentes avec l'historique observé.

Pour conclure, les projections de taux sont cohérentes avec ce qui a pu être observé. Comme pour les actions, les prédictions sont comparées à un modèle paramétrique classique : Vasicek.

Comparaison avec le modèle de Vasicek

Pour ce faire, le modèle de Vasicek est implémenté en considérant que le taux court est noté r_t sous la probabilité historique avec r_0 le taux initial et W_t un brownien :

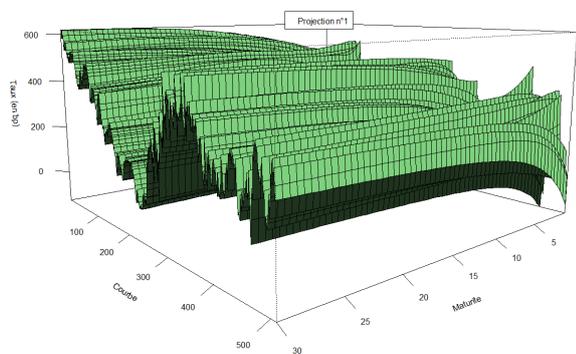
$$dr_t = a(b - r_t) + \sigma dW_t.$$

La discrétisation exacte est :

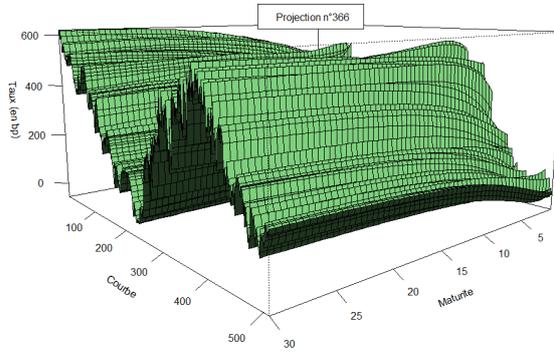
$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}}.$$

Avec la volatilité qui est $\sigma = 0,01$, $a = 0,1$ et $b = 0,04$.

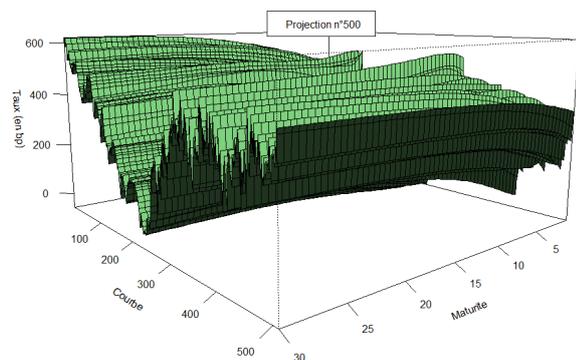
Comme pour les actions, nous n'avons pas réalisé une calibration usuelle. Le but de cette analyse, comme pour les log-rendements, est de se concentrer sur la structure des projections.



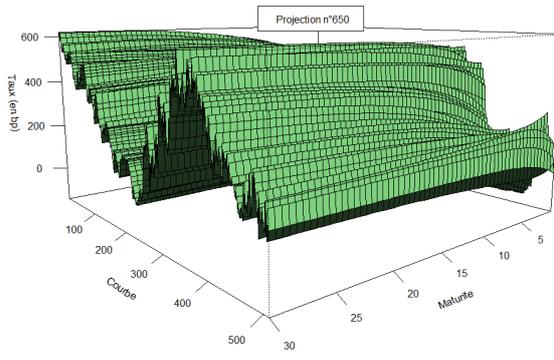
(a) Projection n°1



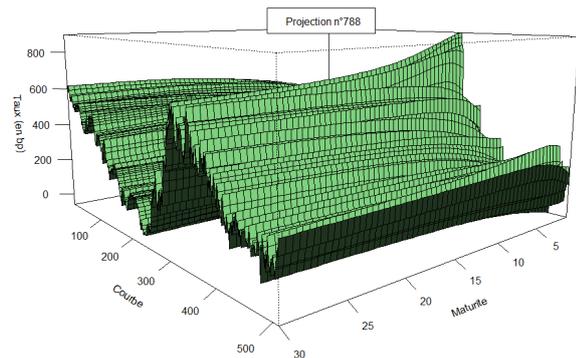
(b) Projection n°366



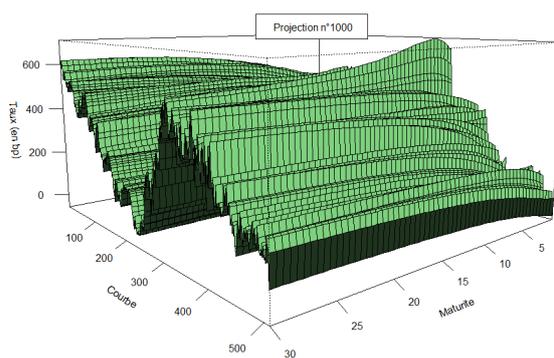
(c) Projection n°500



(d) Projection n°650

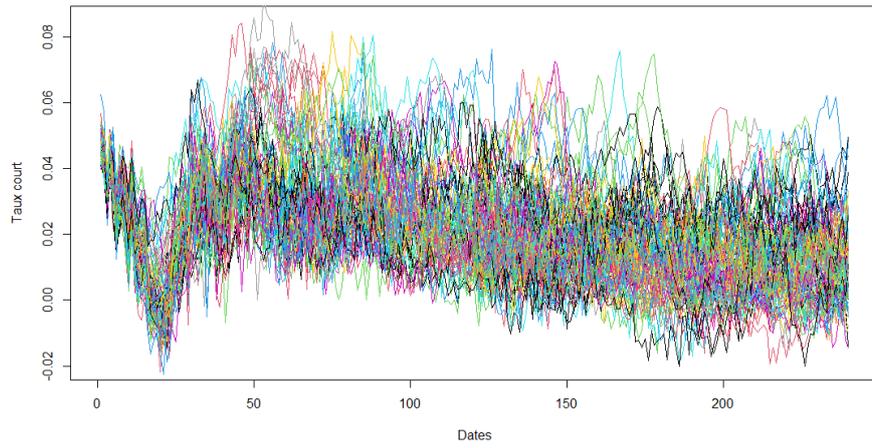


(e) Projection n°788

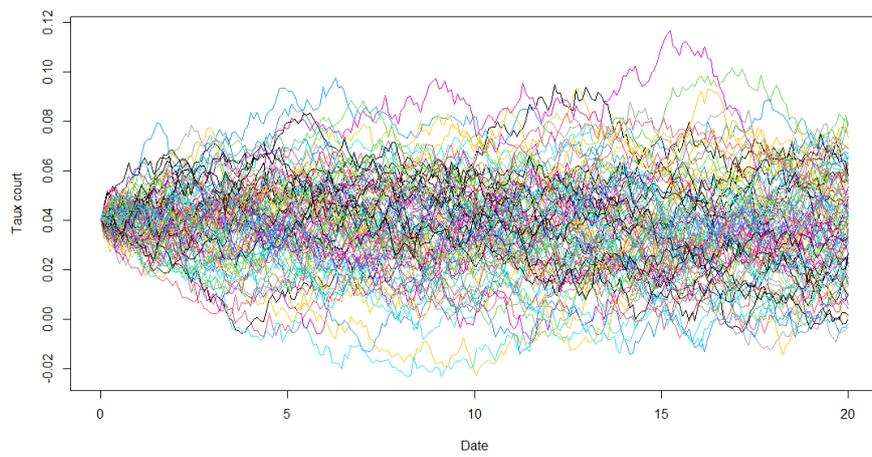


(f) Projection n°1000

FIGURE 3.15 : Historique et projections des courbes de Taux par mois



(a) Projections du taux court RVFL



(b) Vacisek

FIGURE 3.16 : Évolution du taux court pour 100 simulations sur 20 ans

Nous n'avons pas utilisé ces modèles à des fins de valorisation, le caractère *market consistent* du modèle n'étant pas essentiel dans l'étude historique.

Les deux méthodes semblent produire des projections proches au sens où elles possèdent le même intervalle de valeurs. Néanmoins, il est observé comme une trajectoire centrale avec des « sauts », comme pour les actions. Cela est du au modèle lui même comme indiqué pour les actions.

Tous les résultats montrent que le RVFL produit une distribution en cohérence avec des modèles usuels tout en ayant un parti pris plus important.

3.3 Étude de la *Value-at-Risk*

Après avoir analysé les prévisions historiques et les avoir comparées à des modèles paramétriques, nous étudions une nouvelle métrique : la Value-at-Risk (VaR). Cette mesure, comme développée dans le chapitre 1, peut être utilisée dans le calcul du SCR modèle interne. En effet, le quantile d'ordre $1 - \alpha$ ou VaR au niveau α , est calculé sur la distribution des pertes de l'assureur à horizon 1 an. Mais la VaR peut être plus généralement utilisée en tant que mesure de risque d'actifs.

La métrique sera utilisée pour évaluer les quantiles des prix modélisés à partir des projections historiques concernant les actions et les obligations.

3.3.1 Résultats pour les actions

Le graphique ci-dessous permet de visualiser l'historique et l'intervalle de confiance à 95 % des prix obtenus grâce aux projections RVFL et BS. Dans les deux cas, les bornes des intervalles ne sont pas une unique projection. Les simulations par date sont ordonnées de manière à avoir les quantiles à 2,5 % et à 97,5 % pour chaque pas de temps sur l'horizon de projection.

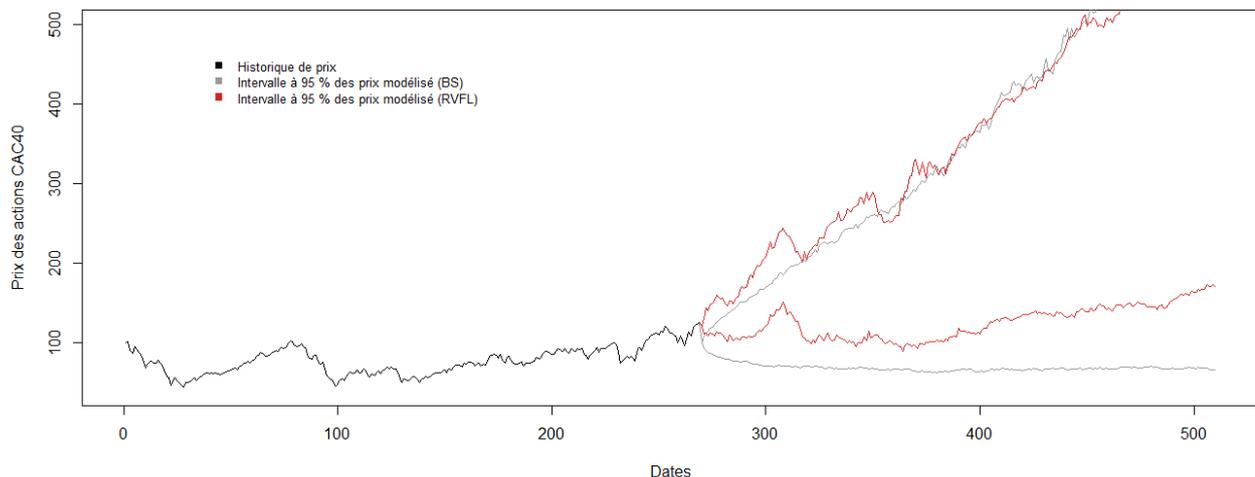


FIGURE 3.17 : Comparaison des intervalles de confiance à 95 % des prix modélisés suivant les méthodes RVFL et BS avec un prix initial de 100 € (à la première date de l'historique) sur les 1000 projections

Sur les 20 dernières années, plusieurs crises ont frappé l'indice financier (cf. Section 1.3.2 relative aux données risque action). Ces phénomènes sont identifiables sur le graphique par de fortes variations. Le modèle non-paramétrique est parfois critiqué pour ne pas modéliser ces dernières. Le modèle RVFL varie globalement plus que la méthode usuelle. En particulier sur les bornes supérieures, les varia-

tions sont plus importantes pour le modèle RVFL. Si l'allure de l'historique est comparée aux bornes projetées, la forme de l'intervalle du RVFL est plus proche.

Dans la continuité de l'étude, nous allons observer la distribution des prix action dans un an pour les deux modèles. Cette fois-ci le prix initial est le dernier prix connu de l'historique, soit 121,65 €.

α	2,5%	5%	10%	50%	90%	95%	97,5%
<i>VaR RVFL Prix à 1 an</i>	101,89	108,01	111,29	124,61	137,84	142,82	146,41
<i>VaR BS Prix à 1 an</i>	110,20	112,83	116,10	127,67	140,50	143,87	147,16

TABLE 3.7 : Comparaison des *Value-at-Risk* sur les prix des actions pour les différents α considérés sur les prédictions à 1 an pour 1000 projections

Les quantiles confirment que le modèle non paramétrique propose des scénarios plus variés. Les moyennes des projections à 1 an sont proches : 128,15 pour BS contre 125,91 pour RVFL.

Pour conclure sur les actions, le modèle RVFL semble être cohérent avec des modèles classiques tout en ayant un parti pris important, essence même du modèle. Il serait a priori plus proche de la réalité, ce qui est finalement recherché pour un GSE historique.

3.3.2 Résultats pour les obligations

L'idée de cette section est sensiblement la même que pour les actions. Les courbes de taux vont être reconstruites avec NS dans un premier temps suivi du calcul du prix des obligations. Les résultats ne seront pas comparés à un modèle paramétrique mais aux taux ZC lus sur la courbe EIOPA (courbe publiée le 31 Mai 2023*).

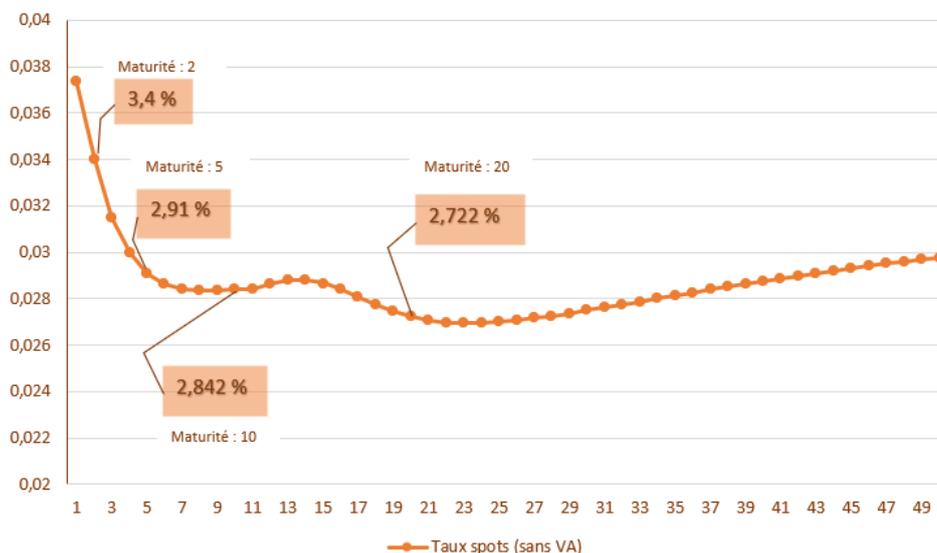


FIGURE 3.18 : Courbe des taux Euro EIOPA au 31 mai 2023 (avec les taux utilisés pour les calculs)

La formule suivante sera appliquée pour passer des taux $R_s(0, T)$ au prix d'une obligation ZC de maturité T vu en s :

$$\text{Prix_ZC}_s(0, T) = \frac{\text{Prix initial}}{(1 + R_s(0, T))^{(T-s)}}.$$

*https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures_en

On suppose que le prix initial est 100 €. Les quantiles des prix des obligations à maturité 2,5,10 et 20 ans sont comparés au prix de l'obligation ZC EIOPA.

α	2,5%	5%	10%	50%	90%	95%	97,5%
<i>VaR RVFL</i>	96,26	96,37	96,72	97,61	98,55	98,67	98,87
<i>Prix EIOPA ZC</i>	96,71						

TABLE 3.8 : Comparaison des *Value-at-Risk* sur les prix des obligations pour les différents α considérés pour 1000 projections sur la maturité 2 ans ayant une moyenne de 97,61 €

α	2,5%	5%	10%	50%	90%	95%	97,5%
<i>VaR RVFL</i>	93,36	93,63	94,28	95,75	97,10	97,46	97,82
<i>Prix EIOPA ZC</i>	97,17						

TABLE 3.9 : Comparaison des *Value-at-Risk* sur les prix des obligations pour les différents α considérés sur la maturité 5 ans ayant une moyenne sur les 1000 simulations de 95,75 €

α	2,5%	5%	10%	50%	90%	95%	97,5%
<i>VaR RVFL</i>	93,84	94,16	94,66	96,23	97,86	98,25	98,39
<i>Prix EIOPA ZC</i>	97,24						

TABLE 3.10 : Comparaison des *Value-at-Risk* sur les prix des obligations pour les différents α considérés sur la maturité 10 ans ayant une moyenne sur les 1000 simulations de 96,30 €

α	2,5%	5%	10%	50%	90%	95%	97,5%
<i>VaR RVFL</i>	95,60	96,03	96,38	97,64	98,83	99,13	99,39
<i>Prix EIOPA ZC</i>	97,35						

TABLE 3.11 : Comparaison des *Value-at-Risk* sur les prix des obligations pour les différents α considérés sur la maturité 20 ans ayant une moyenne sur les 1000 simulations de 97,84 €

Les quantiles de prix des obligations et la moyenne sont cohérents avec les prix des obligations de l'EIOPA. Le prix des ZC EIOPA est bien compris dans l'intervalle de valeurs proposé par le RVFL.

Les résultats pour les actions ou les obligations montrent que le RVFL produit des prix en cohérence (en moyenne) avec des modèles usuels tout en ayant des variations plus importantes. Un GSE historique étant supposé projeter le plus fidèlement possible à la réalité, le modèle RVFL répond bien aux critères attendus.

A cette étape du mémoire, un GSE a été construit sous \mathbb{P} avec en particulier les éléments suivant :

- Le logarithme du rendement de l'indice de fermeture du CAC40 en temps discret (avec un pas de temps mensuel) ;
- Les trois composantes de Nelson-Siegel (avec un pas de temps mensuel).

Les différentes analyses ont montré la pertinence des projections historiques RVFL en comparaison avec des méthodes paramétriques. Désormais, l'objectif va être de trouver une solution pour passer de la mesure de probabilité historique à la mesure risque-neutre.

3.4 Limites et perspectives

Plusieurs limites se présentent dans la construction du GSE sous la probabilité historique mais également sur l'analyse des résultats.

Plusieurs hypothèses plus ou moins fortes ont été posées pour la construction de la STM et du RVFL. Tout d'abord, le paramètre d'échelle de la formule de Nelson-Siegel pourrait être intégré à la validation croisée. Cet ajout permettrait aux 3 composantes principales de la STM des taux, d'être au plus proche de la courbe initiale. Il serait intéressant d'ajouter à la série temporelle multivariée des produits dérivés associés aux actions et aux taux pour améliorer la cohérence des projections avec le marché. L'historique du smile de volatilité et l'historique des swaptions pourraient être ajoutés au lieu de la volatilité historique pour les actions.

La longueur du Block-Bootstrap, utilisée pour générer l'aléa, pourrait également être intégrée à la validation croisée pour obtenir de meilleures projections. La mesure d'erreur *Mean Scaled Pinball Loss* pourrait prendre en compte les différentes projections lors de la validation croisée. De cette manière, la mesure ne serait pas uniquement basé entre la projection centrale et l'historique mais entre le faisceau de projections et l'historique.

Afin d'améliorer l'optimisation des hyperparamètres, d'autres méthodes comme l'optimisation bayésienne, pourrait être envisagée au lieu de la grille de *tuning*. Cette dernière n'explore pas l'étendue des valeurs possibles des hyperparamètres.

Pour les futurs travaux, il serait pertinent de complexifier le GSE en ajoutant des facteurs de risque, en particulier le risque immobilier, de crédit, de change ou encore d'inflation, ce dernier étant particulièrement pertinent compte tenu du contexte économique actuel. Ces ajustements devraient être réalisés en cohérence avec l'actif de l'assureur concerné, afin de garantir une analyse précise et pertinente des risques. Enfin, il serait intéressant d'étudier l'impact du GSE RVFL face à un GSE plus classique sur un cas concret, notamment lors d'une évaluation ORSA. Il s'agit ici d'un point à développer dans un prochain travail.

Chapitre 4

Modèle RVFL et risque-neutralisation : projections risque-neutres

Pour rappel, dans le cadre de la directive Solvabilité II l'actif risqué doit être décrit sous les deux probabilités : risque-neutre pour la valorisation (calcul du BE) et historique pour les projections qui se doivent d'être en cohérence avec des valeurs passées (ORSA et/ou SCR en modèle interne).

Aussi, il a été vu dans le premier chapitre que la prime de risque est la version observable (et donc approchée) du prix du marché du risque. Plus précisément, le prix du marché du risque est « par définition l'excès de rendement par rapport au taux sans risque offert par un support risqué » par unité de volatilité (CAJA et PLANCHET, 2010). Toujours d'après CAJA et PLANCHET (2010), « la prime de risque sert à compenser la perte de rentabilité qui peut se produire à cause d'un facteur de risque sous-jacent ». Sachant que le prix du marché du risque est inobservable, quelles sont les solutions pour risque-neutraliser notre GSE non-paramétrique ?

Les deux prochaines sections décriront les problématiques soulevées par le prix du marché du risque ainsi que l'approche considérée pour faire le lien entre les deux mesures et obtenir un GSE qui se veut sous \mathbb{Q} . Enfin, à l'aide de différents tests, le GSE précédemment construit sera testé pour savoir s'il peut être considéré comme risque-neutre.

4.1 Prix du marché du risque

Pour mettre en lumière le prix du marché du risque, nous allons utiliser une dynamique classique : un modèle de taux à facteur.

4.1.1 Rôle du prix du marché du risque dans un modèle paramétrique

Prenons un exemple pour illustrer ce dernier point : le Modèle de Vasicek qui utilise un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Dans ce cas le processus est noté r_t car généralement les taux sont dénommés par la lettre r (pour *rate*).

- Modélisation du taux court avec la mesure de probabilité \mathbb{P}

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t;$$

- La dynamique stochastique devient sous la mesure de probabilité risque-neutre \mathbb{Q}

$$dr_t = a(b_\lambda - r_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}};$$

avec $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$ et $W_t^\mathbb{Q} = W_t + \lambda t$.

La modélisation du taux court est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à priori identique avec des paramètres différents selon la mesure de probabilité (\mathbb{P} ou \mathbb{Q}). Il est donc important de savoir sous quelle mesure nous travaillons pour réaliser la valorisation avec les paramètres pertinents (sachant que la valorisation se fait sous la probabilité risque-neutre).

$$P(t, T) = \exp\left(\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{a}(r_\infty - r_t) - (T-t)r_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-\alpha(T-t)})^2\right)$$

où $r_\infty = b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}$;

Cette formule de valorisation d'un zéro-coupon de maturité $t < T$ peut être lue de deux manières :

- Vision probabilité historique (\mathbb{P}) : une formule à 4 paramètres (a, b, σ, λ) c'est-à-dire les trois paramètres de diffusion et en plus la prime de risque notée λ ;
- Vision probabilité risque-neutre (\mathbb{Q}) : une formule à 3 paramètres (a, b_λ, σ) où les trois paramètres intègrent la prime de risque;

Pour passer d'une probabilité à une autre, on utilise le Théorème de Girsanov.

Théorème de Girsanov Si on suppose que W_t est un mouvement brownien sous la probabilité \mathbb{P} et que λ est un processus F_t -adapté vérifiant la condition de Novikov.

On définit alors le processus $W^\mathbb{Q}$ et une nouvelle mesure \mathbb{Q} sur $[0, T]$ en posant $W_t^\mathbb{Q} = W_t - \int_0^t \lambda_u du$ et

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(\int_0^T \lambda_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du\right).$$

Alors $W^\mathbb{Q}$ est un mouvement brownien sous la mesure \mathbb{Q} .

Revenons à notre exemple. Nous remarquons que le paramètre λ permet de passer de la dynamique sous probabilité historique à la probabilité risque-neutre et inversement. Le paramètre λ est, au signe près, le prix du marché du risque présenté dans le premier chapitre (en lien avec les deux probabilités). Le risque ayant un prix dans le cas de la probabilité historique, il sera matérialisé par λ .

Rappelons que l'AOA implique l'existence de la mesure risque-neutre équivalent à \mathbb{P} . La réciproque est vérifiée uniquement dans le cas discret. L'unicité quant à elle est assurée par la complétude du marché (cf premier chapitre).

Dans l'exemple précédent, il est constaté qu'en appliquant le théorème de Girsanov nous passons théoriquement d'une probabilité à une autre. Nous remarquons également que le changement s'effectue uniquement sur le paramètre de tendance alors que la volatilité est invariante. A priori, nous pourrions facilement passer d'une mesure à une autre.

4.1.2 Contrainte de la forme du prix du marché du risque

Le problème repose sur la mise en pratique du prix du marché du risque dans le cadre standard où les facteurs de risque sont modélisés avec des équations différentielles stochastiques.

Dans le papier rédigé par CAJA et PLANCHET (2010) sur ce sujet, il est indiqué que manipuler conjointement le modèle avec les deux mesures de probabilité conduit à restreindre fortement la forme du prix du marché du risque. Effectivement, pour obtenir des processus de diffusion invariants suivant la probabilité utilisée, nous allons faire l'hypothèse que le prix du marché du risque est constant ou possède une structure affine. D'après leurs recherches, une justification peut être trouvée dans le secteur de la finance car l'horizon utilisé est à court terme. Il paraît évident que l'impact d'une hypothèse forte à court terme aura moins d'impact qu'à long terme. En assurance, la projection se doit d'être sur un horizon beaucoup plus important (engagements sur du plus long terme). C'est dans ce contexte que les contraintes sur le prix du marché du risque deviennent discutables.

Toujours d'après la même source (CAJA et PLANCHET, 2010), l'exemple précédemment développé est en réalité un cas particulier des processus affines. Leur dynamique risque-neutre des taux est spécifiée de manière à obtenir le rendement d'une obligation sous forme affine composée de certaines variables d'état. Les dynamiques sont alors à la fois affines sous la probabilité historique et risque-neutre car les prix du marché du risque sont des multiples de la volatilité des taux d'intérêt. Or l'idée en pratique est critiquable. En effet, certains auteurs comme DUFFEE et STANTON (2000), dénoncent ces formes en énonçant leur manque de flexibilité pour expliquer les primes de risque observées sur les marchés. Notons qu'un abus de langage est souvent fait car on ne parle pas de prix du marché du risque mais de primes de risque puisque qu'en pratique ces quantités ne sont pas observables.

En ajoutant un degré de liberté supplémentaire, la contrainte peut être levée i.e. la forme affine du prix du marché du risque. On aura alors une forme affine en mesure risque-neutre pour calculer plus simplement le prix des zéro-coupons grâce à des formules fermées. En revanche, sous la probabilité historique nous n'aurons plus de contrainte de forme. C'est généralement ce que l'on recherche puisqu'on ne connaît pas la véritable forme du prix du marché du risque.

Une des approches utilisées par ces auteurs est de spécifier la dynamique sous \mathbb{Q} mais sans la définir sous \mathbb{P} . Pour passer sous la probabilité historique, la forme du prix du marché du risque est définie et un déflateur est utilisée. L'avantage d'utiliser la forme souhaitée c'est que l'on peut le définir de manière à ce qu'il change de signe afin de s'adapter à la structure par terme des taux d'intérêts (cf exemple du papier CAJA et PLANCHET (2010) pages 7 et 8). Dans l'exemple développé, on s'attend à ce que le modèle soit assez flexible pour prendre en compte le lien entre les prix du marché du risque et la pente de la courbe des rendements obligataires. Malheureusement ce n'est pas le cas mais le modèle capture le bon signe. Les auteurs indiquent néanmoins que cette approche peut être retenue en essayant de déterminer une forme fonctionnelle pour le prix du marché du risque permettant de reconstruire la dynamique sous la probabilité historique et ainsi d'expliquer la prime de risque observée. Autrement dit, la dynamique aurait pu être spécifiée sous la probabilité risque-neutre pour relâcher l'hypothèse de la forme affine de la dynamique sous la mesure historique. On aurait alors sélectionner des dynamiques simples sous \mathbb{Q} et rechercher une structure pour les prix du marché du risque cohérents avec les évolutions de nos facteurs de risque pour finalement obtenir des primes de risque ayant un sens concret.

La dernière approche évoquée est celle en lien avec les déflateurs. L'idée est d'utiliser uniquement la dynamique sous la probabilité historique pour projeter et d'ajouter un déflateur à la précédente dynamique pour *pricer*. Il s'agit ici d'une alternative au passage en probabilité risque-neutre. C'est pour cette raison que nous ne détaillerons pas plus la démarche qui ne rentre pas dans le cadre du mémoire. Le lecteur intéressé pourra se rapporter aux pages 8, 9 et 10 de CAJA et PLANCHET (2010).

Ces approches reposent toutes sur la définition des dynamiques modélisant les facteurs de risque. Il s'agit ici d'une manière de comprendre ce qu'est le prix du marché du risque mais cette modélisation

ne peut être appliquée directement dans le cadre du mémoire. En effet, le générateur de scénarios économiques est construit de manière à être non-paramétrique. De plus, comme indiqué précédemment, la forme du prix du marché du risque peut-être complexe. Dès lors, le choix adopté pour passer de \mathbb{P} à \mathbb{Q} est un choix parmi une infinité. Comme la quantité n'est pas observable, il est inutile de vouloir complexifier le calcul. C'est pour cette raison que notre choix sera d'adapter les approches usuellement utilisées, revenir à la définition ainsi qu'aux propriétés du prix du marché du risque et des deux probabilités considérées.

4.2 Risque-neutralisation du modèle

Le premier point important à souligner est que la méthode d'estimation des primes de risque doit être adaptée en fonction des facteurs de risque modélisés pour chaque actif considéré. Dans notre GSE, nous avons considéré uniquement deux facteurs de risque : le risque de taux (l'unique risque auquel le taux sans risque est soumis) et le risque sur le rendement des actions (un des risques associées aux actions). En réalité, les produits de taux sont soumis à divers risques dont le risque de taux. Dans le cas d'un produit de taux dit sans risque, il ne peut y avoir de risque de crédit ou de liquidité par définition. Pour rappel, le risque de taux est le risque de voir les facteurs de risque déterminant la forme de la courbe changer au cours du temps.

Il a été vu que « le prix du marché du risque est par définition l'excès de rendement par rapport au taux sans risque offert par un support risqué par unité de volatilité ». De cette définition, plusieurs informations ont pu être extraites pour la modélisation de la prime de risque :

- Les composantes de Nelson-Siegel projetées dans le GSE extraites des taux zéro-coupons sont construites pour être les taux sans risque sous \mathbb{P} . Le lecteur se rapportera au Chapitre 2 pour connaître la démarche de construction. Pour les taux, l'idée va donc être d'éliminer les opportunités d'arbitrage pour qu'ils soient bien modélisés sous la mesure de probabilité risque-neutre puisque, pour rappel, il existe dans le cas discret une équivalence entre l'AOA sur le marché et l'existence d'une probabilité risque-neutre \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} ;
- Ayant modélisé deux facteurs de risque, il reste à traiter le log-rendement action. Il s'agit bien d'un support risqué. L'idée va être de s'appuyer sur un changement de mesure habituel de sorte qu'en moyenne le rendement relative aux actions du CAC 40 rapporte le taux sans risque. Il s'agit bien ici du rendement et non du log-rendement.

4.2.1 Approche considérée pour répondre à la problématique

Nous avons obtenu des faisceaux historiques, que nous allons essayer de « transformer » en faisceaux risque-neutres. Pour cela nous formalisons l'approche précédente en deux étapes : la risque-neutralisation des taux en éliminant les opportunités d'arbitrage et la risque-neutralisation des actions en faisant en sorte qu'en moyenne les actifs rapportent le taux sans risque basé sur un changement de mesure habituel. Décrivons la risque-neutralisation.

Premier point : les taux

Après avoir projeté les trois composantes de Nelson-Siegel sur l'horizon souhaité, nous devons les risque-neutraliser par maturité.

D'après BRIGO et MERCURIO (2006), ils définissent une opportunité d'arbitrage comme une stratégie d'auto-financement noté ϕ , tel que pour un portefeuille noté V_t à la date $t = 0$, le portefeuille est de valeur nulle mais la probabilité (risque-neutre notée \mathbb{Q}) de l'évènement de produire une richesse

à une date ultérieure à partir du portefeuille de valeur nulle est strictement supérieure à 0. Cela se traduit mathématiquement par $V_0(\phi) = 0$ mais il existe un t compris entre 0 et T tel que $\mathbb{Q}(V_t(\phi) > 0) > 0$.

Introduisons un exemple pour illustrer cette notion.

On se positionne dans le cas où à $t = 0$ on fait un prêt de 100€ et on devra à $t = 1$ rembourser notre dette avec un taux d'intérêt à 2%, soit 102 €. Avec la somme empruntée, on fait le choix d'investir dans un actif risqué qui est décrit de la manière suivante :

- Avec une probabilité 50%, on peut recevoir à $t = 1$ la somme de 106 € ;
- Avec une probabilité 50%, on peut recevoir à $t = 1$ la somme de 99 € ;

L'espérance de gain est alors de $\frac{106+99}{2} = 102,5$ €, en considérant que les deux événements sont indépendants l'un de l'autre. En comparant les deux valeurs à $t = 1$, on gagnera en moyenne $103 - 102,5 = 0,5$ €. Cela signifie qu'en investissant 0 €, on va en moyenne gagner 0,5 €. L'exemple est purement illustratif, mais si ce mécanisme est répétée avec de plus gros montants, les gains peuvent devenir importants en investissant 0 €.

Comme indiqué précédemment, il existe dans le cas discret une équivalence entre l'AOA sur le marché et l'existence d'une probabilité risque-neutre \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} . Par définition, la probabilité risque-neutre veut que chaque actif rapporte en moyenne le taux sans risque.

La stratégie suivante est donc mise en place :

1. Calculer les taux obtenus avec la formule de Nelson-Siegel en multipliant élément par élément les composantes de Nelson-Siegel par les facteurs de Nelson-Siegel ;
2. Choisir un taux sans risque de référence ;
3. Centrer les taux pour chaque maturité et ajouter le taux sans risque de sorte qu'en moyenne les simulations pour chaque maturité rapportent en moyenne le taux sans risque.

Ayant les principales étapes pour « risque-neutraliser » les taux, nous allons utiliser ces résultats pour transformer les log-rendements.

Deuxième point : risque-neutraliser les rendements CAC40

La démarche adoptée peut se résumer en deux étapes majeures :

1. Le changement de mesure de Black-Scholes est utilisé dans le cadre des actions pour passer de trajectoires historiques à risque-neutres. Seul le rendement espéré est modifié laissant ainsi la volatilité inchangée. N'ayant pas modélisé les actions par une dynamique brownienne, des estimateurs seront calculés pour « reproduire » le prix du marché du risque BS ;
2. Les rendements sont ensuite ajustés de sorte à retomber sur la volatilité implicite à 12 mois (pour que les simulations reproduisent bien le prix des options à 12 mois comme demandé par l'ACPR (2013)).

Etape 1

On peut dire que le rendement s'écrit :

$$r_{st} = \mu_t + \sigma_t \epsilon_t$$

avec r_{st} le rendement de l'action à la date t , μ_t le rendement moyen, σ_t la volatilité et ϵ_t l'aléa à ajouter pour obtenir la simulation i pour chaque date t . On va pouvoir estimer le rendement espéré

par $\hat{\mu}_t$ l'estimateur classique en réalisant la moyenne par date du rendement sur les simulations :

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N rs_{i,t}$$

où $rs_{i,t}$ le rendement de l'action à la date t pour la simulation i .

On détermine également $\hat{\sigma}_t^2$, l'estimateur de la volatilité au carré :

$$Variation_{i,t} = \frac{Prix_{i,t} - Prix_{i,0}}{Prix_{i,0}}$$

$$Moyenne_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Variation_{i,t}$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{t}{N} \sum_{i=1}^N (Variation_{i,t} - Moyenne_t)^2.$$

Pour transformer les simulations en trajectoires risque-neutres, on fait le changement de mesure de sorte à obtenir comme rendement espéré le taux sans risque noté r_t à la date t (obtenu avec le premier point) :

$$r\tilde{s}_t = rs_t - \lambda_t \sigma_t \quad \text{avec} \quad \lambda_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}$$

Les rendements sont construits de manière à être sans risque c'est à dire pour qu'ils soient en moyenne égal au taux sans risque. Avec l'étape qui suit, ils sont également supposés avoir une volatilité à 12 mois égale à la volatilité implicite lue sur le marché.

Cette approche peut être justifiée en observant la similitude avec le prix du marché du risque utilisé pour passer de la probabilité historique à risque-neutre pour la dynamique de *Black-Scholes*.

Etape 2

Un GSE doit vérifier certains tests pour être utilisé. Une des recommandations de l'ACPR est que le GSE reproduise les prix d'options, comme indiqué ci-dessus. Dans le cas du facteur de risque des actions, il doit reproduire le prix d'un call et d'un put observés sur le marché de manière à être *market-consistent*. Le GSE présenté dans le travail n'étant pas construit de manière usuelle, la volatilité du faisceau risque-neutre doit être ajustée. L'idée est de recalibrer la volatilité à un an du faisceau dit risque-neutre sur la volatilité implicite Black et Scholes de l'option à la monnaie, supposé permettre au modèle d'être plus cohérent avec les prix observés sur le marché.

Nous considérons que la volatilité d'une option vanille sur action est égale à la volatilité implicite de cette option dans le modèle de BS (Black-Scholes). On veut que les scénarios économiques permettent de reconstruire le prix d'une option vanille à un an (12 mois) à la monnaie.

Les faisceaux sont ajustés sur chaque date, de sorte à ce qu'à 12 mois la volatilité soit égale à la volatilité implicite observée sur le marché.

4.2.2 Mise en pratique de la risque-neutralisation

Nous allons maintenant appliquer les deux points de risque-neutralisation à notre GSE.

Application sur les taux

La démarche pour les taux est résumée ci-dessous :

1. On choisit la courbe des taux sans risque (de référence). Notre choix final s'est porté sur la courbe des taux obtenue en projetant les composantes de Nelson-Siegel de la dernière valeur disponible dans l'historique (du 31 Mai 2023 i.e. 269ème valeur sur 269 disponibles dans l'historique) sur les 240 mois de projections afin de projeter la courbe la plus « à jour ». On choisit les maturités entre 1 mois et 20 ans soit entre $\frac{1}{12}$ et 20 avec un pas de $\frac{1}{12}$. On le note $taux_ssRisque_i$ pour la maturité i ;

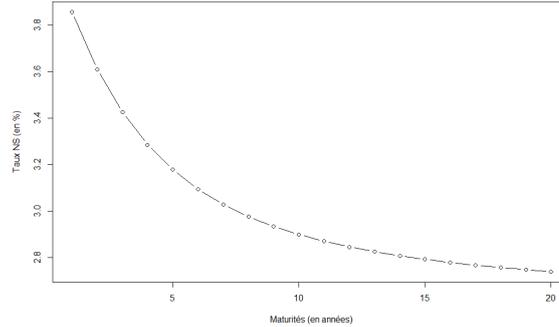


FIGURE 4.1 : Courbe de référence du taux sans risque

2. On récupère les projections des 3 composantes de Nelson-Siegel pour les 1000 simulations et les 240 mois de projections. On réalise la multiplication élément par élément des composantes et des facteurs de Nelson-Siegel, extrait en amont. On a alors une matrice de taux de taille (240×1000) notée $series_taux_{i,j}$ avec i le numéro de la ligne compris entre 1 et 240 et j le numéro de colonne compris entre 1 et 1000. La composante à la ligne i et colonne j de la matrice sera égale à

$$series_taux_{i,j} = \mu_{1,i,j} \times fact_{1,i} + \mu_{2,i,j} \times fact_{2,i} + \mu_{3,i,j} \times fact_{3,i}.$$

Avec :

- $\mu_{1,i,j}$ la première composante projetée de Nelson-Siegel avec le RVFL pour la maturité i et la simulation $n^o j$;
 - $\mu_{2,i,j}$ la deuxième composante projetée de Nelson-Siegel avec le RVFL pour la maturité i et la simulation $n^o j$;
 - $\mu_{3,i,j}$ la troisième composante projetée de Nelson-Siegel avec le RVFL pour la maturité i et la simulation $n^o j$;
 - $fact_{1,i} = 1$ le premier facteur associée à la première composante projetée de Nelson-Siegel calculé avec la dernière valeur de l'historique pour la maturité i ;
 - $fact_{2,i} = \frac{1-e^{-i/\alpha}}{i/\alpha}$ le deuxième facteur de la deuxième composante projetée de Nelson-Siegel calculé avec la dernière valeur de l'historique pour la maturité i ;
 - $fact_{3,i} = \left(\frac{1-e^{-i/\alpha}}{i/\alpha} - e^{-i/\alpha} \right)$ le troisième facteur de la troisième composante projetée de Nelson-Siegel calculé avec la dernière valeur de l'historique pour la maturité i .
3. On effectue la moyenne sur chaque maturité c'est-à-dire la moyenne par ligne sur les 1000 projections et on centre chaque taux projeté. On réalise le calcul ci-dessous pour chaque maturité i (entre 1 et 20 de pas mensuel $\frac{1}{12}$) :

$$series_taux_centree_{i,j} = series_taux_{i,j} - \frac{1}{1000} \sum_{j=1}^{1000} series_taux_{i,j};$$

4. On réalise un premier test pour vérifier que les taux sont bien centrés. Pour cela on vérifie la condition suivante pour chaque maturité i.e. pour chaque ligne i (ou maturité) que l'on ait :

$$\frac{1}{1000} \sum_{j=1}^{1000} series_taux_centree_{i,j} = 0.$$

Si ce n'est pas le cas on arrête l'algorithme en affichant un message d'erreur ;

5. Ayant les taux qui rapportent en moyenne 0, on va ajouter le taux sans risque calculé lors de l'étape 1. Les taux rapporteront alors en moyenne le taux sans risque. Pour chaque i maturité parmi les 240 maturités :

$$series_taux_{i,j}^{\mathbb{Q}} = series_taux_centree_{i,j} + taux_ssRisque_i;$$

6. De même que pour l'étape 4, on réalise un test afin de vérifier qu'il y a bien égalité entre le les taux risque-neutralisés et le taux sans risque. Pour chaque maturité i , on teste :

$$\frac{1}{1000} \sum_{j=1}^{1000} series_taux_{i,j}^{\mathbb{Q}} = taux_ssRisque_i.$$

Si ce n'est pas le cas on arrête l'algorithme en affichant un message d'erreur sinon on retourne les résultats.

On obtient alors la matrice des taux projetés où on a « éliminé » les opportunités d'arbitrage : $series_taux^{\mathbb{Q}}$ de taille (240×1000) , pour les 240 maturités et les 1000 simulations.

Application sur les actions

On va maintenant effectuer la démarche pour les actions. On sélectionne le facteur de risque possédant un support risqué. On calcule le log-rendement. Puis on le projette de manière à obtenir plusieurs simulations. Puisque l'on réalise les calculs sur le rendement, il est nécessaire de prendre l'exponentielle du log-rendement moins 1. Elle sont notées $proj_{i,t}$ où $1 \leq i \leq N$, N le nombre de projections réalisées ($N = 1000$) et t la date considérée.

La démarche est résumée dans les étapes suivantes (par rapport à notre GSE avec les log-rendements) :

1. Un vecteur de l'estimateur du rendement espéré et de la volatilité pour les t dates discrètes sont obtenus et notés respectivement μ_t et σ_t (formule présentée dans l'étape 1) ;
2. Le taux sans risque (court) cumulé est calculé sur une date t projetée, de sorte qu'à chaque date t :

$$taux_ssRisque_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N series_taux_{i,j}^{\mathbb{Q}}$$

avec $series_taux_{i,j}^{\mathbb{Q}}$ le taux obtenu précédemment pour la trajectoire i à la date t . Pour finalement obtenir :

$$r_t = (1 + taux_ssRisque_t)^{\frac{1}{12}} - 1$$

3. De la même manière que pour les taux, un test d'égalité est réalisé entre le taux r_t obtenu ci-dessus et le taux sans risque. En cas de non égalité, l'algorithme s'arrête.

4. Pour finir la première étape, on s'appuie sur le prix du marché du risque issu du changement de probabilité (Théorème de Girsanov) sur les dynamiques historique et risque-neutre de BS. La risque-neutralisation est ainsi finalisée en faisant pour chaque i parmi les N projections :

$$proj_rn_{i,t} = proj_{i,t} - \lambda_t \times \sigma_t$$

avec

$$\lambda_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}.$$

5. On réalise un test afin de vérifier qu'il y ait bien égalité entre le taux sans risque et le rendement espéré. Pour cela on vérifie la condition suivante pour chaque date t :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N proj_rn_{i,t} = taux_ssRisque_t.$$

Si ce n'est pas le cas on arrête l'algorithme en affichant un message d'erreur sinon on retourne les résultats.

6. La seconde partie de la transformation nécessite les étapes suivantes de sorte à avoir en $t = 12$ une volatilité en cohérence avec la valeur de marché. Les faisceaux sont ainsi ajustés sur chaque date, de sorte à ce qu'à 12 mois la volatilité soit égale à la volatilité implicite observée sur le marché. On note $\sigma_{0,12}$ la volatilité implicite (à 1 an) de l'option sur action, σ_{12} la volatilité de l'option à 12 mois (1 an) et $\beta = \frac{\sigma_{0,12}}{\sigma_{12}}$. De cette manière on sait que nous allons avoir une différence du type :

$$proj_rn_{i,t} - proj_{i,t} = \sigma_t \epsilon_t$$

Cette quantité va ensuite être multiplié par β . On aura ainsi une projection qui peut s'exprimer de cette manière :

$$proj_rn_{i,t} = r_t + \beta \sigma_t \epsilon_{i,t}.$$

Cette dernière étape permet qu'à la date $t = 12$, la volatilité soit $\sigma_{0,12}$. Grâce à cette transformation, on a réalisé la dernière étape de la risque-neutralisation.

4.2.3 Résultats du GSE « sous \mathbb{Q} »

Jusqu'à présent, on a pu observer le logarithme du rendement pour les actions. Cette mesure est un bon indice mais parfois compliqué à interpréter, en particulier quand nous ne sommes pas familiers avec ce sujet. Avec les transformations apportées à la série, il s'agit ici d'un taux de rendement. C'est pour ces différentes raisons que l'on va tracer l'évolution des prix action du CAC40 sous la mesure historique et les faisceaux risque-neutres construits auparavant. On fait l'hypothèse qu'à la dernière date connue, soit le 31 Mai 2023, une action du CAC40 a une valeur de 100 :

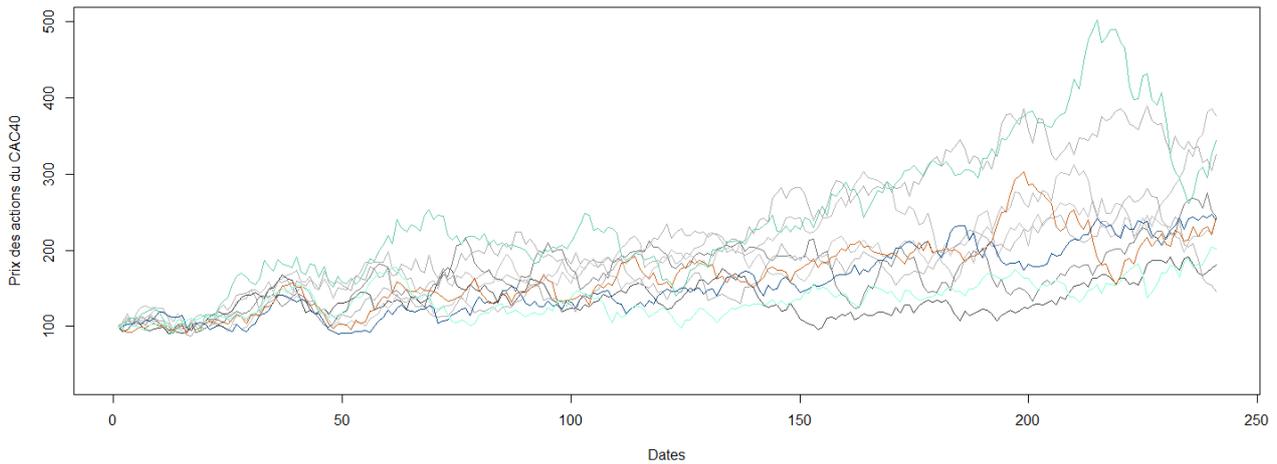
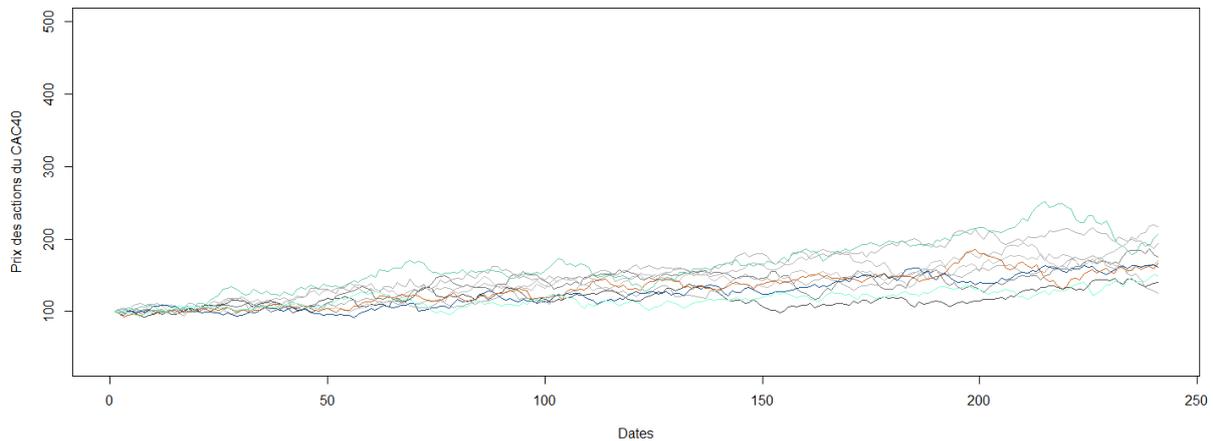
- Dans le cas des deux mesures :

$$\text{Prix_CAC40}_t = \text{Prix_CAC40}_{t-1} e^{r_{st}} = \underbrace{\text{Prix_CAC40}_0}_{=100} \prod_{s \leq t} (e^{r_{ss}}) = 100 \exp\left(\sum_{s=1}^t r_{ss}\right)$$

où $1 \leq t \leq 240$ pour chaque simulation i , $1 \leq i \leq 1000$;

On trace les dix premières simulations pour comparer l'allure de l'évolution des prix d'une action sur 20 ans. Chaque couleur correspond à une simulation, ce qui permet de comparer la trajectoire prise sous les deux mesures. Ce que l'on peut remarquer c'est la différence significative de rendement entre

les deux approches. Pour la méthode historique, on a sur les 20 ans un prix qui en moyenne double ou triple au minimum. Néanmoins on peut constater qu'à certaines périodes le prix chute et passe en dessous du prix initial de 100 : par exemple la trajectoire grise au 50ème mois projeté (4 ans et 2 mois). Pour l'approche risque-neutre, l'intervalle de prix est restreint entre 80 et 200 contre jusqu'à plus de 450 pour la mesure historique. Les projections ont une allure plus homogène : les variations de prix entre les simulations sont moindres et les variations propre à un faisceau risque-neutre sont également moins importantes que pour les faisceaux historiques.

FIGURE 4.2 : Mesure de probabilité \mathbb{P} FIGURE 4.3 : Mesure de probabilité \mathbb{Q}

Ci-dessus, on peut trouver le prix d'une action du CAC40 pour les dix premières projections sous les deux mesures de probabilités sur l'horizon 20 ans de pas mensuel.

Si on trace l'évolution du prix d'un actif avec comme valeur initiale 100 revalorisée mensuellement au taux sans risque, on obtient une trajectoire sur l'horizon de projection très similaire aux faisceaux risque-neutres. On représente en rouge l'évolution du prix de cet actif. Ce qui est en cohérence avec

notre approche, l'idée étant que tous les actifs en moyenne rapportent le taux sans risque. Pour se faire, il est important de différencier le pas de temps et l'unité. Les log-rendements ont un pas de temps mensuel et une unité mensuelle. En effet, il est calculé comme le logarithme du rapport de l'indice à la date t divisé par $t - 1$ et il est projeté également de manière mensuelle. En revanche, le taux risque-neutre obtenu est de pas de temps mensuel mais d'unité annuelle. Comme on suppose que le « rendement » (qui en réalité le taux sans risque) est mensuel (chaque mois on revalorise le prix observé à la date précédente), il faut mettre le taux de rendement à la puissance $\frac{1}{12}$.

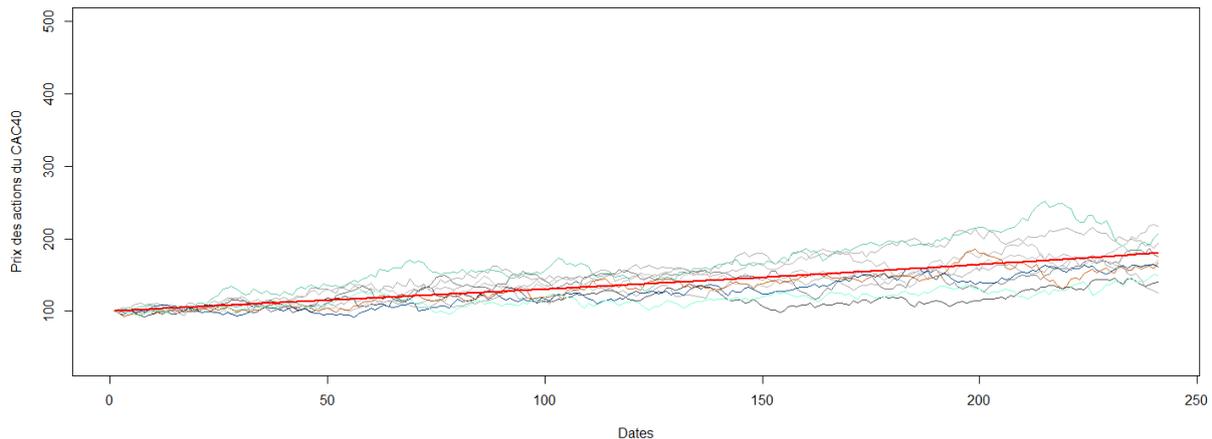


FIGURE 4.4 : Ajout du prix d'un actif revalorisé mensuellement au taux sans risque sur les 20 prochaines années et dix premiers faisceaux risque-neutres

Ce résultat est sans grande surprise puisque les tests relatifs au point 5. de la méthode sont vérifiées lors de la mise en application de l'algorithme sur nos projections. Pour le test on obtient une égalité jusqu'à la 10-ème décimale.

Les simulations sont à priori cohérentes :

- L'approche historique quand on est en quête de prédictions futures cohérentes avec les données passées. Dans ce cas, les actifs dits risqués offrent une prime de risque, ce qui complique la mise en place d'une évaluation correcte. En traçant l'évolution des dix premières simulations, on constate les variations importantes entre les prix : l'évaluation est difficile ;
- L'approche risque-neutre pour faciliter la mise en place d'une évaluation puisque la probabilité est construite de sorte à ce que le prix des actifs actualisés soit une martingale. Dans cette configuration, les actifs ont une performance moyenne égale au taux sans risque. Les évaluations sont donc réalisées en actualisant les flux futurs au taux sans risque.

Aussi pour constater l'impact du nombre de simulations, nous allons observer l'évolution des prix sous les deux probabilités pour 100 et 1000 simulations. Les graphiques sont disponibles sur les deux prochaines pages.

On observe les mêmes tendances : des simulations dispersées pour la mesure historique contrairement aux faisceaux risque-neutres qui sont dispersés autour du prix de l'actif « sans risque ». Le prix oscille la vingtième année entre 80 et plus de 600 pour les faisceaux historiques contre un intervalle compris entre 80 et 300 pour l'approche risque-neutre. En risque-neutre, le rendement paraît moindre

mais plus sûr. Les observations sont les mêmes lorsque l'on considère les 1000 projections.

Pour confirmer notre approche risque-neutre, nous allons mettre en place dans un premier temps des tests de martingalité afin de mesurer le caractère martingale de nos simulations, puis un second test, pour vérifier la demande de cohérence de marché de l'ACPR sur les actions.

4.3 Les tests et limites de l'approche

Dans les précédentes parties, nous avons construit un GSE sous \mathbb{P} puis sous \mathbb{Q} . Le GSE, étant non paramétrique, nous n'avons pas pu utiliser directement les méthodes habituelles, mais nous sommes basés sur une approche usuelle qui consiste à modéliser la prime de risque avec une formule puis l'intégrer au facteur de risque.

Nous allons vérifier notre démarche de risque-neutralisation en utilisant les éléments suivants :

- Les simulations de taux risque-neutralisés pour les 240 maturités considérées, obtenues après avoir éliminé les OA sur les taux sous probabilité historique ;
- La courbe de taux sans-risque de référence obtenue en projetant les trois composantes de Nelson-Siegel à la date 0 (date précédent la première date de projection) soit le 31 Mai 2023 (dernière date disponible de l'historique) sur les 20 prochaines années ;
- Le rendement des actions du CAC40 qui a un rendement moyen égal au taux sans risque (sur les 1000 scénarios pour 240 dates).

Dans un premier temps, nous allons réaliser des contrôles de la propriété martingale. Nous réaliserons dans un second temps des comparatifs entre des prix d'options sur les actions.

4.3.1 Contrôle des propriétés martingales

Pour rappel, si on note X_t un processus stochastique, la propriété de martingalité s'exprime : $\mathbb{E}(X_t|F_s) = X_s$ pour $s \leq t$ presque sûrement où $F_t = \sigma\{X_s : s \leq t\}$ sa filtration naturelle. Le résultat important est que : *La probabilité risque-neutre rend les actifs actualisés martingales et de manière équivalente les stratégies de portefeuille simple actualisées martingales.* Ce qui signifie dans notre cas que les prix actualisés devraient être des martingales par rapport à la construction risque-neutre réalisée dans la section précédente. Pour tester le caractère risque-neutre de notre GSE, nous allons réaliser des contrôles de la propriété martingale.

Cas des actions en temps discret :

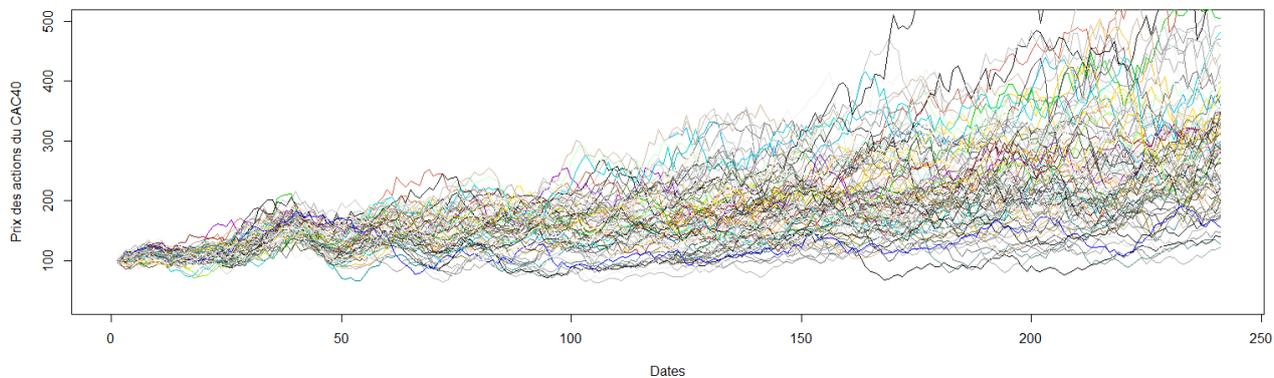
$$\forall j, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Indice}(i, j) \times \text{déflateur}(i, j) = 1$$

où N est le nombre de simulations et j les dates discrètes de projection.

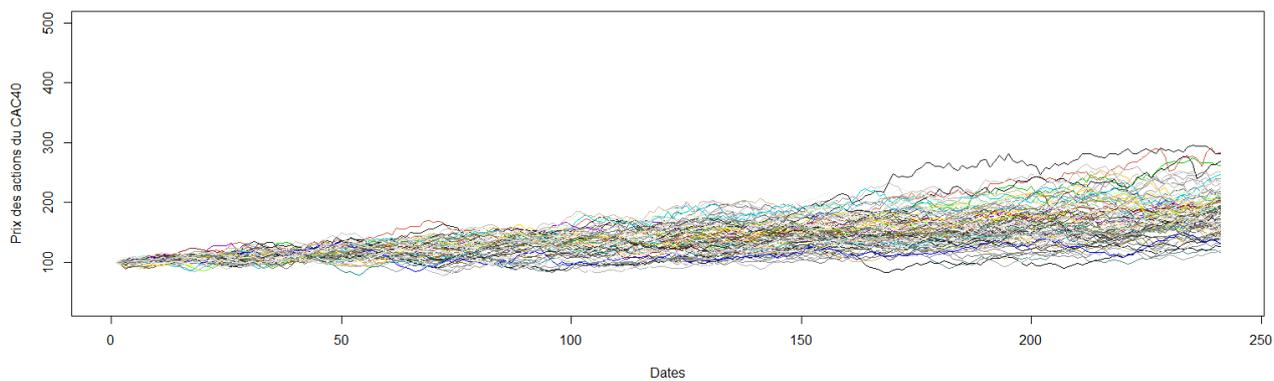
La variable $\text{déflateur}(i, j)$ représente, pour le scénario i , la valeur qu'il faut posséder aujourd'hui pour obtenir 1€ à la date j . Elle est définie par :

$$\begin{cases} \text{déflateur}(i, 0) = 1 \\ \text{déflateur}(i, j) = \text{déflateur}(i, j-1) \cdot e^{-f(i, j, j)} \end{cases}$$

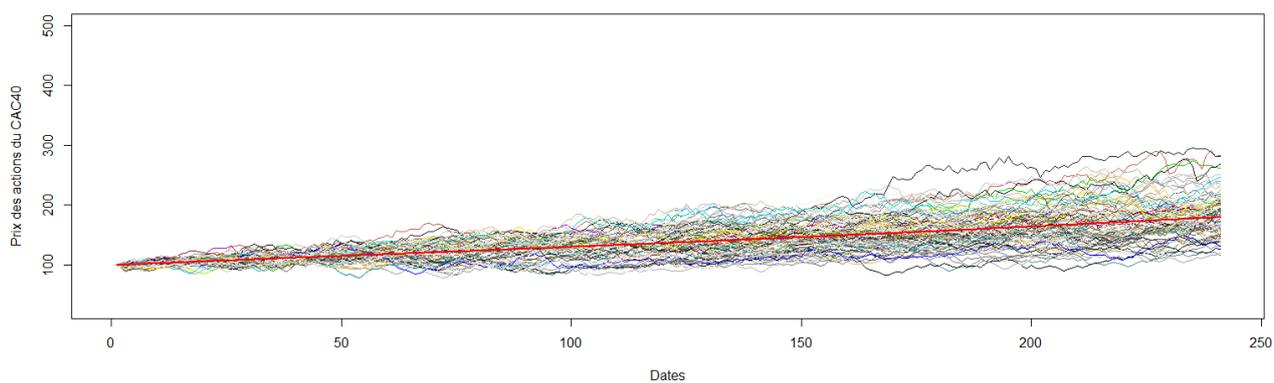
$f(i, j, j)$ est le taux forward instantané pour le scénario i à la date j pour la période $[j, j+1]$ c'est à dire le taux court à la date j . En effet, le taux court est le taux forward instantané de sorte que



(a) Mesure de probabilité \mathbb{P}

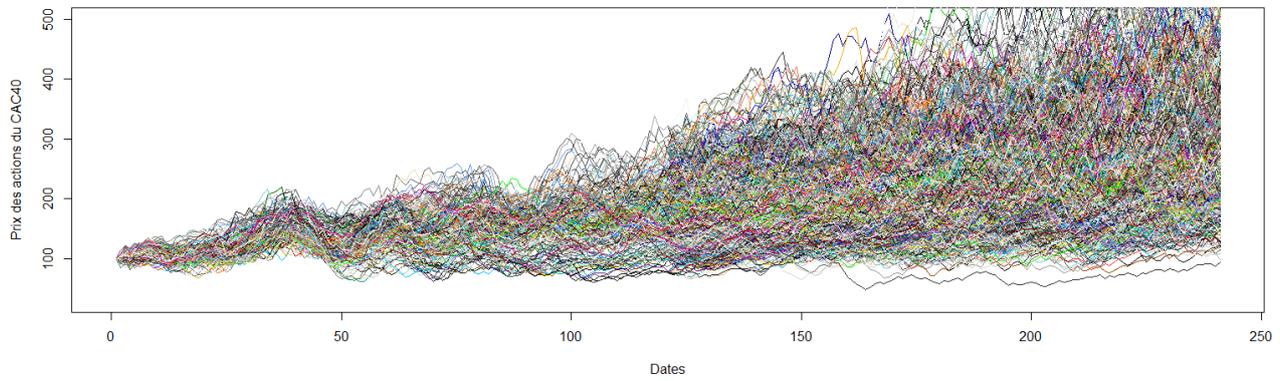


(b) Mesure de probabilité \mathbb{Q}

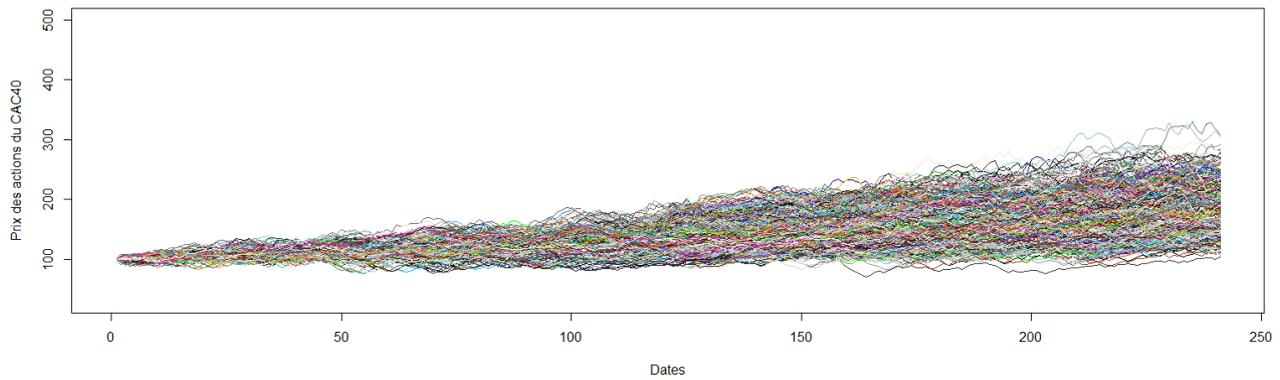


(c) Ajout du prix d'un actif revalorisé mensuellement au taux sans risque en rouge

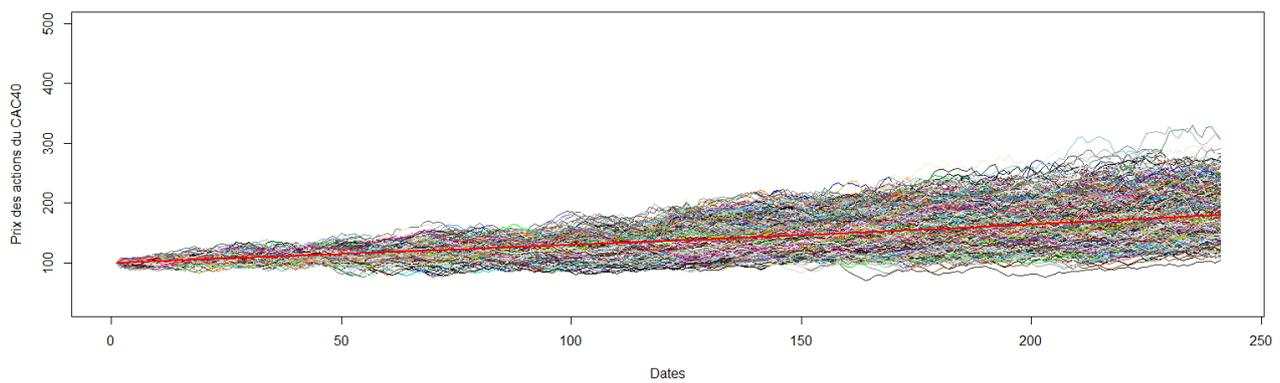
FIGURE 4.5 : Prix d'une action du CAC40 pour les 100 premières projections sous les deux mesures de probabilités sur l'horizon 20 ans de pas mensuel



(a) Mesure de probabilité \mathbb{P}



(b) Mesure de probabilité \mathbb{Q}



(c) Ajout du prix d'un actif revalorisé mensuellement au taux sans risque tracé en rouge

FIGURE 4.6 : Prix d'une action du CAC40 pour les 1000 premières projections sous les deux mesures de probabilités sur l'horizon 20 ans de pas mensuel

$f(i, j, j) = r_{i,j}$. Donc on peut dire que :

$$\begin{cases} \text{déflateur}(i, 0) = 1 \\ \text{déflateur}(i, j) = \text{déflateur}(i, j-1) \cdot e^{-r_{i,j}} = 1 \cdot \prod_{s=1}^j \exp(r_{i,s}) = \exp\left(-\sum_{s=1}^j r_{i,s}\right) \end{cases}$$

où $r_{i,s}$ le taux court de la simulation i à la date s .

La variable $\text{Indice}(i, j)$ représente, pour le scénario i , la valeur de l'actif à la date j qui a pour valeur initiale 1€ . Elle est définie par :

$$\text{Indice}(i, j) = \begin{cases} I(i, 0) = 1 \\ I(i, j) = I(i, j-1) \times (1 + r_{\tilde{s}_{i,j}}) \end{cases}$$

où $r_{\tilde{s}_{i,j}}$ le taux de rendement de la simulation i à la date s avec l'approche risque-neutre. Dans notre cas les taux de rendement sont mensuels et non annuels. Ce qui revient à faire le calcul du prix pour une valeur en date 0 de 1€ :

$$\text{Indice}(i, j) = \begin{cases} I(i, 0) = 1 \\ I(i, j) = I(i, j-1) \times (1 + r_{\tilde{s}_{i,j}}) = \underbrace{\text{Prix_CAC40}_0}_{=I(i,0)=1} \prod_{s=1}^j (1 + r_{\tilde{s}_{i,j}}) \end{cases}$$

Cas des déflateurs en temps discret :

$$\forall j, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{déflateur}(i, j) = \text{Prix_ZC}\left(\frac{j}{12}\right)$$

où N est le nombre de simulations et j les dates discrètes de projection.

Les zéros coupons représentent les prévisions des taux qui vont se réaliser entre deux dates alors que les déflateurs sont les coefficients d'actualisation calculés à partir des taux effectivement réalisés. Le taux court r_t est le taux effectivement réalisé sur la période $[t, t + \Delta t]$.

L'idée ce test est de constater si la moyenne des taux d'actualisation pour les simulations est bien égal au prix d'un zéro-coupon pour une même date. On teste si un actif de valeur 1€ actualisé est bien égal en moyenne au prix d'un zéro-coupon. Cela revient à actualiser la valeur terminale d'un zéro-coupon qui est égal à 1€ . Sachant que l'espérance d'un actif actualisé doit être une martingale sous \mathbb{Q} d'où l'égalité entre les deux.

On va utiliser la dernière date connue de l'historique ainsi que la formule de Nelson-Siegel pour obtenir les taux zéro coupons. Pour calculer le prix des zéro coupons, on va utiliser une formule faisant le lien entre les taux zéro coupons et les prix zéro coupons : pour un taux zéro coupon en temps discret noté $R_t = R(t, T)$ à la date t de maturité T son prix est défini en temps discret par $\text{Prix_ZC} = \frac{1}{(1+R_t)^T}$.

La variable $\text{Prix_ZC}\left(\frac{j}{12}\right)$ représente la valeur d'un zéro-coupon à la date 0 de maturité $\frac{j}{12}$ qui a par définition la valeur terminale 1€ à sa maturité. On va utiliser la valeur des 3 composantes de Nelson-Siegel pour déterminer le taux zéro-coupon pour les maturités 10 ans et 20 ans :

$$R(0, T) = \mu_{1,0} + \mu_{2,0} \frac{1 - e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} + \mu_{3,0} \left(\frac{1 - e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} - e^{-T/\alpha} \right)$$

avec

- Les maturités $T = 10$ ou $T = 20$;

- $\alpha = 2,25$ comme vu dans le Chapitre 2 ;
- Les 3 composantes du 31 Mai 2023 ($t=0$) c'est à dire la dernière date de l'historique où :
 - $\mu_{1,0} = 2,59089581$;
 - $\mu_{2,0} = 1,29027422$;
 - $\mu_{3,0} = -0,02404785$.

La variable $\text{Prix_ZC}(\frac{j}{12})$ est la variable $\text{taux_sans_risque}_i$ pour la maturité où $i = \frac{j}{12}$. La risque-neutralisation des taux est basée sur cette formule en quelques sortes. Si on observe bien la formule du test de martingalité dans le cas des déflateurs, on peut voir qu'il s'agit de l'étape de 5. de risque-neutralisation des taux. Nous faisons le choix de réaliser le test pour développer les explications liées à cette étape et observer les quelques différences qui subsistent.

On définira la variable déflateur(i, j) de la même manière que pour les actions.

Hypothèse de martingalité du logarithme des rendements actions en temps discret

Pour rappel, nous allons tester pour chaque date (discrète) j de projection :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Indice}(i, j) \times \text{déflateur}(i, j) = 1$$

où N est le nombre de simulations.

Dans notre cas, nous avons réalisé $N = 1000$ simulations. On va réaliser le calcul pour chaque j et observer la distribution. Par rapport aux formules précédentes, nous observons des taux pour une certaine maturité. On doit donc utiliser les formules suivantes :

$$\begin{cases} \text{déflateur}(i, 0) = 1 \\ \text{déflateur}(i, j) = \text{déflateur}(i, j-1) \cdot (e^{-r_{i,j}})^{\frac{j}{12}} = 1 \cdot \prod_{s=1}^j \exp(r_{i,s})^{\frac{j}{12}} = \exp\left(-\frac{j}{12} \sum_{s=1}^j r_{i,s}\right) \end{cases}$$

où $r_{i,s}$ le taux de la simulation i à la date s dans notre GSE avec un pas mensuel.

Pour commencer, nous allons observer les résultats pour la première date soit $j = 1$.

Un extrait des valeurs du produit $\text{Indice}(i, 1) \times \text{déflateur}(i, 1)$ pour les cinq premières simulations soit $1 \leq i \leq 5$:

Simulation n°	$\text{Indice}(i, 1) \times \text{déflateur}(i, 1)$
1	1,0038064
2	0,9945970
3	1,0001902
4	0,9995542
5	1,0022715

TABLE 4.1 : Extrait des 5 premières lignes du produit

Les valeurs sont très proches de 1, c'est à dire la valeur cible. Ce résultat est plutôt attendu sachant qu'il s'agit du test pour la première date $j = 1$. Le nombre de calcul est donc bien moins important que pour $j = 240$ et donc les erreurs moins récurrentes.

La distribution va être tracée de manière à observer les résultats sur les 1000 simulations. Cela correspond à la fréquence par intervalle de valeur donc à l'histogramme qui est lissé pour former une courbe.

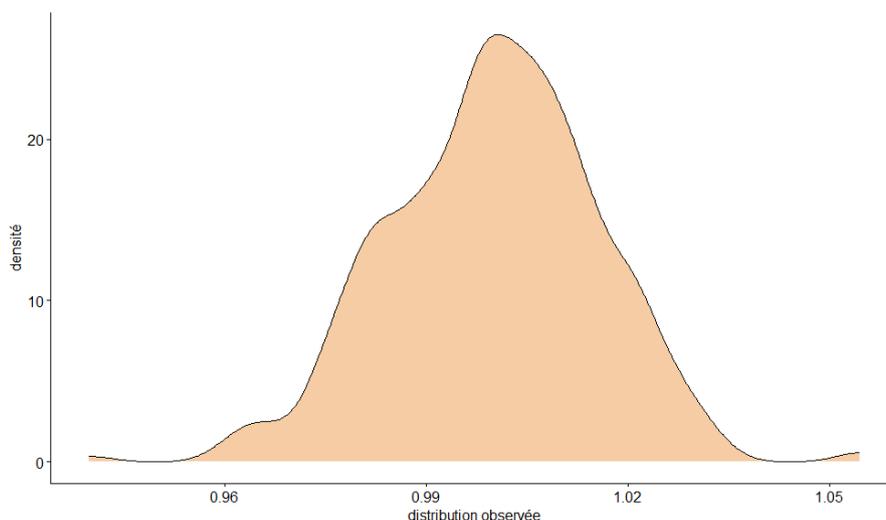


FIGURE 4.7 : Distribution observée pour la première date projetée pour les 1000 simulations

Pour mieux analyser la distribution, on va comparer cette dernière avec une loi normale d'espérance 1 et d'écart-type égal à celui de la distribution pour la première date $\sigma = 0,016$. Notons que la moyenne de cette distribution est environ égale à 1,00 et la médiane à 1,00.

Le graphique quantile-quantile, plus connu sous le nom de *qq-plot* permet d'avoir une idée sur la similitude entre les distributions (celles de la loi normale et de celle calculée). On trace les quantiles de la distribution normale contre celle calculée.

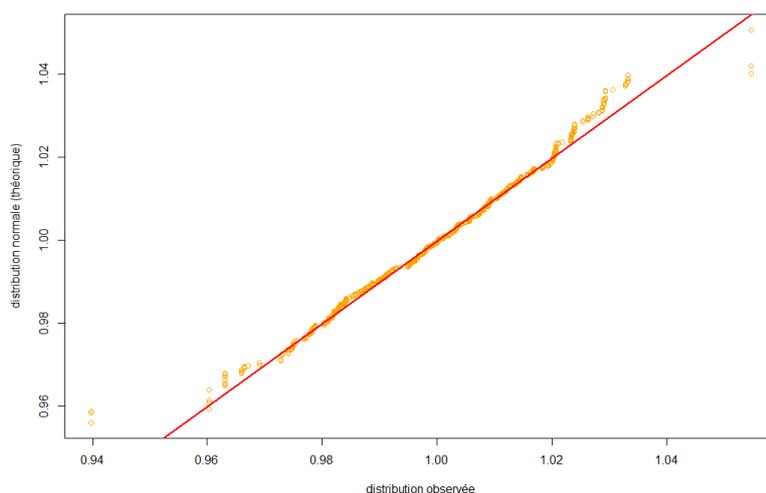


FIGURE 4.8 : QQ-Plot de la distribution normale contre celle observée après calculs

On constate que les deux distributions sont proches puisque les points sont répartis autour de la droite de manière plutôt linéaire. Un second graphique usuellement utilisé pour observer les similitudes entre deux distributions sont les boîtes à moustache (BAM) où les quantiles à 25 %, la médiane (50 %) et le quartile supérieur (75 %) sont représentés.

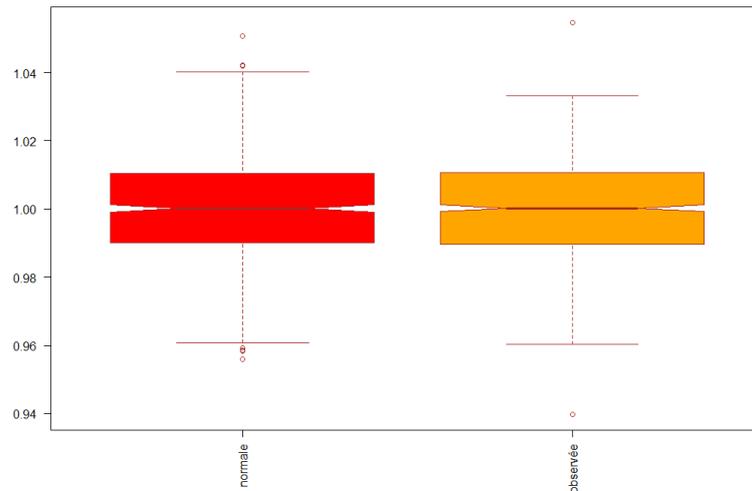


FIGURE 4.9 : BAM de la distribution normale et celle observée

Les deux distributions semblent à priori très proches. Les tests statistiques sont assez sensibles à la taille de l'échantillon. Par exemple, pour le test de Shapiro-Wilk mieux vaut avoir un échantillon de petite taille car il sera très sensible à la moindre perturbation. On va alors uniquement se baser sur une analyse graphique qui nous semble plus pertinente puisque notre distribution ne doit pas être gaussienne pour valider le test de martingalité. Il s'agit ici d'une simple comparaison nous permettant de juger de la qualité de la distribution des résultats qui est censée être répartie de chaque côté de la cible (égale à 1) de manière homogène.

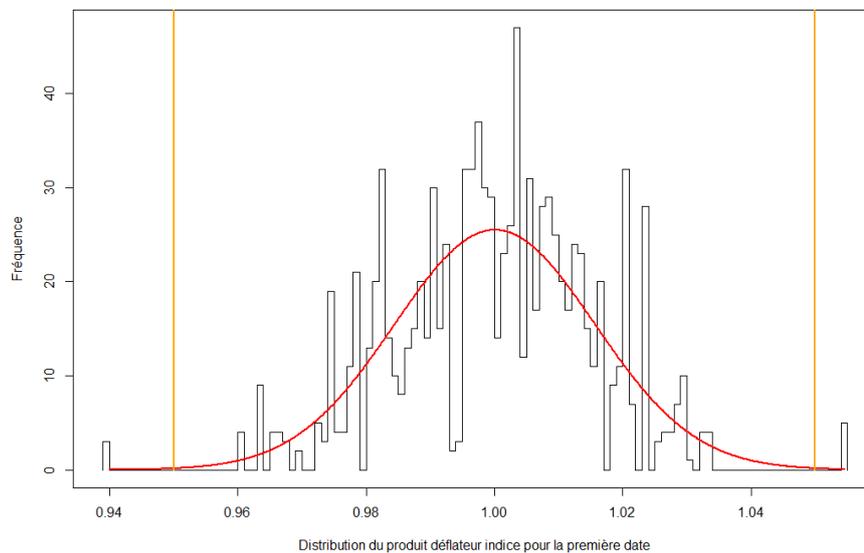


FIGURE 4.10 : Histogramme, distribution lissée et bornes limites pour la série observée après un mois

Seul 0,8 % des valeurs se trouvent en dehors de l'intervalle $[0,95, 1,05]$ (représenté en orange), l'allure de la densité correspond globalement à une loi normale centrée réduite. De manière générale, nous sommes satisfaits des résultats pour cette première date.

Pour confirmer notre premier test, nous allons observer les dates pour la dernière date disponible, soit $j = 240$. C'est dans ce cas où il y a le plus d'opérations, le type de cas où on pourrait relever des discordances. Pour commencer, observons la distribution des 1000 simulations :

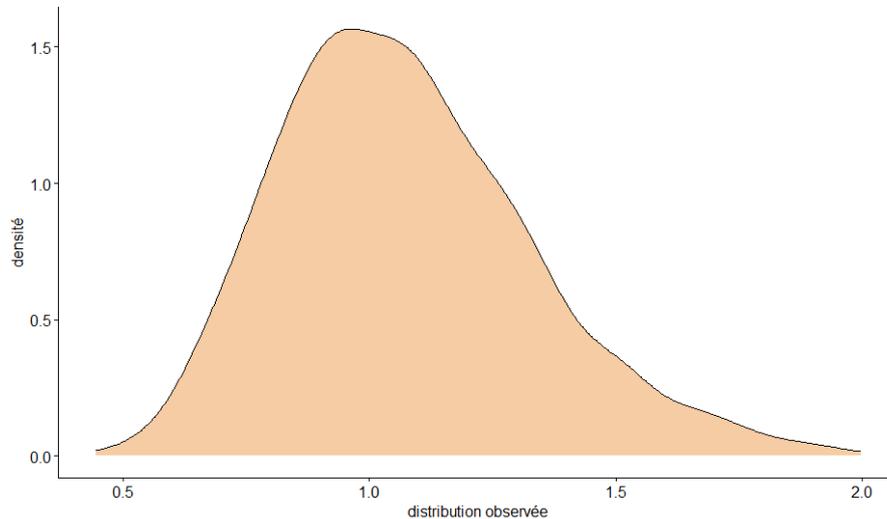


FIGURE 4.11 : Distribution observée pour la dernière date projetée pour les 1000 simulations

Comme pour la première date, cette dernière sera comparée avec une loi normale d'espérance 1 et d'écart-type celui de la distribution pour la dernière date $\sigma = 0,258$. Le premier constat à faire est que l'écart-type est plus important que pour la première date même si la valeur reste faible. De plus la moyenne et la médiane, respectivement égales à 1,07 et 1,05.

Le *qq-plot* est tracé pour avoir une première idée de la similitude entre les distributions (celles de la loi normale et celle calculée). Les quantiles de la distribution normale sont également tracés.

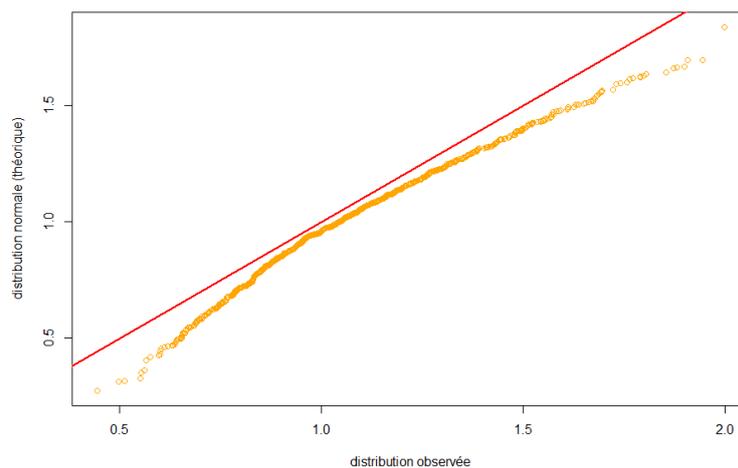


FIGURE 4.12 : QQ-Plot de la distribution normale contre celle observée pour la dernière date discrète

Les deux distributions semblent proches mais les points sont bien moins bien ajustés que dans le premier cas. Une légère translation est visible entre les valeurs observées et gaussiennes.

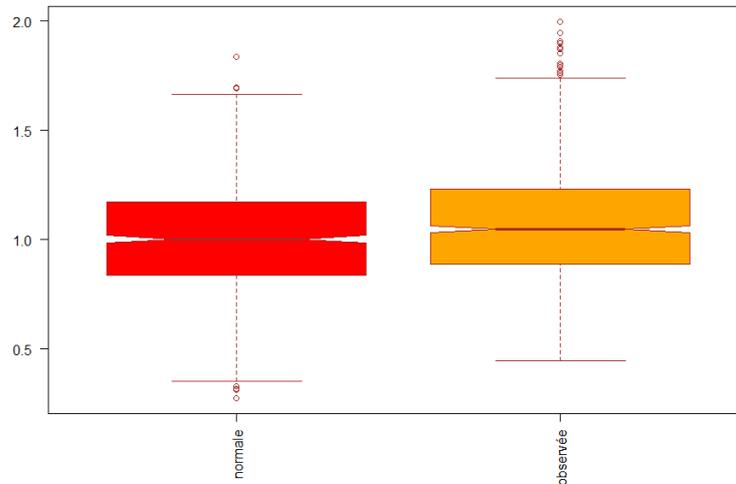


FIGURE 4.13 : BAM de la distribution normale et celle observée pour la dernière date

Les deux distributions semblent proches mais on constate encore une fois le décalage. La distribution a des valeurs légèrement plus élevées que la cible, ce qui s'observait déjà dans le précédent graphique. De plus, les valeurs semblent plus éparpillées, ce qui avait été prévu en observant la valeur de l'écart-type par rapport à celle de la première date.

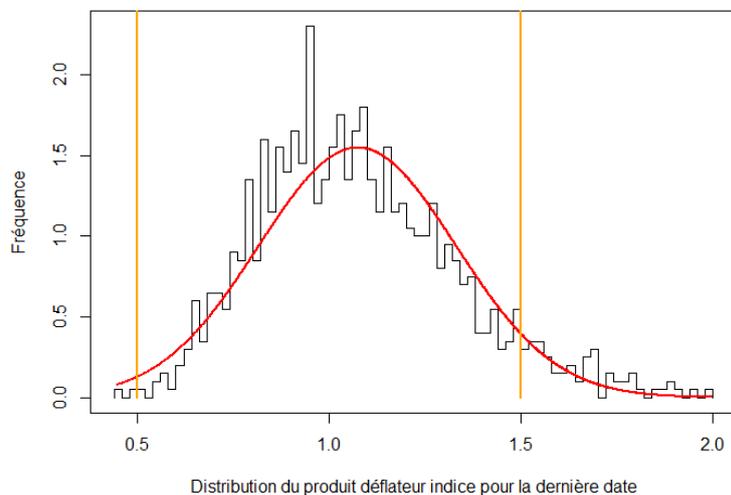


FIGURE 4.14 : Histogramme, distribution lissée et bornes limites pour la série observée pour la dernière date

Seul 5,70 % des valeurs se trouvent en dehors de l'intervalle $[0,5, 1,5]$ (représenté en orange) et bien que légèrement décalée sur la droite, l'allure de la densité correspond globalement à une loi normale centrée réduite. L'ensemble des résultats semblent attester de la bonne qualité du modèle malgré une dégradation significative dans le temps.

Pour les deux résultats précédents, la moyenne du produit est très proche de 1. On peut regarder la répartition des résultats pour les dates tous les 1 ans, autrement dit pour tous les j multiple de 12 :

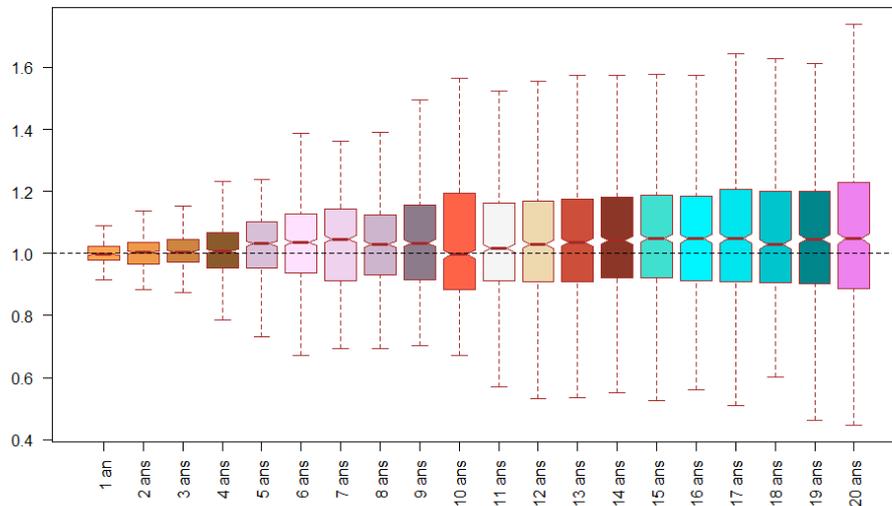


FIGURE 4.15 : BAM des 20 prochaines années (avec un pas annuel)

Sur la Figure 4.15, les BAM semblent bien centrées autour de la cible valant 1. La distribution tend également à s'étendre avec le temps.

L'erreur liée au test de martingalité tend à s'accroître au cours des projections. En effet, une rapide augmentation de l'erreur est visible, se traduisant par l'augmentation de la taille de la boîte à moustache jusqu'à la dixième année. Après cette date, la plage de valeurs de la BAM reste plutôt stable mis à part la dernière année.

Pour conclure, la médiane n'est pas exactement égale à 1 pour les 12 valeurs mais reste autour. Comme pour la dernière date, la tendance est à ce que les valeurs soient plutôt étalées mais en moyenne égale à 1 ou très proche.

Globalement le test de martingalité sur les actions ne peut pas être infirmé malgré des valeurs qui tendent à s'éparpiller au cours des projections.

Hypothèse de martingalité dans le cas des déflateurs

Pour rappel, l'idée est de tester l'égalité entre ces deux quantités pour deux dates à long terme : à horizon 10 et 20 ans. Ces deux dates correspondent respectivement dans les formules à $j = 120$ et $j = 240$ pour les déflateurs ainsi que $T = 10$ et $T = 20$ pour la formule de Nelson-Siegel $1 \leq i \leq 1000$:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{défateur}(i, j) = \text{Prix_ZC}(j/12)$$

où $N = 1000$ est le nombre de simulations et j les dates discrètes de projection 10 et 20 ans.

Enfin pour avoir une idée plus globale du résultat du test pour les déflateurs on observera les résultats par année : entre 1 et 20 ans i.e. avec un pas annuel entre 12 et 240.

Test à 10 ans

Dans ce cas, on trouve qu'en moyenne les déflateurs sont égaux à 0,7595368. On obtient ce résultat

en utilisant cette formule (définie auparavant) avec i le numéro de la simulation sachant que $j = 120$:

$$\begin{cases} \text{déflateur}(i, 0) = 1 \\ \text{déflateur}(i, 120) = \text{déflateur}(i, 119) \cdot (e^{-r_{i,120}})^{\frac{120}{12}} = 1 \cdot \prod_{s=1}^{120} \exp(r_{i,s})^{10} = \exp\left(-10 \times \sum_{s=1}^{120} r_{i,s}\right) \end{cases}$$

où $r_{i,s}$ le taux de la simulation i à la date s dans notre GSE.

Donc on a :

$$\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \text{déflateur}(i, 120) = 0,7595368$$

La deuxième étape consiste à utiliser Nelson-Siegel avec les valeurs des composantes de la dernière date de l'historique au 31 Mai 2023. On obtient que le taux zéro-coupon $R(0, 10)$ est égal à 0,02872733. On applique la formule de sorte que :

$$\text{Prix_ZC}(T) = \text{Prix_ZC}(10) = \frac{1}{(1 + R(0, 10))^{10}} = 0,7533507$$

On a donc un écart très faible entre les deux quantités de 0,006186123.

Test à 20 ans

On réalise exactement les mêmes étapes à l'exception du changement de maturité qui passe de 10 à 20 ans. On obtient les valeurs suivantes :

- La moyenne des déflateurs à $j = 240$: $\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \text{déflateur}(i, 240) = 0,5958755$;
- Le prix du zéro-coupon à $T = 20$ ans : $\text{Prix_ZC}(20) = \frac{1}{(1+R(0,20))^{20}} = 0,5831398$;
- On a donc un écart égal à 0,0127357. Cette fois-ci encore, la différence est faible malgré qu'elle soit plus importante que sur l'horizon à 10 ans.

Test sur toutes les années

Après avoir observé les résultats pour les maturités 10 et 20 ans, nous allons faire des tests sur les maturités multiples de 12 (comme pour les actions) :

1. Pour $j = \{12, 24, \dots, 240\}$ (mensuel) ;
2. Pour $T_j = \frac{j}{12}$ (annuel).

Commençons par tracer les deux courbes sur un même graphique.

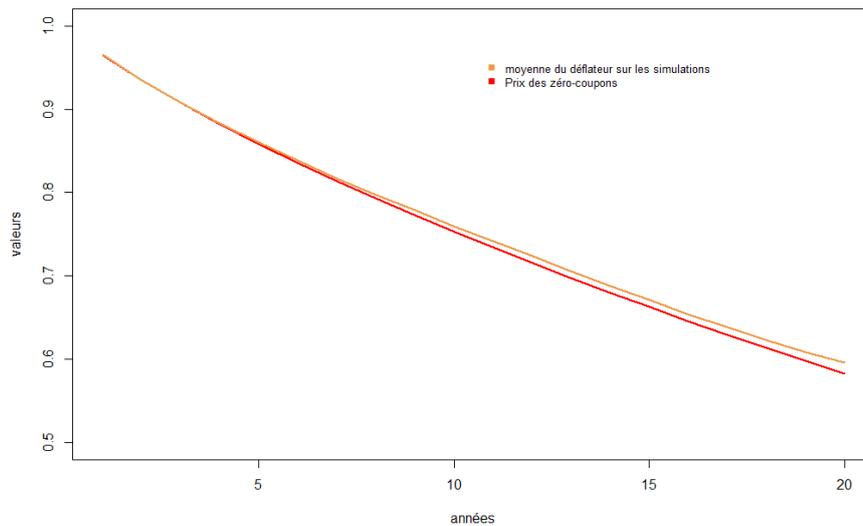


FIGURE 4.16 : Comparaison entre le prix des zéro-coupons et la moyenne du déflateur pour les 1000 simulations pour un pas discret annuel entre 1 et 20 ans

A priori, on observe le même phénomène que pour le test de martingalité sur les actions : avec le temps, les résultats se dégradent. Néanmoins, les deux courbes sont très proches. Ce qui semble cohérent sachant que la risque-neutralisation des simulations de taux a été faite sur la courbe de référence des taux zéro-coupons.

Afin de mieux visualiser l'erreur autour de la cible (les prix zero-coupons), on va tracer la BAM des erreurs de martingalité. Cette erreur est obtenue en observant l'écart entre les deux valeurs. Le test consiste à vérifier si $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{déflateur}(i, j) - \text{Prix.ZC}(j/12) = 0$.

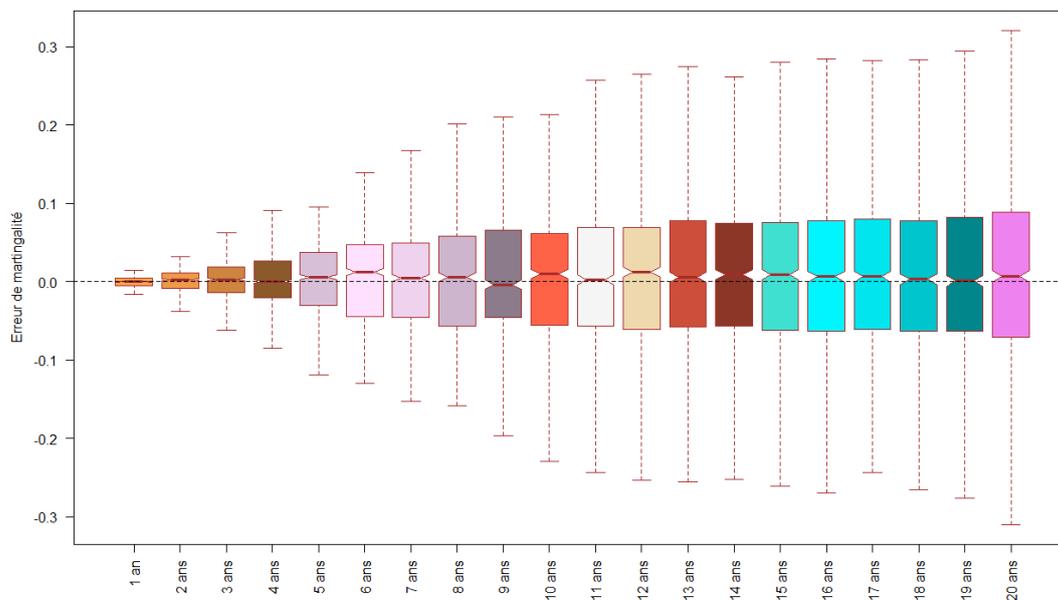


FIGURE 4.17 : Erreur de martingalité sur le déflateur pour les 20 prochaines années

Sur la Figure 4.17, on constate que les BAM sont bien centrées autour de la valeur cible 0. On

remarque, comme pour les taux, que la distribution tend à s'étendre avec le temps. L'erreur liée au test de martingalité tend à s'accroître au cours des projections.

Finalement, si on reprend les figures 4.16 et 4.17, les courbes sont proches et ont la même tendance : décroissante entre 1 an et 20 ans pour prendre des valeurs entre 0,96 et 0,58. Plus la maturité croît, plus une divergence apparaît entre les valeurs. Pour être plus précise, entre la première et la huitième année les courbes sont confondues puis s'écartent légèrement, laissant la courbe de la moyenne des déflateurs être supérieure de quelques centièmes. Néanmoins les écarts ne sont pas assez importants de mon point de vue pour infirmer l'hypothèse de martingalité.

4.3.2 Comparatifs avec des prix d'options sur les actions

Comme indiqué précédemment, le GSE doit être construit de manière à être « instantanée », être mis en place pour être en phase avec la réalité des marchés. L'approche *market-consistent* répond à ce besoin en imposant un cadre dont les hypothèses sont cohérentes avec les prix du marché. La démarche de construction implique de choisir :

- Un ensemble de modèles adaptés à reproduire les prix d'options adaptés avec les contraintes de l'actif et du passif ;
- Des instruments dont les caractéristiques (strike, ténor, maturité,..) sont adaptées aux contraintes.

Dans notre travail, les tests peuvent être scindés en deux :

1. Sur les actions, une note de l'ACPR existe. L'autorité a indiqué que le GSE utilisé doit reproduire les prix des options sur les actions ;
2. Sur les taux, l'ACPR n'a pas écrit de note explicite comme pour les actions. La place s'est mise d'accord pour dire que les taux doivent reproduire le prix d'options, par exemple de swaptions ou de caps. N'ayant pas accès à des données pertinentes sur les taux, nous nous concentrerons sur les résultats des actions.

Comparatif avec des prix d'options sur CAC40

Pour réaliser le test, il est nécessaire de déterminer avec précision ce que nous allons comparer. L'idée ici est de :

1. Calculer à l'aide des faisceaux risques neutres et des déflateurs, la valeur d'un *call* et d'un *put*, de maturité (ou ténor) un an, à la monnaie ;
2. Trouver sur le marché le prix des options sur CAC40 au 31 Mai 2023 pour que les dates coïncident.

Pour calculer le prix des options avec les simulations, on applique les formules suivantes :

$$Prix_call_T = \frac{1}{NB_Simus} \sum_{i=1}^{NB_Simus} (S_{i,T} - K)^+ DF_{i,T}.$$

$$Prix_put_T = \frac{1}{NB_Simus} \sum_{i=1}^{NB_Simus} (K - S_{i,T})^+ DF_{i,T}.$$

Avec :

1. $S_{i,T}$ la valeur du sous-jacent de l'action CAC40, pour la simulation i , à la date T ;
2. K le *strike* de l'option ;

3. $DF_{i,T}$ le déflateur, calculé comme indiqué précédemment, pour la simulation i et la date T .

On fait le choix de prendre des options à la monnaie, c'est-à-dire pour lesquelles $S_0 = K$. On prend $S_0 = 100$ de manière purement arbitraire. De plus, la date d'intérêt est à 1 an, ce qui correspond à $T = 12$ mois dans notre GSE.

On obtient les résultats suivants :

1. Prix du *call* : 4,24;
2. Prix du *put* : 0,510.

Pour pouvoir comparer ces valeurs, on utilise la volatilité implicite d'une option sur CAC40 à la monnaie au 31 Mai 2023 : $VI = 17,2092$. C'est la valeur de la volatilité σ_0 dont on s'est servi précédemment pour essayer de calibrer les faisceaux risque-neutres. Les formules issues du modèle de BS sont utilisées pour déterminer le prix des options à partir de la volatilité implicite. Le prix d'un *call* européen avec $r_t = r$ de *strike* $K > 0$ et de maturité T en t est donnée par :

$$C(t) = S_t \phi(d_1(t)) - K e^{-r(T-t)} \phi(d_2(t));$$

avec

$$d_1(t) = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

et

$$d_2(t) = d_1(t) - \sigma \sqrt{T-t}.$$

Le prix d'un *put* européen avec $r_t = r$ de *strike* $K > 0$ et de maturité T en t est donnée par :

$$P(t) = K e^{-r(T-t)} \phi(-d_2(t)) - S_t \phi(-d_1(t));$$

avec

$$d_1(t) = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

et

$$d_2(t) = d_1(t) - \sigma \sqrt{T-t}.$$

Après calcul, on trouve les valeurs suivantes :

1. Prix du *call* BS : 8,724;
2. Prix du *put* BS : 5,054 .

L'écart entre les prix issus du modèle de BS et les prix recalculés par simulation est important. Les faisceaux de trajectoires des actions ne fonctionnent pas bien dans le cadre de l'évaluation des prix d'options. La STM, n'ayant pas intégré de séries relatives aux produits dérivées, apparaît comme une limite à notre modèle.

Comparaison entre la courbe des taux obtenue et celle de l'EIOPA

N'ayant pas de données de marché à cette date, le choix s'est arrêté sur la comparaison de notre courbe des taux avec celle des EIOPA au 31 Mai 2023.

Le papier de l'ACPR (2020) spécifie que « Le GSE doit satisfaire aux exigences de l'article 22 paragraphe 3 a. à c. du règlement délégué. Celui-ci prévoit que le niveau des taux doit être, en moyenne, cohérent avec la courbe de taux sans risque EIOPA à la date du calcul, [...] ».

Pour rappel, la courbe des taux sans risque de référence a été construite suivant un principe similaire à celui utilisé par l'EIOPA. Les taux EIOPA sont ceux observés en mai 2023 pour les maturités comprises entre 1 et 20 ans (pour correspondre à nos projections). Nous avons sélectionné ceux sans *Volatility Adjustment* puisque nous n'avons pas ajouté cette quantité lors de la modélisation.

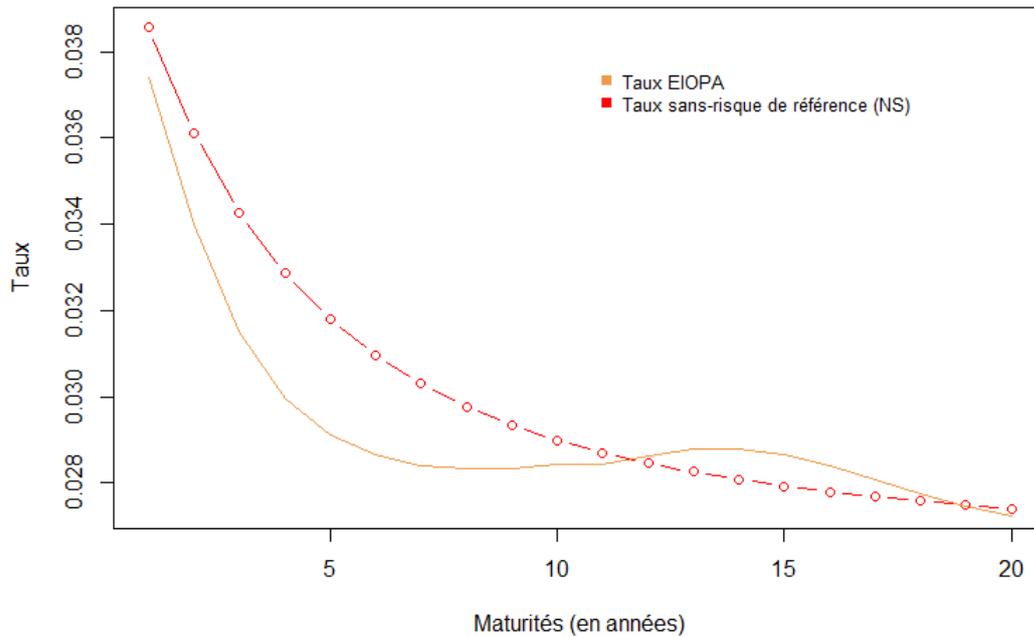


FIGURE 4.18 : Comparaison de la courbe des taux EIOPA et la courbe sans risque de référence au 31 Mai 2023

On constate que les deux courbes sont proches : elles possèdent le même intervalle de valeurs et la même tendance. On peut souligner le fait que la courbe EIOPA est plus prudente (taux plus faibles) que la courbe modélisée sur les 12 premières maturités mais que cette tendance s'inverse par la suite. La courbe des taux sans risque de référence semble donc cohérente avec la courbe des taux sans risque de l'EIOPA.

4.3.3 Limites et conclusion

Pour le premier test sur les actions, le test de martingalité semble validé : les résultats sont pertinents. Un léger biais vers la droite sur les résultats décale la médiane. Mais ce faible décalage d'un faible ordre ne permet pas réellement d'infirmer le premier test. Il s'agit d'une erreur qui se dégrade avec le nombre de calculs sans doute dû aux approximations répétitives.

Pour le deuxième test sur les déflateurs, les résultats semblent également correctes. Comme pour les actions, une dégradation des résultats est observée au cours du temps, sans doute dû aux nombres de calculs croissants avec la maturité.

Finalement, les deux tests ne se semblent pas infirmer l'hypothèse de martingalité du GSE sous \mathbb{Q} .

En revanche, l'écart significatif entre les prix générés par le modèle de Black-Scholes (BS) et ceux obtenus par simulation RN RVFL attire l'attention sur une limite du modèle. Les projections RN des actifs, utilisées dans l'évaluation des prix d'options, ne correspondent pas au prix observés sur le

marché. La non-intégration des séries temporelles relatives aux produits dérivés apparaît clairement comme une limitation de notre modèle. Cette omission compromet la capacité de notre modèle à capturer pleinement les fluctuations des prix et à fournir des estimations précises des valeurs d'options.

La méthode de risque-neutralisation ne semble pas donner les résultats escomptés, ce qui nous pousse à envisager de poursuivre nos travaux ultérieurement. Il est important de noter que le volet risque-neutre n'est pas l'élément central du mémoire. Cependant, cette extension est nécessaire pour encadrer la réflexion et mettre en lumière les aspects qui requièrent une attention particulière. En reconnaissant les limitations de la méthode de risque-neutralisation, nous pouvons mieux cerner les zones nécessitant un approfondissement et une analyse plus poussée pour de futurs travaux.

Conclusion

La norme européenne demande aux assureurs d'utiliser un GSE pour la valorisation des engagements d'assurance et pour la projection des risques financiers. Les outils historiques paramétriques peuvent parfois être limités en terme de cohérence avec le passé. Le présent mémoire a eu pour but premier de vérifier s'il était possible de construire un outil historique mais surtout si les résultats apportaient une réelle plus-value en comparaison à des modèles classiques. Une piste sur la construction d'un seul et même outil a également été proposée dans l'objectif d'assurer un maximum de cohérence entre les différents piliers de la directive.

La première étape a été de réaliser un modèle capable de reproduire un historique, et surtout d'obtenir des projections cohérentes avec ce qui a pu être observé dans le passé. Le chapitre 2 reprend l'intégralité de sa construction : de la conception de la série temporelle multivariée au modèle RVFL pour finir par la validation croisée.

Il est parfois difficile de juger de la justesse des projections. Un point sur lequel le concepteur peut intervenir en amont de la projection est la qualité des données et la précision de la validation croisée. C'est pour cette raison que le chapitre 3 a été dédié à l'analyse des projections historiques issues du RVFL. Le modèle a été comparé à un modèle de série temporelle classique lors de l'analyse prédictive : la méthode VAR. Les résultats ont montré que le modèle de réseau de neurones était plus robuste que celui dit usuel. Deux autres études ont été réalisées : la comparaison entre les faisceaux historiques RVFL et des méthodes paramétriques classiques ainsi que l'évaluation d'une métrique bien connue, la VaR. Les projections basées sur les données historiques semblent cohérentes par rapport aux modèles classiques comme Black-Scholes ou Vasicek, mais présentent une volatilité plus importante, en particulier pour les actions. Cela suggère que les modèles traditionnels peuvent sous-estimer la volatilité observée dans les données réelles.

Bien que ces prévisions puissent être plus volatiles, elles peuvent également être plus robustes dans des conditions de marché changeantes ou lors de périodes de turbulence économique. En intégrant les leçons tirées du passé, le modèle non-paramétrique peut ainsi offrir une meilleure capacité à saisir les comportements extrêmes du marché, ce qui le rend particulièrement attrayant pour l'analyse des risques financiers, notamment en période de crise. Finalement, l'ensemble des analyses converge vers le même point : le GSE historique semble être un cadre de base solide pour effectuer des projections.

Le processus de risque-neutralisation, reposant majoritairement sur la définition de la probabilité risque-neutre, a été appliqué sur les séries temporelles concernées et analysé. Contrairement aux projections historiques, il existe des tests permettant de vérifier la cohérence des simulation dites sous \mathbb{Q} . Pour les actions et les taux, le test de martingalité est vérifié mais se dégrade lorsque l'horizon de temps augmente. En revanche, le test visant à comparer les prix des options vanilles construits à partir des faisceaux risque neutres semble perfectible. Une importante disparité entre les prix est observée, suggérant que la méthode de risque-neutralisation ne fonctionne pas efficacement dans ce contexte. Le modèle n'ayant pas été entraîné sur des données relatives à des produits dérivés, ne semble pas

naturellement intégré cette notion. Bien que le volet de risque neutralisation ne soit pas au cœur du mémoire, il représente une extension visant à encadrer la réflexion et à mettre en lumière les points d'attention.

Pour les prochains travaux, il serait intéressant de tester le GSE en le complexifiant, c'est-à-dire en modélisant plus de facteurs de risque comme le risque de crédit et surtout d'inflation (au vu du contexte économique actuel), toujours en cohérence avec l'actif de l'assureur considéré. Aussi, les hyperparamètres comme α représentant le paramètre d'échelle dans la formule de Nelson-Siegel ou la longueur du *BlocBootstrap* pourraient être intégrées dans la validation croisée pour plus de précision. Le GSE devra également générer des prix d'actions du CAC40 en cohérence avec les prix observés sur le marché. Néanmoins ce mémoire présente une première base de travaux sur les GSE non-paramétriques qui fonctionnent dans le cadre historique.

D'autres études pourraient être réalisées, comme l'intégration du GSE dans un modèle de gestion actif-passif de sorte à pouvoir quantifier l'impact du GSE RVFL par rapport à un GSE plus traditionnel. Aussi cette comparaison est à nuancer puisque, d'une dynamique à une autre, les résultats peuvent être différents.

L'intérêt autour d'un nouveau type de GSE ne limite pas à ce mémoire puisque d'autres papiers ont été rédigés sur le même sujet avec des méthodes similaires. Nous pensons au papier de GEISLER et al. (2022) qui traite de ce sujet en utilisant les réseaux génératifs adverses ou GAN *Generative Adverse Network*.

Bibliographie

- ACPR (2013). Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité II, V1.0, page 4. Revue. ACPR - Banque de France. URL : https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/20130527-onc-2013_0.pdf.
- ACPR (2020). Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques. Revue. ACPR - Banque de France. URL : https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20201204_article_gse_revue.pdf.
- ACPR (2023). Analyses et synthèses - La situation des assureurs soumis à Solvabilité II en France fin 2022. Revue. ACPR - Banque de France. URL : https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20230626_as_assureurs_s2_dec2022.pdf.
- ANDERSEN, L. B. G. et PITERBARG, V. V. (2010). Volume 1: Foundations and Vanilla Models. Interest Rate Modeling. Atlantic Financial Press.
- ARMEL, K. et PLANCHET, F. (2018). Construire un générateur de scénarios économiques risque neutre. Papier de recherche. ISA - Laboratoire SAF Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1. URL : [https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/d512ad5b22d73cc1c1257052003f1aed/709de72db6128dbdc12582700071015b/\\$FILE/Article_GSE_Annexe_technique_FR_v1.6.pdf](https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/d512ad5b22d73cc1c1257052003f1aed/709de72db6128dbdc12582700071015b/$FILE/Article_GSE_Annexe_technique_FR_v1.6.pdf).
- ARMEL, K. et PLANCHET, F. (2020). L'évaluation économique des engagements en assurance vie : écueils, bonnes pratiques et préconisations pour une mise en oeuvre pertinente. Papier de recherche. ISA - Laboratoire SAF Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1. URL : [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/42b2c56f349fafe2c12585d100691b99/\\$FILE/Article_v2.1.FR.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/42b2c56f349fafe2c12585d100691b99/$FILE/Article_v2.1.FR.pdf).
- BRIGO, D. et MERCURIO, F. (2006). Chapitre 2 Section 1, Springer Finance. Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit. Springer.
- BRIYS, E. et DE VARENNE, F. (1994). Life Insurance in a Contingent Claim Framework : Pricing and Regulatory Implications. Papier de recherche. Groupe HEC. URL : [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/81b72fdda7d5077cc1256db1004e2b78/\\$FILE/Life%20Insurance%20in%20a%20Contingent%20Claim%20Framework%20-%20Pricing%20and%20Regulatory%20Implications.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/81b72fdda7d5077cc1256db1004e2b78/$FILE/Life%20Insurance%20in%20a%20Contingent%20Claim%20Framework%20-%20Pricing%20and%20Regulatory%20Implications.pdf).
- CAJA, A. et PLANCHET, F. (2010). La mesure du prix du marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ? Support de cours. ISA - Laboratoire SAF Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1. URL : https://www.revueassurances.ca/wp-content/uploads/2016/01/2010_78_no3_4_Caja.pdf.
- CORMEN, T. (2009). Introduction to Algorithms. Papier de recherche. Cambridge: MIT Press. URL : <chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://dahlan.unimal.ac.id/files/ebooks/2009%20Introduction%20to%20Algorithms%20Third%20Ed.pdf>.
- DE CHRISTEN, V., DIDO, S. et ROLLAND, L. (2018). Implémentation de la courbe Risk-Free de l'EIOPA sur R-Shiny. Mémoire de M1. Brest : EURIA - Euro-Institut d'Actuariat. URL : https://ns3182762.ip-146-59-149.eu/shiny/users/eurialab/applic_live/finance/app_eiopa/#shiny-tab-CSB.

- DUFFEE, G. et STANTON, R. (2000). EMM Estimation of Affine and Nonaffine Term Structure Models. Papier de recherche. Haas School of Business. URL : https://www.researchgate.net/publication/2435878_EMM_Estimation_of_Affine_and_Nonaffine_Term_Structure_Models.
- EIOPA (2019). Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures. Revue. EIOPA. URL : https://www.eiopa.europa.eu/system/files/2020-01/12092019-technical_documentation.pdf.
- EIOPA (2023). Risk-free interest rate term structures, Monthly Technical information 2023. Data. EIOPA. URL : <https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures-en>.
- EL-KAROUI, N. (2003-2004). Couverture des risques dans les marchés financiers. Support de cours. Ecole Polytechnique, CMAP, 91128 Palaiseau Cedex. URL : <https://math.uni.lu/thalmaier/finance/el.karoui.pdf>.
- FOLASHADE, D. (2022). foreach: Provides Foreach Looping Construct. R package version 1.5.2.
- GEISSLER, C., MORIZET, N., RIZZATO, M. et WALLART, J. (2022). Generative Adversarial Networks Applied to Synthetic Financial Scenarios Generation. Papier de recherche. Advestis. URL : <https://arxiv.org/abs/2209.03935>.
- INSA, G. (2021). Découvrez les réseaux de neurones adaptés au traitement de séquences. Support de cours interactif. Groupe INSA. URL : <https://openclassrooms.com/fr/courses/5801891-initiez-vous-au-deep-learning/6151786-maitrisez-les-algorithmes-dapprentissage-des-reseaux-recurrents>.
- JACOB, S., SOUISSI, S. et MILOT-POULIN, J. (2021). Intelligence artificielle et transformation des métiers d'actuaire. Papier de recherche. Université LAVAL. URL : [https://www.administration-numerique.chaire.ulaval.ca/sites/administration-numerique.chaire.ulaval.ca/files/uploads/bureau/IA%20et%20m%C3%A9tier%20actuaire%20\(2\)-converti.pdf](https://www.administration-numerique.chaire.ulaval.ca/sites/administration-numerique.chaire.ulaval.ca/files/uploads/bureau/IA%20et%20m%C3%A9tier%20actuaire%20(2)-converti.pdf).
- MOUDI KI, T. (2023). ahead: Time Series Forecasting. R package version 0.9.0.
- MOUDI KI, T., PLANCHET, F. et COUSIN, A. (2018). Multiple time series forecasting using quasi-randomized functional link neural networks. Papier de recherche. ISA - Laboratoire SAF Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1 Université de Strasbourg. URL : https://www.researchgate.net/publication/323712082_Multiple_Time_Series_Forecasting_Using_Quasi-Randomized_Functional_Link_Neural_Networks.
- OOREKA, A. (2023). Produits dérivés. Article pédagogique. Pages Jaunes. URL : <https://epargne.ooreka.fr/astuce/voir/492437/produits-derives>.
- PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2009). Directive 2009/138/CE du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II). OJ L. 335/I.
- PENROSE, R. (1955). A generalized inverse for matrices. Papier de recherche. Cambridge: Cambridge University Press. URL : <https://www.cambridge.org/core/journals/mathematical-proceedings-of-the-cambridge-philosophical-society/article/generalized-inverse-for-matrices/5F4516D6B9989BB6563A4B267CC7D615>
- PFAFF, B. et STIGLER, M. (2024). vars: VAR Modelling. R package version 1.6-1.
- SCHUMANN, E. (2023). NMOF: Numerical Methods and Optimization in Finance. R package version 2.8.0.
- SÉLIM, A. (2021). Revue 2020 Solvabilité II : Impact du changement de l'extrapolation des taux sans risque et du nouveau calibrage du SCR de taux sur un portefeuille de rentes viagères. Mémoire d'actuariat. Strasbourg : DUAS - Université de Strasbourg.
- The M5 Competition : Competitor's Guide (2020). Competitor's Guide. URL : <https://github.com/Mcompetitions/M5-methods/blob/master/M5-Competitors-Guide.pdf>.
- THÉRON D, P. (2013). Génération de scénarios économiques Modélisation des taux d'intérêt. Cours. ISFA - Université Lyon 1. URL : <https://www.therond.fr/wp-content/uploads/cours/Taux.pdf>.
- TRAINAR, P. (2008). Valorisation dans l'assurance et crise financière. Revue. Banque de France. URL : <https://www.insee.fr/fr/statistiques/fichier/2506388/texte-trainar.pdf>.

- WIKIPEDIA (2023a). Swap de taux d'intérêt. Article. Wikipedia. URL : https://fr.wikipedia.org/wiki/Swap_de_taux_d%27int%C3%A9r%C3%AAt#:~:text=Un%20swap%20de%20taux%20est,et%20re%C3%A7oit%20un%20taux%20fixe..
- WIKIPEDIA (2023b). Théorème d'approximation universelle. Article. Wikipedia. URL : https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_d%27approximation_universelle.

Annexe A

Annexes

A.1 Le modèle VAR

Le modèle VAR ou vecteur autoregressif (*Vector Autoregression*) est un modèle de série temporelle qui prédit plusieurs variables en même temps. Dans sa forme usuelle, la méthode est présentée avec un ensemble de K variables, noté $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{kt}, \dots, y_{Kt})$, pour $k = 1, \dots, K$. Chacune des prédictions contribue à la prédiction des autres (variables). De plus, le modèle inclut des *lags*, qui permettent d'intégrer dans le calcul des valeurs suivantes, les valeurs précédentes jusqu'au pas arrière p . Ce sont les *lags* qui constituent le paramètre à optimiser dans ce modèle, c'est-à-dire combien de mois d'historique vont composer nos équations. L'unité du pas de temps utilisé peut être des heures, des jours, des mois (comme dans notre cas) ou encore des années. Le processus VAR(p) est défini comme :

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + u_t,$$

avec A_i , $i = 1, \dots, p$, sont des matrices de dimension $K \times K$ et u_t un bruit blanc de taille K , invariant par rapport au temps, avec un matrice de covariance définie positive $\mathbb{E}(u_t u_t') = \Sigma u$.

Avant de déterminer le nombre de *lags* optimal, la notion de stationnarité doit être introduite. Le processus Var(p) doit être stable c'est-à-dire que les séries temporelles doivent être stationnaires avec des moyennes, des variances et des covariances invariantes par rapport au temps. Sans rentrer dans les détails, des recherches ont indiqué que l'application d'une régression sur une variable non stationnaire conduit à des paramètres invalides.

La première étape dans la création d'un modèle VAR est donc de rendre la série stationnaire. Pour ce faire, plusieurs méthodes sont utilisées, impliquant une transformation des données :

1. Les méthodes pour normaliser ;
2. La transformation Boxcox ;
3. La méthode de différenciation, impliquant de soustraire à une valeur de la série sa valeur précédente.

La transformation de Box-Cox présente une limite, car elle exige que les valeurs soient positives pour être modifiées. Puisque la méthode de différenciation est couramment utilisée, nous opterons pour celle-ci si la série n'est pas stationnaire.

Le Test de Dickey-Fuller est un test statistique qui vise à savoir si une série temporelle est stationnaire c'est-à-dire si ses propriétés statistiques (espérance, variance, auto-corrélation) varient ou pas dans le temps et si leur valeur est bien finie. L'hypothèse nulle est notée H_0 et l'hypothèse alternative H_1 :

$$\begin{cases} H_0 : \text{La série comporte une racine unitaire (à 95 \%)} \\ H_1 : \text{La série ne comporte pas de racine unitaire au risque 5 \%. La série est stationnaire au risque 5 \%.} \end{cases}$$

Un fois la série stationnaire (test de Dickey-Fuller), la méthode VAR peut être appliquée. Il ne reste que le *lags* optimale à déterminer.