

Mémoire présenté devant le Conservatoire National des Arts et Métiers pour l'obtention du Master Droit Economie Gestion mention Actuariat et l'admission à l'Institut des Actuaires

le mercredi 15 novembre 2023

Par : Liang GUO


Titre: Revue des modèles de taux et implémentation des modèles LMM-SABR et Hull-White, dans un contexte de forte remontée des taux et des volatilités.

Confidentialité : X NON

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires signatures


M. Ravin DUMANOIR 

M. Zacharie GUIBERT 

Entreprise :

Nom :
EPS (Ensemble Protection Sociale)

Membres présents du jury du Cnam

M. François WEISS (Président) 

M. Olivier DESMETTRE 

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom :

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat

Bibliothèque :

Résumé

Après une période prolongée de taux bas et de faible inflation, la plupart des pays développés entrent dans une phase caractérisée par une remontée forte de l'inflation, des relèvements des taux d'intérêt ainsi que des incertitudes accrues et de risques élevés. Ce contexte nous offre l'occasion et la motivation de replonger dans la modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt. Ce mémoire a deux principaux objectifs. Le premier objectif est de faire une revue succincte sur les développements historiques de modèles de taux. Le deuxième objectif est d'implémenter un des modèles de marché à volatilité stochastique : LMM-SABR. Nous explicitons les différentes problématiques de l'estimation et le calibrage du modèle LMM-SABR, qui permettront aux lecteurs de disposer de tous les éléments ou tout du moins des références pour pouvoir implémenter ce modèle. Dans la mise en pratique du modèle LMM-SABR, nous testons la robustesse du modèle dans des différents environnements des taux en l'appliquant sur 2 périodes ayant des comportements distincts mais représentatives des évolutions des taux de ces dernières années (31/12/2019 et le 31/12/2022). Nous les confrontons avec le modèle de taux classique Hull & White et nous comparons les performances du modèle en terme de market consistency. Les résultats confirment la robustesse du modèle LMM-SABR dans des contextes différents tout en incorporant les informations sur les volatilités.

Mots-clés : modèle Hull-White, modèle Libor market, modèle LMM-SABR, structure par terme des taux, spline, volatilité stochastique, GARCH, market consistency

Abstract

After a prolonged period of low interest rates and inflation, most developed countries are entering a phase of sharp rises in inflation, increasing interest rates, and high uncertainties and risks. This volatile market environment gives us the incentive to dive back into interest rate term structure modeling. This thesis has two main objectives. The first objective is to provide a brief review of the developments of interest rate models. The second objective is to implement one of the stochastic volatility market models: LMM-SABR. We explain whole estimation and calibration procedure of the LMM-SABR model with different methods and try to provide readers with the elements or at least the references to implement this model. In the application of the LMM-SABR model, we test its robustness in different interest rate contexts by applying it over two distinct but representative periods (12/31/2019 and 12/31/ 2022). We compare the performances with the classic Hull & White model in terms of market consistency. The empirical results confirm the robustness of the LMM-SABR model in different contexts while incorporating information on volatilities.

Keywords : Hull-White model, Libor market model, LMM-SABR model, interest rate term structure, spline, stochastic volatility, GARCH, market consistency

Remerciements

Mes plus sincères remerciements vont d'abord à mon tuteur académique, Monsieur Olivier DESMETTRE, pour les conseils et les remarques judicieux qu'il m'a prodigués, pour sa disponibilité et son suivi tout au long de ce mémoire.

Je tiens également à exprimer mes remerciements à tous les membres du jury d'avoir accepté à la présentation du mémoire, et pour leur lecture et leur temps consacrés à mon mémoire.

Je remercie chaleureusement la Direction Générale de l'Ensemble Protection Sociale, en particulière, Monsieur Frédéric Bourg, le Directeur général, et Madame Gaëtane Denis, Directrice générale déléguée, pour leur soutien et la confiance qu'ils m'ont accordée en me confiant des postes différents dans la direction technique et dans le service ALM. Je remercie très vivement Claire MAROLLEAU, la Directrice technique, Najma BEKKALI, la Responsable ALM, Philippe DESPLANCHE, le Directeur des risques et conformité, Roméo TCHIVONGOU, la fonction actuarielle pour leur confiance et également avec qui j'ai beaucoup bénéficié de leurs expériences professionnelles dans ces postes enrichissants, en parallèle de ce mémoire.

Je salue amicalement à tous mes collègues de ces 2 directions pour les ambiances conviviales et agréables que nous avons eu l'occasion de partager.

Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble du corps enseignant du CNAM pour leurs enseignements.

Mes remerciements vont également à Olivier Renaudin, l'Actuaire associé chez GALEA, et Hamza Rabhi, Directeur Actuariat et Risques chez Forsides pour leur encouragement.

Enfin, mes plus profonds remerciements à mon époux David pour ses conseils et ses relectures, pour ses patiences et ses soutiens, pour m'avoir remonté le moral dans les moments difficiles. A mes chers enfants, pour leur tolérance et leur compréhension pour mes absences en weekend et d'autres occasions durant le mémoire.

Note de Synthèse

Après une période prolongée de taux bas et de faible inflation, la plupart des pays développés entrent dans une phase caractérisée par une remontée forte de l'inflation, des relèvements des taux d'intérêt ainsi que des incertitudes accrues et de risques élevés. Aujourd'hui le risque de taux et le risque d'inflation sont identifiés comme les premiers risques par l'EBA, l'EIOPA et l'ESMA (2023) [40]. Les assureurs se retrouvent de nouveaux face à des combinaisons d'opportunités et de risques liées aux variations de taux auxquelles ils doivent être prêts à s'adapter et à gérer.

Ce contexte nous offre l'occasion et la motivation de replonger dans la modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt, qui est un sujet classique mais passionnant. Ce mémoire a deux principaux objectifs. Le premier objectif est de faire une revue succincte sur les développements historiques de modèles de taux. Cette revue et les réflexions nous aiderons à valider le choix des modèles dits de marché qui gagnent en succès dans les salles de marché, en particulier, les modèles de marché qui prennent en compte des volatilités stochastiques.

Le deuxième objectif est d'implémenter un des modèles de marché à volatilité stochastique : LMM-SABR, qui fournit d'une description plausible de la réalité financière tout en conservant l'avantage de la tracabilité, de la facilité de calibrage et de la vitesse de calcul (Rebonato et al. (2011)[98]). Nous explicitons les différentes problématiques de l'estimation et le calibrage du modèle LMM-SABR, qui permettront aux lecteurs de disposer de tous les éléments ou tout du moins des références pour pouvoir implémenter ce modèle.

Dans la mise en pratique du modèle LMM-SABR, il nous paraît intéressant de tester la robustesse du modèle dans différents environnements de taux. Nous l'appliquerons sur 2 périodes ayant des comportements distincts mais représentatives des évolutions des taux de ces dernières années, à savoir le 31/12/2019, où les taux d'intérêt ont connu une période historiquement basse, et le 31/12/2022, où les taux d'intérêt commencent à remonter suite aux changements économiques et sociaux et aux différents chocs. Nous les confronterons avec un modèle de taux classique : le modèle de Hull & White et nous comparerons les performances du modèle en terme de market consistency.

Ce mémoire comporte 4 chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présentons d'abord les principales caractéristiques des portefeuilles de placements des assureurs. Perçue comme une source de revenus de placement réguliers et à valeur de remboursement déterminée, les titres obligataires sont les instruments les plus privilégiés et importants des portefeuilles de placement des assureurs. Cette structure des placements avec la prépondérance des titres obligataires, plus particulièrement des obligations à taux fixe et de long terme, rend les assureurs sensibles aux taux. Puis, les principes de la directive Solvabilité II sont rappelés. La modélisation des taux d'intérêt est indispensable dans l'évaluation des provisions

techniques et dans la projection du bilan économique, à la fois pour le pilier 1 et pour l'exercice d'ORSA du pilier 2, ce qui justifie sa place centrale au cœur de l'analyse des assureurs.

Ensuite, les impacts des taux d'intérêt sur différents aspects des activités des compagnies d'assurance sont analysés. Dans la phase des taux d'intérêt faibles voire négatifs, on constate des changements d'investissements stratégiques des compagnies d'assurance qui ont dû se tourner vers des investissements plus risqués dans la recherche de rendement supplémentaire, et des développements rapides des supports en Unités de Compte (UC) et cette tendance s'est poursuivie dès lors jusqu'à aujourd'hui.

Dans la phase post-covid, suite à l'accélération de la remontée de l'inflation, les banques centrales ont augmenté les taux directeurs à un rythme inégal. Une hausse modérée des taux d'intérêt a généralement un effet positif pour les assureurs. Par contre, l'effet de la hausse des taux sur les assureurs à court terme est mitigé, notamment par l'effet des revalorisations négatives. Puis, la hausse de taux peut modifier le comportement des consommateurs et augmenter le risque de rachat, notamment si la hausse de taux est brusque, combinée avec une hausse excessive de l'inflation et des perspectives économiques atones. Le risque de liquidité peut devenir également critique avec une flambée des taux d'intérêt et en présence des titres illiquides dans les actifs. La hausse potentielle de la volatilité des taux d'intérêt dans le contexte actuel est soulignée, liée à l'incertitude concernant les mesures monétaires et leurs impacts à venir. Un modèle de taux qui est robuste et "market consistent" dans des différents contextes de taux, qui tient en compte des variations de différents segments de la courbe de taux et des volatilités serait souhaitable.

Dans le chapitre 2, une revue brève de développements théoriques des modèles de taux est présentée. Nous rappelons d'abord brièvement les principaux modèles des taux d'intérêt précédant le modèle HJM (Heath et al. (1992) [61]). Les modèles à un seul facteur basés sur la dynamique des taux courts instantanés, qu'ils soient endogènes (1ère génération) ou exogènes (2ème génération), présentent des points faibles tels que l'incapacité de modéliser toutes formes de courbes des volatilités et l'ignorance des corrélations différentes entre les taux zéro-coupons de différentes maturités. Si les modèles à plusieurs facteurs ont pu représenter des formes de courbes des volatilités plus riches, il reste toujours difficile à apprécier les structures des covariance des taux forwards. En fait, l'incapacité de produire des décorrélations rapides avec des maturités éloignées est une limitation intrinsèque des modèles à taux courts de dimension faible en générale (Rebonato et Cooper (1995)).

En 1992, Heath, Jarrow et Morton [61] ont proposé leur modèle de référence HJM, qui modélise directement les taux forwards instantanés comme sous-jacents. Ce modèle fournit un cadre très générale de la modélisation de taux, dans lequel les modèles exogènes peuvent être dérivés, comme nous l'illustrons avec l'exemple du modèle Hull et White (1994). Cependant, l'espérance du compte bancaire peut être explosive et sa calibration est complexe du fait que le taux forward instantané est une quantité théorique qui n'est pas observable sur le marché. Les modèles de marché (la 3ème génération) sont inspirés et développés à partir de la dynamique de taux forward instantané dans la logique du cadre HJM. Modélisant directement les taux LIBOR et compatible

avec la formule de marché, ces modèles ont connu un grand succès et sont devenus la référence du marché.

Néanmoins, il demeure certaines limites à ces modèles, en particulier, l'impossibilité de représenter le smile et le skew des volatilités. Cette faiblesse considérée mineure au début, s'est manifestée et aggravée avec les bouleversements post différentes crises au début du 21ème siècle. Les modèles de 4ème génération visent à les améliorer en incorporant les smile et skews. Différentes approches ont été proposées. La première approche, ce sont les modèles à volatilité locale (LVM) avec le fameux exemple du modèle de Dupire (1994) [39], ou encore les modèles paramétriques comme le CEV (*Constant Elasticity of Variance*, Cox et Roll (1976) [29]) ou le modèle DD (*Displaced Diffusion*) comme celui développé par Andersen et Andreasen (2000). La deuxième approche, ce sont les modèles de diffusions avec sauts (Glasserman et Kou (2003), Kou (2002), Glasserman et Merener (2003) [82]). La troisième approche repose sur les modèles à volatilités stochastiques. Les premiers travaux de cette approche incorporent le modèle de Heston dans le modèle LMM (Andersen et Brotherton-Ratcliffe (2001) [5] et Andersen et Andreasen (2002) [4]) et déduisent des solutions exactes pour valoriser les caplet et les swaptions. Un autre modèle développé par Joshi et Rebonato (2001), modélise la volatilité selon une forme paramétrique, dont tous les paramètres suivent chacun un processus stochastique avec leur propre volatilité. Néanmoins, ces modèles capturent uniquement le smile de la courbe des volatilités. Afin de capturer le skew, trois solutions sont possibles pour les modèles à volatilités stochastiques : autoriser des corrélations entre les taux forward et les variances/volatilités, combiner avec un modèle DD, combiner avec un modèle CEV. C'est exactement ce que ont été proposés le modèle de Wu et Zhang (2002) [122], le modèle Displaced Diffusion Stochastic Volatility Libor Market Model (DD-SVLMM) et le modèle SABR-LMM. Ces trois modèles sont présentés brièvement dans l'annexe et dans le chapitre 2.

Dans le chapitre 3, nous présentons les méthodes d'estimation et de calibration des modèles de taux de marché. Dans ce chapitre, nous explicitons d'abord des méthodes pour reconstituer la courbe des taux zéro-coupons : par bootstrapping ou par une approximation à la fonction d'actualisation. Pour la deuxième approche, nous rappelons les méthodes les plus représentatives des deux principales classes des modèles ainsi que leurs avantages et désavantages: les modèles basés sur les splines (ex. McCulloch (1971, 1975), Vasicek et Fong (1982), Steele (1991), Fisher et al. (1995), Waggoner (1997), Anderson et Sleath (2001)) et les modèles avec des paramètres parcimonieux (ex. Nelson-Siegel (1987), Nelson-Siegel-Svensson (1994)).

Ensuite, nous nous concentrons sur la calibration de la volatilité. Nous décrivons d'abord la technique "stripping" pour recouvrir les volatilités de chaque caplet à partir de celles de caps. Puis, les différentes formes de spécification de la calibration des structures des volatilités instantanées sont décrites (constante par morceau et sous forme paramétrique). La propriété désirée de l'invariabilité de la forme de la structure des volatilités (ou non) conservée par les formulations est soulignée.

Enfin, nous nous intéressons à la calibration des corrélations. Nous rappelons d'abord les propriétés

d'une structure théoriquement satisfaisante pour les matrices des corrélations instantanées. Puis, nous menons une discussion sur les choix de la nature de modélisation des corrélations (inputs comme estimation historique ou outputs comme paramètres de calibration). Dans ce mémoire, nous adoptons les corrélations historique, en raison d'une part de la disponibilité des données, et d'autre part par la sensibilité relativement faible des prix des swaptions européens aux méthodes de calibration des corrélations. Le fait d'utiliser des corrélations exogènes est également une opportunité d'introduire des caractéristiques des structures de corrélation de marché réel dans le calibrage. Ensuite, afin de résoudre les problèmes de la présence de valeurs aberrantes et des discontinuités sur les surfaces de corrélation, les formes paramétriques parcimonieuses sont présentées.

Dans le chapitre 4, nous présenterons les applications empiriques des 2 modèles de taux d'intérêts en appui sur les méthodes présentées dans le chapitre 3 : le modèle de Hull et White et le modèle de LMM-SABR. Nous appliquerons ces 2 modèles avec 2 ensembles de données (31/12/2019 et 31/12/2022).

Pour reconstruire la courbe des taux initiale des deux modèles, nous utilisons les taux swaps Euribor 6 mois comme instruments de base, aligné avec les données utilisées de l'EIOPA pour calculer la courbe des taux sans risque. Pour le calibrage des paramètres du modèle Hull-White, les prix des swaptions de maturité 1 an et des échéances liquides sont utilisés. Pour le modèle LMM-SABR, nous utilisons les volatilités (normales) des caps Euribor 6 mois ATM pour déterminer les volatilités des caplets et les nappes des volatilités des caps avec des strikes différents pour le calibrage des paramètres du modèle LMM-SABR.

Pour l'estimation, nous commençons par la construction de la courbe des taux initiale à partir des taux swaps liquides. Dans le cadre du modèle de Hull et White, nous choisissons de construire les points de spline par optimisation et ensuite, nous construisons la courbe initiale avec interpolation par spline cubique. Nous constatons que les points de spline du 31/12/2022 obtenus sont plus éloignés des taux swaps d'origine du fait de plus d'irrégularité des dernières. Les valeurs des prix de swap au pair (par) sont très proches de zéro et la reproduction des taux swaps est globalement bonne, notamment pour les instruments liquides ayant été utilisés comme base de construction. Si tous les instruments disponibles sont utilisés, les prix des swaps recalculés sont plus proches de zéro pour les instruments moins liquides. Par contre, la courbe des taux forwards reconstruite présente plus d'irrégularités.

Dans la calibration des paramètres, le paramètre de la vitesse du retour à la moyenne est positive pour les prix des swaptions du 31/12/2022 mais négative pour ceux du 31/12/2019. Cette situation est assez fréquente dans le calibrage du modèle Hull-White et elle est souvent considérée comme le résultat de la possibilité de prédominance de la partie croissante de la courbe des volatilités, ce qui est cohérent avec ce que nous avons constaté dans la courbe de volatilité des swaptions.

Dans le modèle LMM-SABR, la construction de la courbe d'actualisation concerne non seulement la courbe des taux initiaux, mais également les taux forwards utilisés dans l'estimation des

corrélations. Dans les 2 cas, à la différence du modèle Hull et White, nous adoptons une combinaison de splines cubiques et la méthode de bootstrap. Toutefois, les résultats restent similaires si les mêmes méthodes que celles du modèle de Hull et White sont appliquées. Nous avons comparé les écarts entre les taux IRS recalculés et les taux IRS du marché qui sont quasi-nuls.

Afin d'obtenir les volatilités instantanées, nous effectuons d'abord une interpolation linéaire pour les tenors manquants, et puis, nous procédons au bootstrapping des volatilités des caplets. On constate une forme avec un pic de bosse typique se situant autour des maturités d'entre 2 et 5 ans dans la courbe de la structure par terme des volatilités du 31/12/2022. Par contre, on observe une forme croissante pour celle du 31/12/2019. Une explication possible est liée à l'environnement des taux bas en 2019, où il y a peu d'incertitude sur les politiques monétaires des autorités mais plus d'incertitude dans les anticipations de l'inflation et taux réel future.

Afin de modéliser les volatilités instantanées des forwards, nous implémentons 3 formes de spécification des volatilités et nous retenons la forme paramétrique avec des modifications locales, justifiée par son excellente performance de calibrage.

La structure de corrélation est estimée de manière exogène à partir des données historiques des taux forwards. Les corrélations des forwards des différentes maturités sont d'abord examinées à l'aide des Q-Q plots. Les comportements des corrélations sont conformes à ce qui est attendu. Dans la matrice de corrélation forward-forward historique brute, on observe des corrélations factices et irrégulières. Nous testons 4 formes paramétriques afin d'obtenir des corrélations plus régulières et une évolution plus stable de la structure par terme de la volatilité. La forme double exponentielle à 3 paramètres est retenue.

L'estimation des volatilités est effectuée avec des modèles du type GARCH. Pour chaque tenor, nous testons 4 modèles : ARCH, GARCH(1,1), TGARCH(1, 1, 1) et GJR-GARCH(1,1,1). Nous sélectionnons le modèle le plus approprié selon les critères LL, AIC et BIC. La stationnarité et la normalité des séries sont respectivement examinées préalablement avec les tests de racines unitaires ADF et le test de Jarque-Bera.

Une fois les volatilités historiques estimées, les matrices de corrélation vol-vol sont construites de manière similaires à celles de corrélations forward-forward. Concernant la matrice de corrélation de forward-vol, nous adoptons l'approche classique pour incorporer la possibilité de taux négatifs. Les corrélations obtenues sont positives dans les 2 applications. Ce qui se traduit par une augmentation de volatilité avec la hausse des taux. Ces résultats sont moins fréquents dans les études passées. Cependant, ils reflètent les évolutions récentes du marché : les hausses de taux de ces derniers temps sont plutôt liées aux incertitudes accrues du marché, et autrement dit, plus de volatilité.

Enfin, nous évaluons les 2 modèles en termes de market consistency en comparant les valeurs du marché et les valeurs recalculés du modèle. La qualité de calibrage de Hull et White est bonne pour 2022 mais moindre pour 2019. Concernant le modèle LMM-SABR, les écarts des nappes

des volatilités de marché et des volatilités reconstruites avec le modèle SABR sont très faibles dans les 2 applications. Ces résultats confirment la robustesse du modèle LMM-SABR dans des contextes différents tout en incorporant les informations sur les volatilités.

Dans la conclusion, nous résumons les implications du contexte actuel pour les assureurs. Compte tenu de divers impacts potentiels des hausses de taux d'intérêt, les compagnies d'assurance doivent être proactives que ce soit dans le renouvellement et la refonte des produits, dans l'adaptation d'allocation d'actif et la diversification des portefeuilles, ou encore dans la gestion ALM et des risques. Le modèle LMM-SABR nous semble être un bon candidat pour des applications dans ces différents aspects, justifié d'abord par sa qualité en terme de *market consistency* dans les différents environnements de taux, ce qui est fondamental dans les calculs réglementaires. Par ailleurs, la capacité de modéliser les taux des différentes maturités dans un cadre unifié et consistant du modèle LMM-SABR permet une meilleure modélisation dans la gestion ALM, notamment si les gaps de duration et de convexité sont sensibles. Tandis que la capacité de tenir compte des volatilités et donc l'anticipation du marché concernant l'incertitude des taux est une opportunité pour capturer les possibilités de hausses du risque de rachat et du risque de liquidité.

Summary

After a prolonged period of low interest rates and inflation, most developed countries are entering a phase of sharp rise in inflation, increasing interest rates, and high uncertainties and risks. Today, interest rate risk and inflation risk are identified as the primary risks by the EBA, EIOPA, and ESMA (2023) [40]. Insurers are once again facing challenges of interest rate changes which they should be prepared to adequately manage.

This volatile market environment gives us the incentive to dive back into interest rate term structure modeling, which is a classic but fascinating topic. This thesis has two main objectives. The first objective is to provide a brief review of the development of interest rate models. This review and insights inside will help us to validate the choice of market models that have achieved great success in the market, in particular, the market models with stochastic volatilities.

The second objective is to implement one of the stochastic volatility market models: LMM-SABR, which provides a plausible description of financial reality while preserving the advantage of analytical tractability and ease of calibration (Rebonanto et al. (2011)[98]). We explain the whole estimation and calibration procedure of the LMM-SABR model with different methods and try to provide readers with the elements or at least the references to implement this model.

In the application of the LMM-SABR model, it is interesting to test the model's robustness in different interest rate contexts. The model will be applied over two distinct but representative periods, namely 12/31/2019, where interest rates experienced a historically low level, and 12/31/2022, where interest rates began to rise as a result of economic and social changes and various shocks. We will compare the performance of the model with the classic Hull & White model in terms of market consistency.

The thesis is organized into 4 chapters:

In the first chapter, we first present the main characteristics of insurers' investment portfolios. Perceived as a regular investment income source with a determined surrender value, bonds are naturally insurers' preferred instruments and the most important in their investment portfolios. This preponderance of fixed-income securities structure, especially with fixed and long-term bonds, makes insurers highly sensitive to interest rate changes. Besides, according to the requirement of the Solvency II directive, interest rate modeling is essential in the reserve estimation and economic balance sheet projection, both for pillar 1 and for the ORSA exercise of pillar 2, making its role central in insurers' various analyses.

Next, we discuss the impact of interest rates on different aspects of insurance companies' activities. In the low or negative interest rate period, insurance companies had to change their asset allocation toward a riskier investment portfolio in the search for yields. Unit-linked products have been

rapidly increasing in popularity and this trend continues until today.

After the pandemic crisis, central banks increased key rates at an uneven pace in response to persistently high inflation. A moderate interest rate rise generally has a positive effect on insurers. However, the short-term impact of an interest rate rise is ambiguous, especially due to the adverse effect on insurers' balance sheets through mark-to-market valuation losses. Moreover, interest rate rises could alter consumers' behavior and increase surrender risk, particularly in the case of an abrupt interest rate increase, associated with an excessive inflation rise and a sluggish economic growth outlook. Liquidity risk could also become critical when interest rates surge with the presence of illiquid assets in the portfolio. The potential rise of interest rate volatility in such a context is highlighted, considering the uncertainty of monetary policy and its impact in the future. A robust and market-consistent interest rate model which takes into account both different segments variations in the interest term structure and volatility will be highly valuable.

In Chapter 2, we present a brief review of theoretical developments in interest rate models. We start by recalling the main interest rate models preceding the HJM model (Heath et al. (1992) [61]). Single-factor models based on the dynamics of instantaneous short rates, whether endogenous (1st generation) or exogenous (2nd generation), have limits such as the inability to reproduce all forms of interest rate term structure and the inability to take account of the correlations among interest rates of different maturities. Although multi-factor models were able to represent richer forms of yield curves, it remains difficult to model the covariance structures of forward rates. In fact, the inability to recover the rapid decorrelations of distant maturities is an inherent limitation of low-dimensional short-rate models in general (Rebonato and Cooper (1995)).

In 1992, Heath, Jarrow and Morton [61] proposed their HJM framework, which directly models instantaneous forward rates. This model provides a very general framework within which all exogenous models can be derived, as we illustrate with the example of the Hull and White model (1994). However, it suffers from the explosion problem of bank account as all lognormal models and the calibration is complex since the instantaneous forward rate is a theoretical concept that is not observable in the market. The market models (the 3rd generation) are inspired and developed from instantaneous forward rate dynamics with the logic of the HJM framework. Modeling directly LIBOR rates and compatible with the standard market formula, these models were very popular and became the reference market model. Nevertheless, there remain some limitations in these models, for example, the impossibility of capturing the smile and the skew of volatilities. This weakness, considered minor at first, was exacerbated by the post-crisis upheavals at the beginning of the 21st century. The 4th generation models aim to improve them by incorporating smiles and skews. Different approaches have been proposed. The first approach is local volatility models (LVM) with the famous example of the Dupire model (1994) [39], or parametric models such as CEV (*Constant Elasticity of Variance*, Cox and Roll (1976) [29]) or DD model (*Displaced Diffusion*) developed by Andersen and Andreasen (2000). The second approach is diffusion models with jumps (Glasserman and Kou (2003), Kou (2002), Glasserman and Merener (2003) [82]). The

third approach is the models with stochastic volatilities. The early works incorporate the Heston model into the LMM model (Andersen and Brotherton-Ratcliffe (2001) [5] and Andersen and Andreasen (2002) [4]) and derive exact solutions for pricing caplet and swaptions. Another model developed by Joshi and Rebonato (2001), models volatility according to a parametric form, in which each parameter follows a stochastic process with its own volatility. However, these models only capture the smile of the volatility. In order to capture skew, three solutions are considered: allowing correlations between forward rates and variances/volatilities, combining with a DD model, or combining with a CEV model. These are exactly what were proposed respectively in Wu and Zhang (2002)[122], in the Displaced Diffusion Stochastic model Volatility Libor Market Model (DD-SVLM), and in the SABR-LMM model. The three models are briefly presented in the appendix and Chapter 2.

In Chapter 3, we present the estimating and calibrating methods for interest rate market models. In this chapter, we first discuss reconstructing methods of the zero-coupon rate curve or forward curve: bootstrapping or discount factor approximation function. For the second approach, we represent two main classes of models and we discuss their advantages and disadvantages: models based on splines (e.g. McCulloch (1971, 1975), Vasicek and Fong (1982), Steeley (1991), Fisher et al. (1995), Wagoner (1997), Anderson and Sleath (2001)) and models with parsimonious parameters (e.g. Nelson-Siegel (1987), Nelson-Siegel-Svensson (1994)).

We then move to volatility calibration. We start by describing the stripping technique to retrieve caplets' volatilities from those of caps. Then, different parameterization forms of the structures of instantaneous volatilities are described (piecewise constant or parametric form). The property of preserving (or not) invariability of volatilities term structure by the specifications is highlighted.

Finally, we explain the calibration of the correlations. We first recall the desirable properties of a theoretically satisfactory structure for instantaneous correlation matrices. Then, we discuss the choices of instantaneous correlations (inputs by historical estimation or outputs as fitting parameters). In this thesis, we adopt historical estimation, because of the availability of data, but also justified by the relatively low sensitivity of European swaption prices to correlation matrix. Using historical correlations is in addition an opportunity to introduce real market features into the correlation calibration. Finally, to obtain more regular correlation surfaces, the parsimonious parametric forms are presented.

In chapter 4, we will present the empirical applications of the two interest rate models based on the methods presented in chapter 3: the Hull and White model and the LMM-SABR model. Both will be applied with 2 datasets (12/31/2019 and 12/31/2022).

To build the initial yield curve of the two models, we use the 6-month Euribor swap rates as basic instruments, aligned with the data used by EIOPA to calculate the risk-free yield curve. For the calibration of the Hull-White model's parameters, we choose the swaptions prices of 1-year maturity and liquid maturities. For the LMM-SABR model, we use the (normal) volatilities of ATM 6-month Euribor caps to determine the caplet volatilities and use cap volatility surface with different strikes for the calibration of LMM-SABR model's parameters.

In the estimation, we start by constructing the initial yield curve from liquid swap rates. We determine the spline points by optimization and then construct the initial curve with interpolation by cubic spline for the Hull and White model. We find that the spline points obtained for 12/31/2022 are more distant from the original swap rates due to the presence of more irregularity of the latter. The values of par swap prices are very close to zero and the reproduction of swap rates is generally good, particularly for liquid instruments that were used as the building base. If all available instruments are used, the recalculated swap prices are closer to zero for less liquid instruments. On the other hand, the reconstructed forward rate curve shows more irregularities.

In the parameters' calibration, the calibration value of the mean reversion speed parameter is positive for the swaption prices of 12/31/2022 but negative for those of 12/31/2019. The latter situation is quite common in the calibration of Hull-White model and it is often considered as the result of the possible predominance of the increasing part of volatility curve, which is consistent with what we observed in the swaption volatility curve.

In the LMM-SABR model, the construction of the interest rate curve in the LMM-SABR model concerns not only the initial rate curve but also the forward rates used in the estimation of correlations. In both cases, different from the Hull and White model, we adopt a combination of cubic splines and the bootstrap method. However, the results remain similar if the same methods as in the Hull and White model are applied. The differences between the recalculated IRS rates and the market ones are nearly zero.

In order to obtain the instantaneous volatilities, we first perform a linear interpolation for the missing tenors, and then we retrieve the volatilities of the caplets. We observe a typical shape with a spike around between 2 and 5 years maturities in the volatility term structure curve of 12/31/2022 and an increasing shape for that of 12/31/2019. A possible explanation is the low-interest rate environment in 2019, where there is little uncertainty about the authorities' monetary policies but more uncertainty in expectations of future inflation and real interest rates.

To calibrate the instantaneous volatilities, we implement 3 parameterizations and we retain the parametric form with local modifications, justified by its excellent calibration performance.

The correlation structure is estimated exogenously from historical forward rate data. The correlations of the forward rates of different maturities are first examined with QQ plots. The behavior of the correlations conforms to expectation. Spurious and erratic correlations are observed in the raw historical forward-forward correlation matrix. We test 4 parametric forms in order to obtain more regular correlations and a more stable evolution of volatility term structure. The double exponential form with 3 parameters is retained.

The estimation of volatilities is carried out with GARCH-type models. For each tenor, we test 4 models: ARCH, GARCH(1,1), TGARCH(1, 1, 1) and GJR-GARCH(1,1,1). We select the most suitable model according to the LL, AIC, and BIC criteria. The stationarity and normality of the series are respectively examined before models' selection with the ADF unit root tests and the Jarque-Bera test.

The vol-vol correlations calibration procedure is similar to the forward-forward correlations calibration. With respect to the forward-vol correlations, we adopt the classical approach to incorporate the possibility of negative rates. The correlations obtained are positive in both applications, which suggests volatility increases with rising interest rates. These results are less common in past studies. However, they reflect recent market developments: the interest rate rises are rather related to increasing market uncertainties, and in other words, more volatilities.

Finally, we evaluate the 2 models in terms of market consistency by comparing market values and model values. The calibration quality of Hull and White is good for 2022 but less for 2019. Concerning the LMM-SABR model, the differences between the market volatility surface and model volatility surface are very low in the 2 applications. These results confirm the robustness of the LMM-SABR model in different contexts while incorporating information on volatilities.

In the conclusion, we summarize the implications of the current economic context for insurers. Given the various potential impacts of interest rate rise, insurance companies should be proactive in product design, asset allocation and portfolio diversification strategic adaptation, and ALM and risk management. The LMM-SABR model seems to be a good candidate in the above aspects' applications, justified firstly by its quality in terms of *market consistency* in different interest rate environments, which is fundamental in Solvency II calculations. Furthermore, the ability to model different maturities interest rates in a unified and consistent framework of the LMM-SABR model allows better modeling in ALM management, particularly if the duration and convexity gaps are sensitive to interest rate variations. While the ability to take account of volatilities and thus market anticipation about interest rate uncertainty is an opportunity to capture the potential increase in surrender risk and liquidity risk.

Contents

Résumé	ii
Abstract	iii
Note de Synthèse	v
Summary	xi
Introduction	1
1 L'importance des taux d'intérêt en assurance	4
1.1 La composition des portefeuilles des assureurs: les poids prédominants des titres de créance	4
1.2 Contexte Réglementaire: Solvabilité II	5
1.2.1 Le ratio de solvabilité et le capital réglementaire	6
1.2.1.1 Bilan économique et les fonds propres éligibles	7
1.2.1.2 Capital de Solvabilité Requis et Minimum de Capital Requis: SCR et MCR	8
1.2.2 Projection ORSA	9
1.3 Évolution des taux de ces dernières années	9
1.3.1 Post crise financière: taux faibles voire négatifs	10
1.3.1.1 L'impact des taux bas sur les activités des assureurs	11
1.3.2 La crise de la Covid-19	12
1.3.3 Post crise sanitaire: la remontée de l'inflation et des taux	12
1.3.3.1 Les impacts de la remontée des taux sur les assureurs	13
1.3.4 Hausse de la volatilité des taux	18
2 Développement théorique des modèles de taux	21
2.1 Développements historiques des modèles de taux avant le modèle HJM	21
2.1.1 Les modèles endogènes à un seul facteur	22
2.1.2 Les modèles exogènes à un seul facteur	24
2.1.3 Les modèles taux court à plusieurs facteurs	25
2.2 Le cadre HJM	27
2.2.1 L'évolution des taux forwards instantanés sous la mesure risque-neutre	28
2.2.2 L'évolution des taux forwards instantanés sous la mesure forward	29
2.2.3 L'évolution des taux forwards instantanés sous la mesure forward terminale	30
2.3 Le modèle Hull & White	31

2.4	Libor Market Model - lognormal forward-LIBOR Model	34
2.4.1	Le compte bancaire, l'obligation zéro-coupon dans un cadre discret et la dynamique du taux LIBOR	35
2.4.2	La dynamique de taux Libor sous la mesure forward	38
2.4.3	La dynamique de taux Libor sous la mesure terminale et sous la mesure spot	40
2.4.3.1	La mesure terminale	40
2.4.3.2	La mesure spot	41
2.4.3.3	Valorisation des caplets/caps	42
2.5	L'extension du modèle LMM: le smile et le skew	44
2.5.1	Le modèle LMM avec des volatilité du style SABR	47
3	Méthodes d'estimation et de calibration	54
3.1	Reconstruction de la courbe des taux initiale	54
3.1.1	Modèles basés sur les splines	56
3.1.1.1	Régression de Spline	57
3.1.1.2	B-Spline	59
3.2	Calibration des volatilités	60
3.2.1	Stripping de la volatilité des caplets	60
3.2.2	Calibration de la volatilité instantanée aux caplets	61
3.2.2.1	Volatilité instantanée constante par morceau	61
3.2.2.2	Volatilité instantanée sous forme paramétrique	63
3.3	Calibration des corrélations	65
3.3.1	Propriété générale des corrélations	65
3.3.2	Choix de la nature de modélisation des corrélations: input et output	66
3.3.3	Formes paramétriques des structure des corrélations instantanées	68
3.3.4	Paramétrisation de rang plein des structures des corrélations instantanées	70
3.3.5	Paramétrisation de rang réduit des structure des corrélations instantanées	70
3.3.5.1	Zeroing valeur propres	71
4	Applications empiriques des modèle de taux	73
4.1	Modèle de Hull et White	74
4.1.1	Les données inputs	74
4.1.2	Procédure d'estimation	75
4.1.2.1	Courbe zéro-coupon reconstruite par optimisation	76
4.1.3	Calibrage des paramètres	77
4.1.4	Simulation	78
4.2	Modèle LMM-SABR	79
4.2.1	Les données inputs	79
4.2.2	Procédure d'estimation	80
4.2.2.1	Estimation des taux forwards initiaux et des taux forwards historiques	80

4.2.2.2	Estimation des volatilités instantanées et des surfaces des volatilités	83
4.2.2.3	Estimation des corrélations forward-forward historiques	85
4.2.2.4	Calibrage par fonctions paramétriques	87
4.2.2.5	Estimation des volatilités avec les modèles du type GARCH	89
4.2.2.6	Calibrage des corrélations volatilité-volatilité	92
4.2.2.7	Calibrage des corrélations forward-volatilité	93
4.2.2.8	Calibrage des paramètres SABR	95
4.2.2.9	Calibrage des volatilités	95
4.2.2.10	Calibrage des volvoles	98
4.2.3	Simulation	98
4.2.3.1	Réduction des dimensions: “Zeroing” valeur propres	98
4.2.3.2	Résultats de simulation	99
4.3	Comparaisons des modèles	100
	Conclusion	103
	Liste des annexes	106
	A Résultats complémentaires des applications empiriques	106
	B Notions des taux et des produits dérivés classiques	114
B.1	Notions fondamentales des taux	114
B.1.1	Le taux spot et le taux instantané	114
B.1.2	Le taux à terme	116
B.2	Courbes des taux	118
B.3	Notions de base des martingales et stratégie autofinçante	121
B.3.1	Définitions de base	121
B.3.2	Stratégie de portefeuille et marché complet	123
B.3.3	Les relations fondamentales	126
B.4	Changement de mesure et choix des numéraires appropriés	127
B.4.1	Définition de numéraire avec le 1er exemple: compte bancaire	127
B.4.2	2ème exemple: Le prix d’une obligation zéro-coupon	129
B.4.3	3ème exemple: Le facteur d’annuité	130
B.5	Produits dérivés classiques	131
B.5.1	Swaps de taux: IRS	132
B.5.2	Options sur taux et option sur obligations	135
B.5.3	Cap/Floor	136
B.5.4	Swaption	139
	C Valorisation des swaptions	142
C.1	Swap Market Model	142
C.2	Incompatibilité du modèle LMM et SMM	144

C.3	Valorisation des swaptions avec le modèle LFM	146
C.3.1	Valorisation des swaptions avec le modèle LFM via simulation Monte carlo	146
C.3.2	Formules analytiques d'approximations des swaptions avec le modèle LFM	147
C.4	Valorisation des caplets avec le modèle SMM	149
D	Deux autres modèles de marché à volatilité stochastique	151
D.1	Wu et Zhang (2002)	151
D.2	Displaced Diffusion Stochastic Volatility Libor Market Model	154
E	Autres méthodes d'estimation et de calibration	157
E.1	Autre méthodes de reconstruction de la courbe des taux initiale	157
E.1.1	Spline de lissage	157
E.1.2	Modèles paramétriques	158
E.2	Autre méthode de calibration des corrélations	160
E.2.1	Méthode d'optimisation d'angle	160

List of Figures

1.1 Répartition des encours de placements des assureurs français au T4 2022, avant mise en transparence	6
1.2 Bilan économique simplifié	7
1.3 Les investissements dans les titres éligibles au CSPP selon les secteurs ¹	10
1.4 Collectes Nets des supports en euros et supports en UC depuis 2011 ²	12
1.5 Taux directeurs de la Banque Centrale Européenne depuis 01/01/2022 ³	13
1.6 Évolution des taux 10 ans des différents pays ⁴	14
1.7 Parts des taux de coupons fixes en fonction de la maturité résiduelle des titres obligataires notés en détention directe à fin 2021 ⁵	15
1.8 L'évolution des ratios de solvabilité des assureurs français ⁶	16
1.9 Risque de Liquidité	18
1.10 Indice de volatilité du Bund (bp) ⁷	19
1.11 Evolution de l'indice MOVE depuis 2013 ⁸	20
4.1 Courbe des taux swap Euribor	74
4.2 Courbe des taux swap Euribor	75
4.3 Les points de spline déterminés à partir du taux swap Euribor 2019	76
4.4 Les points de spline déterminés à partir du taux swap Euribor 2022	76
4.5 Taux des swaps reconstruit pour tous les swaps du marché 2019	77
4.6 Simulation Monte Carlo du modèle Hull et White	78
4.7 Construction des taux forwards avec bootstrap 31/12/N	82
4.8 Les volatilités des caps du marché et de caplets obtenus avec stripping	83
4.10 Q-Q plot des corrélations des taux forwards 2019	86
4.9 Taux forward historique 31/12/N-1 - 31/12/N	86
4.11 Historical Forward-Forward Correlation	87
4.12 Forward-Forward Corrélation Parametrization	89
4.13 ACF et PACF des changements des taux forwards	91
4.14 ACF et PACF des changements des taux forwards	91
4.15 volatilité-volatilité Corrélation Historique	93
4.16 volatilité-volatilité Corrélation Parametrization	93
4.17 Forward-volatilitéCorrélation	94
4.18 Les volatilités instantanées obtenues avec formule 2	96
4.19 Les volatilités instantanées obtenues avec formule 6 et 7	97
4.20 Les volvol instantanées obtenues avec formule 6 et 7	98
4.21 ACP Sree plot	99
4.22 Simulation modèle LMM-SABR - taux forward dans 1 an	99

4.23	Simulation modèle LMM-SABR - moyenne des taux forward	100
4.24	Comparaisons des prix des swaptions ATM du marché et du modèle Hull-White .	101
4.25	Comparaisons des nappes des volatilités des caplets du marché et du modèle LMM-SABR et du marché	102
A.1	Courbe des taux forwards estimée des différentes dates avec bootstrap	106
A.2	Séries des taux forwards historiques des différentes tenors avec bootstrap	107
A.3	Volatilités des caplets stripping à partir des nappes des volatilités des caps	108
A.4	Résidus standardisés et variances conditionnelles du taux forward $F(29.5, 30)$ 2019	109
A.5	Ajustement du modèle GARCH du taux forward $F(29.5, 30)$ 2019	110
A.6	Volatilités historiques des taux forwards 2019	110
B.1	Cash Flow d'un FRA	117
B.2	Courbe des taux spot ⁹	119
B.3	Courbe des taux forwards instantanés ⁵⁵	121
B.4	Cash Flow d'un Swap	133

Introduction

Le taux d'intérêt est toujours un élément crucial pour les compagnies d'assurance. Du fait des caractéristiques des activités des assureurs, les assureurs détiennent des quantités considérables d'actifs sensibles aux taux d'intérêt, notamment les obligations. Ainsi, la rentabilité d'un assureur fluctue en fonction des variations des taux d'intérêt. En outre, la norme prudentielle Solvabilité 2, qui est entrée en application le 1er janvier 2016, exige une "Best Estimation" des provisions techniques à l'aide d'une courbe d'actualisation sans risque. Depuis, la modélisation des taux d'intérêt devient un enjeu majeur pour les assureurs.

L'évolution de l'environnement taux a non seulement des impacts sur la rentabilité et la solvabilité des assureurs, mais également des implications sur les autres aspects des activités des compagnies d'assurance. Durant la période des taux d'intérêt faibles voire négatifs après la crise financière, des modifications profondes des assureurs en termes de stratégie d'allocation d'actif et de conception des produits ont été constatées. Après cette période prolongée de taux bas et de faible inflation, la plupart des pays développés entrent dans une phase caractérisée par une remontée forte de l'inflation, des relèvements des taux d'intérêt ainsi que des incertitudes accrues et de risques élevés. Aujourd'hui le risque de taux et le risque d'inflation sont identifiés comme les premiers risques par l'EBA, l'EIOPA et l'ESMA (2023) [40]. Les assureurs se retrouvent donc, de nouveaux, face à des combinaisons d'opportunités et de risques liées aux variations de taux auxquelles ils doivent être prêts à s'adapter et à gérer.

Ce contexte des taux volatils nous offre l'occasion et la motivation de replonger dans la modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt, qui est un sujet classique mais passionnant. Les modèles de taux existants sont nombreux et la préoccupation de la modélisation évolue pour s'adapter au changement de l'environnement des taux. Un exemple typique est que la possibilité de générer des taux d'intérêt négatifs avec certains modèles de taux, et qui a été considérée pendant longtemps comme un désavantage, est devenue attractive ces dernières décennies. Par ailleurs, comme indique Rebonato (2004) [106], l'état actuel des modélisations est en grande partie motivé par les expériences passées, notamment liés aux développements "accidentels" de l'industrie financière et de nouvelles technologies. Il est donc difficile d'identifier le "meilleure" modèle. Nous pensons qu'une revue succincte sur les développements historiques de modèles de taux est une des meilleures approches pour guider les choix de modèle, ce qui constitue le premier objectif de ce mémoire. Nous n'entrerons pas dans les détails techniques ni dans les démonstrations, mais plutôt nous focaliserons sur les motivations et les réflexions de développement des modèles ainsi que les intuitions qui sont derrière. Toutefois, nous privilégions et porterons plus d'attention aux modèles dits de marché qui gagnent en succès dans les salles de marché. Les modèles LMM et LMM+ sont étudiés dans plusieurs mémoires d'actuariat (Wilhelmy (2010) [121], Fontanes (2016) [48], etc.) et les auteurs ont montré la surperformance de ces modèles comparés aux autres.

Cette revue et les réflexions nous aiderons à valider cette préférence, en particulier, les modèles de marché qui prennent en compte une volatilité stochastique.

Notre deuxième objectif est donc d'implémenter un des modèles de marché à volatilité stochastique: LMM-SABR. Comme Rebonato (2011) [98] indique, le modèle LMM-SABR fournit d'une description plausible de la réalité financière tout en conservant l'avantage de la traçabilité, de la facilité de calibrage et de la vitesse de calcul. Ce modèle est pour l'instant peu abordée dans les mémoires d'actuariat.

L'estimation et le calibrage du modèle LMM-SABR impliquent principalement trois problématiques: l'estimation des structures à termes de taux, les processus de diffusion de taux d'intérêts et la volatilité stochastique. En fait, ces problématiques sont non seulement nécessaires pour le modèle LMM-SABR, mais également pour les autres types de modèle de taux, chacun pouvant même justifier un mémoire propre. Nous expliciterons ces étapes et nous présenterons, afin de ne pas disperser ni alourdir la présentation, uniquement les pratiques les plus courants à chacune de ces 3 problématiques en s'appuyant sur les solutions proposées par les professionnels et les chercheurs. Cette partie permettra aux lecteurs de disposer de tous les éléments ou tout du moins des références pour pouvoir implémenter ce modèle.

Dans la mise en pratique du modèle LMM-SABR, il nous paraît intéressant de voir la robustesse du modèle dans différents environnements des taux. Nous les appliquerons sur 2 périodes ayant des comportements distincts mais également représentatives des évolutions de ces dernières années, à savoir le 31/12/2019, où les taux d'intérêt ont connu une période historiquement basse, et le 31/12/2022, où les taux d'intérêt commencent à remonter suite aux changements économiques et sociaux et aux différents chocs. Nous les confronterons avec un modèle de taux classique: le modèle de Hull & White et nous comparerons les performances du modèle en termes de market consistency.

Ce mémoire s'organisera comme suit: le premier chapitre discutera des impacts de taux d'intérêt sur le secteur de l'assurance en général. Pour ce faire, nous allons d'abord présenter les principales caractéristiques des portefeuilles de placements des assureurs. Puis, nous rappellerons succinctement les principes de la directive Solvabilité II. Une fois les fondamentaux posés et les contextes réglementaires présentés, nous analyserons les impacts des taux d'intérêt sur différents aspects des activités des compagnies d'assurance à l'aide de l'évolution de l'environnement des taux de ces dernières années, en mettant l'accent sur les évolutions les plus récentes.

Le chapitre 2 sera dédiés aux développements théoriques des modèles de taux. Afin d'obtenir une vision d'ensemble de développements historiques, nous rappellerons d'abord brièvement les principaux modèles des taux d'intérêt précédant le modèle HJM (Heath et al. (1992) [61]). Ensuite, nous présentons le cadre général de HJM (Heath et al. (1992) [61]). Nous montrerons que les modèles exogènes de taux court instantané peuvent être dérivés de ce cadre avec l'illustration de l'exemple du modèle Hull & White (1990) [65]. Nous discuterons ensuite des modèles de marché référence Libor Forward Market Model (Brace, Gatarek et Musiela (1997) [18]). Afin de tenir en compte de la possibilité du taux négatifs ainsi que de la présence du smile/skew des

volatilités, les extensions des Libor Market Model ont été développées, que nous discuterons à la fin, avec une attention particulière sur le modèle avec des volatilité du type SABR [56]. Les principaux avantages et inconvénients des modèles seront évoqués au fur et à mesure dans ce chapitre.

Le chapitre 3 s'intéressera aux méthodes d'estimation et de calibration des modèles de taux, plus particulière autour d'un modèle de taux de marché. Nous expliciterons d'abord des méthodes pour reconstituer la courbe des taux zéro-coupons. Ensuite, nous nous concentrerons sur la calibration des volatilités et des corrélations, qui constitue le cœur des modèles de marché.

En appui sur les méthodes présentées dans le chapitre 3, nous présenterons les applications empiriques des 2 modèles de taux d'intérêts dans le chapitre 4: le modèle de Hull et White et le modèle de LMM-SABR. Nous appliquerons ces 2 modèles avec 2 ensembles de données (31/12/2019 et 31/12/2022).

Nous concluons ce mémoire en nous remettant dans le contexte d'aujourd'hui et nous engagerons une discussion sur les implications pour les assureurs et des ouvertures possibles suite à ce mémoire.

Enfin, les concepts de base relatives aux taux, des notions de base des martingales et des outils de changement des mesures et les produits dérivés des taux d'intérêts de base sont rappelés dans l'annexe B.

Chapter 1

L'importance des taux d'intérêt en assurance

Le taux d'intérêt est toujours un élément essentiel pour les compagnies d'assurance. Du fait des caractéristiques des activités des assureurs, les assureurs détiennent des quantités considérables d'actifs sensibles aux taux d'intérêt, notamment les obligations. Afin de se prémunir contre le risque de taux, certains assureurs détiennent également des produits dérivés de taux. Ainsi, la rentabilité d'un assureur fluctue en fonction des variations des taux d'intérêt. En outre, la norme prudentielle Solvabilité 2, qui est entrée en application le 1er janvier 2016, exige une “*Best Estimation*” des provisions techniques à l'aide d'une courbe d'actualisation sans risque. Depuis, la modélisation des taux d'intérêt devient un enjeu majeur pour les assureurs. Enfin, l'évolution de l'environnement des taux peut également modifier les comportements des assurés qui auront donc des implications sur les conceptions des produits des assureurs.

Dans ce chapitre, nous allons analyser les impacts des taux d'intérêt sur le secteur de l'assurance. Pour ce faire, nous présenterons d'abord les principales caractéristiques des portefeuilles de placements des assureurs. Puis, nous rappellerons succinctement les principes de la directive Solvabilité II. Une fois les fondamentaux posés et les contextes réglementaires présentés, nous discuterons les impacts de taux sur les différents aspects des activités des assureurs à l'aide de l'évolution de l'environnement des taux de ces dernières années, en mettant l'accent sur les évolutions les plus récentes. Enfin, nous soulignerons la spécificité des volatilités de taux.

1.1 La composition des portefeuilles des assureurs: les poids prédominants des titres de créance

Les assureurs investissent dans des actifs financiers diversifiés: obligations, actions, parts d'Organismes de Placement Collectifs (OPC), titres non cotés, immobilier, dépôt et liquidités, etc. La stratégie d'allocation d'actifs varie en fonction des multiples paramètres, tel que la ligne d'activité, la durée et la nature des engagements, les rendements et les liquidités des actifs, etc. Par exemple, les assureurs non vie ayant des engagements de court terme et des distributions de sinistres plus volatiles ont des besoins de liquidité plus importants. Tandis que les assureurs vie ayant des engagements relativement longs et des distributions de sinistres plus stables ont généralement des plans d'investissement de long terme. Toutefois, une caractéristique commune des activités de tous les assureurs est “l'inversion du cycle de la production”. En d'autres termes, les assureurs reçoivent d'abord des revenus sous forme de primes des assurés, ensuite les allouent entre les dépenses d'exploitation et les actifs qui génèrent des rendements, jusqu'aux évènements qui

déclenchent le service envers les assurés (prestation) et qui peuvent se décaler dans le temps. La capacité à pouvoir honorer ces engagements et la rentabilité des assureurs dépendent donc des rendements des investissements, des montants des dépenses d'exploitation et des prestations, tout en tenant compte de l'incertitude de ces derniers. Ce qui exige que les primes reçus des assurés “doivent être placés dans des placement sûrs, variés, suffisamment rémunérateurs et mobilisables dans l'attente de la réalisation de la prestation”¹.

Perçue comme une source de revenus de placement réguliers et à valeur de remboursement déterminée, les titres obligataires deviennent naturellement les instruments les plus privilégiés et importants des portefeuilles de placement des assureurs. Selon l'OECD Global Insurance Statistics [91], à la fin de l'année 2022, les obligations représentaient en moyenne plus de 50% de la valeur des placements des assureurs (vie, non-vie et des assureurs mixtes) de tous les pays membres de l'E et certains autres pays en Asie et en Amérique latine. Dans certains pays, ces proportions étaient proches voire dépassaient 80% (79,9% en Espagne et 85,7% en Brésil). Même les assureurs non-vie qui ont en générale plus de liquidités et de dépôts (14% des actifs contre 7% dans les assureurs-vie) détenaient également en moyenne 50% d'obligations.

En France, les titres créanciers représentaient 51% de l'encours des placements des assureurs avant mise en transparence des OPC (voir le graphique 1.1) à la fin 2022. Après mise en transparence des OPC, les encours de placements des assureurs sont constitués pour 64% du portefeuille en titres de créance, 20% en actions et 16% en part d'OPC². Au sein des titres obligataires, les obligations zéro-coupon et à taux fixe représentaient 84% du portefeuille obligataire, les obligations à taux variables quant à elles 11% et les obligations indexées 3%³. Elles sont investies dans les obligations souveraines (37% des placements), les obligations du secteur financier (44%) et des secteurs privés (19%)⁴. La durée des placements est en générale longue: elle est de 7,2 ans pour les assureurs vie et mixtes et de 6 ans pour les assureurs non-vie en 2021⁵.

Cette structure des placements avec la prépondérance des titres obligataires, plus particulièrement des obligations à taux fixe et de long terme, rend les assureurs sensibles aux taux.

1.2 Contexte Réglementaire: Solvabilité II

Adoptée en 2009 et entrée en vigueur le 1er janvier 2016, Solvabilité II est “un ensemble de règles fixant le régime de solvabilité applicables aux entreprises d'assurances et de réassurance dans l'Union Européenne”⁶. Comparé au régime précédent Solvabilité I, qui s'appuie sur des facteurs et qui prend en compte principalement le risque de souscription, Solvabilité II a une approche fondée sur le risque qui permet une meilleure évaluation de la solvabilité globale des entreprises

¹Rapport d'information du Sénat, *Assurons l'avenir de l'assurance* (<https://www.senat.fr/rap/r98-0452/r98-045234.html>)

²Source: <https://www.banque-france.fr/statistiques/placements-des-assurances-2022t4>

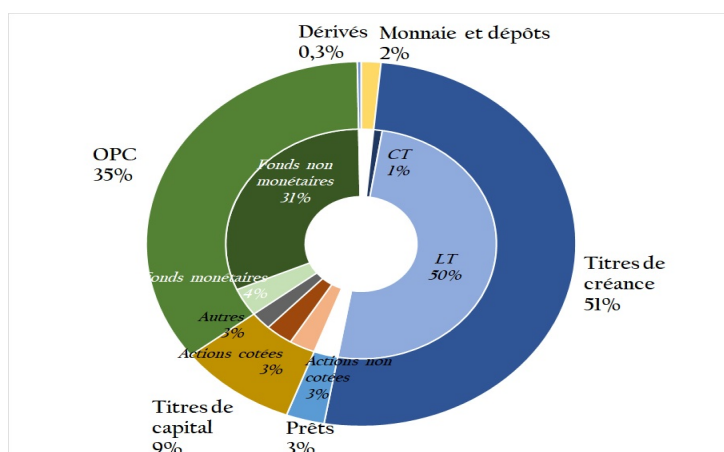
³Source: ACPR (2023) [1]

⁴Recalculer à partir des données dans ACPR (2023) [1]

⁵Source: Banque de France (2022) [33]

⁶ACPR:<https://acpr.banque-france.fr/europe-et-international/assurances/reglementation-europeenne/solvabilite-ii>.

Figure 1.1: Répartition des encours de placements des assureurs français au T4 2022, avant mise en transparence



d'assurance. En proposant pour la 1ère fois, un cadre prudentiel harmonisé, solide et robuste, Solvabilité II permet également de promouvoir la profondeur du marché et la compétitivité des compagnies d'assurance européennes.

A l'instar du cadre de Bâle pour les banques, Solvabilité II repose sur une structure en 3 piliers:

- Le pilier I définit les exigences quantitatives, concrètement l'évaluation des actifs et passifs, en particulier les provisions techniques, de calcul des exigences en fonds propres et d'identification des fonds propres éligibles pour couvrir ces exigences. L'enjeu est de vérifier si une entreprise d'assurance dispose de ressources suffisantes pour couvrir les risques auxquels elle est exposée à l'aide de calcul d'un ratio de solvabilité.
- Le pilier II définit les exigences qualitatives, qui vise à renforcer le système de la gouvernance et la gestion des risques des entreprises d'assurance, en instaurant de processus internes de suivi et de contrôles des risques par les assureurs eux-mêmes à travers différents acteurs et différents niveaux. Il inclue également l'évaluation propre des risques et de la solvabilité (ORSA, *Own Risk and Solvency Assessment*).
- Le pilier III redéfinit et uniformise les pratiques des assureurs en matière de communication d'informations destinée aux autorités de contrôle et de la divulgation au public. L'objectif est de renforcer la transparence de l'information et de favoriser la comparabilité et la concurrence.

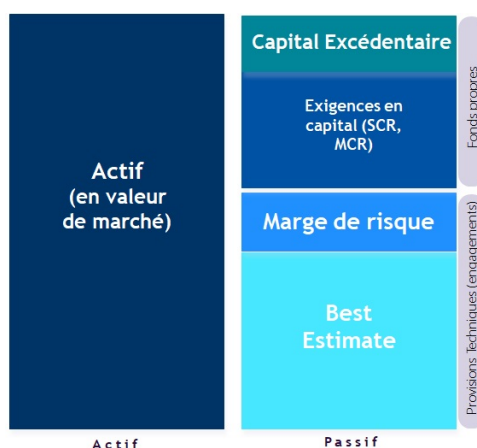
1.2.1 Le ratio de solvabilité et le capital réglementaire

La capacité d'une compagnie d'assurance à faire face à ses engagements, court ou long terme, se résume par le ratio de solvabilité, qui implique le calcul des fonds propres et d'exigence en capital. En particulier, le cadre Solvabilité II prescrit deux mesures de risque: le capital de solvabilité requis (SCR) et le minimum de capital requis (MCR), que nous allons préciser plus bas.

1.2.1.1 Bilan économique et les fonds propres éligibles

Afin de mieux refléter la richesse réelle de l'entreprise, la directive Solvabilité II (l'article 75 de la directive 2009/138/CE) prescrit que les actifs et passifs doivent être évalués en juste valeur (*fair value*) en utilisant des informations et des méthodologies cohérentes avec le marché (*market-consistent*). En d'autres termes, les compagnies d'assurance doivent publier un bilan selon des notions économiques, comme illustré par le graphique 1.2.

Figure 1.2: Bilan économique simplifié



Ainsi, les actifs doivent être valorisés en valeur de marché. Concernant les passifs, lorsque les flux de trésorerie futurs liés aux engagements d'assurance peuvent être répliqués de manière fiable en utilisant des instruments financiers pour lesquels une valeur de marché fiable est observable, la valeur des provisions techniques associées à ces flux de trésorerie futurs est déterminée sur la base de la valeur de marché de ces instruments⁷. Dans le cas contraire, ce qui est la plupart des situations rencontrées en assurance, la valeur des provisions techniques correspond à la somme d'une meilleure estimation (*Best Estimate*, BE) et d'une marge de risque (MR).

Le concept de BE et l'exigence de l'évaluation *market consistent* des engagements impliquent que la valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs doivent être calculée à l'aide d'une courbe des taux sans risque, construite à partir de données observables sur les marchés. Concernant la MR, elle est calculée avec une approche basée sur le coût du capital (CoC) et correspond aux montants totaux de fonds propres nécessaires pour faire face aux engagements futurs d'une compagnie d'assurance pendant toute la durée du contrat. Ce coût de capital peut être interprété comme le coût d'opportunité de la mobilisation des capitaux propres. Il est censé d'être révisé périodiquement et est fixé à 6% pour toutes les compagnies d'assurance aujourd'hui, quel que soit le profil de risque⁸. Si la BE assure que l'entreprise sera en mesure de faire face aux engagements en espérance, la marge de risque représente un niveau de prudence supplémentaire en cas de

⁷L'article R351-2. IV du code des assurances, qui transpose la Directive 2009/138/CE.

⁸En vue de tenir compte des effets de dépendance temporelle des risques dans les projections futurs qui sont ignorés aujourd'hui, l'EIOPA (2020) [43] propose d'atténuer les poids des SCR futures dans le calcul de la MR à l'aide d'un facteur exponentiellement décroissant dans le cadre de la revue de Solvabilité II.

cession et de transfert du passif.

Une fois que les actifs et les passifs économiques sont obtenus, les fonds propres de base peuvent être déduits comme l'excédent de actifs par rapport aux passifs, en s'ajoutant les passifs subordonnés. Les fonds propres totaux sont composés des fonds propres de base et des fonds propres auxiliaires⁹. Les fonds propres totaux sont ensuite classés en 3 niveaux (tiers) selon leur nature et leur disponibilité de l'absorption des pertes¹⁰, et à partir des fonds propres totaux et ces classifications, les fonds propres éligibles sont déterminés selon des contraintes quantitatives pour le calcul de ratio de solvabilité.

1.2.1.2 Capital de Solvabilité Requis et Minimum de Capital Requis: SCR et MCR

Le capital de solvabilité requis "correspond à la valeur en risque des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99,5% à l'horizon d'un an"¹¹. Autrement dit, c'est le montant de capital à détenir pour garantir que la probabilité de ruine de l'entreprise soit inférieure à 0,5% dans un horizon d'un an. Selon la Directive, le SCR doit couvrir le portefeuille en cours et le nouveau portefeuille dont la souscription est attendue dans les douze mois à venir. Pour le calcul du SCR, Solvabilité II propose différentes approches: formule standard avec simplification, formule standard, formule standard avec paramètres spécifiques à l'entreprise (USP), modèle interne partiel et modèle interne complet. La méthode la plus répandue chez les assureurs est la formule standard.

La formule standard est basée sur une approche modulaire. Les différents risques d'une compagnie d'assurance sont représentés sous forme de modules. Le niveau de chaque risque est quantifié par une exigence de capital (SCR de chaque module) et contribue au risque global de la compagnie, qui est résumé en un SCR global. Pour définir le SCR global, la première étape est de calculer le SCR de base (BSCR, *basic SCR*), qui couvre 6 modules de risque: le risque de marché, le risque de souscription en santé, le risque de défaut, le risque de souscription en vie, le risque de souscription en non-vie, et le risque intangible. Chaque module est également divisé en des risques sous-modules ou des risques élémentaires. Les risques de marché, en particulier ses deux sous-modules, le risque d'action et le risque de taux, constituent des composantes substantielles du SCR des assureurs.

La détermination du BSCR s'effectue en 4 étapes: on calcule d'abord les SCR pour chaque sous-module. Puis, on détermine les SCR de chaque module en agrégeant les SCR de ses sous-modules (agrégation intra-modulaire) à l'aide des matrices de corrélation définies dans les spécifications techniques publiées par l'EIOPA afin de tenir compte de l'effet de diversification. Ensuite, on calcule le montant agrégé des SCR des 5 premiers modules (sans le SCR intangible) de manière similaire (agrégation inter-modulaire). Le BSCR s'obtient en ajoutant le SCR intangible

⁹Les fonds propres auxiliaires comprennent le capital initial non appelé, les lettres de crédit et garantie, tout autre engagement juridiquement contraignant, des rappels de cotisations et etc, et peuvent être également appelés pour absorber des pertes. Leur montant et les méthodes de calcul sont soumis à l'approbation des autorités de contrôle.

¹⁰L'article 69, Commission Delegated Regulation (EU) 2015/35.

¹¹L'article R352-2 du code des assurances

directement sur ce dernier montant agrégé de SCR. Une fois le BSCR déterminé, des effets d'ajustements au titre de la capacité d'absorption des pertes par des participations aux bénéficiaires et par des impôts différés, doivent être retranchés. Le SCR opérationnel s'ajoute à la fin pour obtenir le SCR global. Le ratio de solvabilité est calculé comme le rapport entre les fonds propres éligibles et le SCR.

Le MCR est défini comme “un montant de fonds propres de base éligibles en-deçà duquel les assurés, souscripteurs et bénéficiaires des contrats et les entreprises réassurées seraient exposés à un niveau de risque inacceptable si l'entreprise d'assurance ou de réassurance était autorisée à poursuivre son activité”¹². Autrement dit, c'est le montant minimum de fonds propres nécessaire pour que l'assureur puisse poursuivre son activité. Le MCR doit être calculé tous les trimestres en tenant compte des provisions techniques, des primes émises, des capitaux sous risque, du SCR, du seuil minimum (AMCR) et etc.

1.2.2 Projection ORSA

Le pilier II de Solvabilité II inclut l'évaluation propre des risques et de la solvabilité (ORSA). Dans le cadre de l'ORSA, les compagnies d'assurance doivent évaluer ses risques de manière périodique et en cas de changements significatifs, en tenant compte du profil de risque spécifique, des limites approuvées de tolérance au risque et du business plan de l'entreprise. Toutes les spécificités du profil de risque qui ne sont pas prises en compte dans les hypothèses sous-jacentes du SCR avec la formule standard (ou avec le modèle interne) doit être considérées. Afin de vérifier la résilience future de l'entreprise pendant la réalisation du plan stratégique, y compris en cas de chocs extrêmes, l'ORSA repose sur des projections à cinq ans et s'appuie sur un scénario central et de scénarii de stress qui simulent des déformations par rapport au scénario central.

La modélisation des taux d'intérêt est indispensable dans l'évaluation des BE des provisions techniques, dans l'évaluation des options et garanties intégrée dans les contrats, dans le calcul de SCR et dans la projection du bilan économique, à la fois pour le pilier 1 et pour l'exercice d'ORSA du pilier 2, ce qui justifie sa place centrale au cœur de l'analyse des assureurs.

1.3 Évolution des taux de ces dernières années

Après avoir vu l'importance des taux d'intérêt pour les assureurs justifiés par les fondamentaux et l'exigence réglementaire, examinons à présent les impacts des taux pour les compagnies d'assurance. Pour ce faire, nous allons nous appuyer sur l'évolution de l'environnement des taux de ces dernières années et les changements de stratégies des assureurs pour y répondre. Nous allons constater que l'évolution des taux impacte non seulement la rentabilité et la solvabilité des assureurs, mais également les autres aspects des activités d'une compagnie d'assurance.

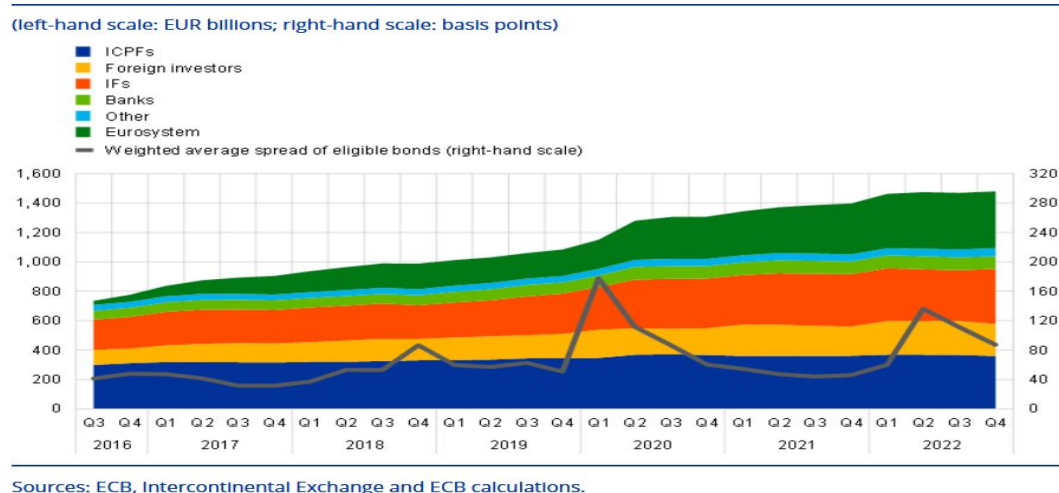
¹²L'article R352-29 du code des assurances

1.3.1 Post crise financière: taux faibles voire négatifs

Les taux d'intérêt faibles voire négatifs ont été une caractéristique de la dernière décennie. Après la crise financière de 2008, les préoccupations majeures des banques centrales étaient la stabilité financière et les pressions déflationnistes du fait de la demande atone. Des baisses des taux directeurs et des programmes non conventionnels ont été menés dans l'objectif de stimuler les crédits et l'activité réelle. Les bilans des banques centrales ont été gonflés suite aux achats massifs d'actifs privés.

A la fin de la crise, du fait de la crainte de provoquer des perturbations économiques, cette politique expansionniste n'a pas été normalisée dans l'immédiat. Le maintien des bilans importants a entraîné une accumulation de la dette privée, des spreads de crédit rétrécis, des signaux de prix biaisés ainsi que des prix de l'immobilier élevés en raison de la hausse des prêts hypothécaires (Brunnermeier (2023) [23]). Le secteur privé est devenu dépendant des liquidités fournies par les banques centrales et s'est habitué à l'environnement de taux d'intérêt bas. En zone euro, ces tendances sont notablement accentuées avec le lancement de programme Corporate Sector Purchase Programme (CSPP) en 2016. La demande de titres éligibles au CSPP des investisseurs était croissante dans tous les secteurs, y compris le secteur de l'assurance (voir le graphique 1.3). Cette forte demande à son tour a compressé le spread de crédit. A l'automne 2021, les rendements obligataires "junk bond" européens se rétrécissaient à 2% tandis que l'inflation atteignait 3%. Autrement dit, même les rendements réels des obligations spéculatives sont devenus négatifs pour la première fois¹³.

Figure 1.3: Les investissements dans les titres éligibles au CSPP selon les secteurs¹⁴



¹³Source: Keynote speech par Chair Petra Hielkema, EIOPA. https://www.eiopa.europa.eu/navigating-low-rates-pandemic-and-inflation-shifting-patterns-life-insurance-2022-08-30_en

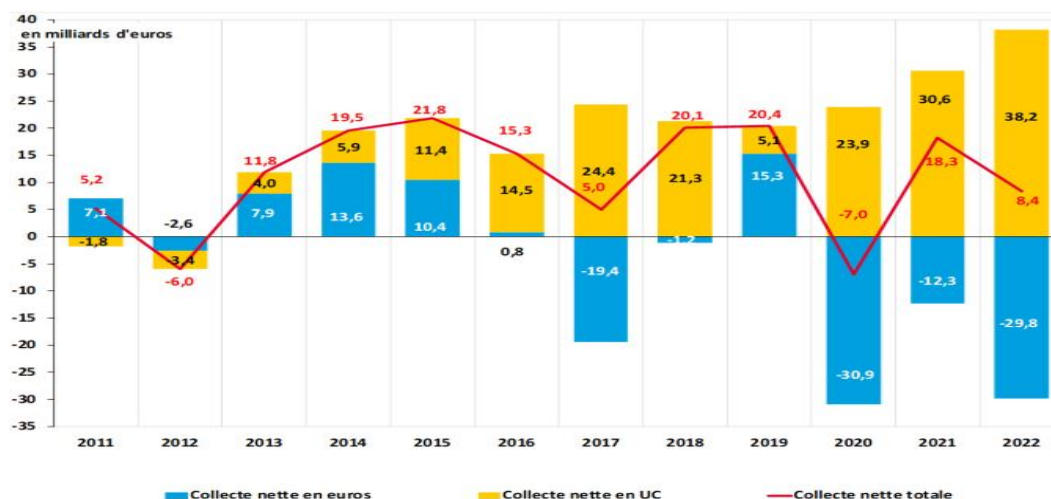
¹⁴Graphique repris depuis BCE (2023) [42].

1.3.1.1 L'impact des taux bas sur les activités des assureurs

La période prolongée des taux bas après la crise financière a eu des conséquences considérables sur le secteur de l'assurance. La chute des taux sans risque en dessous de zéro, les compagnies d'assurance ont dû se tourner vers des investissements plus risqués dans la recherche de rendement supplémentaire, comme les obligations corporates plus risquées. Certains assureurs se sont également réorientés vers les actifs alternatifs comme des fonds alternatifs, des fonds d'infrastructure, des fonds PE (Private Equity) ou des produits structurés. Ces changements d'investissements stratégiques permettaient non seulement de stimuler le rendement des portefeuilles des assureurs, mais également une diversification plus importante, car les actifs alternatifs sont généralement moins corrélés avec les marchés traditionnels. Ils permettent en plus de diminuer les gaps de duration.

Toutefois, l'amélioration des rendements ne va pas sans compromis. Ces changements ont également eu ou pourraient continuer à avoir des conséquences préoccupantes. Du fait de la qualité moindre de crédit, l'effet de levier plus fort dans les secteurs privés et les coûts de transaction plus élevés, les assureurs sont exposés d'avantage aux risques de crédit et aux risques de liquidité. En cas de matérialisation ou de réévaluation des risques, les assureurs peuvent être fortement impactés. Puis, certains des instruments alternatifs sont complexes et opaques, ce qui rend difficile la gestion de risque. Enfin, la hausse d'exposition aux titres plus risqués et aux actifs illiquides pourrait également contribuer à une exubérance plus importante du secteur financier sur d'autres marchés comme le marché immobilier (ECB (2019) [41]).

Une autre modification profonde dans le secteur de l'assurance est les développements des supports en Unités de Compte (UC). Dans un contexte de taux bas, les taux garantis offerts par les produits traditionnels par le passé devenaient de plus en plus difficiles à respecter. Les taux techniques baissaient au fur et à mesure, les produits traditionnels devenaient de moins en moins attrayants. Tandis que les supports en UC, sans la contrainte de la garantie du capital, ont un accès à des instruments plus diversifiés et potentiellement plus rémunérateurs. Les supports en UC ont gagné rapidement en popularité et cette tendance s'est poursuivie dès lors jusqu'à aujourd'hui (voir le graphique 1.4). Selon l'analyse de l'EIOPA, par exemple, en 2020, les primes émises brutes des assureurs-vie traditionnels en Europe ont connu une chute de plus de 10%. Par contre, les produits indexés et en UC ont enregistré une croissance de 3%.

Figure 1.4: Collectes Nets des supports en euros et supports en UC depuis 2011¹⁵

1.3.2 La crise de la Covid-19

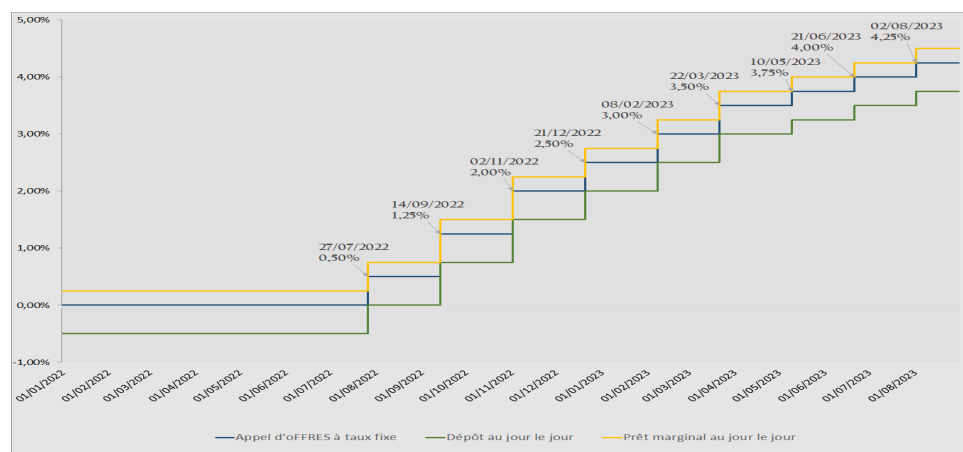
Les circonstances ont dramatiquement changé depuis la crise de la COVID-19 au début de 2020. Des chocs d'offres à cause des perturbations de la chaîne d'approvisionnement d'une ampleur sans précédente a constitué le moteur de l'inflation. Pour gérer la crise pandémique, des mesures de soutien et de programmes de relance modestes ou massives, tels que les "chèques de relance" aux États-Unis et des programmes de prévention des licenciements dans les pays européens, ont été mis en place par les différents gouvernements. Les dépenses publiques ont fortement augmenté dans la plupart des économies développées. Parallèlement, la politique monétaire, qui est censée se baser sur l'anticipation de l'inflation et qui devrait tenir compte de l'inflation déjà manifestée depuis la crise de Covid, restait malheureusement très accommodante. Des programmes d'achats d'urgence face à la pandémie (Pandemic Emergency Purchase Programme, PEPP) ont été par exemple lancés en zone euro.

Ces mesures prises par les pouvoirs publics et les banques centrales pour amortir les conséquences négatives de la crise de pandémie ont soutenu une reprise économique en 2021. Le secteur de l'assurance a enregistré des croissances soutenues, résultant de l'amélioration économique, de la bonne performance boursière et de l'abondance de l'épargne privée (en particulier pour l'assurance vie). Cependant, ces politiques budgétaires et monétaires ont également accentué les pressions inflationnistes.

1.3.3 Post crise sanitaire: la remontée de l'inflation et des taux

A la fin 2021, la plupart des décideurs politiques et des économistes considéraient que l'inflation provoquée par la crise covid-19 était d'un phénomène temporaire et s'attendaient à une absorption progressive du choc pandémique qui permettrait un ralentissement de l'inflation ainsi qu'une

¹⁵Graphique repris depuis Banque de France (2023a) [2]

Figure 1.5: Taux directeurs de la Banque Centrale Européenne depuis 01/01/2022¹⁸

reprise de croissance progressive. Or, un autre choc d'offre massif s'est ajouté à l'équation avec la guerre en Ukraine. Des goulets d'étranglement au niveau de l'offre persistent. La flambée des prix des matières premières et de l'énergie a poussé les prix encore plus hauts. La remontée de l'inflation post-pandémique a été accélérée. Les coûts énergétiques et alimentaires s'étaient généralisés et étaient répercutés sur les ménages, et le marché du travail est devenu tendu.

En réponse à cette inflation persistante élevée et rigide, les banques centrales ont augmenté les taux directeurs à un rythme inégal. Aux Etats-Unis, la FED a relevé 11 fois consécutivement ses taux directeurs depuis mars 2022¹⁶. En zone euro, la BCE a augmenté ses taux directeurs 9 fois depuis le 17/07/2022 (voir le graphique 1.5)¹⁷. Le taux d'appel d'offres à taux fixe a augmenté de 425 bp en 1 an, alors qu'il restait à 0% depuis 18/09/2019. Ces augmentations ont des répercussions directes sur les taux obligataires comme on peut le constater dans le graphique 1.6). Par exemple, l'OAT 10 ans a augmenté de 292 bp sur l'année 2022 en France.

1.3.3.1 Les impacts de la remontée des taux sur les assureurs

Traditionnellement, une hausse modérée et une progression à un rythme raisonnable des taux d'intérêt ont un effet positif et représentent des opportunités pour les assureurs. La recherche de rendement étant plus facile, les revenus de placement des assureurs augmentent avec les nouveaux achats d'obligations à rendement plus élevé, et ils seront mieux placés pour offrir des produits attractifs. Les réinvestissements des encours arrivant à l'échéance permettent également des rendements plus rémunérateurs.

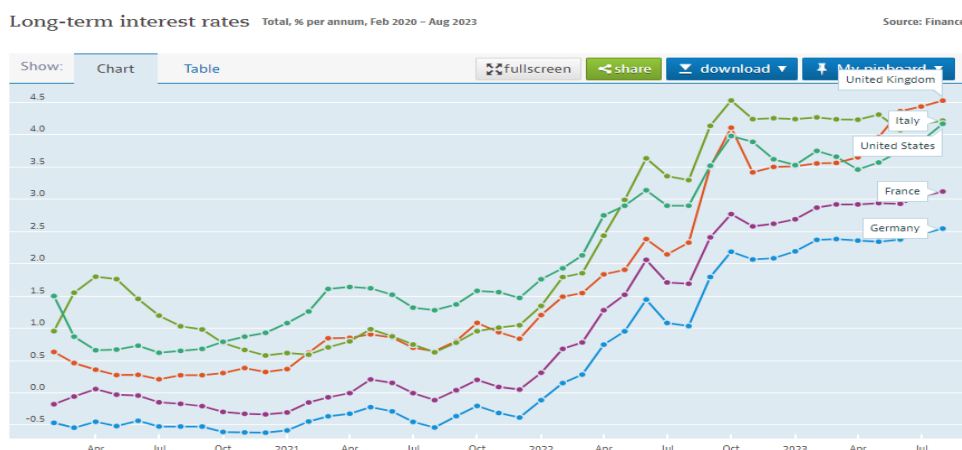
Par contre, l'effet de la hausse des taux sur les assureurs à court terme est mitigé. En fait, la remontée des taux peut diminuer la valeur des obligations et entraîner des pertes importantes

¹⁶Source: <https://www.federalreserve.gov/monetarypolicy/openmarket.htm>

¹⁷La dernière décision de la FED et la BCE sont respectivement le 27/07/2023 et le 15/06/2023 lors de la finalisation du mémoire.

¹⁸Source: <https://www.banque-france.fr/statistiques/taux-et-cours/les-taux-monetaires-directeurs>

¹⁹Source: OECD (2023), Long-term interest rates (indicator). doi: 10.1787/662d712c-en (Accessed on août 2023)

Figure 1.6: Évolution des taux 10 ans des différents pays¹⁹

non réalisées par les effets de valorisations négatifs. A titre d'exemple, l'encours de placements financiers des assureurs à la fin de l'année 2022 a enregistré une importante baisse des prix des actifs (- 328 Mds sur 2022), dont les valorisations négatifs des titres de créance à long terme (- 235 Mds) et des fonds obligataires (- 15 Mds)²⁰. Les valorisations négatives sont principalement portées par les titres à maturités moyennes et longues. Si on examine la composition ou plus exactement la maturité résiduelle et les coupons des titres (graphique 1.7), en effet, à la fin 2021, 42% d'obligations des assureurs dont la maturité résiduelle dépasse 4 ans ont un taux de coupon inférieur à 2%, ce qui explique ces baisses significatives sur l'année 2022. En principe, l'impact matérialisé de ces moins-values financières sur les assureurs qui suivent la stratégie de "buy-and-hold" est limité. Par ailleurs, du fait que beaucoup de compagnies d'assurance, en particulier les assureurs vie, ont des passifs de longues durées et un gap de durée négatif, la hausse de taux pourra même conduire à une amélioration de la solvabilité. Néanmoins, en cas de hausse des rachats ou dans le besoin de liquider certains actifs suite à des scénarii de stress sévères, la hausse de taux peut avoir des conséquences dramatiques, qui se traduisent par la hausse du risque de rachat et de liquidité. Ce qui est encore plus vrai avec une flambée des taux d'intérêt et en présence des titres illiquides dans les actifs.

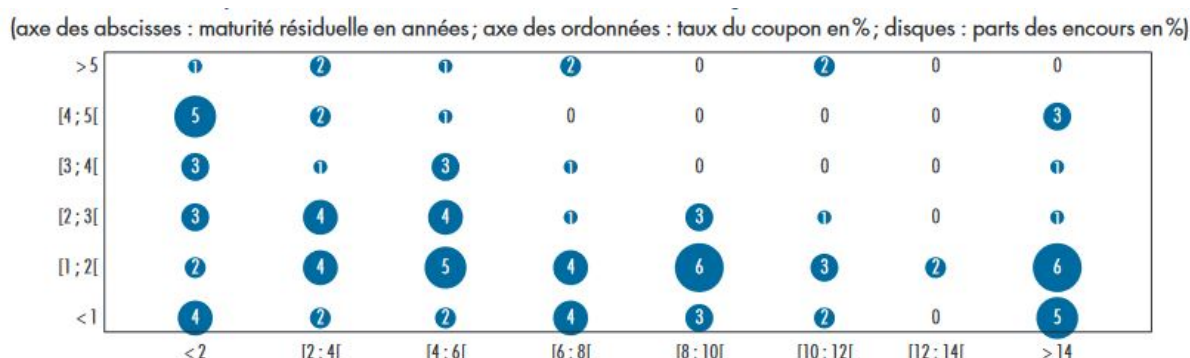
- **Risque de rachat**

La hausse de taux peut modifier le comportement des consommateurs et augmenter le risque de rachat, notamment si la hausse de taux est brusque, combinée en plus avec une hausse excessive de l'inflation et des perspectives économiques atones. En effet, suite à la baisse de revenu et l'augmentation du coût de la vie, les assurés pourraient réduire leurs cotisations ou procéder aux rachats des contrats assurance-vie ou même réduire l'étendue de la couverture d'assurance pour couvrir les dépenses quotidiennes. Une autre source potentielle de la baisse de revenu identifiée par EIOPA (2023) [44] est lié aux supports UC. Bien que le risque des taux soit transféré en partie aux clients avec les supports UC, la

²⁰Source: <https://www.banque-france.fr/statistiques/placements-des-assurances-2022t4>

²¹Graphique repris depuis Banque de France (2022) [33]

Figure 1.7: Parts des taux de coupons fixes en fonction de la maturité résiduelle des titres obligataires notés en détention directe à fin 2021 ²¹



Note de lecture : Les encours d'obligations, dont le taux est compris entre 4 et 5% et dont la maturité résiduelle est inférieure à deux ans, représentent 5% du total des encours d'obligations.

Sources : Autorité de contrôle prudentiel et de résolution (ACPR); Banque de France.

baisse de revenu financier peut réduire la pouvoir d'achat et par conséquent augmenter le risque de rachat.

La hausse de rachat peut également être déclenchée par l'intensification de la concurrence suite à la hausse des taux. Prenons l'exemple des contrats euros. Les maturités des actifs relativement longues et les décalages entre les rendements des portefeuilles existants et l'environnement des taux limitent leur capacité à répercuter aussi rapidement la hausse de taux et d'offrir des nouvelles garanties que d'autres produits d'épargne concurrentiels. Par exemple, le taux de rémunération du livret A, inférieur à 1% depuis 2011, a augmenté de 0,5% en moyenne sur l'année 2021 à 1,4% en 2022. Le livret A a bénéficié une collecte nette exceptionnelle de 31 Mds€ auprès des ménages en 2022. La collecte nette des supports en UC ont également enregistré des collectes nettes exceptionnelles en 2021 et 2022 (+30,6 Mds€ en 2021 et + 38,2 Mds€ en 2022). A contrario, du fait de la faible rentabilité, les contrats euros, dont on constate des fortes décollectes depuis 2020 (-30,9 Mds€ en 2020 et -12,3 Mds€ en 2021), ont été pénalisés d'avantage par ces offres plus concurrentielles et la décollecte s'est accélérée en fin d'année 2022 et atteint - 29,8 Mds€ .

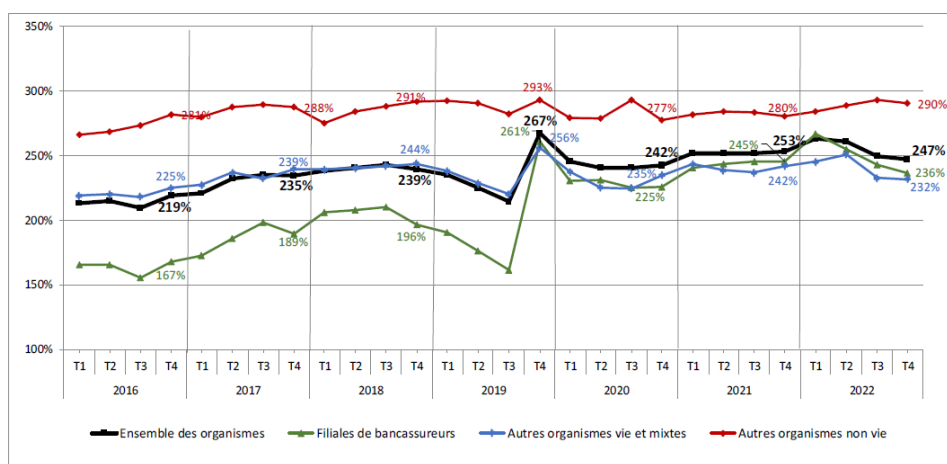
Un obstacle qui peut réduire les rachats est la pénalité contractuelle que les assurés doivent payer en cas de rachat ou de résiliation. Or, selon ESRB (2015) [46], plus de 50% des provisions techniques de 19 grands assureurs-vie de l'UE ne contiennent pas de clauses de pénalité, et plus de 90% ont des pénalités inférieures à 15% des engagements contractuelles²². En France, les rachats ont augmenté de 5% en 2022 au total²³. Le risque de rachat, conjuguée avec la concurrence plus sévère, impact non seulement la rentabilité, mais également la solvabilité des assureurs. Par exemple, le ratio de solvabilité des assureurs français s'est légèrement détérioré en 2022 et s'établit à 247% (contre 253% en 2021) (ACPR (2003) [1], voir graphique 1.8). Cette détérioration s'explique d'un côté par la diminution des

²²Sans les chiffres de la France, nous donnons ceux de l'UE à titre indicatif.

²³Notons qu'une autre cause de ces rachats est des mesures de la loi PACTE pour inciter au transfert vers les Plans d'Épargne Retraite (PER) jusqu'à fin 2022.

fonds propres éligibles à la couverture du SCR suite aux reprises sur la provision pour participation aux résultats, ainsi que par la hausse du SCR, en particulier du module pour risque de rachats qui augmente significativement en 2022. Un exemple extrême est celui de l'assureur-vie italien Eurovita. Fin 2021, le ratio solvabilité d'Eurovita était de 134%, nettement inférieur à la moyenne des assureurs-vie italiens (environ 230%). Suite à la hausse rapide des taux d'intérêt et l'augmentation de l'exigence de SCR liée au risque de rachat massif dans le cadre de Solvabilité II, l'Eurovita s'est trouvé avec l'insuffisance de capital et a été mis sous administration provisoire. Un capital de 100 million d'euros a été injecté par Cinven, le PE actionnaire d'Eurovita²⁴. Cet exemple montre que le risque de rachat lié à la hausse soudain de taux peut peser lourd sur les assureurs-vie qui ont déjà une situation fragile.

Figure 1.8: L'évolution des ratios de solvabilité des assureurs français²⁵



Notes :

- Les montants de fin d'année sont calculés sur les données annuelles de la population trimestrielle
- Taux de couverture calculé en tenant compte de la correction pour volatilité et de la mesure transitoire sur les provisions techniques.

Source : ACPR

• **Risque de liquidité**

Selon la note de l'Institut des Actuaire (2022)[36], les sources de risque de liquidité peuvent provenir du passif comme de l'actif. En termes de la liquidité du passif, les assureurs sont faiblement exposés au risque de liquidité en conditions normales d'exploitation. Toutefois, en cas de modification de comportement des assurés tel que la hausse de rachat, ou dans des situations adverses comme des évènements exceptionnels provoquant des hausses significatives des prestations à payer, le risque de liquidité peut devenir critique. Les autorités sont devenues particulièrement vigilantes au risque de liquidité durant la crise de la pandémie de Covid-19, qui ont démontré qu'une gestion adéquate des liquidités des assureurs peut prévenir les risques pour la stabilité du système financier. Dans les

²⁴Source: <https://www.fitchratings.com/research/banks/eurovita-woes-show-rising-rates-can-hurt-weaker-life-insurers-02-03-2023>.

²⁵Graphique repris depuis ACPR(2023) [1]

attendus de la Directive proposée par la Commission²⁶, la Commission exige les entreprises d'assurance et de réassurance de renforcer la gestion et la planification des liquidités, notamment dans des situations défavorables affectant une grande partie du marché de l'assurance et de la réassurance. Ainsi, plusieurs réflexions ont été menées et le suivi et l'harmonisation de la mesure de risque de liquidité sont pris en compte dans le cadre de la révision de la directive Solvabilité II.

Concernant la liquidité de l'actif, elle peut être impactée par la réduction de la liquidité disponible sur le marché ou la hausse du risque de défaut. Les assureurs investissent traditionnellement dans des classes d'actifs liquides et de bonne qualité de crédit. Cependant, comme nous avons discuté dans la section 1.3.1.1, les compagnies d'assurance ont dû se tourner vers des investissements plus risqués dans la recherche de rendement supplémentaire durant la période des taux d'intérêt continûment faible. Ce point est donc particulièrement pertinent pour ces actifs avec des rendements plus attractifs mais moins liquides.

Une autre source de la hausse du risque de liquidité est liée aux produits dérivés de taux d'intérêt. A titre d'exemple, pour se prémunir contre les variations notamment la baisse de taux, les grandes compagnies d'assurance détiennent des swaps de taux avec des exigences de règlement des marges. Lorsque les taux d'intérêt augmentent, les compagnies d'assurance subissent des pertes des valeurs de marché des swaps et doivent régler les appels de marges. Si les taux augmentent de manière inattendue et rapidement, les compagnies d'assurance, même ceux qui suivent la stratégie de “*buy-and-hold*”, sous pression de besoin de liquidité, pourraient devoir se délester les actifs les plus liquides, tels que les obligations souveraines, ou recourir à des ventes forcées pour répondre aux appels accrus de marge. Les moins-values latentes suite à la dévaluation des actifs seront réalisées. Cela pourrait encore amplifier la hausse de taux, entraînant des répercussion plus larges pour la stabilité financière (BIS (2023 [47])).

Les turbulences sur le marché britannique des gilts et les pertes potentielles subies par les fonds de pension au Royaume-Uni en septembre 2022 ont vivement illustré ce risque et constitue un avertissement sévère. Suite à une augmentation brusque des rendements des obligations souveraines à long terme, les fonds de pension britannique qui avaient investi dans les fonds LDI (Liability-Driven Investments) ont dû recourir à des ventes forcées, qui ont encore fait baisser les prix des obligations, ce qui a créé une véritable spirale. Il a fallu une intervention de la Banque d'Angleterre pour restabiliser le marché des gilts.

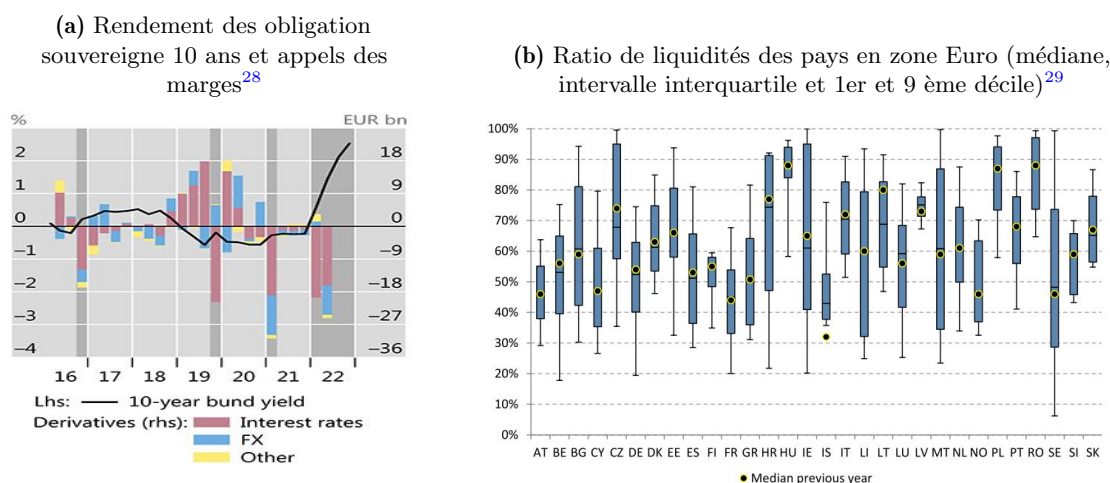
A ce jour, les organismes d'assurance-vie européens disposent d'une part importante d'actifs liquides et de bonne qualité pour faire face à de potentiels besoins accrus et soudains de liquidité: la part médiane des actifs liquides (HQLA, *High Quality Liquid Actif*) dans le portefeuille des assureurs-vie est de 46% à fin 2022 (EIOPA 2023 [44]) en moyenne (voir graphique 1.9)²⁷. Selon l'analyse de l'EIOPA (2023) [44], les assureurs européens utilisant

²⁶European Commission, Proposal for Directive of the European Parliament and of the Council, 2021/0295(COD), <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/HTML/?uri=CELEX:52021PC0581>.

²⁷Notons que le niveau de ratio de liquidité des assureurs français est plus faible que la moyenne des assureurs

des dérivés détenaient suffisamment d'actifs liquides pour couvrir les appels de marge potentiels pour des déplacements de la courbe des taux dans l'intervalle de $+/- 100\text{bp}$. Toutefois, le 1er décile du ratio de liquidité des assureurs reculait de 4% pour atteindre 13% à la fin 2022, ce qui reflète des dégradations potentielles de la liquidité pour les assureurs qui ont les proportions d'actifs liquides les plus faibles. Les assureurs doivent rester donc vigilants concernant le risque de liquidité, en particulier si les déplacements de courbe de taux et la volatilité des taux sont importants.

Figure 1.9: Risque de Liquidité



1.3.4 Hausse de la volatilité des taux

Enfin, nous tenons à souligner la hausse potentielle de la volatilité des taux d'intérêt dans le contexte actuel. A la différence des marchés d'actions, où la chute des marchés boursiers est presque toujours accompagnée d'une volatilité accrue, la volatilité des marchés de capitaux est moins directionnelle. Baran and Voříšek (2020) [9] montrent par exemple que la hausse des rendements obligataires italiens s'accompagne d'une plus grande incertitude des rendements attendus à l'avenir; et qu'en revanche, les rendements des contrats à terme sur le Bund ont été quasiment décorrélés de la volatilité implicite de ces derniers. La volatilité implicite augmente à la fois lors d'un *rally* (baisse des taux) et d'un *sell-off* (hausse de taux) du Bund, du fait du phénomène de *flight to quality*.

Toutefois, les auteurs observent que les variations de volatilité reflètent souvent l'évaluation de l'incertitude d'un événement particulier du marché: la volatilité atteint le pic lorsque la date de l'événement s'approche et diminue une fois l'événement passé (voir le graphique 1.10).

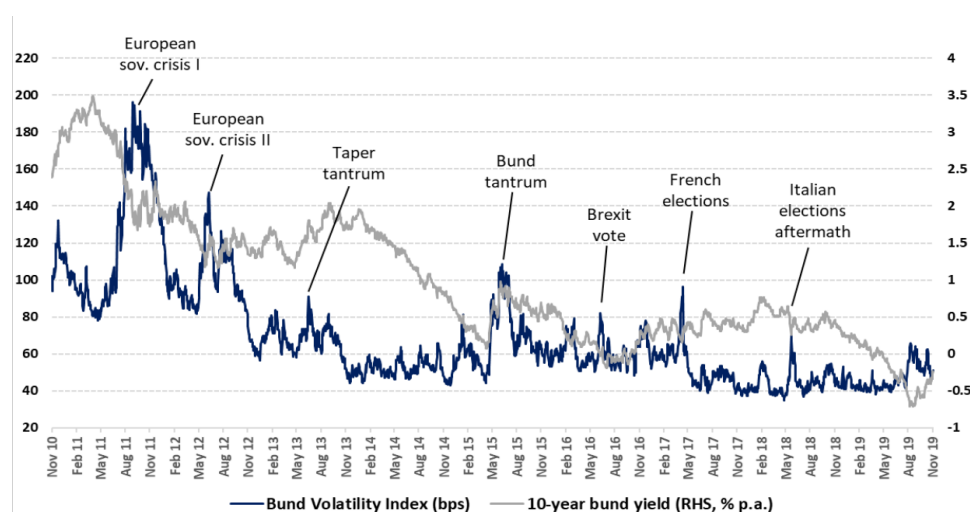
Autrement dit, la volatilité des taux est événementielle, en particulier, elle dépend fortement européens, quel que soit la valeur 1er décile, médian ou 9ème décile.

²⁸Graphique repris depuis EIOPA(2023 [44])

²⁹Variations trimestrielles des valeurs des marché des produits dérivés. La zone grisée indique les périodes avec des variations des rendements trimestriels supérieurs à 25bps. Graphique repris depuis BIS(2023 [47])

des changements des politiques monétaire. Swiss Re Institut (Saner (2023) [110]) ont réalisé une analyse en utilisant l'indice MOVE³⁰, qui mesure les volatilités implicites du marché de la courbe des taux du Trésor américains. Ils ont comparé les données du “pré-QE1” entre janvier 1995 et le 25 novembre 2008, date à laquelle la Fed a lancé ses programmes d'achat d'obligations, et les données du “post-QE1” avec toutes les observations depuis. Cette analyse montre que les volatilités sur le marché de la dette souveraine américaine avant et depuis les programmes QE diffèrent considérablement. On observe plus de fluctuations extrêmes pre-QE et une baisse significative après l'intervention de la Fed. Selon cette étude, l'intervention de la Fed en maintenant des faibles taux aurait considérablement réduit la volatilité sur le marché de la dette souveraine américaine et on s'attendrait à une plus grande volatilité des marchés obligataires en cas de retour à un contexte “normal”.

Figure 1.10: Indice de volatilité du Bund (bp)³¹



Comparée à la période post crise financière, avec la différence fondamentale de l'inflation persistante et rigide, le double objectif des banques centrales de stabilité de l'inflation et de stabilité financière s'oppose: la hausse des taux d'intérêt pour réduire l'inflation pourrait déstabiliser les marchés financiers et rendre l'économie encore plus vulnérable à des chocs même mineurs. De plus, de multiples chocs de différentes natures (demande et offre, transitoires et permanent) coexistent et il est plus difficile d'identifier la nature des chocs suffisamment à temps. Ainsi, les banques centrales sont dans une situation plus délicate aujourd'hui et par conséquent, l'incertitude concernant les mesures monétaires à venir ainsi que les impacts sur l'économie sont plus élevés.

Aujourd'hui, nous sommes dans une phase de flambée de l'inflation, des relèvements des taux importants et d'incertitude sur leur évolution future. Le risque de taux et le risque d'inflation sont identifiés comme les premiers risques par l'EBA, l'EIOPA et l'ESMA (2023) [40]. On s'attendrait donc à des volatilités des taux d'intérêt particulièrement élevées (on observe déjà une hausse de volatilité depuis 2022 dans le graphique 1.11). Notons que l'activité du marché sur les options

³⁰Merrill Lynch Option Volatility Expectations

³¹Graphique repris depuis Baran and Voříšek (2020) [9], source de la graphique citée par l'auteur: bloomberg.

out-of-the-money est plus importante que sur les options *in-the-money*, car les options *out-of-the-money* ont un delta plus faible et sont moins chères à couvrir et offrent un effet de levier plus élevé (Baran and Voříšek (2020) [9]). L'incorporation de la volatilité dans la modélisation de taux permettra donc de refléter l'anticipation du marché concernant l'incertitude des taux d'intérêt et portera des informations importantes pour la prise de décision des assureurs.

Figure 1.11: Evolution de l'indice MOVE depuis 2013 ³²



Dans ce chapitre, nous avons vu l'importance des taux d'intérêt pour les assureurs du fait de la spécificité de leurs activités et de leurs compositions de portefeuille. Nous avons vu également le rôle central de la modélisation du taux dans les calculs réglementaires. Par ailleurs, l'impact de l'évolution des taux de ces dernières années sur les différents aspects des assureurs nous a montré sa complexité. Cette complexité réside dans le fait qu'ils couvrent des aspects divers que nous avons discutés, y compris les comportements des assurés. Elle réside également dans les interactions avec les autres facteurs conjoncturels, qui sont encore plus prononcées dans une phase de taux volatil et d'incertitude accrue. Ce qui est même vrai pour les assureurs vie qui peuvent être soumis au risque de rachat et au risque de liquidité. Un modèle de taux qui est robuste en termes de “*market consistency*” pour des différents contextes, et qui tient en compte des variations de différents segments de la courbe de taux et des volatilités serait donc souhaitable.

³²Source: <https://finance.yahoo.com>

Chapter 2

Développement théorique des modèles de taux

2.1 Développements historiques des modèles de taux avant le modèle HJM

Avant de présenter les modèles du cadre HJM, nous passerons d'abord brièvement en revue les développements historiques des modèles de taux. Les revues des modèles de taux existants dans les littératures étant nombreux, telles que données par Rebonato (2004) [106], Jarrow(2009) [75] ou encore des ouvrages de Brigo et Mercurio (2006) [21], James & Webber (2000) [72], Gibson (2010) [51]. Ici, nous ne chercherons pas à être systématique ni exhaustive. Loin de là, nous nous contenterons de décrire en quelques simples lignes, avec les modèles les plus populaires comme exemple, afin d'explicitier les intérêts du modèle que nous retiendrons par la suite. Pour un rappel des concepts de base relatives aux taux, des notions de base des martingales et des outils de changement des mesures et les produits dérivés des taux d'intérêts de base qui sont utilisés dans ce chapitre, les lecteurs peuvent se référer à l'annexe B.

Les (avant-) premières approches des modélisations du marché des taux cherchaient à modéliser la dynamique du prix des obligations, qui étaient fortement inspirés par le modèle Black-Scholes. Or, ce dernier repose sur les hypothèses du taux constant et de la volatilité constante. Si l'hypothèse du taux déterministe, malgré son inconsistance évidente, était défendue par les traders en avançant qu'elle n'a qu'un effet de second ordre dans l'actualisation comparé à l'effet des variations des prix des obligations de premier ordre, l'invalidité de la deuxième hypothèse (volatilité constante) est incontournable. Ce problème, connu sous le nom de "pull-to-par", est lié au fait que la volatilité d'une obligation tend vers 0 lorsque la maturité résiduelle se réduit. Le modèle de Black (1976) [12], proposé trois ans après le travaux de Black-Scholes, a apporté une solution à ce problème. Bien que la formule de Black ait l'air similaire à celle du modèle de Black-Scholes, il y a une

différence fondamentale: le modèle de Black (1976) repose sur le taux forward au lieu du taux court. Autrement dit, il se base sur un “ratio” d’une obligation spot sur une obligation de zéro-coupon. De ce fait, la volatilité modélisée est en fait celle de ce “ratio”. Rebonato (2004) [106] a illustré l’effet de ce “ratio” avec un exemple d’un caplet avec une expiration de 9,75 ans sur une obligation d’une maturité de 10 ans. L’obligation zéro-coupon en dénominateur contribue à une volatilité presque aussi importante que la volatilité de l’obligation spot. Plus l’expiration de l’option est proche de l’échéance de l’obligation, plus importante la corrélation entre les deux obligations, ce qui réduit la volatilité du ratio. Ce qui fournit une solution parfaite pour le dilemme du “pull-to-par”. Malheureusement, les praticiens l’utilisent, conscients ou inconscients de cette subtilité, jusqu’à l’introduction du modèle LMM que nous allons voir un peu plus bas apportant une justification théorique. Cette méconnaissance (à tort), s’ajoute à l’ignorance des corrélations entre différents taux forwards du modèle de Black (cette fois-ci justifiée), ont mené les chercheurs à se diriger vers d’autres pistes de recherche comme ce qui est décrit par la suite.

2.1.1 Les modèles endogènes à un seul facteur

La première génération des modèles “propres” au taux est basée sur la dynamique des taux courts instantanés. Le premier modèle est celui de Merton (1973) [83], qui décrit le taux court instantané à partir d’un mouvement Brownien simple. Il suppose le drift et la volatilité constante, ce qui implique une hypothèse de normalité des taux et une courbe des taux aux déformations limitées. D’ailleurs, le modèle Merton ne tient pas compte de la dynamique propre des taux d’intérêts. Empiriquement, il est constaté que des valeurs élevées des taux ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses. Afin de prendre en compte cet effet de retour à la moyenne constaté, Vasicek propose son célèbre modèle en 1977 en supposant que le taux court suit le processus d’Ornstein-Uhlenbeck. Par ailleurs, les solutions explicites du calcul du prix d’un zéro-coupon et des produits dérivés du modèle évitent le recours aux simulations de Monte-Carlo. Ces atouts expliquent la forte popularité du modèle de Vasicek.

Avec le modèle Vasicek, comme tous les modèles qui supposent la normalité du taux, le taux peut être négatif avec une probabilité non nulle. Bien que le taux négatif soit constaté ces dernières années, il était difficilement concevable en pratique à l’époque et fut donc un principal inconvénient critiqué. Cox, Ingersoll et Ross (1985) [28] proposent comme alternative (le modèle

CIR) à ce problème d'incorporer un terme "racine carré" dans le coefficient de diffusion, qui force les taux à rester positifs. CIR ont montré que le taux instantané suit une loi χ^2 non centrée. En partant de cette distribution de probabilité et en utilisant une transformée de Laplace bivariée, CIR parviennent à trouver une solution explicite au calcul du prix d'un zéro-coupon, qui est relativement proche de celle du modèle de Vasicek.

D'autres modèles de la première génération existent. Par exemple, le modèle Dothan (1978) modélise le taux court avec un processus de mouvement brownien géométrique et le taux reste toujours positif. Ce modèle peut capturer l'effet de retour à la moyenne uniquement lorsque le coefficient de drift est négatif mais avec un niveau moyen nul. Un autre modèle Exponential Vasicek (EV) suppose que le logarithme de taux court suit un processus Ornstein-Uhlenbeck. Le taux court peut donc être considéré comme exponentiel d'un processus du type Vasicek (d'où le nom du modèle). Contrairement au modèle Dothan (1978), le modèle EV confort toujours l'effet de retour à la moyenne. Un des défauts communs des modèles log-normaux à taux court, sont qu'ils n'admettent pas de formule explicite ni pour les obligations ni pour les options dans la majorité des cas. La seule exception est le modèle Dothan (1978): il permet d'une formule analytique mais complexe pour le prix des obligations zéro-coupon (pas pour l'option) qui implique des intégrales doubles avec des fonctions hyperboliques, ce qui implique par conséquent des calculs numériques coûteux en temps. Un autre problème lié aux modèles lognormaux est l'explosion de l'espérance de compte bancaire: si le taux court est supposé lognormal, le compte bancaire est le double exponentiel d'une distribution normale et son espérance peut atteindre l'infini *p.s.* dans un petit intervalle de temps¹.

Tous les modèles que nous venons de discuter sont des modèles à coefficient constant dans le temps (time-homogenous), ou des modèles dites endogènes, dans la mesure où la courbe de taux actuelle est un output du modèle. En effet, le prix d'une obligation, tel que décrit par l'équation (B.4.5) dans l'annexe B, est calculé à partir d'une formule explicite qui dépend des paramètres du modèle. La calibration du modèle est basée sur le critère de la minimisation de distance entre la courbe de taux du marché et la courbe reconstruite par le modèle. Cependant, comparé au nombre d'observations disponibles (les prix des obligations de différentes maturités), le nombre de paramètres reste limité, ce qui n'est pas suffisant de reproduire la courbe de taux de marché

¹Le problème de l'explosion de l'espérance de compte bancaire est moins sévère en pratique, car le nombre des états est fini, l'espérance du compte bancaire est ainsi finie.

de manière satisfaisante. D'ailleurs, certaines formes de la courbe des taux zéro-coupon (courbe inversée par exemple) ne peuvent jamais être obtenus avec un modèle endogène tel que le modèle Vasicek, sans parler de l'impossibilité de représenter la structure des volatilités.

2.1.2 Les modèles exogènes à un seul facteur

Afin de pallier ces lacunes, les modèles exogènes (ou les modèles aux coefficients variables) sont introduits. Le premier modèle proposé dans cette approche est le modèle de Ho et Lee (1986) [64] en utilisant la courbe de taux comme un input. Par contre, ce modèle est basé sur les arbres binomiaux et n'est pas capable, même dans la version continue, de tenir compte de l'effet de retour en moyen. Dans les années 90, Hull & White (1990[65], 1994a[68]) ont généralisé le modèle de Vasicek en introduisant un terme déterministe dans le drift. Cette modification ingénieuse cherche en effet à représenter chaque prix des obligations d'une maturité spécifique par un paramètre. En ajoutant le degré de liberté exacte, cela revient alors à résoudre à un système de T (ou infini, dont chacun correspond à une maturité possible) équations avec T (ou infini) paramètres. Nous allons voir plus en détail ce modèle dans la section 2.3.

Des généralisations similaires sont également appliquées au modèle CIR et au modèle EV, respectivement proposés par Hull et White (1990b, 1993, 1994a, 1994b) et Black et Karasinski (1991) [13]. La généralisation du modèle CIR avec des coefficients variables a moins de succès que le modèle de Hull et White à cause d'absence de formule analytique pour des obligations et des options. Concernant le modèle Black et Karasinski (1991) qui peut être considéré comme une généralisation du modèle EV, il donne un ajustement relativement bon par rapport aux prix de marché, en particulier par rapport à la surface de volatilité des swaptions (chapitre 3, Brigo et Mercurio[21]). Cependant, comme le modèle de CIR généralisé, il n'est pas tractable analytiquement et il nécessite donc des procédures de calibration plus lourdes. D'ailleurs, comme tous les modèles lognormal que nous avons mentionné, il existe le problème de l'explosion de l'espérance du compte bancaire.

Alternativement, Brigo et Mercurio (1998, 2001a) proposent une méthode générale d'extension des modèles endogènes en introduisant un terme de déplacement (*shift*) pour obtenir un ajustement exact de la courbe des taux initiale. Cette extension appliquée au modèle Vasicek est en fait équivalent au modèle Hull et White, et a donc les mêmes caractéristiques que ce dernier. Tandis

que le modèle CIR++ (l'extension du CIR) parvient à ajustement exact de la courbe des taux initiale tout en préservant la tractabilité analytique du modèle d'origine.

Tous les modèles précédents à un seul facteur, qu'ils soient endogènes ou exogènes, partent du postulat que la structure à terme des taux d'intérêts ne dépend que d'un seul facteur: le taux court instantané. En pratique, il s'avère que ces modèles sont incapables de modéliser toutes formes de courbes des volatilités. Dès que l'on s'éloigne du cadre standard des courbes des volatilités monotones, ces modèles peuvent s'avérer désastreux et ils se calent mal avec les prix de marché. En outre, ces modèles ne tiennent pas compte non plus des corrélations différentes entre les taux zéro-coupons de différentes maturités, qui sont essentiels pour valoriser des produits dont le payoff dépend fortement de la dynamique conjointe des taux. En utilisant un seul facteur comme sous-jacent, ils présupposent que toutes les corrélations soient égales à 1 alors qu'on observe en général une matrice de corrélation dont les éléments décroissent exponentiellement en s'éloignant de la diagonale.

2.1.3 Les modèles taux court à plusieurs facteurs

En fait, comme nous allons la voir plus bas, la corrélation terminale dépend non seulement de la corrélation instantanée, mais également de la spécification des volatilités du modèle. Or, à cette époque, on distinguait peu corrélation instantanée et corrélation terminale, sans parler des corrélations des volatilités des forward ignorées (Rebonato 2004[106]). Face à ces limites, de nombreux chercheurs ont proposé le recours à des modèles structurels à plusieurs facteurs. Ces approches sont également motivées par des résultats empiriques montrés dans de nombreuses études basées sur l'Analyse en Composantes Principales (ACP): les déformations de la courbe des taux pouvaient être essentiellement expliquées par 2 ou 3 composantes principales. D'ailleurs, les 3 composantes sont souvent interprétées comme la composante de niveau, la composante de pente (ou de rotation puisque elle a un effet contraire sur les maturités courtes et sur les maturités longues) et la composante de courbure (Jamshidian et Zhu (1997) [74]).

Les modèles taux court à plusieurs facteurs les plus représentatifs sont sans doute le modèle Hull & White à 2 facteurs, le modèle G2++, le modèle Longstaff Schwartz (LS) et le modèle CIR2++. Le modèle G2++ modélise la dynamique de taux court instantané comme la somme des deux facteurs gaussiens corrélés et une fonction déterministe. Il admet des formules explicites pour

des obligations et des options et la procédure numérique est rapide. Le coefficient de corrélation entre les 2 chocs ajoute une flexibilité supplémentaire qui rend la forme de la volatilité des taux forwards instantanés avec une bosse possible (si le coefficient est négatif) et qui permet une calibration plus précise notamment pour les produits basés sur les corrélations comme les swaptions. Le modèle Hull & White à 2 facteurs est étroitement lié au modèle G2++ et il est possible de démontrer l'équivalence entre ces 2 modèles (chapitre 4, Brigo et Mercurio[21]). Bien que le modèle Hull & White à 2 facteurs soit plus intuitif et plus facile à interpréter, les formules du modèle G2++ sont plus simples à implémenter.

Concernant le modèle LS, il modélise le taux court instantané comme une combinaison linéaire des 2 processus CIR, ce qui est en effet équivalent à un modèle CIR standard à 2 facteurs (CIR2). L'avantage du modèle LS est qu'il permet d'obtenir des processus ayant des queues plus épaisses. En revanche, pour maintenir une tractabilité analytique, contrairement aux processus gaussiens tel que le modèle G2++, le modèle LS ou CIR2 suppose que les 2 facteurs soient indépendants. Par conséquent, il est incapable de reproduire des formes de la courbe des volatilités instantanées avec des bosses. D'ailleurs, comme les formules des options impliquent des intégrales des deux χ^2 non centré, les calculs sont plus coûteux en temps.

De manière analogue, la méthode d'extension en ajoutant un terme de déplacement déterministe peut être également appliquée au modèle CIR2, ce qui donne le modèle CIR2++ (chapitre 4, Brigo et Mercurio[21]). Cette extension permet de reproduire exactement la courbe des taux initiale tout en préservant la tractabilité analytique. Par contre, comme le modèle LS, il suppose que les 2 facteurs soient indépendants et il est incapable de reproduire des formes de la courbe des volatilités instantanées avec des bosses. Par ailleurs, il n'y a pas de formule explicite pour les swaptions. On doit avoir recours aux méthodes numériques et la méthode de décomposition de Jamshidian (1989) n'est pas applicable ici.

Si les formes de courbes des volatilités que les modèles à deux facteurs ont pu représenter sont plus riches que les modèles à un seul facteur, il reste toujours difficile à apprécier les structures des covariances des taux forwards. En fait, les modèles à taux court instantané cherchent en priorité un ajustement des prix des instruments, ce qui laisse peu de liberté pour représenter une décorrélation terminale réaliste (Rebonato 2004[106]). De plus, selon Rebonato et Cooper (1995) [103], l'incapacité de produire des décorrélations rapides avec des maturités éloignées

comme le montrent les évidences empiriques, est une limitation intrinsèque des modèles à taux court de dimension faible en générale. A l'aide des décompositions d'ACP et des séries de Fourier, les auteurs démontrent explicitement que l'approximation de la structure de la covariance par 2 composants principales est en quelque sorte tronquée. Afin d'obtenir un prix correct dans la valorisation, les variances des facteurs incluses sont implicitement redimensionnées et les corrélations entre les taux adjacents sont forcées à être artificiellement plus élevées. Cette situation ne peut non plus être améliorée en ajoutant un 3ème facteur: il est possible d'obtenir la forme de corrélation désirée en attribuant un poids fallacieux à la 3ème composante au détriment de l'interprétation économétrique des facteurs.

Nous concluons cette section en citant Rebonato et Cooper (1995) [103]:

As usual, blind, brute force fitting to market quantities does not generate realistic time series properties of the variables.

2.2 Le cadre HJM

En 1992, Heath, Jarrow et Morton [61] ont proposé leur modèle (ou cadre de modèle) de référence HJM, fondé sur l'absence d'opportunité d'arbitrage, qui modélise directement les taux forwards instantanés comme sous-jacents. Spécifiquement, HJM proposent de modéliser la courbe des taux forwards instantanés $f(t, T)$, pour chaque maturité T , à partir de l'EDS suivante:

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{T})d\mathbf{W}(t) \quad (2.1)$$

avec $f(0, T) = f^M(0, T)$, qui correspond à la courbe des taux forwards instantanés initiale, $\alpha(t, T)$ et $\boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{T}) = (\sigma_1(t, T), \sigma_2(t, T), \dots, \sigma_N(t, T))$ sont respectivement un processus adapté et un vecteur des processus adaptés de dimension $1 \times N$, $\mathbf{W} = (W_1, W_2, \dots, W_N)'$ est un vecteur des mouvements browniens de dimension $N \times 1$.

Rappelons que le taux forward instantané peut être déduit à partir d'une obligation zéro-coupon comme décrit dans l'équation (B.1.15) dans l'annexe B:

$$-\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T) = f(t, T)$$

On constatera qu'en modélisant directement le taux forward, la courbe des taux actuelle est par construction un input du modèle.

2.2.1 L'évolution des taux forwards instantanés sous la mesure risque-neutre

Le taux forward instantané n'étant pas un titre négocié sur le marché, sa dynamique décrite dans l'équation (2.1) n'est pas nécessairement une martingale sous la mesure risque-neutre. En revanche, comme l'obligation zéro-coupon de la même maturité est de son tour un titre négocié sur le marché, on peut décrire son évolution de la manière suivante:

$$dP(t, T) = rP(t, T)dt + \boldsymbol{\sigma}_P(\mathbf{t}, \mathbf{T})P(t, T)d\mathbf{W}(t) \quad (2.2)$$

En appliquant le lemme d'Itô à $d \ln P(t, T)$ puis en prenant sa dérivé par rapport à la maturité T , nous pouvons déduire l'évolution suivante pour $f(t, T)$ ²:

$$df(t, T) = \boldsymbol{\sigma}_P(\mathbf{t}, \mathbf{T}) \frac{\partial}{\partial T} \boldsymbol{\sigma}_P(\mathbf{t}, \mathbf{T}) dt - \frac{\partial}{\partial T} \boldsymbol{\sigma}_P(\mathbf{t}, \mathbf{T}) d\mathbf{W}(t) \quad (2.3)$$

Si on compare le terme drift et le terme diffusion de l'équation (2.1) et l'équation (2.3), après quelques calculs, nous pouvons déduire la relation suivante (avec la condition terminale $\sigma_p(T, T) = 0$):

$$\alpha(t, T) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{t}, \mathbf{T}) \int_t^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{t}, \mathbf{u})' du = \sum_{i=1}^N \sigma_i(t, T) \int_t^T \sigma_i(t, u) du \quad (2.4)$$

L'évolution des taux à terme instantanés sous la mesure risque neutre est alors donnée par:

$$df(t, T) = \left(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{t}, \mathbf{T}) \int_t^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{t}, \mathbf{u})' du \right) dt + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{t}, \mathbf{T}) d\mathbf{W}(t) \quad (2.5)$$

Nous pouvons constater que le drift est une transformation à partir des coefficients de diffusion et que la dynamique du taux forward instantané f est entièrement déterminée par la structure des volatilités instantanées. Ce constat est du fait que f n'est pas une quantité fondamentale comme le taux court, mais lui-même est une quantité dérivée. En fait, f peut être exprimé comme une espérance en termes du taux court tel que (en utilisant l'équation (B.4.5) et (B.1.15) dans

²Sans entrer dans les détails techniques, on suppose que toutes les conditions de théorème de convergence dominée soient remplies ici, $d\left(\frac{d}{dT} \ln P(t, T)\right)$ et $\frac{d(d \ln P(t, T))}{dT}$ sont donc interchangeables.

l'annexe B):

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln E_t \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \right]$$

ce qui impose en quelque sorte une contrainte au modèle (contrairement aux modèles courts endogènes où il n'y a pas de contraintes dans le choix de paramètre de drift). D'ailleurs, nous avons immédiatement l'expression de $f(t, T)$:

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, T) \int_u^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, s)' ds du + \int_0^t \boldsymbol{\sigma}(s, T) d\mathbf{W}(s) \quad (2.6)$$

Ainsi, le taux court instantané $r(t)$, qui peut être considéré comme $f(t, t)$, est:

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, t) \int_u^t \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, s)' ds du + \int_0^t \boldsymbol{\sigma}(s, t) d\mathbf{W}(s) \quad (2.7)$$

En générale, cette EDS n'est pas markovien et il n'y pas de solutions explicites dans la plupart des cas, ce qui implique des implémentations difficiles. Une des simplifications possibles est de supposer que le coefficient de diffusion soit une fonction déterministe de T et $f(t, T)$ sera donc gaussienne. Une autre solution est de supposer que la terme $\sigma(t, T)$ soit une fonction séparable (Carverhill 1994 [26]) et que ce processus est markovien:

$$\sigma_i(t, T) = \zeta_i(t) \eta_i(T) \quad (2.8)$$

L'EDS ((2.7)) devient:

$$r(t) = f(0, t) + \sum_{i=1}^N \eta_i(t) \int_0^t \zeta_i^2(u) \int_u^t \eta_i(s) ds du + \sum_{i=1}^N \eta_i(t) \int_0^t \zeta_i(s) dW_i(s) \quad (2.9)$$

2.2.2 L'évolution des taux forwards instantanés sous la mesure forward

Il est naturel de penser que l'évolution des taux forwards instantanés sous la mesure forward doit être une martingale. Cette intuition s'est avérée. Pour changer de mesure et passer du monde risque neutre au monde forward-neutre, nous faisons appel à la dérivée Radon-Nikodym définie dans le théorème B.4.1. Rappelons qu'également le numéraire associé à la mesure risque neutre

est le compte monétaire, et le numéraire associé à la mesure forward-neutre est l'obligation zéro-coupon. Nous avons la dérivé Radon-Nikodym suivante:

$$\frac{dQ^T}{dQ} = \frac{P(t, T) B(0)}{P(0, T) B(t)} \quad (2.10)$$

En utilisant la formule du compte bancaire donnée dans l'équation (B.1.1) et en appliquant le lemme d'Itô sur l'évolution de l'obligation zéro-coupon décrite dans l'équation (2.3), nous pouvons déduire la dérivée Radon-Nikodym:

$$\frac{dQ^T}{dQ} = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_p^2(u, T) du + \int_0^t \sigma_p(u, T) dW_u \right) \quad (2.11)$$

De plus on a d'après le théorème de Girsanov³:

$$dW^T(t) = dW(t) - \sigma_p(t, T)dt = dW(t) + \int_t^T \sigma(t, u) du dt$$

L'évolution des taux à terme instantanés sous la mesure forward neutre est alors donnée par:

$$df(t, T) = \sigma(t, T)dW^T(t) \quad (2.12)$$

2.2.3 L'évolution des taux forwards instantanés sous la mesure forward terminale

Soit $f(t, T_1)$, $f(t, T_2)$, \dots , $f(t, T_N)$ les taux forwards instantanés avec des maturités différents. Nous venons de voir que la dynamique des taux à terme instantanés sous la mesure forward neutre est une martingale, nous tenons à préciser qu'il est vrai uniquement sous sa propre forward mesure T_i . Autrement dit,

$$df(t, T_i) = \sigma(t, T)dW^{Q^{T_i}}(t) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N$$

Cependant, il ne l'est pas sous des mesures associées aux autres maturités. Ce qui n'est pas

³Pour une présentation rigoureuse du théorème de Girsanov, nous invitons les lecteurs à se référer à Øksendal (2010) [92], pp162-171.

forcément désirable lorsque on doit traiter simultanément de multiple taux forwards. Une tentative serait d'utiliser le taux forward instantané avec l'échéance la plus éloignée comme numéraire pour tous les taux forward, car ce numéraire va rester "en vie" pendant toute la durée et que les autres obligations zéro-coupon deviennent naturellement "obsolètes" une fois leur échéance terminée. Comme dans la section précédente, nous pouvons déduire la dérivée Radon-Nikodym:

$$\frac{dQ^{T_N}}{dQ} = \frac{P(t, T_N) B(0)}{P(0, T_N) B(t)} \quad (2.13)$$

En substituant $dW^{Q^{T_N}}(t) = dW^Q(t) + \int_t^{T_N} \sigma(t, u) du$ dans l'équation (2.5), nous avons:

$$df(t, T) = - \left(\sigma(t, T) \int_T^{T_N} \sigma(t, u) du \right) dt + \sigma(t, T) dW^{Q^{T_N}}(t) \quad (2.14)$$

2.3 Le modèle Hull & White

L'importance du modèle HJM réside dans le fait qu'il fournit un cadre très général de la modélisation de taux, dans lequel même tous les modèles exogènes que nous avons cités ci-dessous peuvent être dérivés. Illustrons avec l'exemple du modèle Hull et White (1994) [68] dont la dynamique du taux court s'écrit sous la forme suivante:

$$dr(t) = \kappa (\theta(t) - r(t)) dt + \sigma dW^Q(t) \quad (2.15)$$

où $\theta(t)$ et κ sont des constants positifs et peuvent être considérés respectivement comme le taux moyen à long terme et la vitesse de retour à la moyenne. Ce modèle est une généralisation du modèle de Vasicek en modélisant la taux moyenne à long terme constante θ comme une fonction déterministe⁴.

⁴Différentes versions de généralisation ont été proposés par Hull et White (1990[65], 1994a[68], 1994b[69]). Hull & White (1990[65], 1993[66]) ont également modélisé le coefficient de diffusion comme une fonction déterministe. Par contre, les autres ont mis en garde que la forte non-stationnarité peut être générée et que la structure des volatilités futures peut être très différente d'aujourd'hui. Cette structure s'avère dangereuse dans certaines situations notamment si les produits financiers sont moins liquides et les prix cotés n'est pas fiables. Nous présentons donc uniquement la version avec θ déterministe.

La solution de ce processus peut être obtenue en utilisant le lemme d'Ito et vaut:

$$r(T) = r(t)e^{-\kappa(T-t)} + \kappa \int_t^T e^{-\kappa(T-s)}\theta(s)ds + \sigma \int_t^T e^{-\kappa(T-s)}dW^Q(s) \quad (2.16)$$

On peut déduire également que $r(T)$ est normalement distribué avec la moyenne et la variance conditionnel en \mathcal{F}_t :

$$E(r(T)|\mathcal{F}_t) = r(t)e^{-\kappa(T-t)} + \kappa \int_t^T \theta(s)e^{-\kappa(T-s)}ds$$

$$V(r(T)|\mathcal{F}_t) = \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\kappa(T-t)})}{2\kappa}$$

Le modèle Hull et White (1994a) étant un modèle par terme de taux affine⁵, le prix de l'obligation zéro-coupon peut s'écrire sous la forme suivante:

$$P(t, T) = A(t, T) \exp[-B(t, T)r(T)] \quad (2.17)$$

En utilisant le prix d'une obligation de maturité T à la date t donné par l'équation (B.4.5) et (2.16), nous pouvons déduire l'expression de $A(t, T)$ et $B(t, T)$:

Où

$$A(t, T) = \exp \left[-\kappa \int_t^T \theta(s)B(s, T)ds + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \left(T - t - B(t, T) - \frac{\kappa B^2(t, T)}{2} \right) \right]$$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}$$

Pour déduire l'expression explicite de $\theta(t)$, il existe différentes méthodes, par exemple en appliquant le MGF ou encore par le théorème de Feynman-Kac. Nous exploitons ici les relations qui viennent d'être développées dans le cadre HJW, qui permet d'établir la structure explicite de covariance des taux forwards. Concrètement, en utilisant la relation entre le taux forward instantané et

⁵Un processus de diffusion est affine lorsque les coefficients du drift et des variances (ou matrice des variance-covariance en cas de multi-dimensionnel) sont des fonctions affines de la variable d'état. Lorsque la dynamique du taux court est affine, la structure par terme de taux est affine (le taux spot continue est une fonction affine du taux instantané). Par contre, la réciproque est vrai uniquement lorsque les coefficients sont homogènes dans le temps.

l'obligation zéro-coupon tel que défini dans l'équation (B.1.15), nous pouvons écrire:

$$df(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} d \ln P(t, T) \quad (2.18)$$

Ensuite, en appliquant le lemme d'Ito sur (2.17):

$$d \ln P(t, T) = \frac{1}{A(t, T)} \frac{\partial A(t, T)}{\partial t} dt - r_t \frac{\partial B(t, T)}{\partial t} dt - B(t, T) dr_t \quad (2.19)$$

Pour simplifier, on peut noter $A = A(t, T)$, $A_t = \frac{\partial A(t, T)}{\partial t}$, $B = B(t, T)$, $B_t = \frac{\partial B(t, T)}{\partial t}$, on a:

$$\begin{aligned} df(t, T) &= -\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{A_t}{A} \right) dt + \frac{\partial B_t}{\partial T} r dt + \frac{\partial B}{\partial T} dr_t \\ &= \left[-\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{A_t}{A} \right) + \frac{\partial B_t}{\partial T} r + \frac{\partial B}{\partial T} (\kappa (\theta(t) - r(t))) \right] dt + \frac{\partial B}{\partial T} \sigma dW^Q(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Nous avons vu que la dynamique de f est entièrement déterminée par le coefficient de volatilité.

En comparant l'équation (2.20) et (2.5) et en utilisant l'expression de $B(t, T)$, nous avons:

$$\sigma(t, T) = \frac{\partial B}{\partial T} \sigma = e^{-\kappa(T-t)} \sigma \quad (2.21)$$

Ainsi, nous pouvons déduire le drift dans l'équation (2.20):

$$\begin{aligned} \left(\sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, u) du \right) dt &= \sigma^2 e^{-\kappa(T-t)} \left(\int_t^T e^{-\kappa(u-t)} du \right) dt \\ &= \sigma^2 e^{-\kappa(T-t)} \left(\frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \right) dt \\ &= \frac{\sigma^2}{\kappa} \left(e^{-\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(T-t)} \right) dt \end{aligned} \quad (2.22)$$

La dynamique de $f(t, T)$ est donc:

$$df(t, T) = \frac{\sigma^2}{\kappa} \left(e^{-\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(T-t)} \right) dt + e^{-\kappa(T-t)} \sigma dW^Q(t) \quad (2.23)$$

En prenant l'intégral des 2 côtés de l'équation (2.23):

$$f(t, T) = f(0, T) + \frac{\sigma^2}{\kappa} \left(\frac{e^{-\kappa(T-t)} - e^{-\kappa T}}{\kappa} - \frac{e^{-2\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa T}}{2\kappa} \right) dt + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(T-s)} dW^Q(s) \quad (2.24)$$

Pour déduire la dynamique du taux court instantané à partir du taux forward instantané, nous faisons appel à la relation entre le taux court et le taux forward instantané. D'un côté, nous avons:

$$r(t) := f(t, t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{\kappa} \left(\frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa} - \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa} \right) dt + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW^Q(s) \quad (2.25)$$

D'autre côté, nous avons:

$$\begin{aligned} dr(t) &= df(t, T) |_{T=t} + \frac{\partial f(t, T)}{\partial T} |_{T=t} dt \\ &= \sigma dW^Q(t) + \left[\frac{\partial f(0, T)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{\kappa} (e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}) dt - \kappa \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW^Q(s) \right] dt \end{aligned} \quad (2.26)$$

On peut obtenir l'expression de $\sigma \int_0^t e^{-\kappa(T-s)} dW^Q(s)$ en termes de $r(t)$ et $f(0, t)$ à l'aide de l'équation (2.25). Si on remplace le terme $\sigma \int_0^t e^{-\kappa(T-s)} dW^Q(s)$ par son expression et après quelques calculs, on a:

$$dr(t) = \kappa \left[\frac{1}{\kappa} \frac{\partial f(0, T)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-2\kappa t}) - r(t) + f(0, t) \right] dt + \sigma dW^Q(t) \quad (2.27)$$

Si on compare cette équation avec l'équation (2.15), nous pouvons constater son équivalence avec le modèle Hull & White (1994a) en notant:

$$\theta(t) = f(0, t) + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial f(0, T)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-2\kappa t}) \quad (2.28)$$

2.4 Libor Market Model - lognormal forward-LIBOR Model

En dehors de son élégance conceptuelle, le modèle HJM est également compatible avec la norme du marché. Rappelons que nous avons mentionné au début de ce chapitre, que les praticiens

continuent à utiliser le modèle de Black (1976) [12] pour modéliser directement la dynamique des taux LIBOR de manière “heuristique”⁶. Par contre, il présente malheureusement le problème de “l’explosion” de l’espérance du compte bancaire comme pour tous les modèles log-normaux en temps continu. En plus, la calibration du modèle HJM est plus complexe que les autres modèles du taux court à l’époque du fait que le taux forward instantané est une quantité théorique qui n’est pas observable sur le marché.

Le lognormal forward-LIBOR Model (LFM), connu des praticiens d’abord sous le nom de BGM (Brace, Gatarek et Musiela) en hommage à ses 3 concepteurs, est inspiré et développé à partir de la dynamique du taux forward instantané, dans la logique du cadre HJM. Le modèle LFM a connu un grand succès et est devenu la référence du marché. Tout comme le cadre HJM, il est compatible avec la formule de Black qui existait déjà sur le marché tout en apportant des rigueurs théoriques. Il raisonne également avec une mesure de probabilité unifiée, ce qui permet de palier la lacune du modèle de Black, qui propose des processus de diffusion découlant d’une mesure de probabilité propre à chaque forward. De plus, comparé au cadre de HJM, le modèle LFM présente l’avantage de modéliser directement les taux LIBOR, qui sont des taux discrets et des titres négociés les plus liquides du marché. En autre terme, ils permettent de simuler la diffusion du taux forward directement à partir de valeurs cotées par le marché. C’est pourquoi qu’il est également connu sous le nom de “*Libor Market Model*” (LMM).

A la même époque, Musiela et Rutkowski (1997) [109], Jamshidian (1997) [73] et Miltersen et al. (1997) [85] ont également chacun proposé des modèles basés sur le taux forward Libor en faisant l’hypothèse de la lognormalité du taux forward. Nous allons appuyer notre discussion sur les travaux de Musiela et Rutkowski (1997) [109] et Jamshidian (1997) [73] à l’aide de la technique de changement de mesure.

2.4.1 Le compte bancaire, l’obligation zéro-coupon dans un cadre discret et la dynamique du taux LIBOR

Considérons une série de dates $\{T_0, T_1, \dots, T_M\}$ avec des intervalles correspondants $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M\}$, dont τ_i est le *tenor* de la sous-période (T_{i-1}, T_i) . Soit τ_0 la durée entre la date t et T_0 . Pour

⁶Notons qu’aucun modèle de taux court instantané connu peut aboutir à la formule de Black pour un caplet ou un cap. D’ailleurs, la calibration des modèles de taux court en générale implique des fonctions non linéaires qui résultent des paramètres difficiles à interpréter. (Brigo et Mercurio (2006) [21])

alléger les notations, notons désormais $F_i(t)$ le taux forward $F(t; T_{i-1}, T_i)$ à la date t couvrant la période $[T_{i-1}, T_i]$. Ce taux évolue au fil de temps jusqu'au moment T_{i-1} où il coïncide avec le taux spot $L(T_{i-1}, T_i)$: $F_i(T_{i-1}) = L(T_{i-1}, T_i)$, et il est considéré d'être "terminé" (il n'y plus de sens pour un taux forward lorsque la date d'effet devient antérieure à la date de démarrage du contrat forward).

Rappelons que le compte bancaire que nous avons utilisé comme numéraire dans un monde risque-neutre jusqu'à maintenant évolue en termes de taux court de manière continue, ce qui n'est pas adapté dans un cadre discret. Considérons une stratégie autofinancante selon laquelle un compte bancaire avec des tenors discrets (ou simplifié en "compte bancaire discret"), noté $B_d(t)$, est investi de manière successive selon la maturité et la structure des tenors décrits ci-dessus aux taux LIBOR prévalant sur le marché $L(T_{i-1}, T_i)$, ou encore $F_i(T_{i-1})$. La valeur de ce compte bancaire discret à la date T_M est:

$$B_d(T_M) = \prod_{j=1}^M (1 + \tau_j L(T_{j-1}, T_j)) = \prod_{j=1}^M (1 + \tau_j F_j(T_{j-1}))$$

Tandis que la valeur d'une obligation zéro-coupon d'une maturité T_M à la date T_0 et au début d'une période T_i quelconque est respectivement:

$$P(T_0, T_M) = \prod_{j=1}^M \frac{1}{1 + \tau_j F_j(T_0)}$$

$$P(T_i, T_M) = \prod_{j=i+1}^M \frac{1}{1 + \tau_j F_j(T_i)}$$

Nous pouvons constater que le nombre des termes dans ces équations diminue lorsque le temps se rapproche de la maturité.

Ces expressions peuvent se généraliser à n'importe quelle date de manière continue. Soit $m(t)$ comme la date d'échéance à venir la plus proche de t tel que $m(t) = \min \{i : t \leq T_i\}$ ⁷. En tenant compte de la valeur de ce gap du temps, qui peut être représentée par $P(t, m(t))$, la valeur du

⁷Par exemple, si t se situe entre T_{i-1} et T_i , alors $m(t) = T_i$.

compte bancaire avec des tenors discrets et de l'obligation zéro-coupon à la date t devient:

$$B_d(t) = P(t, m(t)) \prod_{j=1}^{m(t)} (1 + \tau_j F_j(T_{j-1})) \quad (2.29)$$

Autrement dit, la valeur d'un compte bancaire avec des tenors discrets à n'importe quelle date t , qui se situe entre T_{i-1} et T_i , peut être considérée comme la valeur du compte bancaire à date T_i ajustée par le prix de l'obligation zéro-coupon couvrant la période entre t et T_i . De manière similaire, nous avons la valeur de l'obligation zéro-coupon à la date t telle que:

$$P(t, T_M) = P(t, m(t)) \prod_{j=m(t)}^M \frac{1}{1 + \tau_j F_j(t)} \quad (2.30)$$

De même, la valeur d'une obligation zéro-coupon d'une maturité $M + 1$ à la date t est

$$P(t, T_{M+1}) = P(t, m(t)) \prod_{j=m(t)}^{M+1} \frac{1}{1 + \tau_j F_j(t)} \quad (2.31)$$

En devisant les deux côtés des équations (2.30) et (2.31):

$$\frac{P(t, T_M)}{P(t, T_{M+1})} = 1 + \tau_{M+1} F_{M+1}(t) \quad (2.32)$$

En réarrangeant l'équation (2.32), nous avons immédiatement:

$$F_{M+1}(t) P(t, T_{M+1}) = \frac{P(t, T_M) - P(t, T_{M+1})}{\tau_{M+1}} \quad (2.33)$$

Dans cette équation, $F_M(t)P(t, T_{M+1})$ est écrit sous la forme d'une combinaison linéaire des obligations zéro-coupon et peut être donc considéré comme un titre négociable. En appliquant le théorème B.4.1, il doit être une martingale sous la mesure $Q^{T_{M+1}}$ associé avec le numéraire $P(t, T_{M+1})$, l'obligation dont la maturité est identique à celle du taux forward:

$$F_{M+1}(t) = E^{T_{M+1}} [F_{M+1}(S) | \mathcal{F}_t]$$

De manière plus générale, la dynamique du taux forward $F_i(t)$, quel que soit la maturité i , peut

être décrite de la manière suivante en supposant la log-normalité⁸:

$$\frac{dF_i(t)}{F_i(t)} = \sigma_i(t)dW_i^i(t) \quad (2.34)$$

Dans le cadre de la modélisation simultanée des multiple Libor, les mouvements browniens des différents taux forwards sont supposés d'être instantanément corrélés selon⁹:

$$dW_i(t)dW_j(t) = \rho(i, j)dt$$

Nous soulignons que le paramètre σ_i est la volatilité instantanée de taux forward, qui est directement interprétable pour les praticiens. Souvent, la volatilité est supposée être constante par morceaux ou modélisée selon une fonction paramétrique, que nous allons voir en détail dans le chapitre 3. Comme nous avons mentionné dans la discussion de la décorrélation, la décorrélation dépend non seulement du coefficient de corrélation, mais également de la spécification des volatilités.

La dynamique du taux forward $F_i(t)$ peut aussi s'écrire sous la forme matricielle tel que:

$$\frac{dF_i(t)}{F_i(t)} = \boldsymbol{\sigma}_i(t)d\mathbf{W}^i(t) \quad (2.35)$$

$d\mathbf{W}^i(t)$ est un vecteur des mouvements browniens de M dimension dont $dW_i^i(t)$ est le i -ème élément, avec la matrice de covariance notée $\boldsymbol{\Sigma}$ dont le (i, j) ème élément est $\rho(i, j)$. $\boldsymbol{\sigma}_i(t)$ est un vecteur des coefficients de volatilité de dimension $1 \times M$ avec $\boldsymbol{\sigma}_i(t) = [0 \quad 0 \quad \dots \sigma_i \quad \dots \quad 0]$.

2.4.2 La dynamique de taux Libor sous la mesure forward

Pour déduire la dynamique d'un LIBOR sous une mesure associée à une maturité différente, nous allons procéder en suivant le même raisonnement que dans la section 2.2.3. Selon le théorème B.4.1, sous la mesure $Q^{T_{i-1}}$ associée avec le numéraire $P(t, T_{i-1})$, nous avons:

$$\frac{F_i(t)P(t, T_i)}{P(t, T_{i-1})} = E^{T_{i-1}} \left[\frac{F_i(S)P(S, T_i)}{P(S, T_{i-1})} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

⁸Notons que l'indice inférieur i fait référence au taux spécifique et l'indice supérieur i fait référence à la mesure. Dans l'ensemble de mémoire, l'indice de mesure peut être omis lorsque le contexte est claire.

⁹Par la suite, nous notons $\rho(i, j)$ ou $\rho_{i,j}$ interchangeablement.

Soit $Z_i^{i-1}(t)$ la dérivée Radon-Nikodym de $Q^{T_{i-1}}$ par rapport à Q^{T_i} . En utilisant l'équation (2.32), nous avons:

$$\begin{aligned} Z_i^{i-1}(t) &:= \frac{dQ^{T_{i-1}}}{dQ^{T_i}} = \frac{P(0, T_i) P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i) P(0, T_{i-1})} \\ &= \frac{1 + \tau_i F_i(t)}{1 + \tau_i F_i(0)} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Nous pouvons déduire facilement l'équation suivante en utilisant l'expression (2.34):

$$\frac{dZ_i^{i-1}(t)}{Z_i^{i-1}(t)} = \frac{\rho_{i,i-1} \tau_i \sigma_i F_i(t)}{1 + \tau_i F_i(t)} dW_i^i(t)$$

En appliquant le théorème de Girsanov, nous avons:

$$dW_i^{i-1}(t) = dW_i^i(t) - \rho_{i,i-1} \frac{\tau_i \sigma_i F_i(t)}{1 + \tau_i F_i(t)} dt \quad (2.37)$$

La dynamique du taux forward sous la mesure T_{i-1} est déduite immédiatement:

$$\frac{dF_i(t)}{F_i(t)} = \sigma_i \left(dW_i^{i-1}(t) + \rho_{i,i-1} \frac{\tau_i \sigma_i F_i(t)}{1 + \tau_i F_i(t)} dt \right) \quad (2.38)$$

Nous pouvons ainsi déduire la dynamique de $\frac{dF_i(t)}{F_i(t)}$ sous la mesure T_k ($k < i$) de la manière récursive:

$$\frac{dF_i(t)}{F_i(t)} = \sigma_i \sum_{j=k+1}^i \frac{\rho(i, j) \tau_j F_j(t) \sigma_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_i(t) dW_i^{T_k}(t) \quad (2.39)$$

Remarque qu'à partir de l'équation (2.37), nous pouvons également déduire la relation suivante:

$$dW_i^{i+1}(t) = dW_i^i(t) + \rho_{i,i+1} \frac{\tau_{i+1} \sigma_{i+1} F_{i+1}(t)}{1 + \tau_{i+1} F_{i+1}(t)} dt \quad (2.40)$$

De manière similaire, nous pouvons déduire la dynamique de $\frac{dF_i(t)}{F_i(t)}$ sous la mesure T_l ($l > i$). Nous ne répétons plus la récursion et nous donnons directement les dynamiques de $\frac{dF_i(t)}{F_i(t)}$ comme suit:

$$\frac{dF_i(t)}{F_i(t)} = \sigma_i(t) dW_i^{T_i}(t) \quad (\text{Mesure } Q^{T_i}) \quad (2.41)$$

$$\frac{dF_i(t)}{F_i(t)} = \sigma_i(t) \sum_{j=k+1}^i \frac{\rho(i,j)\tau_j F_j(t)\sigma_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_i(t) dW_i^{T_k}(t) \quad (\text{Mesure } Q^{T_k}, k < i) \quad (2.42)$$

$$\frac{dF_i(t)}{F_i(t)} = -\sigma_i(t) \sum_{j=i+1}^l \frac{\rho(i,j)\tau_j F_j(t)\sigma_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_i(t) dW_i^{T_l}(t) \quad (\text{Mesure } Q^{T_l}, l > i) \quad (2.43)$$

En résumé, si on utilise l'obligation de la même maturité comme numéraire, la dynamique du logarithme du taux forward est une martingale. La transition de probabilité est connue (lognormal) et on peut effectuer la simulation exacte. Si on utilise l'obligation ayant une maturité plus courte (longue) comme numéraire, la dynamique du logarithme du taux forward a un drift positif (négatif). Contrairement au premier cas, la transition de probabilité est inconnue et on doit donc avoir recours au schéma de discrétisation numérique.

2.4.3 La dynamique de taux Libor sous la mesure terminale et sous la mesure spot

2.4.3.1 La mesure terminale

Considérons maintenant un produit impliquant des payoffs multiples, tel qu'un cap qui peut être décomposé en caplets qui dépendent de dynamiques de LIBOR des maturités différentes, donc associés aux différentes mesures. Pour dériver leur dynamique sous une mesure unique de manière consistante, une des candidates de la mesure unique est la mesure "terminale" T_M -forward, qui est associée avec le dernier taux de libor du cap. Nous avons immédiatement la dynamique du taux libor sous cette mesure terminale à partir de l'équation (2.43):

$$\frac{dF_i(t)}{F_i(t)} = -\sigma_i(t) \sum_{j=i+1}^M \frac{\rho(i,j)\tau_j F_j(t)\sigma_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_i(t) dW_i^{T_M}(t) \quad (2.44)$$

Selon cette expression, le taux forward ayant une maturité T_M est une martingale et le drift est

nul. Tandis que le drift d'un taux forward ayant la maturité la plus proche, par exemple $i = 0$, implique le plus nombreux des termes ($F_1(0), F_2(0), \dots, F_M(0)$), ce qui implique donc plus de biais lors de la discrétisations. Ce qui peut être contre intuitif puisque nous attendons moins d'incertitude pour un taux forward d'une maturité plus proche.

2.4.3.2 La mesure spot

Une autre candidate de la mesure unique est la mesure spot, notée par Q^S , qui peut être considérée comme l'équivalent de la mesure risque-neutre dans un cadre discret. Si on applique le théorème B.4.1 en utilisant le compte bancaire discret que nous avons introduit dans la section 2.4.1 comme numéraire, nous avons:

$$\frac{F_i(0)P(0, T_i)}{B_d(0)} = E^{Q^S} \left[\frac{F_i(t)P(t, T_i)}{B_d(t)} \middle| F_0 \right]$$

Ou encore:

$$F_i(0) = E^{Q^S} \left[F_i(t) \frac{P(t, T_i)}{B_d(t)} \frac{B_d(0)}{P(0, T_i)} \middle| F_0 \right] \quad (2.45)$$

Avec la dérivée Radon-Nikodym de Q^S par rapport à Q^{T_i} utilisée:

$$\frac{dQ^S}{dQ^{T_i}} = \frac{P(0, T_i)}{P(t, T_i)} \frac{B_d(t)}{B_d(0)} \quad (2.46)$$

A l'aide de l'équation (2.29), $\frac{dQ^S}{dQ^{T_i}}$ devient:

$$\frac{dQ^S}{dQ^{T_i}} = \frac{P(0, T_i)}{P(t, T_i)} P(t, m(t)) \prod_{j=1}^{m(t)} (1 + \tau_j F_j(T_{j-1})) \quad (2.47)$$

Notons que nous pouvons également déduire la dynamique de $F_i(t)$ sous la mesure $Q^{m(t)}$. La dérivée Radon-Nikodym de $Q^{T_{i-1}}$ par rapport à Q^{T_m} est:

$$\frac{dQ^{m(t)}}{dQ^{T_i}} = \frac{P(0, T_i)}{P(t, T_i)} \frac{P(t, m(t))}{P(0, m(t))} \quad (2.48)$$

A l'aide de l'équation (2.30), $\frac{dQ^{m(t)}}{dQ^{T_i}}$ devient:

$$\frac{dQ^{m(t)}}{dQ^{T_i}} = \frac{P(0, T_i)}{P(t, T_i)} P(t, m(t)) \prod_{j=1}^{m(t)} (1 + \tau_j F_j(0)) \quad (2.49)$$

Comparons l'équation (2.49) et (2.47), les termes multiplications $\prod_{j=1}^{m(t)} (1 + \tau_j F_j(T_{i-1}))$ et $\prod_{j=1}^{m(t)} (1 + \tau_j F_j(0))$ à date t sont tous connus ou déterministes. Par conséquent, ils doivent avoir le même drift. Or, la dynamique de $dF_i(t)$ sous la mesure $Q^{m(t)}$ est en effet déjà donnée par l'équation (2.43) (avec $k = m(t)$). Ainsi, la dynamique de $dF_i(t)$ sous la mesure Q^S est:

$$\frac{dF_i(t)}{F_i(t)} = \sigma_i(t) \sum_{j=m(t)+1}^M \frac{\rho(i, j) \tau_j F_j(t) \sigma_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_i(t) dW_i^{Q^S}(t) \quad (2.50)$$

Cette équation montre que la mesure spot en effet peut être considéré comme une mesure forward associée avec l'obligation de zéro coupon. Par ailleurs, si on prend la limite lorsque $\tau_i = 0$, nous retrouvons le résultat du modèle HJM.

2.4.3.3 Valorisation des caplets/caps

La formule de la valorisation d'un cap de Black est donnée dans l'annexe (B.5.21). Maintenant, il est facile de constater son équivalence avec le prix d'un caplet impliqué par le modèle LFM. Considérons d'abord un caplet d'une maturité T_{i-1} et la date de paiement T_i , avec $\tau_i = T_{i-1} - T_i$, dont le payoff est (voir l'annexe B):

$$\tau_i (F_i(T_{i-1}) - K)^+$$

Notons que $F_i(T_{i-1}) = L(T_{i-1}, T_i)$. La valeur du caplet à la date t est donc:

$$\begin{aligned} V_t(\text{Caplet}) &= E^Q \left[\frac{B(t)}{B(T_i)} \tau_i (F_i(T_{i-1}) - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^{Q^i} \left[\frac{P(t, T_i)}{P(T_i, T_i)} \tau_i (F_i(T_{i-1}) - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \tau_i P(t, T_i) E^i [(F_i(T_{i-1}) - K)^+ | \mathcal{F}_t] \end{aligned} \quad (2.51)$$

Nous avons mentionné que la formule de Black était appliquée par le marché pendant longtemps

de manière heuristique. En fait, le facteur d'actualisation $\frac{B(t)}{B(T_i)}$ était supposé être déterministe, la dérivation de l'équation (2.51) était basé sur une approximation et la valorisation restait sous la mesure neutre. Tandis qu'ici, on a appliqué le changement de mesure et la dérivation est fondée sur une justification théorique rigoureuse. La formule de valorisation du caplet peut être déduit ensuite facilement, ce qui revient à la formule de Black. Nous rappelons donc directement la formule et les lecteurs peuvent se référer à Brigo et Mercurio (2006[21], chapitre 6) pour une dérivation complète.

$$V_t^{LFM}(Caplet) = P(t, T_i) [F_i(t)\Phi(d_1(K, F_i(t), \nu_i)) - K\Phi(d_2(K, F_i(t), \nu_i))] \quad (2.52)$$

$$d_1(K, F, \nu) = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{\nu^2}{2}}{\nu}$$

$$d_2(K, F, \nu) = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) - \frac{\nu^2}{2}}{\nu}$$

où ν_i^2 est la variance instantanée intégrée du taux forward de l'instant t jusqu'à la date de révision T_{i-1} :

$$\nu_i^2 = \int_t^{T_{i-1}} \sigma_i^2(t) dt \quad (2.53)$$

Tandis que la variance de T_{i-1} -caplet cotée sur la marché est standardisée par rapport du temps (donc la variance instantanée moyenne):

$$\nu_{T_{i-1}-caplet}^2 = \frac{1}{T_{i-1} - t} \nu_i^2 \quad (2.54)$$

Le prix d'un cap peut être considéré comme l'espérance (risque-neutre) de la somme des payoffs de caplets actualisés:

$$\begin{aligned} V_t(Cap) &= E^Q \left[\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i \frac{B(t)}{B(T_i)} (F_i(T_{i-1}) - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) E^i \left[(F_i(T_{i-1}) - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad (2.55)$$

Notons que le payoff de chaque caplet est sous sa mesure forward associé Q^i et ils sont traités indépendamment. Seules les distributions marginales de chaque taux forward suffisent pour

calculer le prix d'un caplet et la dynamique jointe n'a pas d'impact. Ainsi, nous retrouverons la formule de Black du cap donnée dans l'équation (B.5.21).

Afin de valoriser les swaptions, le modèle de marché Swap (SMM) est introduit par Jamshidian (1997) [73]. Ce modèle, ainsi que l'incompatibilité du modèle LMM et SMM, est brièvement discuté dans l'annexe C.1 et C.2. Il est également possible de valoriser les swaptions avec le modèle LFM par simulation Monte Carlo ou par l'approximation, qui sont couramment utilisées par les praticiens. Elles sont discutées dans l'annexe C.1 et C.2. Enfin, le swap market model peut également s'avérer être exploitable pour valoriser les caps/floors (voir C.2) et des formules d'approximations permettant de retrouver le prix des caps/floors à partir des taux forwards swaps ont été proposés. Les raisonnements étant analogues, quelques lignes d'explications sont données dans l'annexe C.4.

2.5 L'extension du modèle LMM: le smile et le skew

Le modèle LMM était le modèle de référence du marché jusqu'à peu. Néanmoins, il demeure certaines limites à ce modèle, en particulier, l'impossibilité de représenter le smile et le skew des volatilités. Cette faiblesse considérée mineure au début, s'est aggravée avec les bouleversements suite à la crise monétaire du sud-est asiatique, au défaut de la Russie et à l'effondrement de la LTCM à la fin du 20ème siècle (peu de temps après l'acceptation presque universelle du modèle LMM), notamment pour les produits ayant des "gamma-vega" importants. Cela a incité les chercheurs et les professionnels à améliorer le modèle en incorporant le smile et le skew. Différentes approches, encore une fois inspirées par des techniques et des pratiques du marché d'actions et de change, ont été proposées. Ces pratiques les plus utilisées sont les modèles à volatilité locale (LVM), les modèles de diffusion avec sauts et les modèles à volatilités stochastiques. Pour justifier de notre choix de modèle dans ce mémoire, nous discuterons très brièvement quelques exemples représentatifs. Pour une revue complète des extensions du modèles LMM, nous invitons les lecteurs à se référer par exemple à Meister (2004) [81] pour une version brève et à Brigo et Mercurio (2006) [21] pour plus de détails.

Dans la première approche, les modèles à volatilité locale (*Local Volatility Model*, LVM), la volatilité reste une fonction déterministe mais dépend à la fois du temps et du taux à terme.

Nous y retrouvons le fameux exemple du modèle de Dupire (1994) [39]. La forme de la fonction du coefficient de diffusion étant inconnue, le modèle de Dupire cherche à estimer une équation qui donne des volatilités implicites pour des dates et des prix de strike donnés comme une fonction des dérivées de prix des produits dérivés et permet donc un calibrage parfait. Toutefois, les prix des caplets ne sont pas disponibles pour toutes les expirations et les strikes sur le marché. Les résultats peuvent être sensibles aux méthodes d'interpolation, sans oublier que souvent les prix côtés des titres moins liquides sont biaisés pour déterminer une fonction exacte de volatilité locale. On a recours donc aux modèles paramétriques, tel que le CEV (*Constant Elasticity of Variance*, Cox et Roll (1976) [29]) ou le modèle DD (Displaced Diffusion, Rubinstein (1983) [108])¹⁰. Un des principaux exemples de l'application du modèle CEV est celui développé par Andersen et Andreasen (2000), Or, du fait du nombre des paramètres limité (1 seul paramètre supplémentaire dans les deux cas), ces modèles paramétriques ne permettent pas un calibrage parfait des données et ne peuvent que représenter de “*smirk*” des volatilités (croissante ou décroissante monotone).

Des modèles plus flexibles permettant de représenter le smile ont été proposés par Brigo et Mercurio (2000[19], 2002[20]) et Brigo, Mercurio et Sartorelli (2003[22]). Ils supposent que l'évolution des taux d'intérêt ne suit pas une seule distribution log-normale mais un mélange de distributions log-normales, ou encore combinent un mélange de distributions log-normales avec la technique DD pour capturer le smile. Par contre, une faiblesse commune des modèles LVM est la non stationnarité du smile, ce qui les rend moins désirables.

Jamshidian (1999) a mentionné la possibilité de l'extension du LMM depuis un modèle standard de diffusion à des processus semimartingale généraux. C'est exactement l'approche adoptée dans la deuxième approche: les modèles de diffusions avec sauts¹¹ qui permettent de modéliser de possibles discontinuités dans l'évolution du sous-jacents, souvent suite aux nouvelles macro-économiques ou des annonces des changements des mesures monétaires. Inspirés par le modèle de Merton (1976), qui introduit un processus de poisson en plus des mouvement browniens pour capturer les sauts observés dans l'évolution des actions, Glasserman et Kou (2003) ont dérivé des formulaires similaires pour les caplets. Ils modélisent l'intensité des sauts par un processus de poisson et la taille des sauts par des distributions log-normale. Les études empiriques montrent

¹⁰D'autres formes de paramétrisation de la volatilité locale existent. Nous invitons le lecteur à se référer à Zühlendorf (2002) [124] pour une revue complète.

¹¹Une autre approche étroitement liée est le modèle décrit par un processus de Lévy, telles que les modèles proposés par Eberlein et Ozkan (2005) et Liinev et Eberlein (2004).

que la calibration du modèle est de bonne qualité et que les paramètres obtenus pour des capelets de courte maturité ont des interprétations économiques adéquates. Par contre, les valeurs des paramètres pour des capelets de longue maturité sont irréalistes: comme la taille du saut est modélisé selon le même type de distribution que le taux forward (lognormal), les effets de certains sauts peuvent être neutralisés pour des maturités longues. En outre, la variation des paramètres des différentes maturités sont drastiques, ce qui aboutit à une courbe de taux forward non régulière.

Afin d'améliorer le modèle, Kou (2002) [77] considère une loi double exponentielle pour modéliser (le logarithme de) la taille du saut, qui est similaire à la loi student¹² et qui est leptokurtique. Ainsi, l'effet d'un saut sur le smile des volatilités est plus forte et la neutralisation des sauts à long terme est moins rapide que la loi normale. Les études empiriques montrent que bien que les volatilités s'avèrent plus élevées comparées au modèle de Glasserman et Kou (2003), les valeurs des paramètres restent irréalistes et ne sont pas aptes pour une simulation simultanée des taux forwards.

Une autre tentative pour améliorer le modèle de Glasserman et Kou (2003) est de choisir des paramètres non constants (Glasserman et Merener (2003) [82]). Comme le processus de Poisson change également lors du changement de mesure, l'intensité du processus de Poisson sera différente dans chaque mesure et le processus de saut n'est plus un processus de Poisson. Glasserman et Merener (2003) font donc appel à un processus plus général, le processus ponctuel marqué¹³. Leur modèle permet certes une courbe des taux forwards plus lisse, mais le nombre des paramètres trop important présente un problème de surparamétrisation et aboutit à des résultats insatisfaisants.

La troisième approche repose sur les modèles à volatilités stochastiques (*Stochastic Volatility Model SVM*), qui tiennent en compte du comportement stochastique de la volatilité implicite.

Le travail le plus connu dans cette approche est sans doute celui de Heston (1993) [63], qui

¹²La loi double exponentielle peut être considérée comme un substitut de loi student avec un degré de liberté 6. Les 5 premiers moments des 2 lois sont les mêmes et sont difficiles à distinguer avec les échantillons des données de marché. Bien que la loi student soit plus intuitive, elle est moins tractable (Kou (2002) [77]).

¹³D'une manière informelle et très simplifiée, un processus ponctuel marqué peut être considéré comme un couple des variables aléatoires dans un espace mesurable de configurations de points, qui sont définis par leur position dans un espace de positions et par leurs marques. On peut décrire par exemple la succession de dates de saut par un processus ponctuel temporel avec des marques qui représentent la magnitude des sauts. Pour une définition formelle, les lecteurs peuvent se référer à Daley et Vere-Jones (2006, Définition 6.4.1) [31]. Difficile à implémenter, les auteurs utilisent la technique d'amincissement (*thinning*) du processus ponctuel: Tout d'abord on simule un processus de poisson avec une intensité suffisamment élevée et choisit une intensité de taille des sauts appropriée. Ensuite, ce processus de poisson est partagé (aminci) par chaque processus ponctuel marqué.

fut le premier à donner une solution exacte à l'aide de la transformée de Fourier. Les premiers travaux qui incorporent le modèle de Heston dans le modèle LMM sont ceux de Andersen et Brotherton-Ratcliffe (2001) [5] et Andersen et Andreasen (2002) [4], qui ont déduit des solutions exactes pour valoriser les caplet et les swaptions. Comme le changement de mesure peut avoir des impacts sur le processus des taux forwards et celui des volatilités si le mouvement brownien du taux forward $dW^{Q_i}(t)$ et le mouvement brownien de la volatilité $dW_\nu(t)$ sont corrélés, ils imposent une corrélation nulle entre les deux mouvements browniens. Par conséquent, ces modèles permettent uniquement de capturer le smile pour la courbe des volatilités implicites.

Un autre modèle, développé par Joshi et Rebonato (2001), modélise la volatilité selon une forme paramétrique $(a(t) + b(t)(T_i - t))e^{c(t)(T_i - t)} + d(t)$, dont tous les paramètres suivent chacun un processus stochastique avec leur propre volatilité, la vitesse de retour à la moyenne, et le niveau à long-terme. Ce qui revient à 16 paramètres à calibrer. Afin d'assurer la stabilité du modèle, la pratique usuelle est donc de réduire le nombre de paramètres et uniquement $d(t)$ reste stochastique. Ce qui le transforme en quelque sorte en un modèle Andersen et Andreasen (2002). De même, il peut uniquement capturer le smile mais pas le skew.

Afin de capturer le skew, trois solutions sont possibles pour les modèles à volatilités stochastiques: autoriser des corrélations entre les taux forwards et les variances/volatilités, combiner avec un modèle "displaced diffusion", combiner avec un modèle CEV. C'est exactement ce que proposé le modèle de Wu et Zhang (2002) [122], le modèle Displaced Diffusion Stochastic Volatility Libor Market Model (DD-SVLMM) et le modèle SABR-LMM. Nous allons présentons le modèle SABR-LMM ici brièvement. Pour le modèle de Wu et Zhang (2002) [122] et le modèle DD-SVLMM, ils sont décrits rapidement dans l'annexe D.

2.5.1 Le modèle LMM avec des volatilité du style SABR

Le modèle LMM-SABR est proposé par Hagan et Lesniewski (2006) [55], qui combine le modèle LMM et le modèle SABR de Hagan et al.(2002) [57]. Le modèle SABR (Stochastic Alpha, Beta, Rho) est sans doute le modèle à volatilité stochastique le plus utilisé par les praticiens du fait de son implémentations simple et de l'existence d'une approximation de la formule fermée qui est pratique pour valoriser les options. Comparé aux autres modèles dont le nombre de paramètres rend toute industrialisation difficile, ce modèle n'implique que 4 paramètres (son nom en indique

3 en partie): α , β , ρ et ε . D'ailleurs, ces paramètres servent à modéliser le smile de volatilité, qui est une des préoccupations des traders. Ainsi, le modèle SABR est devenu le standard de marché pour valoriser les options vanilles.

La dynamique de volatilité du style SABR a été introduite dans le modèle LMM dans différents travaux, tel que Henry-Labordere (2006) [62], Massimo et Mercurio (2007) [86], Rebonato (2007) [102] et Rebonato et White (2009) [105]. Parmi ces travaux, Henry-Labordere (2006) fut le seul qui suppose un seul processus stochastique de volatilité pour tous les taux forwards. Cette hypothèse permet de transformer l'équation Kolmogorov backward associée en une équation de diffusion avec perturbation d'une espace symétrique de rang 1 et donc une élégante expansion asymptotique, mais l'hypothèse d'un processus de volatilité commune pour les taux forwards de différentes maturités est irréaliste. Tous les autres travaux supposent que chaque taux forward possède son propre processus de volatilité. Spécifiquement, le modèle LMM-SABR dans Hagan et Lesniewski (2006) [55] s'écrit simplement sous la mesure de probabilité Q^i :¹⁴

$$\begin{aligned} dF_i(t) &= \alpha_i(t)F_i(t)^{\beta_i}dW_{F_i}(t) \\ d\alpha_i(t) &= \varepsilon_i\alpha_i(t)dZ_{\alpha_i}(t) \end{aligned} \tag{2.56}$$

avec $\alpha(0) = \alpha$.

$$E [dW_{F_i}(t)dW_{F_j}(t)] = r_{ij}dt \tag{2.57}$$

$$E [dW_{F_i}(t)dZ_{\alpha_j}(t)] = \rho_{ij}dt \tag{2.58}$$

$$E [dZ_{\alpha_i}(t)dZ_{\alpha_j}(t)] = \eta_{ij}dt \tag{2.59}$$

Si on englobe toutes relations de corrélations, nous avons une matrice positive définie $\begin{bmatrix} r & \rho \\ \rho' & \eta \end{bmatrix}$, avec ρ , r et η représentant respectivement la sous-matrice de corrélation forward-forward, la sous-matrice de corrélation forward-volatilité et la sous-matrice de corrélation volatilité-volatilité.

Dans le modèle SABR, chaque paramètre a une signification claire. Les coefficients α et ε sont des constantes positives. α est la volatilité instantanée du forward. Il impacte directement le

¹⁴Les notations ici sont reprises de celles de Hagan et Lesniewski (2006) et Hagan et al. (2002), afin de mettre en évidence le rôle de paramètres. Ces notations ne sont donc pas uniformes comparées aux d'autres modèles dans le mémoire: α joue le rôle de σ et ρ joue le rôle de r .

niveau du smile. ε est la volatilité du processus de la volatilité α , qui est connu également sous le nom de *volvol* et a un effet sur la courbure du smile.

Puis, β est le coefficient d'élasticité et $\beta \in [0; 1)$ ¹⁵. Les 3 cas particuliers nous aideront à comprendre le rôle de β :

- Lorsque $\beta = 0$, $F(t)$ peut être négatif, ce qui est appréciable dans un contexte des taux négatifs. Notons que même si $\beta = 0$, la distribution $F(t)$ n'est pas normale sauf si α est constant.
- Lorsque $\beta = 1$, $F(t)$ est toujours positif. De même, même si $\beta = 1$, la distribution $F(t)$ n'est pas log-normale sauf si α est constant.
- Lorsque $\beta = 1/2$, nous retrouvons le modèle du type CEV: le modèle SABR est en effet une extension du modèle type CEV avec une volatilité stochastique qui suit un processus mouvement brownien géométrique.

De manière plus générale, β a des effets sur la pente du smile. Lorsque β diminue, la pente s'accroît (ce qui est intuitif puisque lorsque β se déplace d'1 à 0, le modèle passe d'un modèle type log-normal à un modèle type normal).

Enfin, ρ est la corrélation entre le mouvement brownien du processus de taux forward et celui de volatilité. Lorsque ρ est négatif (plus fréquent), la volatilité croît avec la diminution du taux. Dans le cas contraire, la volatilité croît si le taux augmente. L'effet de ρ est similaire à celui de β et il impact également la pente du smile (la pente devient plus prononcée lorsque ρ diminue).

Hagan et Lesniewski (2006) montrent que sous la mesure de probabilité Forward neutre Q^i , la dynamique du taux peut s'écrire sous la formule suivante:

$$dF_i(t) = \alpha_i(t)F_i(t)^{\beta_i} \times \begin{cases} -\sum_{k=i+1}^j \frac{\rho_{ki}\tau_k\alpha_k(t)F_k(t)^{\beta_k}}{1+\tau_k F_k(t)} dt + dW_i(t) & \text{si } i < j \\ dW_i(t) & \text{si } i = j \\ \sum_{k=j+1}^i \frac{\rho_{ki}\tau_k\alpha_k(t)F_k(t)^{\beta_k}}{1+\tau_k F_k(t)} dt + dW_i(t) & \text{si } i > j \end{cases} \quad (2.60)$$

¹⁵Lorsque $\beta \in (0; 1)$, le processus est toujours une martingale. Lorsque $\beta = 1$ (lognormal), pour que le taux Forward soit martingale, il faut que la corrélation soit non positive (Jourdain 2004)

et

$$d\alpha_i(t) = \alpha_i(t)\varepsilon_i(t) \times \begin{cases} -\sum_{k=i+1}^j \frac{r_{ki}\tau_k\alpha_k(t)F_k(t)^{\beta_k}}{1+\tau_k F_k(t)} dt + dZ_i(t) & \text{si } i < j \\ dZ_i(t) & \text{si } i = j \\ \sum_{k=j+1}^i \frac{r_{ki}\tau_k\alpha_k(t)F_k(t)^{\beta_k}}{1+\tau_k F_k(t)} dt + dZ_i(t) & \text{si } i > j \end{cases} \quad (2.61)$$

Sauf si $\beta = 0$, le modèle SABR/LMM n'a pas de solution analytique de forme fermée explicite. On peut bien sûr toujours évaluer les caps/floors ou les swaptions en utilisant une simulation de Monte Carlo qui est toutefois coûteuse en temps. Alternativement, en utilisant la méthode de théorie de perturbation et la technique "freezing", les auteurs ont dérivé une formule analytique d'approximation suivante pour le prix d'un caplet à date 0:

$$\begin{aligned} \text{Caplet}(t, F_i(t), K, \tau_i, \nu(t)) &= \tau_i P(0, T) E_t [(F_i(T_{j-1}) - K)^+] \\ &= \tau_i P(0, T) (F_i(0)\phi(d_i^+) - K\phi(d_i^-)) \end{aligned} \quad (2.62)$$

avec

$$d_i^+ = \frac{\ln\left(\frac{F_i(0)}{K}\right) + \frac{1}{2}\alpha_{imp}^2(K, F_i(0))T_{i-1}}{\alpha_{imp}(K, F_i(0))\sqrt{T_{i-1}}} \quad (2.63)$$

$$d_i^- = \frac{\ln\left(\frac{F_i(0)}{K}\right) - \frac{1}{2}\alpha_{imp}^2(K, F_i(0))T_{i-1}}{\alpha_{imp}(K, F_i(0))\sqrt{T_{i-1}}} \quad (2.64)$$

La volatilité implicite est donnée par une approximation analytique qui simplifie considérablement la calibration du modèle:

$$\begin{aligned} \sigma_{i,imp}^{Black}(K) &= \frac{\alpha_i z_i}{x(z_i)(KF_i)^{\frac{1-\beta_i}{2}} \left(1 + \frac{(1-\beta_i)^2}{24} \left(\ln\left(\frac{F_i}{K}\right)\right)^2 + \frac{(1-\beta_i)^4}{1920} \left(\ln\left(\frac{F_i}{K}\right)\right)^4 + \dots\right)} \\ &\times \left(1 + \left(\frac{(1-\beta_i)^2}{24(KF_i)^{1-\beta_i}} + \frac{\rho_i\beta_i\varepsilon_i\alpha_i}{4(KF_i)^{\frac{1-\beta_i}{2}}} + \frac{\varepsilon_i^2(2-3\rho_i^2)}{24}\right)T_{i-1} + \dots\right) \end{aligned} \quad (2.65)$$

avec

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} (KF_i)^{\frac{1-\beta_i}{2}} \ln\left(\frac{F_i}{K}\right) \\ x(z_i) &= \ln\left(\frac{\sqrt{1-2\rho_i z_i + z_i^2} + z_i - \rho_i}{1 - \rho_i}\right) \end{aligned}$$

Hagan et al (2002) [57] ont proposé une approximation simplifiée de (2.65):

$$\begin{aligned} \sigma_{i,imp}^{Black}(K) = & \frac{\alpha_i}{F_i^{1-\beta_i}} \left(1 - \frac{1}{2} (1 - \beta_i - r_i \lambda_i) + \right. \\ & \left. \frac{1}{12} ((1 - \beta_i)^2 + (2 - 3\rho_i^2) \lambda_i^2) \ln \left(\frac{K}{F_i} \right)^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

avec $\lambda = \frac{\varepsilon}{\alpha} (FK)^{1-\beta}$.

Lorsque $K = F = F_i(0)$, la volatilité implicite ATM vaut alors:

$$\sigma_{i,ATM}^{Black} = \frac{\alpha_i}{F_i^{1-\beta_i}} \left[1 + \left(\frac{(1 - \beta_i)^2}{24} \frac{\alpha_i^2}{F_i^{2-2\beta_i}} + \frac{1}{4} \frac{\rho_i \beta_i \varepsilon_i \alpha_i}{F_i^{1-\beta_i}} + \frac{1}{24} (2 - 3\rho_i^2) \varepsilon_i^2 \right) T_{i-1} + \dots \right] \quad (2.67)$$

Lorsque le taux forward $F_i(0)$ varie, on obtient alors une courbe de volatilité implicite ATM qui est connue sous le nom de “backbone”. En pratique, la volatilité implicite ATM est souvent approchée par seul le premier terme¹⁶:

$$\alpha_i = \frac{\sigma_{i,ATM}^{Black}(K)}{F_i^{1-\beta_i}} \quad (2.68)$$

Ce qui permet d'exprimer α par l'approximation suivante, que nous pouvons utiliser dans le calibrage:

$$\sigma_{i,ATM}^{Black}(K) = \alpha_i F_i^{1-\beta_i} \quad (2.69)$$

En dehors de la formule (2.65) où les volatilités suivant la loi log-normale, Hagan et al (2002) [57] ont également proposé une autre approximation simplifiée pour des volatilités qui suivent la loi normale:

$$\begin{aligned} \sigma_{i,imp}^{Normale}(K) = & \frac{\alpha_i z_i (KF_i)^{\frac{\beta_i}{2}} \left(1 + \frac{1}{24} \left(\ln \left(\frac{F_i}{K} \right) \right)^2 + \frac{1}{1920} \left(\ln \left(\frac{F_i}{K} \right) \right)^4 + \dots \right)}{x(z_i) \times (KF_i)^{\frac{1-\beta_i}{2}} \left(1 + \frac{(1-\beta_i)^2}{24} \left(\ln \left(\frac{F_i}{K} \right) \right)^2 + \frac{(1-\beta_i)^4}{1920} \left(\ln \left(\frac{F_i}{K} \right) \right)^4 + \dots \right)} \\ & \times \left(1 + \left(\frac{-\beta_i(2 - \beta_i)}{24 (KF_i)^{1-\beta_i}} + \frac{\rho_i \beta_i \varepsilon_i \alpha}{4 (KF_i)^{\frac{1-\beta_i}{2}}} + \frac{\varepsilon_i^2 (2 - 3\rho_i^2)}{24} \right) T_{i-1} + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.70)$$

¹⁶Cette approximation donne des résultats raisonnables dans la plupart de cas, sauf si l'échéance de l'option est très longue ou dans des conditions de marché extrêmes, l'ampleur des autres termes d'expansion peut devenir significatif.

Lorsque $K = F = F_i(0)$, la volatilité (normale) implicite ATM vaut alors ^{17 18}:

$$\sigma_{i,ATM}^{Normale} = \frac{\alpha_i}{F_i^{1-\beta_i}} \left[1 + \left(\frac{\beta(\beta-2)}{24} \frac{\alpha_i^2}{F_i^{2-2\beta_i}} + \frac{1}{4} \frac{\rho_i \beta_i \varepsilon_i \alpha_i}{F_i^{1-\beta_i}} + \frac{1}{24} (2 - 3\rho_i^2) \varepsilon_i^2 \right) T_{i-1} + \dots \right] \quad (2.71)$$

Après la crise financière de 2007-2008, les taux d'intérêt continuellement bas et négatifs obligent le marché à côter avec des volatilités normales, cette formule qui a été moins acceptée par les passés devient plus utilisée (Crispoldi et al. (2015) [30]). C'est d'ailleurs ce que nous allons utiliser dans la partie de l'application.

Dans le modèle LMM-SABR comme le modèle SABR, chaque échéance d'option et chaque teneur de sous-jacent, quatre paramètres doivent être calibrés. Pour ce faire, nous avons besoin des volatilités implicites du marché des différents strikes. Or, comme nous venons de le discuter, les paramètres β et ρ ont tous les deux des impacts sur le skew et des différentes combinaisons sont donc possibles pour le même skew. Autrement dit, des redondances existent entre les paramètres β et ρ . Par conséquent, on calibre généralement le modèle en fixant l'un des deux paramètres. Deux pratiques courantes existent:

- Fixer β , qui est choisi a priori de manière à refléter la vision du marché, nous revenons sur ce point dans le chapitre 4 lors de l'application empirique. Une alternative est d'appliquer une régression linéaire avec les données historiques $(\ln(F_i(0)), \ln(\alpha_{ATM}))$ ¹⁹ et de calibrer α , ρ .
- Fixe ρ , qui est choisi de manière à simplifier la spécification du modèles et les calculs numériques. Une pratique courante est de fixer $\rho = 0$ puis de calibrer α , β . Selon les tests de Crispoldi et al. (2015), même si ρ est fixé à 0, le modèle LMM-SABR ont des performances de calibrage excellentes.

Pour conclure cette dernière section, comme tous les modèles de marché, le modèle LMM-SABR propose un cadre unifiant pour modéliser différent taux forward. En outre, le modèle LMM-SABR possède tous les avantages d'un modèle SABR notamment de la simplicité conceptuelle et des interprétations explicites des paramètres tout en restant suffisamment flexible. Les formules

¹⁷Pour plus de détails, nous invitons les lecteurs à se référer à Hagan et al (2002 [57], l'annexe B).

¹⁸Pour l'équivalent des formules 2.66 -2.69 des volatilités normales, nous invitons les lecteurs à se référer à Hagan et al (2002 [57], l'annexe B).

¹⁹En prenant logarithme de l'équation (2.67), nous avons $\ln(\alpha_{ATM}) = \ln\alpha - (1 - \beta)\ln(F_i(0)) + \ln(1 + \dots)$

d'approximation telles que les équations 2.65 et 2.70 sont en général en mesure de fournir un très bon calibrage au smile de volatilité implicite cotée sur le marché. Toutes ces qualités expliquent la popularité du modèle.

Chapter 3

Méthodes d'estimation et de calibration

Avant toute utilisation, les modèles de taux doivent d'abord être calibrés. Le calibrage d'un modèle est, selon Galluccio et al. (2004), *“a reverse engineering procedure aimed at identifying the relevant model parameters from a set of liquid instruments quoted in the market.”*. De manière générale, un modèle de taux de marché nécessite 3 inputs: la courbe de taux initiale, les volatilités instantanées des taux et les corrélations. Dans ce chapitre, nous expliciterons d'abord des méthodes pour reconstituer la courbe des taux zéro-coupons. Ensuite, nous nous concentrerons sur la calibration de la volatilité et de la corrélation, qui constitue le cœur des modèles de marché.

3.1 Reconstruction de la courbe des taux initiale

En pratique, la courbe de taux instantanée et la courbe des taux forwards initiale n'existent pas sur le marché. Une estimation préalable des structures par termes des taux d'intérêt est indispensable. Par ailleurs, des obligations zéro-coupon sur le marché existent pour des maturités de moins d'un an. Au-delà d'un an, les obligations sont souvent couponnées (voir l'annexe B.2). Considérons un panier de J obligations. On note t_1, \dots, t_N les dates de versement des flux et CF_{j,t_n} le flux de l'obligation j à la date t_n . Soit $\delta(t_n)$ la valeur de la fonction d'actualisation à la date t_n et P_j le prix de marché de l'obligation j . Sous l'hypothèse d'AOA: le prix d'une obligation à coupon est égal à la somme de ses flux futurs actualisés:

$$\tilde{P}_j = \sum_{n=1}^N \delta(t_n) CF_{j,t_n} \quad (3.1)$$

Pour déterminer des taux zéro-coupon (ou de facteur d'actualisation) avec le démembrement des titres couponnés, nous pouvons avoir recours au bootstrapping, qui consiste à extraire de manière itérative les taux des obligations zéro coupon en utilisant une séquence de prix des titres

couponnés. Cette méthode nécessite donc l'existence d'au moins une obligation dont l'échéance correspond pour chaque date de bootstrapping. Lorsque les prix de marché des obligations de certains maturités n'existent pas, des interpolations ou des extrapolations sont nécessaires. Dans tous les cas, nous ne pouvons qu'obtenir une série des taux spot discrets, qui ne permet pas de déduire une courbe des taux forwards lisse.

L'approche alternative consiste à estimer une approximation à la fonction d'actualisation (donc continue) $\delta(t)$. De nombreuses méthodes ont été proposées et la littérature sur les méthodes d'estimation de la structure des termes de taux est très riche. Nous citons deux principales classes des modèles¹: les modèles basées sur les splines et les modèles avec des paramètres parcimonieux. Nous présentons uniquement la première classe avec les méthodes les plus représentatives ici et nous reporterons la seconde dans l'annexe E². Pour une revue plus complète et des comparaisons détaillées des modèles, les lecteurs peuvent se référer, par exemple, à Gourieroux et Scaillet (1994) [53], Anderson et al. (1996) [6], James et Webber (2000) [72], Choudhry et Lizzio (2015) [27] et etc.

Il est notable, comme le soulignent James et Webber (2000) [72], que ces méthodes sont applicables quel que soit le choix d'instrument de base pour la construction de la courbe de taux: obligation à coupon, taux Libor, taux FRA, taux swap ou encore taux forward swap: rappelons les relations entre le prix d'obligation zéro-coupon, le taux d'obligation zéro-coupon et le taux forward:

$$\tilde{P}_j = \sum_{n=1}^N \delta(t_n) CF_{j,t_n} = \sum_{n=1}^N CF_{j,t_n} e^{-t_n r(t_n)} = \sum_{n=1}^N CF_{j,t_n} e^{-\int_0^{t_n} f(s) ds} \quad (3.2)$$

¹Il n'y a pas d'unanime des classifications des méthodes d'estimation dans les littératures. Par exemple, la thèse de Burgayran (1998) [24] distingue trois familles de modèles pour reconstituer la courbe des taux zéro-coupons: les modèles structurels paramétriques, les modèles non structurels paramétriques et les modèles non structurels non paramétriques. Les modèles "structurels" consistent en fait aux modèles de taux endogènes que nous avons mentionné dans le chapitre 2, tel que le modèle Vasicek ou CIR car ils sont basés sur les propriétés propres aux taux d'intérêts. En revanche, les modèles "non structurels" traitent de la courbe des taux comme l'on pourrait s'intéresser à l'estimation de n'importe quelle courbe en économétrie. Dans ce chapitre, nous nous intéressons uniquement les "pures" méthodes d'estimations pour obtenir une courbe de taux initiale. C'est donc uniquement les modèles "non structurels" que nous nous intéressons. Concernant "paramétriques" ou "non paramétriques", il dépend si l'on choisit ou non une seule fonction paramétrique de la courbe pour l'ensemble de maturité. Nous n'utilisons non plus cette classification en considérant que les modèles splines peuvent également reclassés entre paramétrique et non-paramétriques (la régression de spline est considérée comme paramétrique et les modèles de spline de lissage sont considérés comme non-paramétrique). Nous adoptons donc les caractéristiques de "basé sur spline" et "parcimonieuse" pour les distinguer, qui est la même logique que dans les travaux de Nyman-Andersen (2018) [89].

²Ce choix est du fait que nous appliquons ces deux classes dans les applications empiriques et nous retenons finalement la première.

Dans la discussion ci-dessous, nous adopterons les notations de Waggoner (1997) [120] \tilde{P}_j^δ , \tilde{P}_j^r , \tilde{P}_j^f . Nous utilisons \tilde{P}_j si la discussion s'applique à tous de manière générale.

3.1.1 Modèles basés sur les splines

Avant d'aborder les modèles basés sur les splines, nous introduisons un terme d'erreur dans l'équation (3.1). Cette modification est justifiée par le fait que les prix des obligations contiennent souvent des erreurs idiosyncratiques en raison d'illiquidité, des spreads *bid-ask*, des coûts de transaction, de l'effet des fiscalités hétérogènes, des contraintes de vente à découverte et etc. (voir McCulloch (1975) [80], Dermody et Prisman (1988) [35], Amihud et Mendelson (1991) [3]), qui conduisent à des écarts entre les prix AOA et les prix observés:

$$P_j = \tilde{P}_j + \epsilon_j = \sum_{n=1}^N \delta(t_n) CF_{j,t_n} + \epsilon_j \quad (3.3)$$

Notons que l'hypothèse $E(\epsilon_j) = 0$ garantit que l'AOA est vérifiée en espérance. L'objectif est donc de trouver une courbe de taux $\delta(t)$ qui minimise l'écart entre le prix théorique et le prix observé:

$$\delta^* := \operatorname{argmin} \sum_{j=1}^J \left(P_j - \tilde{P}_j(\delta) \right)^2 \quad (3.4)$$

De manière générale, les modèles basés sur les splines peuvent être considérés dans un espace vectoriel qui se compose d'un ensemble des éléments de base, la fonction d'actualisation $\delta(t)$ peut être alors approximée par une combinaison linéaire des fonctions de base $\psi_k(t)$:

$$\delta(t) = \sum_{k=1}^K \beta_k \psi_k(t)$$

L'équation (3.3) devient donc³:

$$P_j = \sum_{n=1}^N CF_{j,t_n} \sum_{k=1}^K \beta_k \psi_k(t) + \epsilon_j$$

Il y a donc K paramètres β_k à estimer.

³Ou encore, en notant $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_K)'$, $\psi = \psi_k(t_n)_{\substack{k=1, \dots, K \\ n=1, \dots, N}}$ et $\mathbf{D} = CF\psi$, on a sous forme matricielle: $\mathbf{P} = \mathbf{D}\beta + \epsilon$

3.1.1.1 Régression de Spline

Les premières tentatives d'estimation consistent naturellement à modéliser directement le prix des zéro-coupon par une fonction d'actualisation polynomiale, justifié par le théorème de Weierstrass⁴, et à les estimer à l'aide de la régression MCO (Moindre Carré Ordinaire). Comme les fonctions d'actualisation sont non linéaires, le degré de la fonction polynomiale pourra être sensiblement élevé. Or, nous savons que le phénomène de Runge est inhérent si on choisit une seule fonction polynôme pour ajuster l'ensemble des données. Les travaux fondateurs de McCulloch (1971 [79], 1975 [80]) ont appliqué la méthode splines polynomiales (quadratiques et cubiques respectivement) pour contourner ces problèmes. Par exemple, une fonction de spline cubique est une courbe cubique par morceaux de classe C^2 . En divisant la structure du terme de taux en plusieurs segments à l'aide d'une série de points de raccordement (ou nœuds) que l'on note ξ_1, \dots, ξ_N , la fonction d'actualisation de McCulloch s'écrit:

$$\delta(\xi) = 1 + \sum_{i=1}^3 a_i \xi^i + \frac{1}{3!} \sum_{n=1}^{N-1} b_n (t - \xi_n)_+^3 \quad (3.5)$$

Un choix naturel des nœuds sont les couples de tous les cash flows et les dates d'échéance associées. En pratique, le nombre et la localisation des nœuds ont des impacts importants dans l'estimation de la courbe de taux. Un nombre plus petit de nœuds est utilisé afin de réduire les oscillations et donc le nombre N peut être plus petit que le nombre de dates de tombées de cash-flows⁵. Comme nous pouvons le constater, l'équation (3.5) est composée d'un terme polynomiale cubique et d'un second terme de fonctions seulement deux fois différentiables à chaque nœud. Le vecteur de paramètres (de dimension $N + 3$) à estimer est donné donc par $\theta = (a_0, \dots, a_3, b_1, \dots, b_{N-1})$. Par ailleurs, la fonction d'actualisation vérifie la contrainte $\psi(0, \theta) = 1$. En tenant compte de l'hétéroscédasticité des résidus en raison des coûts de transaction et de la fiscalité, les paramètres sont estimés avec la méthode des Moindres Carrés Pondérés (MCP) au lieu des MCO dans McCulloch (1971, 1975).

Cependant, il existe quelques inconvénients relatifs à l'utilisation de polynômes comme la fonction

⁴Selon le théorème de Weierstrass, toute fonction continue et différentiable sur un segment est limite uniforme de fonctions polynomiales sur ce segment.

⁵Par exemple, McCulloch (1971, 1975) suggère de prendre le nombre de nœuds égalant à la racine carrée du nombre d'obligations utilisées et que la position des points de raccordement soit choisie de sorte que chaque intervalle contienne des nombres proches des obligations arrivant à l'échéance.

de base de spline. Tout d'abord lorsque la maturité tend vers l'infini, la fonction polynôme diverge alors qu'une fonction d'actualisation devrait converger vers 0. De plus, la fonction d'actualisation généralement décroît exponentiellement, ce qui est difficilement modélisable par des polynômes (Shea (1984) [113]). De plus, bien que McCulloch (1971, 1975) ait réduit le nombre de nœuds de manière *ad hoc* et que cette méthode fonctionne plutôt bien pour retrouver les prix d'obligation, on constate toujours des oscillations importantes dans la courbe des taux forwards obtenue pour des maturités longues (Bliss (1997)).

Afin d'obtenir des courbes de taux forwards plus lisses, Vasicek et Fong (1982) [119] proposent de recourir aux fonctions de spline exponentielle à l'aide d'une transformation de l'argument t de la fonction $\delta(t)$:

$$t = -(1/\alpha)\ln(1 - x)$$

Cette étape permet de transformer la fonction $\delta(t)$ d'une fonction approximativement exponentielle de t en une fonction approximativement linéaire de x . D'ailleurs, les auteurs montrent que le paramètre α constitue en effet la limite du taux à terme instantané. Des splines polynomiales (les splines cubiques utilisés par Vasicek et Fong (1982)) peuvent être utilisées ensuite pour estimer la fonction transformée. Cette transformation revient en fait à estimer $\delta(t)$ par une spline exponentielle d'ordre 3, c'est-à-dire que sur chaque intervalle, $\psi(t)$ prend la forme:

$$\psi(\xi) = \sum_{i=0}^3 a_i e^{-i\alpha\xi}$$

Et la fonction d'actualisation est alors:

$$\delta(\xi) = 1 + \sum_{i=1}^3 a_i (1 - e^{-\alpha\xi})^i + \sum_{n=1}^{N-1} b_n (e^{-\alpha\xi_n} - e^{-\alpha\xi})_+^3 \quad (3.6)$$

La fonction d'actualisation vérifie la propriété essentielle $\delta(0, \theta) = 1$. Le vecteur des $N + 3 + 1$ paramètres à estimer est alors donné par le vecteur $\theta = (a_0, \dots, a_3, b_1, \dots, b_{N-1}, \alpha)$. Généralement, on impose également à cette fonction de converger vers 0 quand la maturité tend vers l'infini et il suffit de rajouter cette contrainte dans la procédure d'estimation.

Toutefois, l'étude empirique de Shea (1985) [114] indique que les splines exponentielles produisent

également les estimations instables de la structure du terme et suggère d'utiliser des B-splines⁶.

3.1.1.2 B-Spline

Steeley (1991) [116] est le premier à appliquer les fonctions linéaires B-spline sur les prix des bons du Trésor britanniques. Bornée et à support compact minimal, les fonctions B-Splines permettent d'éviter les annulations entre les fonctions de base et d'éviter la perte de précision, notamment à l'extrémité longue de la courbe du fait de manque d'observations. De plus, l'aspect local⁷ des courbes B-splines est attractive dans la reconstitution de la courbe de taux. Concrètement, une fonction B-spline d'ordre m est définie telle que:

$$B_p^m(t) = \sum_{k=p}^{p+m+1} \left[\sum_{l=p, l \neq k}^{p+m+1} \frac{1}{t_l - t_k} \right] (t - t_k)_+^m$$

La calcul de la fonction B-spline de degré m peut être facilitée par récurrence sur le degré inférieur comme proposée par Powell (1981, P234-235) [96]:

$$B_{n,0}(t) = \begin{cases} 1, & t_n \leq t < t_{n+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B_n^m(t) = \frac{t - t_n}{t_{n+m} - t_n} B_{n,m-1}(t) + \frac{t_{n+m+1} - t}{t_{n+m+1} - t_{n+1}} B_{n+1,m-1}(t) \quad (3.7)$$

Un autre avantage des travaux de Steeley est que les erreurs types sont également estimées. Au lieu de prendre une division adhoc des obligations des différentes maturités (court, moyen, long terme) dont les définitions peuvent varier selon les marchés et les participants, l'auteur commence par un modèle sur-paramétré (nombre important de nœuds) et change la localisation et le nombre de nœuds jusqu'à ce que les erreurs standards soient minimisées. Cette méthode permet de placer approximativement le même nombre d'obligations arrivant à terme sur chaque segment de manière plus robuste. Le modèle est estimé par la méthode de Moindres Carrés Contraintes (MCC) (avec la contrainte naturelle $\delta(0) = 1$) et l'auteur obtient des résultats satisfaisants.

⁶L'autre direction d'extension et d'amélioration des méthodes de McCulloch (1975) [80] est d'imposer une pénalité de lissage. Comme nous ne l'appliquerons pas dans ce mémoire, nous le reportons dans l'annexe E.

⁷En effet, le calcul et l'estimation de courbes Bézier permettent aux segments de courbe individuels de se déplacer presque indépendamment les uns des autres (sous réserve des contraintes de continuité) de sorte que des régions distinctes de la courbe soient moins affectées par les mouvements dans les zones voisines.

3.2 Calibration des volatilités

Nous nous intéressons à présent la calibration des volatilités. La discussion dans cette section s'appuie principalement sur Brigo et Mercurio (2006 [21], chapitre 6 et 7), Rebonato (2004 [106], Part III) et Gatarek et al. (2007 [50], section 7.3).

3.2.1 Stripping de la volatilité des caplets

Les caps sont typiquement cotés en volatilité sur le marché, qui est la volatilité implicite déduite à partir du prix de marché via la formule de Black. Cette volatilité peut être en effet considérée comme la “moyenne” des volatilités des caplets individuelles qui le composent⁸. Par convention, les volatilités cotées sont uniques pour chaque cap/floor. Par exemple, un cap- \mathcal{T}_j ayant un échéancier des dates de règlement $\{T_1, \dots, T_j\}$ est coté par une seule volatilité $\nu_{cap-\mathcal{T}_j}$ telle que:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) \text{Black}(K, F_i(0), \sqrt{T_{i-1}} \nu_{\mathbf{T}_{\beta-\text{cap}}}) \\ &= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) \text{Black}(K, F_i(0), \sqrt{T_{i-1}} \nu_{T_{i-1}-\text{caplet}}) \end{aligned}$$

Si l'on souhaite se calibrer au marché des caps, la première étape va consister à recouvrir les volatilités de chaque caplet à partir de celles de caps par la technique “stripping”. Une discussion très détaillée de cette technique est donnée dans Gatarek et al. (2007 [50], section 7.3). De manière très synthétique, l'algorithme de stripping consiste simplement:

1. A date $j = 1$, poser directement $v_{T_1}^{\text{caplet}} = v_{T_1}^{\text{cap}}$.
2. A date $j = 2$: trouver $v_{T_2}^{\text{caplet}}$, qui est la solution de $\text{caplet}_2(v_{T_2}^{\text{caplet}}) = \text{cap}_2(v_{T_2}^{\text{cap}}) - \text{caplet}_1(v_{T_1}^{\text{caplet}})$
- ⋮
- N. A date $j = N$: trouver $v_{T_N}^{\text{caplet}}$, qui est la solution de $\text{caplet}_N(v_{T_N}^{\text{caplet}}) = \text{cap}_N(v_{T_N}^{\text{cap}}) - \sum_{j=1}^{N-1} \text{caplet}_j(v_{T_j}^{\text{caplet}})$

⁸La volatilité des caps et la volatilité des caplets sont également connus sous le nom de “forward volatilités” et de “forward forward volatilités” respectivement.

3.2.2 Calibration de la volatilité instantanée aux caplets

Une fois les volatilités des caplets/floorets obtenues, l'étape suivante consiste à calibrer les volatilités instantanées. Avec le modèle LFM, le calibrage est quasi automatique, puisque l'on peut simplement mettre les volatilités du marché sous forme des volatilités implicites du formule Black dans le modèle. Nous avons vu dans la section 2.4.3.3 du chapitre 2 (l'équation (2.53) et (2.54)):

$$\nu_i^2 = T_{i-1} \nu_{T_{i-1}-caplet}^2 \quad (3.8)$$

$$\nu_{T_{i-1}-caplet}^2 := \frac{1}{T_{i-1}} \int_0^{T_{i-1}} \sigma_i^2(t) dt \quad (3.9)$$

où ν_i^2 est la variance instantanée intégrée du taux forward de l'instant t jusqu'à la date de révision T_{i-1} et $\nu_{T_{i-1}-caplet}^2$ est la variance de caplet- T_{i-1} cotée sur le marché.

Par contre, ces équations ne permettent pas de déterminer les volatilités instantanées de manière unique. Lorsqu'il s'agit de plusieurs caplets avec différents taux forwards, différentes spécifications des structures des volatilités instantanées peuvent être utilisées.

3.2.2.1 Volatilité instantanée constante par morceau

Le premier type de spécification proposé par les chercheurs est de supposer la volatilité constante par morceau. Cette hypothèse est particulièrement convenable dans le cas de discrétisation réduisant à un nombre faible de pas. Cette supposition faite, cela revient à organiser les volatilités instantanées comme dans le tableau suivant:

Table 3.1: Structure des volatilités instantanées constantes par morceau⁹

Vol. Instan.	$t \in (0, T_0]$	$(T_0, T_1]$	$(T_1, T_2]$	\dots	$(T_{M-2}, T_{M-1}]$
$F_1(t)$	$\sigma_{1,1}$	Terminé	Terminé	\dots	Terminé
$F_2(t)$	$\sigma_{2,1}$	$\sigma_{2,2}$	Terminé	\dots	Terminé
\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$F_M(t)$	$\sigma_{M,1}$	$\sigma_{M,2}$	$\sigma_{M,3}$	\dots	$\sigma_{M,M}$

Notons qu'il y a $M(M+1)/2$ paramètres à estimer dans cette structure. Afin de réduire le nombre de paramètres à estimer, différentes spécifications sont proposées (Brigo et Mercurio (2006) [21]). Pour résumer, les volatilités peuvent dépendre uniquement de la maturité, ou de

la maturité résiduelle, ou du temps déjà écoulé, ou une combinaison des deux parmi ces trois paramètres. Ici, nous donnons seulement deux spécifications privilégiées par les chercheurs et les praticiens¹⁰, qui dépendent respectivement de la maturité résiduelle et d'une combinaison de la maturité et de la maturité résiduelle¹¹:

$$\sigma_{i,j} = \psi_{M-j+1} \quad (3.9, \text{ forme 2 BM})$$

$$\sigma_{i,j} = \Phi_i \psi_{M-j+1} \quad (3.9, \text{ forme 5 BM})$$

Ces formulations possèdent une caractéristique empiriquement attrayante: la dépendance de la maturité résiduelle permet de préserver la forme de la structure par terme des volatilités au fil du temps (que l'on nomme "*controllability*"), notamment la forme de la bosse. D'ailleurs, comparé au formule (3.9, forme 2 BM) qui dépend d'un seul facteur et qui laisse seulement les coefficients de corrélation pour calibrer la swaption, la spécification (3.9, forme 5 BM) décompose la volatilité en 2 facteurs: Φ_i est donc utilisé pour calibrer aux volatilités des caplets, tandis que ψ_{M-j+1} , plus les coefficients de corrélation, permet d'ajuster le modèle aux swaptions ("*flexibility*"). Cette spécification est également la formulation la plus générale qui permet de retrouver une matrice de covariance intégrée de rang 1 si les corrélations instantanées $\rho = 1$.

Sous ces 2 formules, les volatilités instantanées peuvent être déduites à partir de la volatilité des caplets via les relations suivantes:

$$\left(\nu_{T_{i-1}\text{-caplet}}^{\text{market}} \right)^2 = \frac{1}{T_{i-1}} \sum_{j=1}^i \tau_{j-1} \sigma_{i,j}^2 = \frac{1}{T_{i-1}} \sum_{j=1}^i \tau_{j-1} \psi_{i-j+1}^2 \quad (3.10)$$

$$\left(\nu_{T_{i-1}\text{-caplet}}^{\text{market}} \right)^2 = \frac{1}{T_{i-1}} \sum_{j=1}^i \tau_{j-1} \sigma_{i,j}^2 = \frac{\Phi_i^2}{T_{i-1}} \sum_{j=1}^i \tau_{j-1} \psi_{i-j+1}^2 \quad (3.11)$$

avec:

$$\Phi_i^2 = \frac{T_{i-1} \left(\nu_{T_{i-1}\text{-caplet}}^{\text{market}} \right)^2}{\sum_{j=1}^i \tau_{j-1} \psi_{i-j+1}^2}$$

La structure par terme des volatilités peut être représentée par l'ensemble des cou-

¹⁰Pour les autres formulations, nous invitons les lecteurs à se référer à Brigo et Mercurio (2006) [21].

¹¹Pour faciliter la lecture entre ici et l'application du chapitre suivant, nous conservons les libellés de formulation de Brigo et Mercurio (2006) [21].

ples: $\{(T_{j+1}, V(T_j, T_{j+1})), (T_{j+2}, V(T_j, T_{j+2})), \dots, (T_{M-1}, V(T_j, T_{M-1}))\}$, où $V(T_j, T_{h-1})$ est la volatilité moyenne du taux forward $F_h(t)$ depuis T_j jusqu'à la date d'expiration du caplet T_{h-1} . Avec l'hypothèse simplifiée équidistante de chaque tenor, pour la formulation (3.9, forme 2 BM) par exemple, nous avons:

$$V^2(T_j, T_{h-1}) = \frac{1}{\tau_{j,h-1}} \sum_{k=j+1}^{h-1} \tau_{k-1,k} \psi_{h-k}^2 = \frac{1}{h-j-1} \sum_{k=j+1}^{h-1} \psi_{h-k}^2 \quad (3.12)$$

On constate immédiatement $V^2(T_j, T_{h-1}) = V^2(T_{j+1}, T_h)$, ce qui explique l'invariabilité de la forme de la structure des volatilités par cette formulation. Concernant la formulation (3.9, forme 5 BM), tant que la variation Φ_i reste faible, l'invariabilité de la forme sera préservée.

3.2.2.2 Volatilité instantanée sous forme paramétrique

La 2ème approche pour spécifier la volatilité instantanée est la forme paramétrique. Une des spécifications possibles est:

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) &= \Psi(T_{i-1} - t, a, b, c, d) \\ &= \left[(a(T_{i-1} - t) + d) e^{-b(T_{i-1}-t)} + c \right] \end{aligned} \quad (3.12, \text{forme 6 BM})$$

Dans cette fonction, le terme linéaire $a(T_{i-1} - t) + d$ capture la forme ascendante de la structure à court terme, qui est ensuite multiplié par une composante exponentielle décroissante $e^{-b(T_{i-1}-t)}$ afin de modéliser la tendance décroissante à l'extrémité lointaine. Ces deux facteurs ensemble permettent de reproduire non seulement la bosse observée en fonction de la durée résiduelle à la maturité, mais également une forme monotone décroissante. Nous revenons sur ce point lors de l'application dans le chapitre suivant.

Mis à part l'avantage de simplicité, cette forme de fonction offre également des interprétations transparentes des paramètres. En fait, selon cette formulation, nous avons:

$$\lim_{T_{i-1} \rightarrow t} \Psi(T_{i-1} - t, a, b, c, d) = d + c$$

et

$$\lim_{T_{i-1} \rightarrow \infty} \Psi(T_{i-1} - t, a, b, c, d) = c$$

Comme $\lim_{T_{i-1} \rightarrow t} \Psi(T_{i-1} - t, a, b, c, d)$ peut être considéré comme la volatilité implicite d'un caplet ayant une date d'expiration extrêmement rapprochée, la volatilité instantanée et la volatilité moyenne coïncident lorsque $T_{i-1} - t$ tend vers 0. Cette relation peut donc donner certaines indications sur les plages des valeurs possible de c et d . Tandis que $\lim_{T_{i-1} \rightarrow \infty} \Psi(T_{i-1} - t, a, b, c, d)$ peut être considéré comme la volatilité implicite d'un caplet ayant une date d'expiration extrêmement lointain, la convergence asymptotique de la volatilité instantanée est donc assurée et le paramètre c définit un niveau global. Enfin, il est facile à démontrer que la valeur maximum de la courbe des volatilités instantanées est atteinte lorsque $T_{i-1}^* = t + \frac{1}{b} - \frac{a}{d}$, ce qui peut aider aux traders qui souhaitent estimer statistiquement les portions de la durée d'un contrat forward associée aux volatilités les plus élevées (Rebonato (2004) [101], chapitre 21).

Afin d'obtenir un ajustement exact avec les volatilités observées sur le marché, une autre fonction paramétrique, qui fait office de référence par les marchés financiers, est proposée par Rebonato (2004) [101]:

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) &= \Phi_i \Psi(T_{i-1} - t, a, b, c, d) \\ &= \Phi_i \left(\left[(a(T_{i-1} - t) + d) e^{-b(T_{i-1} - t)} + c \right] \right) \end{aligned} \quad (3.12, \text{forme 7 BM})$$

On retrouve la similitude avec la formule (3.9, forme 5 BM): il dépend de la maturité résiduel et donc permet la maintien de la forme de la structure des volatilités. Cette forme peut être considérée comme ayant un noyau paramétrique Ψ_j qui est localement altéré par Φ_i pour chaque maturité. Avec cette spécification, nous avons:

$$\left(v_{T_{i-1}\text{-caplet}}^{\text{market}} \right)^2 = \frac{1}{T_{i-1}} \Phi_i \int_0^{T_{i-1}} \left((a(T_{i-1} - t) + d) e^{-b(T_{i-1} - t)} + c \right)^2 dt \quad (3.13)$$

et:

$$\Phi_i^2 = \frac{T_{i-1} \left(v_{T_{i-1}\text{-caplet}}^{\text{market}} \right)^2}{\int_0^{T_{i-1}} \left((a(T_{i-1} - t) + d) e^{-b(T_{i-1} - t)} + c \right)^2 dt}$$

Comme la spécification (3.9, forme 5 BM), la volatilité des caplets est incorporée en exprimant ϕ_i en fonction de Ψ . Les paramètres a, b, c, d et les corrélation instantanée peuvent être utilisés pour la calibration des swaptions.

3.3 Calibration des corrélations

3.3.1 Propriété générale des corrélations

Pour des caps dont les payoffs sont additivement séparables par rapport aux différents taux forwards, les corrélations terminales entre les taux forwards n'ont pas d'impact. Par contre, pour des swaptions dont les payoffs dépendent de la dynamique conjointe de plusieurs taux forwards à un moment donné, la modélisation de corrélation est nécessaire. Cette modélisation est d'autant plus importante lorsque les swaptions auxquelles le modèle doit être calibré sont nombreuses.

Avant d'aborder les estimations/calibrations des corrélations, rappelons que la corrélation instantanée est la corrélation entre les variations infinitésimales des taux forwards. Tandis que la corrélation terminale est la corrélation des taux forwards et mesure la dépendance entre différents taux à un instant "terminal" donné. La corrélation terminale dépend non seulement des corrélations instantanées, mais également de la manière dont les volatilités totales sont "distribuées" ou modélisées dans les volatilités instantanées¹².

Comme pour la volatilité, la calibration de la corrélation peut s'appuyer sur des formes paramétriques. L'idée est de trouver une structure théoriquement satisfaisante pour les matrices des corrélations instantanées. De manière générale, une matrice de corrélation doit satisfaire 4 propriétés fondamentales pour avoir une signification statistique et financière, que nous résumons par la "propriété F":

Propriété F Tous les éléments sont entre $[-1, 1]$; les entrées diagonales doivent être égales à 1 ; la matrice doit être symétrique et semi-positive définie.

En outre, Brigo et Mercurio (2006, chapitre 6) [21] ont résumé les propriétés désirables spécifiques dans les modélisations des matrices des corrélations instantanées:

1. $\rho_{i,j} \geq 0$.
2. L'application $i \mapsto \rho_{i,j}$ est décroissante pour $i \geq j$.
3. L'application $i \mapsto \rho_{i+p,i}$ est croissante pour un p fixé.

La propriété 1 est standard pour les corrélations de taux. Par la propriété 2, nous attendons une tendance décroissante monotone en s'éloignant des entrées en diagonale de la matrice le

¹²Voir des exemples illustratifs donnés dans Brigo et Mercurio (2006, chapitre 6)[21].

long d'une colonne ou d'une ligne. Car les mouvements de taux lointains sont moins corrélés que ceux avec des échéances proches. La propriété 3 traduit le fait que lorsque l'on se déplace le long d'une courbe des taux, plus le tenor est grand, plus les variations des taux adjacents (et des taux équi-espacés) sont corrélées. Par exemple, la corrélation entre un taux forward de 19 ans et un taux forward de 20 ans est plus importante que celle entre un taux forward d'1 an et un taux forward de 2 ans. Ce qui est cohérent avec les évidences empiriques que la courbe forward a tendance à s'aplatir et à évoluer de manière plus corrélée pour les échéances lointaines que pour les échéances courtes. Autrement dit, les sous-diagonales de la matrice de corrélation doivent être croissantes lors du déplacement du "Nord-Ouest" au "Sud-Est".

3.3.2 Choix de la nature de modélisation des corrélations: input et output

Il y a deux méthodes d'estimation/calibration des corrélations instantanées. La première méthode est de considérer les corrélations instantanées comme des paramètres de calibrage. Les prix des swaptions du modèle sont des fonctions des volatilités et d'autres paramètres éventuellement restants des volatilités instantanées. Les corrélations sont alors, comme les volatilités, calibrées à partir des prix des swaptions et sont des paramètres implicites de marché. La deuxième méthode consiste à obtenir une estimation historique de la matrice de corrélations instantanées en utilisant des techniques d'estimation économétrique. Cette matrice historique est considérée comme la corrélation donnée pour le modèle, et seuls les paramètres libres restants (volatilités) sont utilisés pour calibrer les prix de marché des instruments.

Le calibrage des volatilités que nous avons vu dans la section précédente fait l'unanimité au sein des marchés financiers. Car pour les praticiens, l'information la plus pertinente est donnée par les prix du marché (voir Brigo et Mercurio ([21] et Rebonato (2004) (Part III) [106] pour des discussions détaillées). Par contre, il n'y a pas de consensus sur la méthode d'estimation/calibrage des corrélations instantanées au sein des marchés financiers. Le choix dépend de la qualité des données du marché ainsi que de l'application du modèle.

Dans ce mémoire, nous adoptons les corrélations exogènes. Ce choix est motivé d'une part par la disponibilité des données, et d'autre part par des arguments avancés par Rebananto (2002). Selon l'auteur, il est possible de recouvrir de manière satisfaisante la volatilité d'un produit complexe dont les sous-jacents sont des taux forwards avec celles des caplets. Par contre,

recouvrir la corrélation est beaucoup plus complexe, du fait de l'incomplétude du marché en pratique (non concordance entre le caplet et le marché de la swaption). Autrement dit, on ne peut pas répliquer le prix implicite des volatilités et des corrélations avec des stratégies autofinancées. Par ailleurs, Rebonato et Jackel (2000) soulignent également que les prix des swaptions européens sont relativement insensibles aux détails de corrélation et que des corrélations simples et standardisées produisent généralement des prix peu différents de ceux obtenus à l'aide de matrices de corrélations instantanées plus complexes. Tandis que les paramètres de corrélations implicites à partir des prix de swaptions du marché peuvent être instables et erratiques.

En outre, les estimations historiques portent des informations importantes pour déduire les corrélations. La corrélation instantanée exogène est plus le reflet d'une photographie à une heure donnée du marché que la résultante de données historiques. Le fait d'utiliser des corrélations exogènes est une opportunité d'introduire des caractéristiques des structures de corrélation de marché réel dans le calibrage (la "*financial reality*" dans le sens de Rebonato et al. (2011)[98]). Rebonato et al (2011) [98] résumant cette philosophie en "*ImPLY from market prices what you can (really) hedge, and estimate econometrically what you cannot.*". Brigo et Mercurio ([21]) montrent également la stabilité des estimations exogènes: les valeurs restent plutôt stables même si la taille de l'échantillon ou le choix temporelle est modifié. Ainsi, il nous semble judicieux d'imposer des structures de corrélation instantanée exogène dans le cadre de ce mémoire.

Toutefois, si on injecte des estimations historiques directement dans le processus de calibrage, il est possible d'avoir des problèmes tels que la présence de valeurs aberrantes, des données non synchronisées et des discontinuités sur les surfaces de corrélation dues à l'utilisation de facteurs d'actualisation extraits de différents instruments financiers. Selon Crispoldi et al. (2015) [30], ces caractéristiques indésirables de matrices de corrélation peuvent également être liées aux méthodes de reconstruction de la courbe de taux comme bootstrap, interpolation etc. Afin de résoudre ces problèmes, Rebonato et Jackel (1999) proposent d'approximer les estimations historiques des matrices de corrélation avec des formes paramétriques parcimonieuses qui sont lisses et régulières, ce qui est désirable car des corrélations régulières impliquent des volatilités plus régulières, des évolutions plus stables de la structure des termes de volatilité et de meilleures corrélations terminales. Nous allons à présent présenter ces formes paramétriques.

3.3.3 Formes paramétriques des structure des corrélations instantanées

La forme paramétrique la plus simple est sans doute une forme à un paramètre β telle que:

$$\rho_{i,j}(t) = e^{-\beta|T_i - T_j|} \quad (3.14)$$

Selon cette forme, plus les taux forwards sont éloignés, plus ils sont décorrélés (propriété 2). De plus, la matrice de corrélation obtenue avec un β positif est adéquate avec la propriété F (réelle, symétrique, semi-positive définie). Néanmoins, cette forme standard ne tient pas en compte de la maturité des taux forwards mêmes: la décorrélation entre les taux forwards 1 an et 2 ans est la même que celle entre les taux forwards 19 ans et 20 ans. D'ailleurs, les corrélations asymptotiques, qui représentent la corrélation entre les taux forwards de maturités les plus éloignés possibles en pratique, ne doivent pas tendre vers 0, mais vers un niveau fini. Toutefois, Rebonato (2011) [98] souligne un avantage de calcul non négligeable de cette paramétrisation. Comme les termes de covariances font partie des drifts dans le modèle de marché, le fait qu'il n'y a pas de dépendance avec les variables de temps de l'intégration permet "sortir" la corrélation de l'intégrale et rend des calculs analytiques de l'intégrale possibles.

Afin d'améliorer cette forme simple, il est possible d'introduire de la dépendance de la maturité des taux forwards. Par exemple, Rebonato (1999) [99] a repris cette forme et modélisé β en fonction de la date d'expiration la plus proche des 2 taux forwards, avec 2 paramètres :

$$\rho_{ij} = \rho_{\infty} + (1 - \rho_{\infty})e^{-\beta|T_i - T_j|} \quad (3.15)$$

où ρ_{∞} est la corrélation asymptotique.

Une autre paramétrisation à 3 paramètres est:

$$\rho_{ij} = \rho_{\infty} + (1 - \rho_{\infty})e^{-\beta \min(T_i, T_j)|T_i - T_j|} \quad (3.16)$$

où $\beta \min(T_i, T_j)$ permet de capturer la diminution moins rapide dans l'extrémité longue de la structure des termes de corrélation. Afin de garantir une forme adéquate pour une matrice de

corrélation, Rebonato (2004) suggère la forme suivante pour $\beta \min(T_i, T_j)$:

$$\beta \min(T_i, T_j) = \beta e^{-\gamma \min(T_i, T_j)}$$

La 4ème forme populaire est la forme de corrélation multiplicative proposé par Doust (2007 [38]¹³). Considérons une matrice de dimension tel que:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1 a_2 & a_1 a_2 a_3 & \cdots & a_1 a_2 \dots a_{n-1} \\ a_1 & 1 & a_2 & a_2 a_3 & \cdots & a_2 a_3 \dots a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_1 a_2 \dots a_{n-1} & a_2 a_3 \dots a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Les étapes de construction de cette matrice de corrélation sont décrites dans Rebonato (2011) [98] et peuvent être résumées comme suit:

1. Alimenter d'abord les éléments de la diagonale par 1.
2. Ensuite définir les éléments de la première ligne par: $\rho_{1,j} = \prod_{k=1}^{j-1} a_k$. Un candidat naturel de a_k est $e^{-\beta_k \Delta T}$.
3. Puis déduire les autres éléments de la partie triangulaire inférieure ($i > j$) par: $\rho_{i,j} = \frac{\rho_{1,i}}{\rho_{j,1}} = \prod_{k=j}^{i-1} a_k$
4. Enfin obtenir la matrice entière par la propriété de symétrie $\rho_{i,j} = \rho_{j,i}$.

Il est facile de démontrer que cette matrice est toujours positive définitive par une décomposition de Cholesky.

¹³Comme citée par Rebonato (2011) [98]

3.3.4 Paramétrisation de rang plein des structures des corrélations instantanées

Coffey et Schoenmakers (2000) [111] proposent une forme alternative pour la matrice de corrélation. L'idée principale est de considérer une série des coefficients d_i , $i = 1, 2, \dots, M$ tel que:

$$\begin{aligned} d_1 &= 1 \\ d_i &< d_j, \quad \text{pour } i \leq j \\ \frac{d_i}{d_{i+1}} &< \frac{d_j}{d_{j+1}}, \quad \text{pour } i < j \end{aligned}$$

et ils posent:

$$\rho_{i,j} = \frac{d_i}{d_j}, \quad i \leq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, M$$

Notons que l'esprit à la construction de Schoenmakers et Coffey (2000) [111] est similaire à celui de Doust (2007). Les exigences ci-dessus sur les d_i permettent de satisfaire l'ensemble des 3 propriétés désirables discutées ci-dessus. D'ailleurs, ces spécifications conduisent toujours à des matrices de corrélation qui satisfont les propriétés fondamentales. Enfin, le nombre de paramètres à estimer dans cette formulation est de M , plus réduit comparé au nombre d'entrées $M(M-1)/2$ dans la matrice de corrélation initiale ¹⁴. Ces sont des atouts pour une mise en implémentation fréquente et régulière de la calibration.

3.3.5 Paramétrisation de rang réduit des structure des corrélations instantanées

Ces paramétrisations proposées entre autres par Rebonato (1999) ou Schoenmakers et Coffey (2000) [111] sont des paramétrisations dites de plein rang. Une approximation par une matrice de corrélation de rang réduite nous permet de réduire significativement le nombre de paramètres à injecter dans les modèles ainsi que le temps de simulations Monte Carlo. Brace et al. (2001) [17] suggèrent que souvent une matrice de covariance de rang 1 ou 2 suffisent. Deux approches sont proposées: la méthode de "zeroing valeurs propres" et la méthode d'optimisation d'angle. Rebonato et Jackel (2001) [104] et Brigo et Mercurio (2006) [21] ont montré que la différence entre ces deux méthodes est généralement petite avec des exemples numériques. Nous présentons donc uniquement la première méthode ici et l'appliquerons dans le chapitre suivant. La méthode

¹⁴Schoenmakers et Coffey (2000) observent également que d_i peut toujours être caractérisé par une fonction exponentielle en termes d'une suite finie des nombres non négatifs et proposent de réduire davantage les nombres de paramètres à l'aide des formes paramétriques particuliers. C'est pourquoi les auteurs nomment leur approches "semi-paramétriques". Voir Schoenmakers et Coffey (2000) pour plus de détails.

d'optimisation d'angle est reportée dans l'annexe [E.2.1](#).

3.3.5.1 Zeroing valeur propres

Comme la matrice de corrélation est symétrique et semi-positive définie, elle peut être décomposée comme suit:

$$\rho = PHP' \quad (3.17)$$

où P est une matrice orthogonale, dont les colonnes sont des vecteurs propres de ρ , avec les valeurs propres associées qui composent les éléments de la matrice diagonal H . Notons que ces éléments diagonaux sont rangés par ordre croissant. Soit Λ une autre matrice diagonale tel que $\Lambda^2 = H$ et $A := P\Lambda$, on a également la décomposition suivante:

$$\rho = AA' \quad (3.18)$$

L'approximation de la matrice ρ par une matrice de rang inférieur (n) consiste donc à simplement retenir les n plus grandes valeurs propres et les vecteurs propres associés et d'y composer une nouvelle matrice. Pour ce faire, 2 approches sont équivalentes. Une approche est de définir une matrice diagonale $\tilde{\Lambda}^{(n)}$ de dimension $n \times n$ en retenant seulement les n plus grandes valeurs propres et une matrice $\tilde{P}^{(n)}$ de dimension $M \times n$ en retenant les vecteurs propres associés. La matrice de corrélation candidate est donc:

$$\tilde{\rho}^{(n)} = \tilde{B}^{(n)}(\tilde{B}^{(n)})'$$

avec $\tilde{B}^{(n)} := \tilde{P}^{(n)}\tilde{\Lambda}^{(n)}$

La seconde approche est de définir une matrice diagonal $\bar{\Lambda}^{(n)}$ de dimension $M \times M$ à partir de la matrice Λ , mais les $M - n$ dernières élément ne contiennent que des 0. En définissant $\bar{B}^{(n)} := P\bar{\Lambda}^{(n)}$, la matrice de corrélation candidate est:

$$\bar{\rho}^{(n)} = \bar{B}^{(n)}(\bar{B}^{(n)})'$$

Notons que les diagonales dans la matrice de corrélation candidate obtenue ne contient plus que des 1 du fait que certaines valeurs propres de Λ sont écartées. Une simple "normalisation" (qui

revient à considérer $\bar{\rho}^{(n)}$ ou $\tilde{\rho}^{(n)}$ comme une matrice de covariance) peut résoudre ce problème:

$$\rho_{i,j}^{(n)} := \frac{\bar{\rho}_{i,j}^{(n)}}{\sqrt{\bar{\rho}_{i,i}^{(n)}} \sqrt{\bar{\rho}_{j,j}^{(n)}}}$$

$\rho^{(n)}$ est ainsi la matrice d'approximation (de rang n) de la matrice de corrélation originale ρ .

Pour synthétiser la calibration des corrélations, le choix d'une corrélation exogène nous amène à utiliser une forme paramétrique de la corrélation (la forme de Rebonato, de Doust, ou de Schoenmakers et Coffey). Puis d'opérer une réduction de rang qui permet de gagner en temps de calcul des simulations de Monte Carlo.

Chapter 4

Applications empiriques des modèle de taux

Dans ce chapitre, nous allons présenter les applications empiriques des 2 modèles de taux d'intérêts: le modèle classique Hull et White et le modèle LMM-SABR. Nous appliquerons ces 2 modèles avec 2 ensembles de données ayant des comportements différents mais également représentatives des évolutions de ces dernières années, à savoir le 31/12/2019, où les taux d'intérêt ont connu une période historiquement basse, et le 31/12/2022, où les taux d'intérêt commencent à remonter suite aux changements économiques et aux différents chocs des années précédentes.

Pour chacun des modèles, nous suivrons le plan suivant:

- Description des données utilisées
- Description des différentes étapes d'estimation
- Calibrage des paramètres
- Simulation

Comme le modèle LMM-SABR implique plusieurs étapes d'estimation dont chacune nécessite le calibrage, nous présentons le calibrage dans chaque étape d'estimation. Nous reportons les résultats des années 2019 et 2022 lorsque les 2 résultats sont particulièrement différents. S'ils sont similaires, uniquement ceux de l'année 2019 seront reportés. Toutes les applications sont développées et implémentées avec Python et les optimisations sont effectuées avec les packages `numpy` et `scipy` du Python¹.

¹Certains codes sont inspirés des exemples et des algorithmes donnés dans les livres Gatarek et al. (2007 [50]), Oosterlee et GrzelakOG (2019) [93] et Crispoldi et al. (2015) [30]. Une partie des codes sont également modifiés, corrigés et enrichis à partir du code développé par Nicolò Crucco (disponible sur <https://github.com/nicocrucco/Computational-Finance>) et Niko Hiananto (disponible sur <https://github.com/nhiananto/LMM-SABR/blob/main/README.md>). Les codes de Niko Hiananto sont eux-mêmes, développés à partir des codes donnés en exemple par Crispoldi et al. (2015).

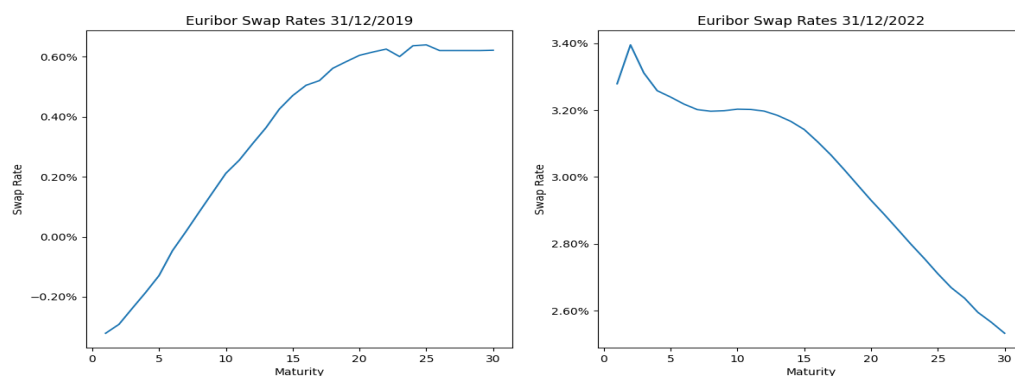
4.1 Modèle de Hull et White

4.1.1 Les données inputs

Pour implémenter le modèle Hull et White, nous avons besoin de 2 inputs: la courbe des taux short (ou courbe zéro-coupon) initiale et les prix des swaptions que nous devons calibrer. Les courbes des zéro-coupon ne sont pas directement observables sur le marché. Pour les facteurs d'actualisation de court terme (≤ 1 an), ils peuvent être déduits à partir des taux interbancaires et les cotations FRA. Pour les facteurs d'actualisation de moyen à long terme (> 1 an), on peut utiliser les taux IRS. Dans le cadre des projections en assurance, la première actualisation démarre souvent au terme d'1 an, nous utilisons donc seulement les taux IRS comme instruments de reconstruction. Ainsi, les inputs utilisés sont:

- Les taux swaps de marché Euribor 6 mois des maturités 1-30 ans (31/12/2019, 31/12/2022, source: Bloomberg).
- Les prix des swaptions avec une date de maturité 1 an et des échéances 1-10, 15, 20 et 30 ans (straddle EUSP ATM du 31/12/2019 et du 31/12/2022, source: Bloomberg).

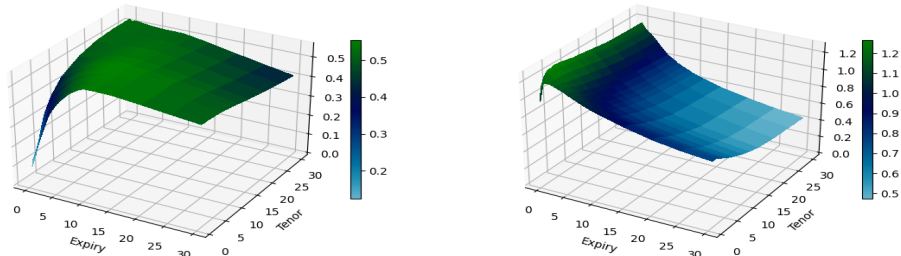
Figure 4.1: Courbe des taux swap Euribor



Les courbes des taux swaps du 31/12/2019 et 31/12/2022 sont données dans le graphique 4.1. La surface de volatilité de la swaption ATM des différentes échéances et des différents tenors est illustrée par le graphique 4.2. Comme nous pouvons le constater, les comportements des surfaces de volatilité de ces 2 dates sont très différents. Par exemple, nous constatons facilement une forme croissante (non-monotone) de la courbe des taux swaps du 31/12/2019 contre une forme décroissante (non-monotone) pour celle du 31/12/2022. Au regard de ces graphiques, nous

observons également des points de cassures pour les maturités moins liquides (par exemple entre 15 et 20 ans, 20 et 30 ans dans la courbe des taux swaps de 31/12/2019).

Figure 4.2: Courbe des taux swap Euribor



En pratique, nous devons toujours utiliser avec la précaution les taux ou les prix des produits moins liquides. Par exemple, pour les matrices de volatilité des swaption, Brigo et Mercurio (2006) [21] suggèrent qu’en générale il ne faut pas les tenir entièrement comme acquis car ces matrices ne sont pas nécessairement mises à jour uniformément: les swaptions plus liquides sont mises à jour régulièrement, tandis que les autres ne le sont pas nécessairement. Ce “désalignement temporel” peut causer des problèmes dans le calibrage des modèles (des volatilités de forward imaginaires et complexes comme constatés par les auteurs). La recommandation des auteurs est de calibrer le modèle aux swaptions liquides, et de l’utiliser pour pricer les swaptions restantes en comparant avec les valeurs du marché. Considérant également que le nombre de paramètres est souvent faible comparé au nombre des données utilisées pour le calibrage du modèle Hull et White, afin d’obtenir des comportements réguliers et “lisse” des résultats, nous suivons cette recommandation: nous utilisons les instruments les plus liquides pour le calibrage et nous déduisons ensuite les autres valeurs des instruments, soit estimées avec les paramètres calibrés en cas d’une fonction continue, soit par interpolation.

4.1.2 Procédure d’estimation

Nous commençons par la construction de la courbe des taux initiale à partir des taux swaps liquides. Nous avons déjà discuté les méthodes pour reconstituer la courbe des taux zéro-coupons dans le chapitre 3. Dans le cadre du modèle de Hull et White, nous choisissons de construire

les points de spline par optimisation afin d'obtenir une fonction d'actualisation en continu et d'être cohérent avec l'esprit du modèle. Nous avons essayé 2 méthodes d'optimisation, la méthode quasi-Newton BFGS ² et la méthode de Nelder-Mead qui exploite le concept de simplexe et qui ne requiert pas de gradient. Nous retenons l'algorithme BFGS qui minimise le plus les écarts. Ensuite, à partir des points de spline, nous construisons la courbe initiale avec interpolation par B-spline³.

4.1.2.1 Courbe zéro-coupon reconstruite par optimisation

Les points de spline et la courbe de facteur d'actualisation obtenus sont données dans les graphiques 4.3. Nous constatons que les points de spline du 31/12/2022 obtenus sont plus éloignés des taux swaps d'origine du fait de plus d'irrégularité des dernières.

Figure 4.3: Les points de spline déterminés à partir du taux swap Euribor 2019

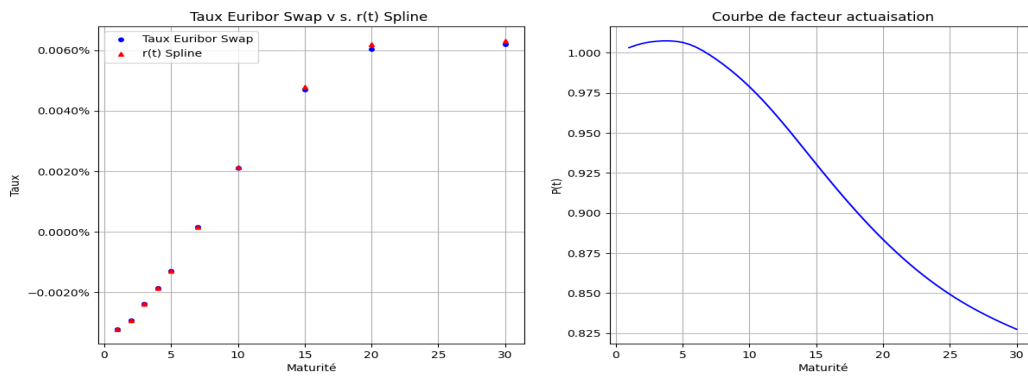
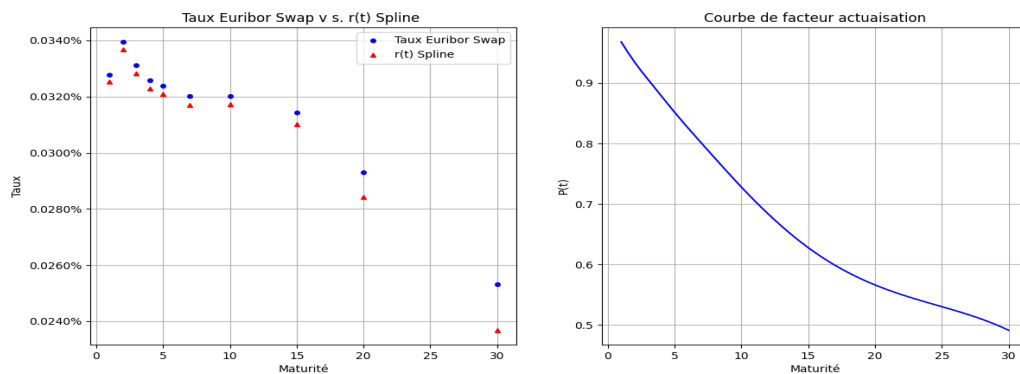


Figure 4.4: Les points de spline déterminés à partir du taux swap Euribor 2022

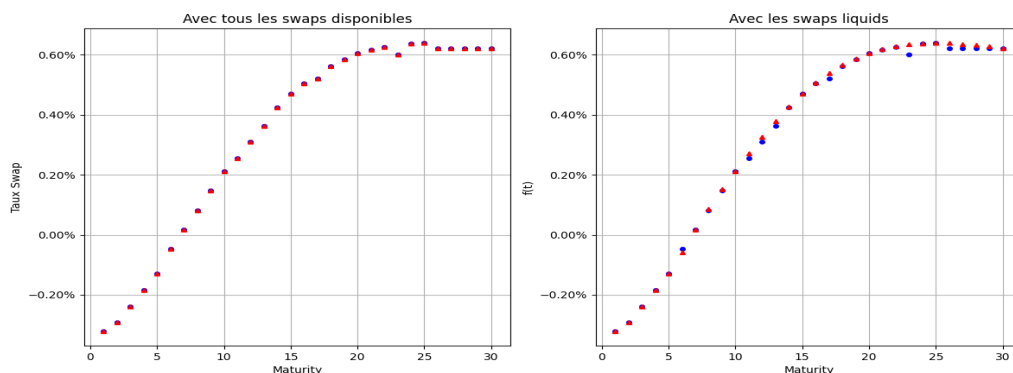


²Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno. Nous avons également essayé une autre méthode quasi-Newton DFP (Davidon-Fletcher-Powell), les résultats sont assez proches

³Nous avons également essayé l'interpolation spline cubique. Les résultats sont similaires.

A titre de vérification, nous avons recalculé les taux swap avec les courbes des taux reconstitués. Les résultats pour les 2 dates sont similaires et ceux de 31/12/2019 sont représentés dans le graphique 4.5. Les taux de swap recalculés sont très proches de ceux du marché et la reproduction des taux swaps est donc globalement bonne, notamment pour les instruments liquides ayant été utilisés comme base de construction (le graphique à gauche)⁴. A titre de comparaison, les taux des swaps reconstruits en utilisant tous les instruments disponibles sont données dans le graphique à droite. Sans surprise, les taux sont mieux calibrés pour les instruments moins liquides. Par contre, la courbe des taux forwards reconstruite présente beaucoup plus d'irrégularités, comme constaté dans les autres études empiriques et comme déjà évoqué dans le chapitre précédent (les résultats sont disponibles sur demande). Nous retenons donc notre choix initial.

Figure 4.5: Taux des swaps reconstruit pour tous les swaps du marché 2019



4.1.3 Calibrage des paramètres

Une fois que nous avons obtenu la courbe des taux initiale, nous procédons au calibrage des paramètres. Les résultats des paramètres estimés sont donnés respectivement dans le tableau 4.1 et le graphique 4.24.

Table 4.1: Estimation des paramètres du modèle Hull-White

Paramètres	2019	2022
κ	-0.0589247	0.0104669
σ	0.00229764	0.0122836

⁴Notons que sur les marchés financiers, les tenors des swaps ne correspondent pas toujours aux calendriers réels. D'ailleurs, les intérêts ne peuvent courir que les jours ouvrables en pratique. En outre, les conventions de décompte des jours sont fixées selon les différents règles de marché. Enfin, la plupart des produits dérivés sont négociés à la date de transaction, puis réglés quelques jours après. Dans ce mémoire, pour simplifier, nous avons négligé ces aspects et ils peuvent aussi être une des sources des écarts entre le prix de marché et le prix des modèles.

Pour les prix de swaption du 31/12/2022, la valeur de κ est positive, ce qui traduit bien la caractéristique de retour à la moyenne. Par contre, la valeur de κ est négative pour les prix de swaption du 31/12/2019. Cette situation est assez fréquente dans le calibrage du modèle Hull-White et elle est souvent considérée comme le résultat de la possibilité de prédominance de la partie croissante de la courbe des volatilités, ce qui est cohérent avec ce que nous avons constaté dans la courbe de volatilité des swaption ATM. Par contre, le modèle calibré sera divergeant par rapport à la moyenne (mean-diverging) au lieu de converger (ou retourner) à la moyenne (mean-inverting), comme nous allons le constater dans les simulations ci-dessous.

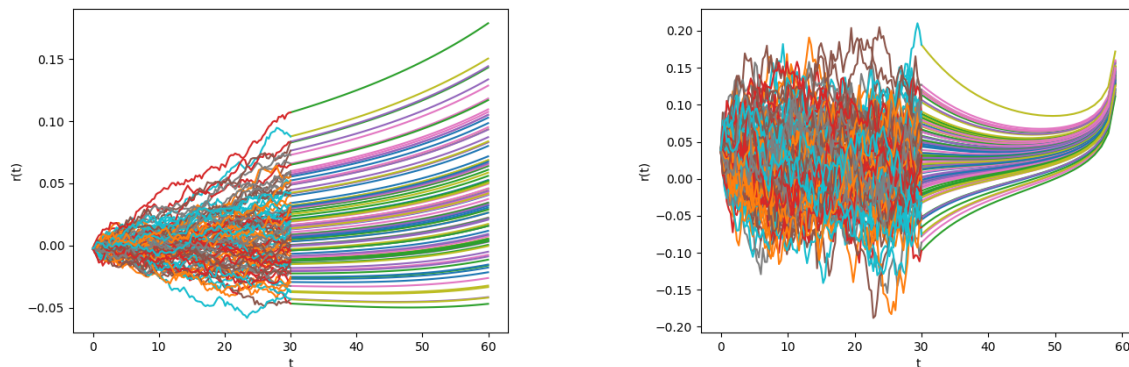
4.1.4 Simulation

Pour les simulations Monte Carlo, nous adoptons le schéma d'Euler au lieu du schéma de Milstein. Ce choix est motivé par les résultats des tests numériques de Crispoldi et al. (2015) [30], qui montrent que le schéma de Milstein ne semble pas apporter d'amélioration significative par rapport au schéma d'Euler, et que le gain de précision est dans tous les cas compensé par un temps de calcul beaucoup plus lourd (l'ordre de 70 à 90%). 2000 simulations ont été générées avec 48 pas par an sur un horizon de 30 ans. Les résultats de simulations sont représentés par le graphique 4.6.

Figure 4.6: Simulation Monte Carlo du modèle Hull et White

(a) 31/12/2019

(b) 31/12/2022



4.2 Modèle LMM-SABR

4.2.1 Les données inputs

Il existe nombreux de similitudes entre le modèle LMM et le modèle LMM-SABR. Certains inputs nécessaires se chevauchent également. Par exemple, dans les 2 cas, nous avons besoin de 3 éléments fondamentaux: les taux forwards initiaux, les volatilités des taux forward, les corrélations entre les différents taux forward. Ces éléments ne sont pas directement disponibles sur le marché. Pour déduire les taux forwards initiaux, nous utilisons toujours les taux swaps comme base d'instruments pour les déduire (précisément les strike ATM des caps, ce qui est différent du modèle Hull et White et nous allons détailler plus bas). Pour déterminer la volatilité instantanée des taux Libor, nous allons utiliser les volatilités des caplets, qui seront elles-mêmes dérivés des volatilités des caps. Pour les corrélations entre les différents taux forwards, nous allons adopter la structure exogène et elles seront donc dérivées à partir des taux forwards historiques (eux-même également déduits à partir des taux IRS historiques).

De plus, pour le modèle LMM-SABR, nous avons besoin des corrélations volatilité-volatilité et les corrélations de forward-volatilité. Nous avons également besoin de calibrer les paramètres SABR. Pour résumer, les données inputs sont les suivants:

- Les strikes des caps Euribor 6 mois ATM (31/12/2019 et 31/12/2022, source: Bloomberg) pour calculer les taux forwards initiaux.
- Les taux swaps de marché Euribor 6 mois des maturités 1-5, 7, 10, 15, 20 et 30 ans historiques recueillies pour les périodes 31/12/2018 - 31/12/2019 et 31/12/2021 - 31/12/2022 (source: Investing.fr). Ces taux IRS constituent donc 2 matrices de dimension $N \times T$, où N est le nombre d'observations disponibles dans l'année (262 observations pour 2019 et 349 observations pour 2022). T est le nombre de tenors des IRS de chaque jour, qui est de 10 (1-5 ans, 7, 10, 15, 20, 30 ans). Ces matrices sont la base pour estimer la corrélation des forward-forward comme dans un modèle LMM, mais également pour estimer les corrélations des volatilité-volatilité dans un modèle LMM-SABR.
- Les volatilités des caps Euribor 6 mois ATM (31/12/2019 et 31/12/2022, source: Bloomberg). Comme les volatilités Black ATM ne sont pas disponibles pour le 31/12/2019, les volatilités utilisées sont les volatilités normales. Afin de faciliter la comparaison, les volatilités normales

sont utilisées également pour le 31/12/2022.

- Des nappes des volatilités (au lieu de seul ATM comme dans le modèle LMM) des caps Euribor 6 mois avec des strikes différents (source: Bloomberg). Notons que les volatilités implicites calculées avec l'approximation d'Hagan et al peuvent être explosives pour des options avec des strikes élevés. Bien que ce comportement soit indésirable, il n'est pas problématique dans notre application: nous pouvons sélectionner des strikes pas trop éloignés des valeurs ATM. Nous fixons un intervalle de +/- 250 bp de la valeur minimum et maximum des strikes ATM dans ce mémoire.

– Strikes 31/12/2019: (-0.015 -0.01 -0.005 0. 0.01 0.015 0.02 0.025 0.03)

– Strike 31/12/2022: (0. 0.01 0.015 0.02 0.025 0.03 0.035 0.04 0.05 0.06)

4.2.2 Procédure d'estimation

Dans le modèle LMM-SABR, une grande partie des méthodes d'estimation sont similaires à ceux du modèle LMM. Par exemple, l'estimation des taux forwards initiaux, le calibrage des volatilités et le calibrage de la matrice de la corrélation forward-forward sont les mêmes que celle du modèle LMM. Toutes les analyses et calibrages effectués pour le modèle LMM peuvent être appliqués directement au modèle SABR-LMM, ce qui implique des coûts supplémentaires faibles de l'implémentation du modèle pour une institutions financière qui utilisait déjà le modèle LMM. En outre, il y a des étapes supplémentaires dans le modèle LMM-SABR, tel que le calibrage des corrélations volatilité-volatilité, le calibrage des corrélations forward-volatilité et le calibrage des paramètres SABR. Nous détaillerons tous les étapes dans cette section.

4.2.2.1 Estimation des taux forwards initiaux et des taux forwards historiques

Commençons par la construction de la courbe d'actualisation à partir des instruments swaps afin d'obtenir la courbe des taux forwards. Notons que cette construction concerne non seulement la courbe des taux initiaux, mais également les taux forwards qui seront utilisés dans l'estimation des corrélations. Pour estimer les taux forwards initiaux, nous utilisons les strike ATM des caps afin de garantir la cohérence avec l'estimation des volatilités par la suite. Tandis que pour les forwards pour l'estimation des corrélations, nous utilisons les taux IRS historiques. Dans les 2 cas, à la différence du modèle Hull et White, nous adoptons une combinaison de splines cubiques et la méthode de bootstrap discutées dans le chapitre 3. Ce choix est justifié par le gain du

temps de calcul comparant la méthode de bootstrap et d'optimisation ainsi que les écarts faibles constatés entre ces deux méthodes dans la construction des courbes de taux forward initiaux. (voir le graphique 4.7 ci-dessous).

Concrètement, en se basant sur les taux IRS historiques du 31/12/N-1 au 31/12/N⁵ (ce qui nous fait 10 points de raccordement), nous pouvons d'abord déduire 59 taux IRS d'1 an à 30 ans (tenor de 6 mois) sur des bases quotidiennes avec une spline cubique. Ensuite on définit les courbes de taux par bootstrapping et une matrice des facteurs d'actualisation de dimension $N \times T_{full}$, dont T_{full} est donc 59. Notons que, comme soulignés par Brigo et Mercurio (2006) [21], les facteurs d'actualisation doivent avoir des maturités fixées tel que

$$P(t, T), P(t + 1, T), \dots, P(t + 1, T)$$

au lieu du temps à maturité fixe (noté Z) tel que:

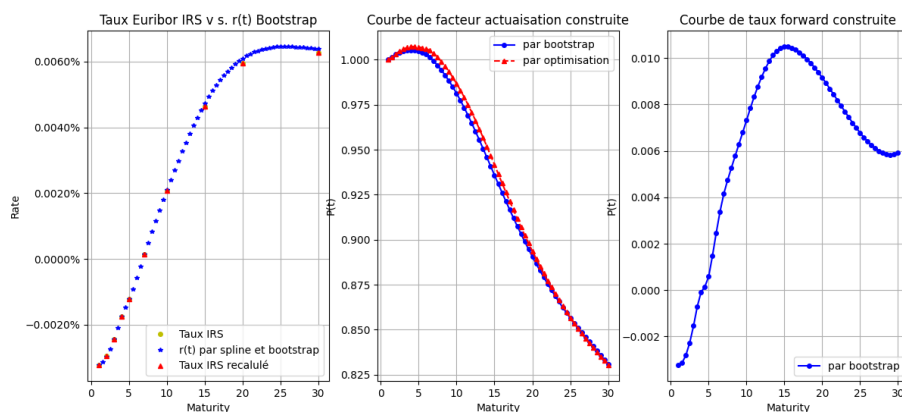
$$P(t, t + Z), P(t + 1, t + Z + 1), \dots, P(t + 1, t + Z + 1)$$

Les courbes des taux d'actualisation et des taux forwards obtenues pour le dernier jour de l'année 2019 et le dernier jour de l'année 2022 sont données dans le graphique 4.7. On remarquera que les écarts entre les taux IRS recalculés et les taux IRS du marché sont quasi-nuls. Nous avons également effectué des estimations par optimisation comme dans le modèle Hull et White et les résultats sont assez proches (les graphiques au milieu pour les 2).

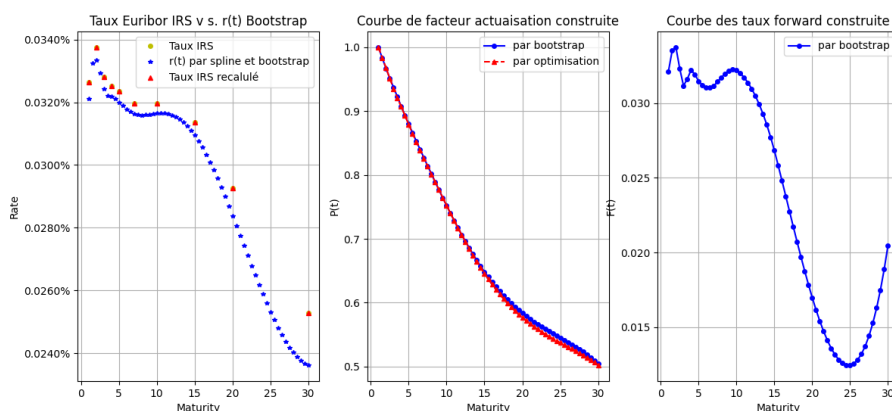
⁵Les résultats de taux forward initiaux sont proches de ceux des taux forwards obtenus avec les IRS de la dernière jour (31/12/N). Nous expliquerons donc les procédures uniquement avec les IRS historiques.

Figure 4.7: Construction des taux forwards avec bootstrap 31/12/N

(a) 31/12/2019



(b) 31/12/2022



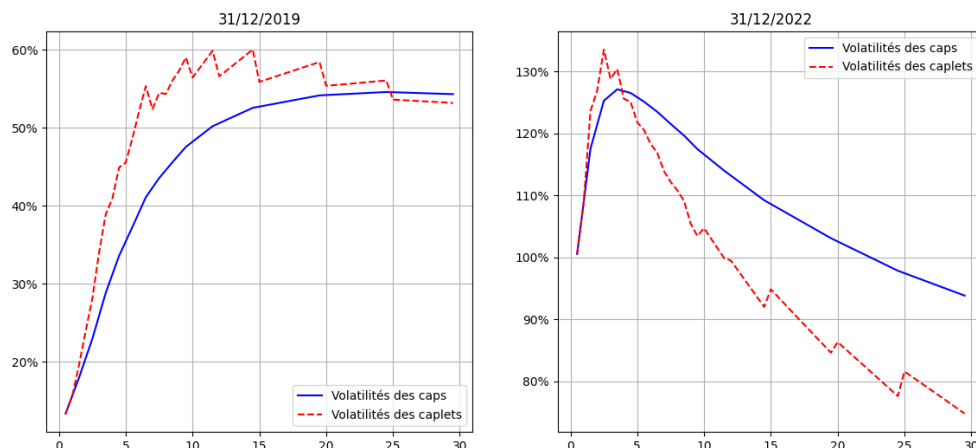
Ces estimations sont effectuées sur l'ensemble de taux IRS historiques et les résultats peuvent être visualisés dans le graphique 4.11. Nous reportons uniquement quelques courbes de forward obtenues dans le graphique A.1 dans l'annexe A pour faciliter l'illustration, où on remarquera une baisse des courbes des taux jusqu'au septembre 2019, avant d'une hausse et également une modification de la forme de la courbe des taux à la fin 2019. En comparaison, on observera des hausses continues des courbes des taux en 2022 avec l'accentuation de l'inversion de la courbe. Enfin, les taux forwards historiques par tenor obtenus sont donnés dans le graphique A.2 dans l'annexe A.

4.2.2.2 Estimation des volatilités instantanées et des surfaces des volatilités

Comme nous en avons déjà discuté dans le chapitre 3, les modèles du marché tels que le LMM sont définis par des paramètres directement cotés. Les calibrages des volatilités sont donc intuitifs et simples à mettre à place à partir des volatilités des caplets. Nous avons également mentionné que les volatilités disponibles sur le marché sont celles de caps/floors. Par ailleurs, les volatilités des caps sont disponibles uniquement pour des tenors liquides.

Afin d'obtenir les volatilités instantanées, nous procédons donc de la manière suivante: nous effectuons d'abord une interpolation pour les tenors manquants afin d'obtenir l'ensemble de la structure par terme des volatilités des caps. La méthode d'interpolation des volatilités est en générale linéaire du fait que la variance totale est modélisée de manière proportionnelle par rapport au temps. Une fois la structure par terme des volatilités obtenue, nous procédons au bootstrapping des volatilités des caplets. Pour ce faire, nous suivons l'algorithme formulé dans la section 3.2.1 et détaillé par Gatarek et al. (2007⁶, section 7.3) et les résultats sont donnés dans le graphique 4.8.⁷

Figure 4.8: Les volatilités des caps du marché et de caplets obtenus avec stripping



En pratique, on observe souvent 2 formes pour la structure par terme de volatilités: l'une avec une bosse à moyen terme, l'autre monotone décroissante. Rebonato (2002[100]) a donné des excellentes explications en divisant la courbe des volatilités instantanées en 3 segments selon

⁶GBM2007

⁷Notons que comme les volatilités des caps sont du type normal, des formules des caps et caplets utilisées sont ceux du modèle normal.

les maturités: très court terme (spot à 18 mois), moyen terme et long terme. Selon Rebonato (2002[100]), le segment court de la courbe des taux est la partie où les interventions des banques centrales ont une influence la plus directe et la plus importante. Il distingue le comportement de ce segment en deux modes: le premier s'associe aux conditions "normales", où il n'y a pas d'anticipation des interventions inattendues des autorités et on peut donc s'attendre à ce que la volatilité instantanée des taux forwards soit relativement faible. Tandis que la seconde mode s'associe aux périodes de fortes incertitudes, où des révisions continues des anticipations peuvent être générées selon l'arrivée de nouvelles informations et cette partie très courte de la courbe peut connaître une volatilité très élevée.

En revanche, dans l'extrémité opposée de la courbe (segment très long), les nouvelles économiques quotidiennes auraient des impacts moindres et elles devraient être plus affectées par des changements structurels des anticipations de l'inflation et des taux réels futures. Les volatilités de ce segment sont par conséquent relativement faibles. Concernant les échéances intermédiaires, elles seraient influencées par les évaluations du marché concernant la direction et l'ampleur du durcissement/assouplissement des taux, les moments et les nombres de hausse/baisse de taux à venir. Comme les révisions de ces évaluations sont en continu, on s'attendrait à ce que les volatilités de cette partie soient élevées. En tenant compte des différents comportements de ces 3 segments décrits par Rebonato (2002 [100]), il est naturel d'observer une forme en bosse pour la partie moyen terme dans les conditions normales et une forme monotone décroissante pour les périodes d'incertitudes à court terme élevées.

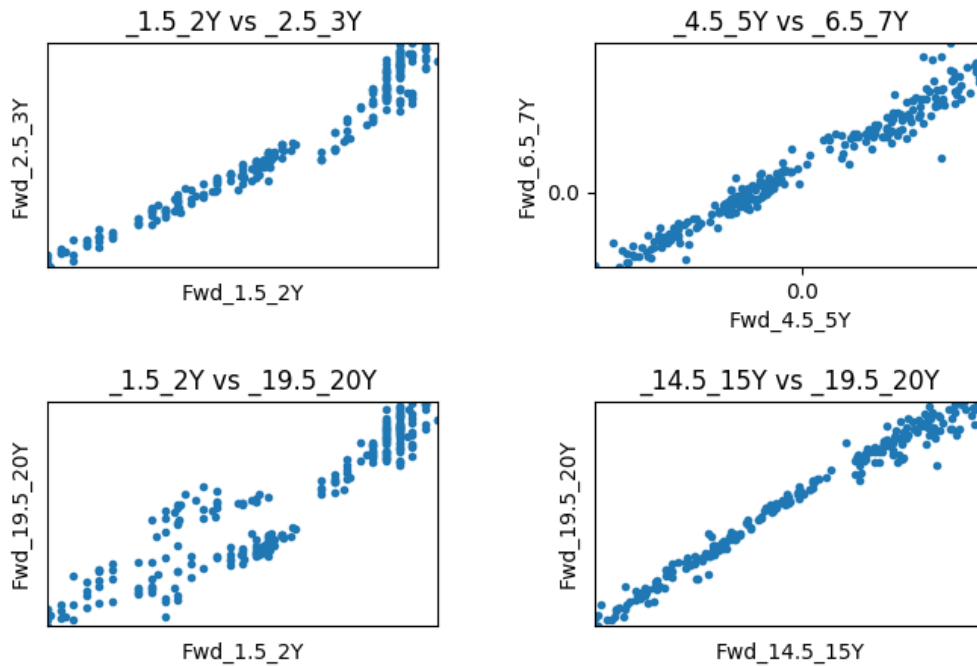
Dans le graphique de la courbe des volatilités du 31/12/2022, on constate précisément une forme avec un pic de bosse typique se situant autour des maturités d'entre 2 et 5 ans. Par contre, on observe une forme croissante pour celle du 31/12/2019. Une explication possible est liée à l'environnement des taux bas en 2019, où il y a peu d'incertitude sur les politiques monétaires des autorités mais plus d'incertitude dans les anticipations de l'inflation et taux réel future. Cette explication est en partie soutenue par le fait que les courbes des volatilités des caps sont décroissantes pour des strikes positifs de la même date avec les nappes de volatilités (graphique A.3). Enfin, nous constatons que les volatilités des caps présentent moins de variabilités que celle des caplets, ce qui est attendu puisque ces premières peuvent être considérés comme les moyennes des dernières.

Similairement au modèle LMM, afin d'obtenir les volatilités instantanées, nous devons d'abord déduire les volatilités des caplets avec la méthode de stripping à partir de celles de caps, à la différence qu'au lieu d'utiliser une courbe des volatilités ATM, une nappe des volatilités avec des strikes différents sont utilisés, et qui sont représentées par le graphique [A.3](#) dans l'annexe.

4.2.2.3 Estimation des corrélations forward-forward historiques

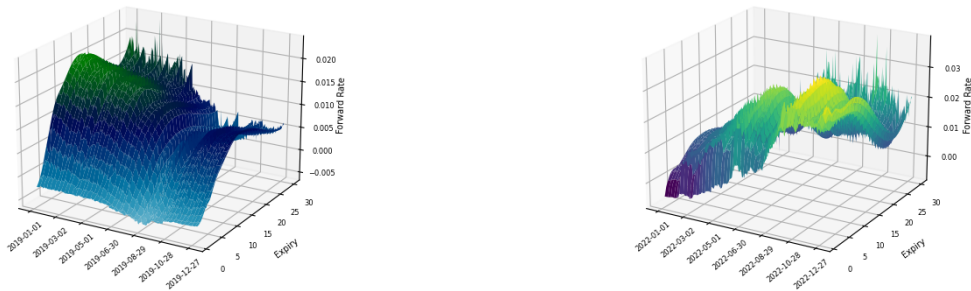
Comme nous en avons discuté dans le chapitre [3](#), la structure de corrélation peut être, soit déduite de manière endogène à partir des prix du marché des swaptions, soit estimée de manière exogène à partir des données historiques des taux forwards. Le choix dépend de la qualité des données du marché mais également de l'objectif de l'application du modèle. Nous avons déjà justifié notre préférence pour l'estimation exogène dans le chapitre précédent et nous détaillons directement les étapes d'estimation ici.

Afin d'estimer les corrélations forward-forward historiques, nous reprenons les taux forwards historiques qui ont été estimés dans la section [4.2.2.1](#) et les représentés par le graphique [4.9](#). Il nous paraît intéressant d'examiner d'abord les corrélations des forwards des différentes maturités en 2019 par les Q-Q plots. Considérons la présence des taux négatifs, un ajustement de la valeur absolue de la valeur minimum (si négative) plus un "déplacement" de 0.2 a été appliqué dans le calcul des coefficients de corrélations et la matrice de corrélation ci-dessous. Les résultats des Q-Q plots sont représenté dans le graphique [4.10](#). Nous remarquons que les corrélations sont plus importantes pour les taux forwards des maturités plus longues (15 ans et 20 ans). Puis, plus les maturités des taux sont éloignées (2 ans et 20 ans par exemple), plus ils sont décorrélés, conforme à ce qui est attendu. Les résultats de 2022 sont similaires et nous ne reportons pas ici.

Figure 4.10: Q-Q plot des corrélations des taux forwards 2019**Figure 4.9:** Taux forward historique 31/12/N-1 - 31/12/N

(a) 2019

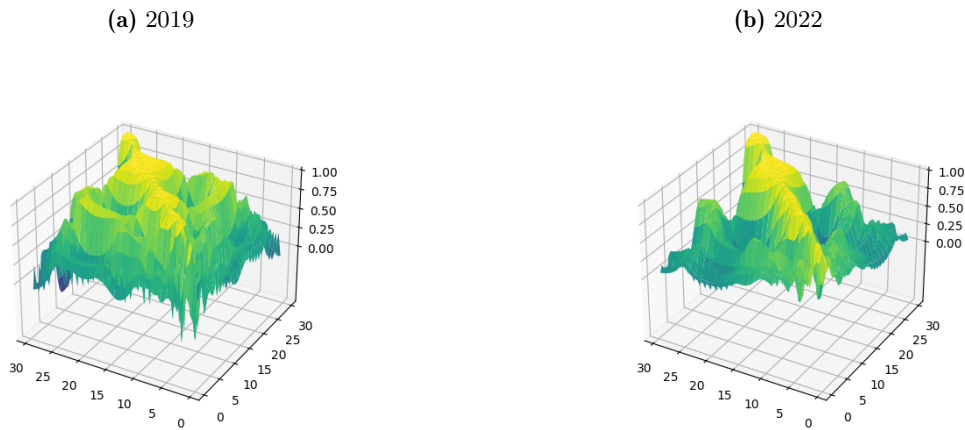
(b) 2022



Par la suite, nous suivons les méthodes d'estimation décrites dans Brigo et Mercurio (2006[21], section 6.19). Nous déduisons d'abord une matrice de corrélation forward-forward historique de dimension 59×59 (maturité 1 an à 30 ans avec tenor 6 mois), représentée par le graphique 4.11. On observe graphiquement des corrélations factices et irrégulières, un phénomène constaté régulièrement dans l'estimation "brute" des corrélations que nous avons mentionné dans la section

3.3.2 du chapitre 3. Pour atténuer ces irrégularités, il y a 2 pratiques courantes: lisser cette estimation “brute” de la matrice de corrélation historique par l’approche Svensson, Nelson et Siegel ou/et l’ajuster par une fonction de corrélation paramétrique en respectant les propriétés décrites dans la section 3.3.1 du chapitre 3.

Figure 4.11: Historical Forward-Forward Correlation



Nous testons donc ces deux méthodes. Pour l’approche Svensson, Nelson et Siegel, les résultats dépendent fortement des valeurs initiales des paramètres choisies. Notons que nous avons autour de 300 observations et donc 300 ensembles de paramètres à initialiser. Procéder à la sélection des valeurs initiales des paramètres une par une devient rapidement coûteux en temps. Nous avons donc choisi, pour les paramètres β_0 et β_1 dans l’équation E.1.5, les taux 30 ans et la différence entre le taux 1 an et le taux 30 ans comme valeurs initiales. Pour les autres paramètres, nous avons utilisé les mêmes valeurs initiales. Certaines donnent un lissage raisonnable mais certaines non. Les résultats de cette partie sont disponibles sur demande. Ces problèmes sont également abordés par Crispoldi et al. (2015) [30]. Ils avancent que bien que six paramètres puissent généralement être suffisants pour décrire l’évolution de la courbe des forwards, il peut y avoir des cas pour lesquels la paramétrisation s’avère trop simpliste. Nous adoptons donc uniquement le calibrage par des fonctions paramétriques.

4.2.2.4 Calibrage par fonctions paramétriques

Ici, nous testons les 4 formes paramétriques décrits dans le chapitre 3: la forme exponentielle simple, la forme exponentielle décroissante à 2 paramètres, la forme double exponentielle à 3

paramètres et la forme de corrélation multiplicative de Doust (2007) [38]. Le calibrage revient à minimiser l'écart entre les 2 matrices, mesurées par la somme des carrés des erreurs:

$$\min \sum_{i,j} \left(\rho_{i,j}^{histo} - \rho_{i,j}^{param} \right)^2 \quad (4.1)$$

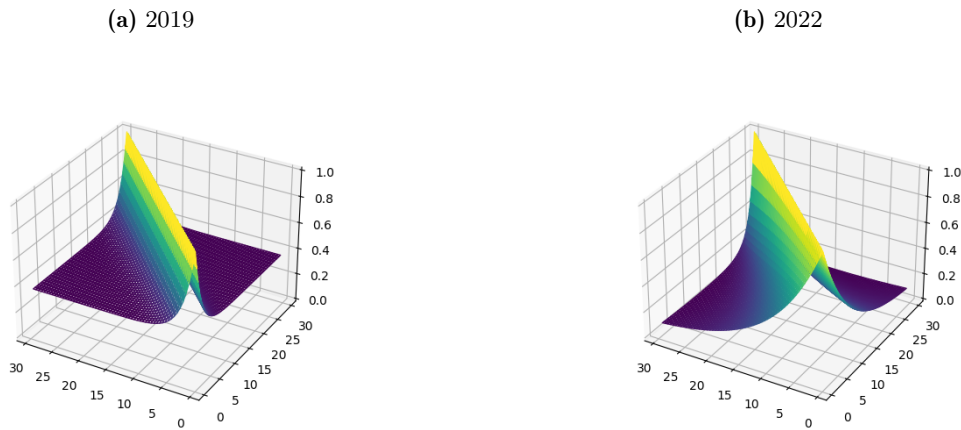
Les résultats sont donnés dans 4.2. Le critère de sélection du modèle est celui qui minimise l'écart quadratique moyen et la forme retenue est la forme double exponentielle à 3 paramètres. Rappelons également que cette forme permet une diminution moins rapide dans l'extrémité longue de la structure de corrélation, ce qui est une caractéristique souvent observée dans la matrice de corrélation forward-forward historique (les taux forwards de l'extrémité longue ont tendance à être plus corrélés que ceux de l'extrémité courte).

Table 4.2: Résultats des paramètres de calibrage des corrélation forward-forward

(a) 2019				
	Exponential	Exponential with Decay	Double Exponential	Doust
gamma	-	-	0.004468	-
beta	0.096285	0.440415	0.482366	0.576982
rho_inf	-	0.362201	0.364600	-
rms	0.139209	0.113900	0.113887	0.158773

(b) 2022				
	Exponential	Exponential with Decay	Double Exponential	Doust
alpha	-	-	-0.05643	-
beta	0.20843	0.34674	0.10721	2.12608
rho_inf	-	0.17264	0.06600	-
rms	0.11720	0.10580	0.10046	0.15308

La corrélation calibrée est représentée par le graphique 4.12. En effet, l'ajustement nous permet non seulement d'avoir des corrélations plus régulières, qui peut par conséquent conduire à des volatilités plus régulières et à une évolution plus stable de la structure par terme de la volatilité, mais également de réduire le coût de calcul.

Figure 4.12: Forward-Forward Corrélation Parametrization

4.2.2.5 Estimation des volatilités avec les modèles du type GARCH

Sur le marché, les produits dérivés à partir desquels on peut déduire des corrélations de volatilité-volatilité sont indisponibles. Par conséquent, nous devons encore avoir recours aux données historiques. La première possibilité est d'utiliser des séries temporelles des volatilités des caplets ATM historiques. La deuxième possibilité est d'approcher le processus des volatilités avec des modèles séries temporelles tel que GARCH en utilisant les données historiques des taux forwards. Du fait d'un manque des données historiques des volatilités des caplets (ou des caps), nous adoptons la seconde approche.

Dans la seconde approche, les volatilités sont déduites à partir des différences des taux forwards historiques ΔF_i à l'aide des modèles économétriques. Les variances des taux, ou encore des séries financières en générale peuvent varier dans le temps. Les modèles de type ARCH ont été développés pour capturer cette non linéarité en variance avec une paramétrisation endogène de la variance conditionnelle. Les modèles les plus classiques de ce type sont le modèle ARCH (Engle (1982) [45]) et le modèle GARCH (Bollerslev (1986) [15]). Des études empiriques montrent d'ailleurs que le modèle GARCH (1,1) souvent suffit pour obtenir des résultats satisfaisants.

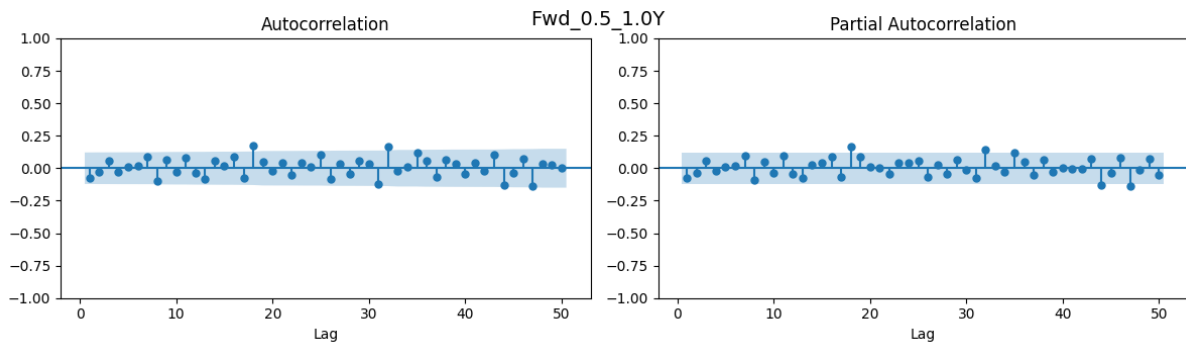
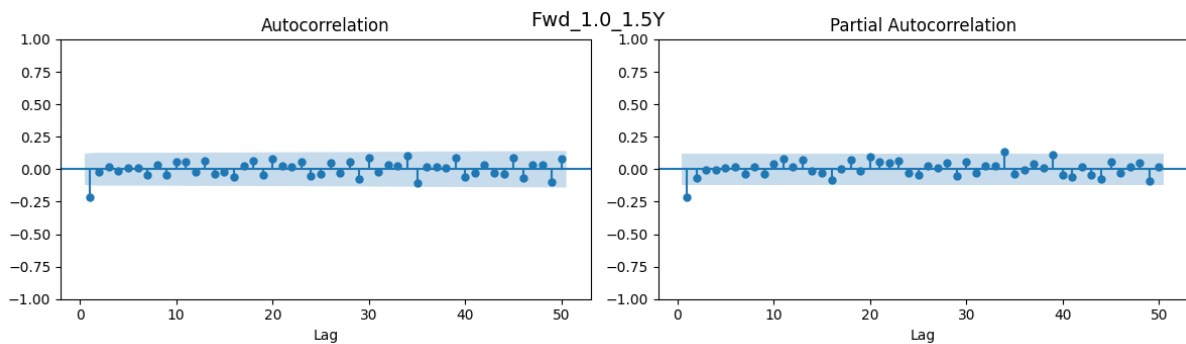
Par contre, du fait de la forme quadratique entre la variance conditionnelle et l'erreur dans les spécifications, les modèles ARCH et GARCH ne permettent pas de modéliser le phénomène d'asymétrie, ce qui revient à supposer que des nouvelles positives et négatives ont des impacts symétriques sur la volatilité (Nelson (1991) [88] et Cao et Tsay (1992) [25]). Or, en réalité

des nouvelles négatives ont tendance à impacter la volatilité plus que des nouvelles positives. Des modèles dérivés des GARCH ont été ainsi proposés pour pallier ces lacunes. Parmi ces propositions, certaines portent sur le logarithme de la variance conditionnelle (tel que le modèle EGARCH (exponential GARCH, Nelson (1991) [88]), certaines utilisent des formes linéaires ou des fonctions linéaires par morceau au lieu de la forme quadratique (tel que QARCH (quadratique ARCH, Sentana (1995) [112]) et TGARCH (Threshold GARCH, Zakoian (1990) [123]), certaines introduisent un terme indicateur (tel que GJR-GARCH, Glosten et al. (1993) [52]).

Dans ce mémoire, pour chaque tenor, nous testons 4 modèles⁸: le modèle ARCH, le modèle GARCH(1,1), le modèle TGARCH(1, 1, 1) et le modèle GJR-GARCH(1,1,1). Nous sélectionnons le modèle le plus approprié selon les critères que nous détaillerons par la suite. Nous n’entrons pas dans les détails des modèles ici et nous expliquerons directement les étapes que nous avons effectuées et les résultats obtenus. Les ouvrages de référence des modèles séries temporelles sont nombreux, tel que Hamilton(1994) [58], Tsay(2005) [118], Greene (2018) [54] et etc. Nous invitons le lecteur à y se référer. Enfin, les procédures sont identiques pour les données relatifs aux 2019 et 2022 et les résultats sont similaires et nous reportons uniquement ceux de 2019 ici.

4.2.2.5.1 Test de la stationnarité et de la normalité des séries La première étape de notre estimation est d’examiner la stationnarité des séries avec des études graphiques des corrélogrammes et des tests de racines unitaires. Nous reportons uniquement les résultats graphiques pour les 2 premières séries et les autres graphiques sont disponibles sur demande. Par exemple, dans les graphiques 4.13 et 4.14, les autocorrélations (ACF) et les autocorrélations partielles (PACF) ne présentent pas de structures particulières, ce qui semble indiquer la stationnarité des changements de taux. Cette intuition est confirmée par les tests de racines unitaires ADF (Augmented Dickey-Fuller), qui sont résumés dans le tableau A.2 dans l’annexe A et qui nous permettent de conclure que toute les séries sont faiblement stationnaires.

⁸Le package utilisé pour cette partie est principalement “arch” du Python.

Figure 4.13: ACF et PACF des changements des taux forwards**Figure 4.14:** ACF et PACF des changements des taux forwards

Puis, nous testons la normalité des séries avec le test de Jarque et Bera. Parmi les 59 séries, 52 ne suivent pas la loi normale et nous utiliserons donc les hypothèses Student-T pour les processus de ces séries à estimer.

4.2.2.5.2 Selection des modèles optimaux Ensuite, nous estimons les 4 modèles candidats et nous éliminons d'abord les modèles qui n'aboutissent pas à des résultats convergents de l'estimation. Nous avons donc une pré-sélection des modèles. Lorsque le phénomène d'asymétrie est présent, nous privilégions les modèles TGARCH et GJR-GARCH. Pour déterminer les modèles retenus, nous comparons les modèles avec 3 critères de sélection: LL (la log-vraisemblance à l'optimum), AIC (Critères d'Information d'Akaike) et BIC (Critères d'Information de Bayesian). Le modèle sélectionné pour chaque tenor est celui qui remporte le plus des critères. A la fin, nous examinons les coefficients de l'équation de la variance et leur p-value avec le modèle sélectionné. Lorsque les coefficients de l'équation de la variance de la spécification ne peuvent pas significativement différents de zéro, nous rejetons cette spécification et nous utilisons le modèle

ARCH par défaut (le plus parcimonieux). L'ensemble des modèles sélectionnés sont résumées dans le tableau A.4 dans l'annexe A. Les résultats des étapes intermédiaires sont disponibles sur demande.

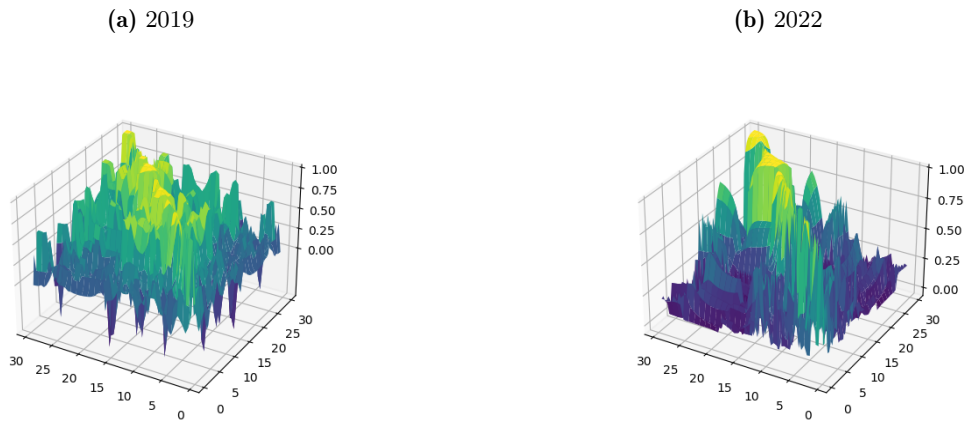
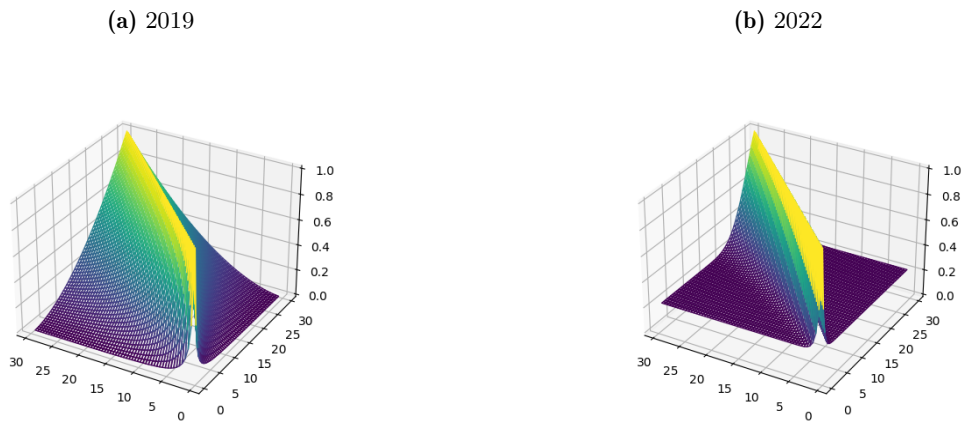
4.2.2.5.3 Résultats d'estimation des modèles type GARCH Pour illustrer l'estimation avec les modèles sélectionnés, un exemple avec le résultat de la série du taux forward $F(1, 1, 5)$ est donné dans le tableau suivant. On remarquera que le coefficient β est très proche de 1, indiquant un phénomène de la persistance dans la variance conditionnelle. Par ailleurs, le coefficient γ est significativement différent de 0, vérifiant bien la présence d'un phénomène d'asymétrie. Les résultats détaillés des autres séries sont disponibles sur demande.

4.2.2.6 Calibrage des corrélations volatilité-volatilité

Une fois les volatilités historiques estimées, une matrice de corrélation de volatilité-volatilité de dimension 59×59 peut être construite comme pour les corrélations des forward-forward. Les étapes suivantes sont similaires au calibrage des corrélations forward-forward. La matrice de corrélation historique volatilité-volatilité est ensuite approchée par des formes paramétriques. De même, nous testons les 4 formulations et nous sélectionnons celle qui minimise le plus l'écart quadratique moyen entre la matrice de corrélation volatilité-volatilité historique et la matrice de corrélation paramétrée. Les résultats sont résumés dans le tableau 4.3 et la spécification retenue est celle de Doust (1997). La matrice de corrélation volatilité-volatilité historique et la matrice de corrélation paramétrée sont représentées par les graphiques 4.15 et 4.16.

Table 4.3: Résultats des paramètres de calibrage des corrélation volatilité-volatilité

(a) 2019				
	Exponential	Exponential with Decay	Double Exponential	Doust
alpha	-	-	0.055230	-
beta	0.132042	0.387267	0.776257	0.876236
rho_inf	-	0.265907	0.259847	-
rms	0.071194	0.059445	0.056823	0.063084
(b) 2022				
	Exponential	Exponential with Decay	Double Exponential	Doust
alpha	-	-	0.09174	-
beta	0.19535	0.49347	1.96058	1.44986
rho_inf	-	0.22062	0.21944	-
rms	0.05333	0.03628	0.03031	0.04884

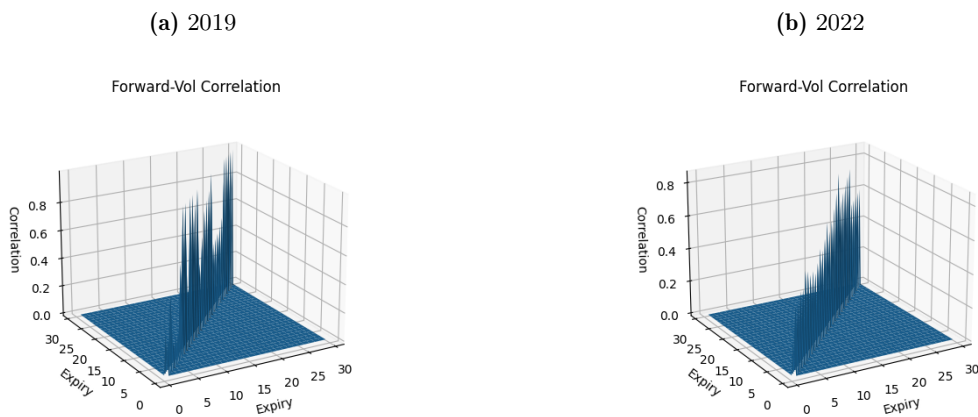
Figure 4.15: volatilité-volatilité Corrélation Historique**Figure 4.16:** volatilité-volatilité Corrélation Paramétrisation

4.2.2.7 Calibrage des corrélations forward-volatilité

Concernant la matrice de corrélation de forward-volatilité ρ , elle n'a pas les mêmes caractéristiques que celle des forward-forward ou des volatilité-volatilité. Ses éléments ne peuvent pas non plus être déduits à partir des données historiques (aucun produit négocié directement lié existe). Les seules informations à disposition sont ses éléments diagonaux, qui peuvent être définis comme les coefficients de corrélation forward-volatilité d'un modèle SABR classique. Il existe deux approches pour le calibrage: l'approche standard consiste à fixer β_i pour chaque maturité i et trouver les valeurs ρ_i calibrés (comme décrit dans la section 4.2.2.8 ci-après, et définir les éléments diagonaux

de ρ comme étant égal ρ_i .⁹ La 2nd approche consiste à définir la matrice de corrélation de forward-volatilité ρ comme une matrice nulle. Bien que la 2nd approche apparaisse simplifiée, le calibrage donne également de bons résultats selon les études (Crispoldi et al. (2015) [30]), tout comme l'excellente performance d'un modèle SABR avec ρ nulle, sans oublier les gains dans le temps et la simplification (il n'y a plus de terme drift dans le processus $s(t)$) du calcul. Le choix des méthodes dépend donc du cadre de l'application. Dans ce mémoire, nous adoptons l'approche classique, en considérant que nous devons fixer $\beta_i = 0$ pour incorporer la possibilité de taux négatifs.

Figure 4.17: Forward-volatilitéCorrélation



Les résultats sont représentés sur le graphique 4.17 et montrent que les corrélations sont positives dans les 2 applications. Ce qui se traduit par une augmentation de volatilité avec la hausse des taux. Ces résultats sont moins fréquents dans les études passées. Cependant, ils reflètent les évolutions récentes du marché: les hausses de taux de ces derniers temps sont plutôt liées aux incertitudes accrues du marché, à la forte accélération de l'inflation suite aux chocs d'offre et de demande et les attitudes réticentes des investisseurs que nous avons détaillées dans le chapitre 1, et autrement dit, plus de volatilité.

⁹En effet, Rebonato et al (2011) [98] montrent qu'il est possible de réduire le nombre des facteurs de la matrice r et η respectivement avec $r^{reduced} = BB'$ et $\eta^{reduced} = CC'$, puis obtenir $\rho^{reduced} = BC'$. Ils montrent également que les matrices B et C peuvent être calibrées de sorte que les éléments diagonaux de la matrice ρ soient exactement (ou presque exactement) les valeurs ρ_i .

4.2.2.8 Calibrage des paramètres SABR

Ensuite, nous recouvrons les volatilités des caplets avec les différents paramètres du modèle SABR à l'aide de l'équation (2.65) ou (2.70). Le calibrage des paramètres α , β , ρ et ν du modèle SABR sont effectués pour chaque strike. Ce faisant, nous obtenons un ensemble des paramètres SABR des différents caplets expirant. L'optimisation des paramètres se fait en minimisant la somme des erreurs quadratiques telle que:

$$\min \sum_{k \in K} (\sigma_{Market,k}^2 - \sigma_{SABR,k}^2)^2$$

où K est l'ensemble des strikes sélectionnés. Notons que β est fixé à 0 pour tenir en compte de la possibilité de taux négatifs. Par ailleurs, le coefficient α peut se déduire à l'aide de l'équation 2.67 ou 2.71, ce qui revient à le déterminer en fonction de ρ et σ . Ainsi, seuls les 2 paramètres ρ et σ sont déduits directement de l'optimisation¹⁰.

4.2.2.9 Calibrage des volatilités

Pour modéliser les volatilités instantanées des forwards, nous implémentons dans ce mémoire 3 formes de spécification des volatilités que nous avons décrit dans la section 3.2.2, dont les volatilités dépendent de la maturité résiduelle et la forme de la courbe des volatilités est invariable dans le temps, ce qui est une propriété désirée¹¹.

Le calibrage de la première spécification, donnée dans l'équation (3.9, forme 2 BM), peut être formulé tel que:

$$\begin{aligned} T_1(\nu_{1y,1.5y}^{caplet})^2 &= \sigma_1^2 \tau_1 \\ T_2(\nu_{1.5y,2y}^{caplet})^2 &= \sigma_2^2 \tau_1 + \sigma_1^2 \tau_2 \\ &\vdots \\ T_{59}(\nu_{29,5y,30y}^{caplet})^2 &= \sum_{i=1}^{59} \sigma_i^2 \tau_i \end{aligned}$$

On peut donc déduire les volatilités instantanées σ_i de manière récursive et il n'y a pas d'optimisation requise. Notons qu'il est possible que certaines structures des volatilités ne

¹⁰La minimisation est effectuée avec la fonction *optimize.least_squares* du package du *scipy* de Python.

¹¹Considérant que la valeur ajoutée du formule (3.9, forme 5 BM) comparée à (3.9, forme 2 BM) est similaire à celle de (3.12, forme 7 BM) par rapport à (3.12, forme 6 BM), nous n'utilisons que la forme (3.9, forme 2 BM) ici.

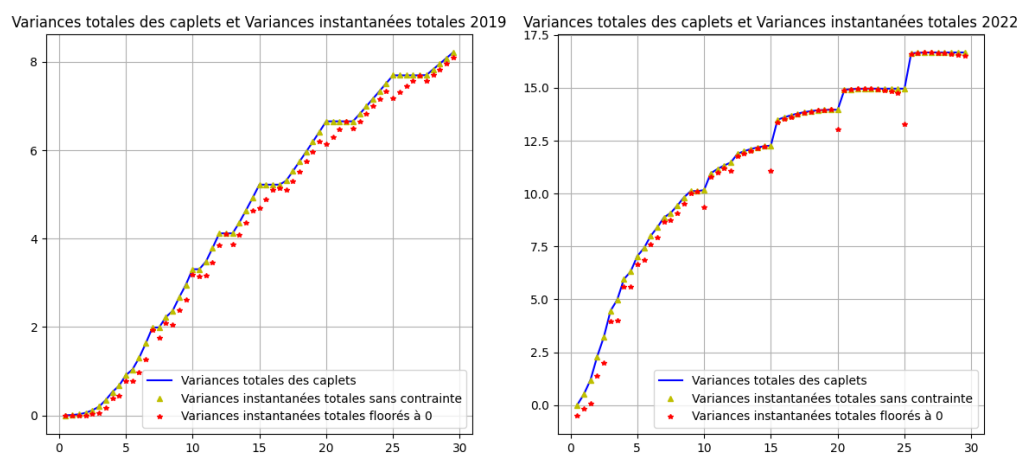
puissent pas être représentées par cette spécification, car en pratique les volatilités des caplets peuvent être non homogènes dans le temps pour un cap particulier et il est possible que le total des volatilités instantanées soit supérieure à celle des caplets (multipliée par la maturité). Le cas échéant, les volatilités instantanées sont floorées à 0.

La deuxième et la troisième spécification sont données par (3.12, forme 6 BM) et (3.12, forme 7 BM). Le calibrage de (3.12, forme 6 BM) revient à minimiser la distance entre les volatilités des caplets et la moyenne de l'intégrale des fonctions paramétriques des volatilités instantanées:

$$\min_{a,b,c,d} \sum_i \left[\sigma_{caplet,i}^2 - \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \left((a(T_{i-1} - t) + d) e^{-b(T_{i-1}-t)} + c \right)^2 dt \right]^2$$

Les résultats des calibrages de cette forme de spécification sont donnés dans les graphiques 4.18. Sans la contrainte de la volatilité qui doit être positive ou nulle, des ajustements parfaits auraient été obtenus. Cependant, du fait que certaines volatilités instantanées sont floorées à 0, on peut constater des écarts entre les variances totales selon la cotation du marché et celles calculées à partir de la spécification 2. On observe également que les écarts sont plus nombreux mais plus faible en 2019, ce qui peut s'expliquer par le fait qu'il y a moins de variations mais plus des points floorés à 0 dans la courbe des volatilités instantanées des caplets en 2019.

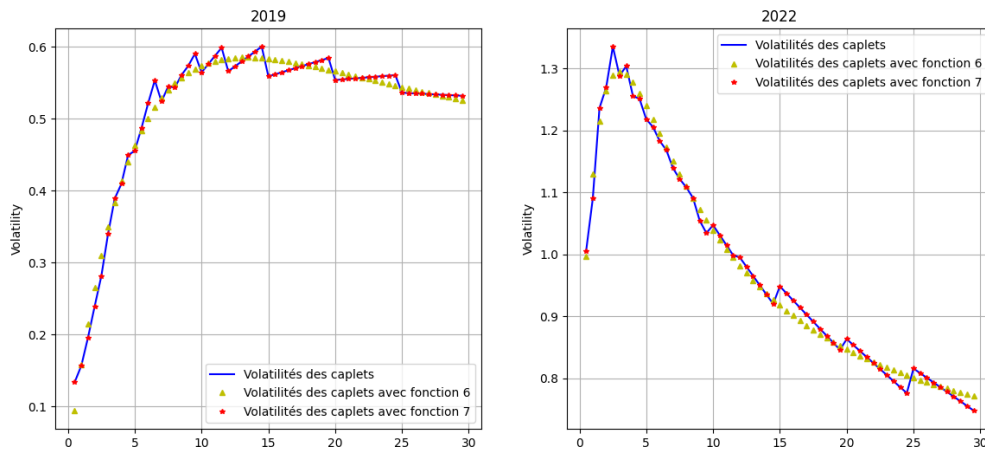
Figure 4.18: Les volatilités instantanées obtenues avec formule 2



Concernant la forme paramétrique (3.12, forme 7 BM), il dispose en plus d'une série des

paramètres Φ pour assurer un calibrage exact. Nous avons ainsi $n + 4$ paramètres à calibrer pour n volatilités des caplets et plusieurs méthodes de calibrage existent. Une des possibilités est de réutiliser les paramètres calibrés dans l'équation (3.12, forme 6 BM) et c'est ce que nous allons adopter et nous déduisons ensuite Φ pour l'ajustement.

Figure 4.19: Les volatilités instantanées obtenues avec formule 6 et 7



Le graphique 4.19 montre un ajustement plus lisse avec la forme 6 (3.12, forme 6 BM) pour les 2 dates. En outre, une fois que nous introduisons les paramètres Φ avec la fonction 7 (3.12, forme 7 BM), nous obtenons un calibrage exact. D'ailleurs, les paramètres Φ pour 31/12/2019, donnés dans le tableau 4.4, sont proches de 1, ce qui est cohérent avec leur rôle des modifications locales: d'un côté, ils ajoutent de la souplesse à la forme paramétrique et d'autre côté, ils ne détruisent pas la stabilité de la forme de la structure des volatilités. Les résultats de l'estimation des paramètres Φ pour 31/12/2022 sont similaires et nous ne reportons pas ici. Nous retiendrons la forme 7 par la suite en tenant compte de ses résultats très satisfaits de calibrage.

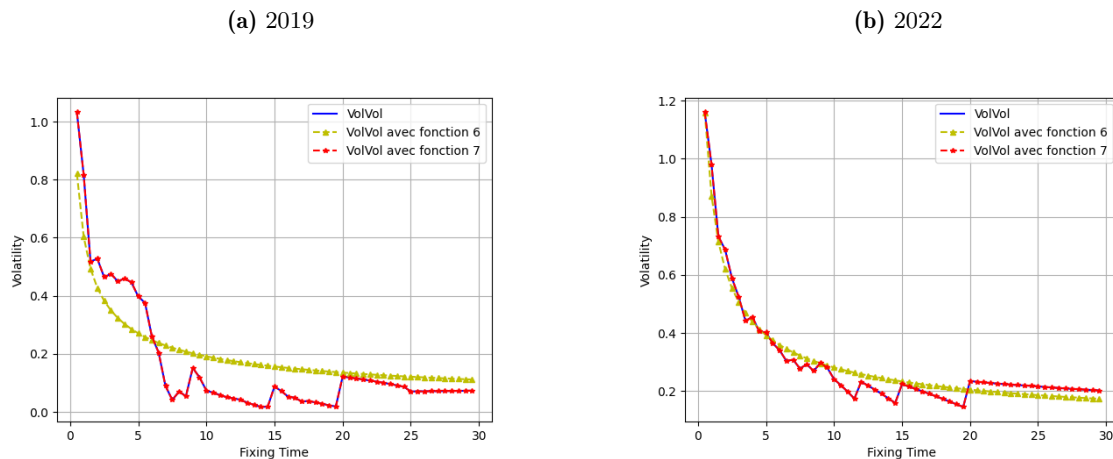
Table 4.4: Calibrage avec la forme 7: valeur des paramètres Φ (2019)

1.4182	0.9889	0.9095	0.9013	0.9076	0.9731	1.0142	0.9895	1.0204	0.9832
1.0068	1.0410	1.0726	0.9907	1.0089	0.9891	1.0061	1.0167	1.0364	0.9834
0.9971	1.0120	1.0280	0.9693	0.9795	0.9904	1.0020	1.0143	1.0272	0.9579
0.9646	0.9716	0.9790	0.9867	0.9947	1.0028	1.0112	1.0198	1.0285	0.9784
0.9835	0.9887	0.9939	0.9992	1.0046	1.0099	1.0153	1.0207	1.0262	0.9852
0.9882	0.9911	0.9941	0.9970	0.9999	1.0028	1.0056	1.0084	1.0112	

4.2.2.10 Calibrage des volvols

Pour modéliser les volvols, nous implémentons uniquement les 2 fonctions paramétriques (3.12, forme 6 BM) et (3.12, forme 7 BM) et les résultats sont directement donnés dans le graphique 4.20. Les résultats étant similaires à ceux des volatilités des caplets, nous ne commentons donc pas ici.

Figure 4.20: Les volvols instantanées obtenues avec formule 6 et 7

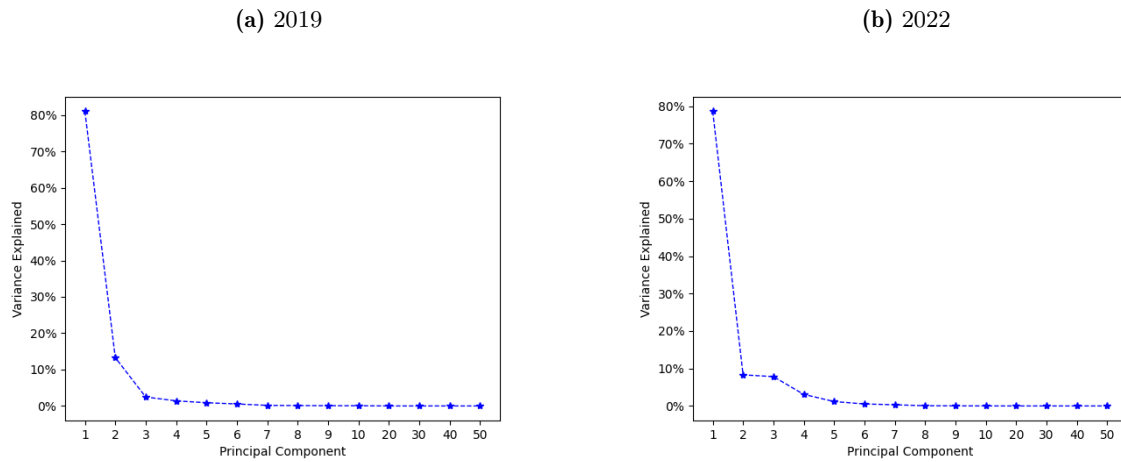


4.2.3 Simulation

4.2.3.1 Réduction des dimensions: “Zeroing” valeur propres

Afin de réduire le temps de simulation, nous adoptons la technique “zeroing” valeurs propres comme discuté dans la section 3.3.5.1 du chapitre 3. Nous effectuons d’abord l’analyse en composantes principales pour déterminer le nombre de facteur à retenir. Les scree plots (graphique 4.21) dans les 2 cas suggèrent que 4 premiers composants principales capturent autour de 98% des variances totales dans l’ensemble des 59 taux forwards. Seule la première composante principale explique respectivement 81% et 78% des variances totales. Nous retenons donc 4 vecteurs propres s’associant aux 4 plus grands valeurs propres dans la simulation.

Figure 4.21: ACP Sree plot



4.2.3.2 Résultats de simulation

La simulation LMM-SABR est effectuée sous la mesure terminale, en suivant la suggestion du Crispoldi et al. (2015) [30]. La simulation des taux forwards couvrant de 6 mois à partir de la date $t=0$ jusqu'à 30 ans pour chaque tenor de 6 mois. Comme pour le modèle Hull-White, 2000 simulations ont été générés avec 48 pas par an sur un horizon de 30 ans. A titre d'illustration, les simulations des taux forwards dans 1 ans et 2 ans pour le 31/12/2019 et le 31/12/2022 sont reportées sur le graphique 4.22. Les moyennes de l'estimation sont données par le graphique 4.23.

Figure 4.22: Simulation modèle LMM-SABR - taux forward dans 1 an

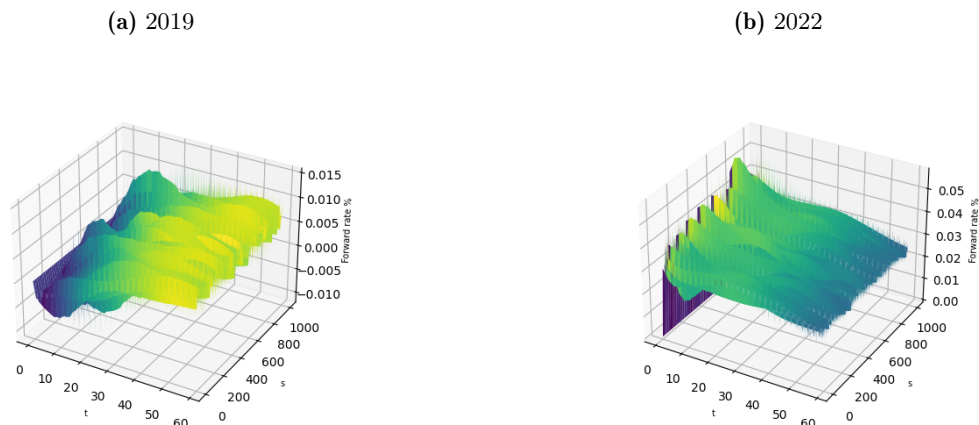
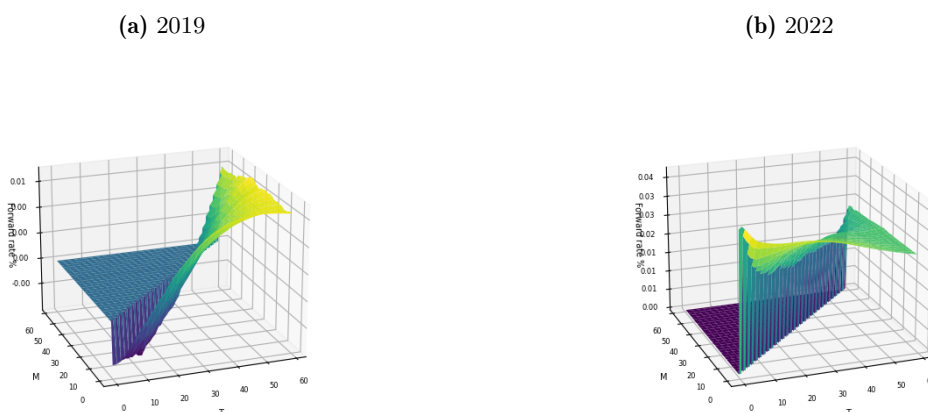


Figure 4.23: Simulation modèle LMM-SABR - moyenne des taux forward

4.3 Comparaisons des modèles

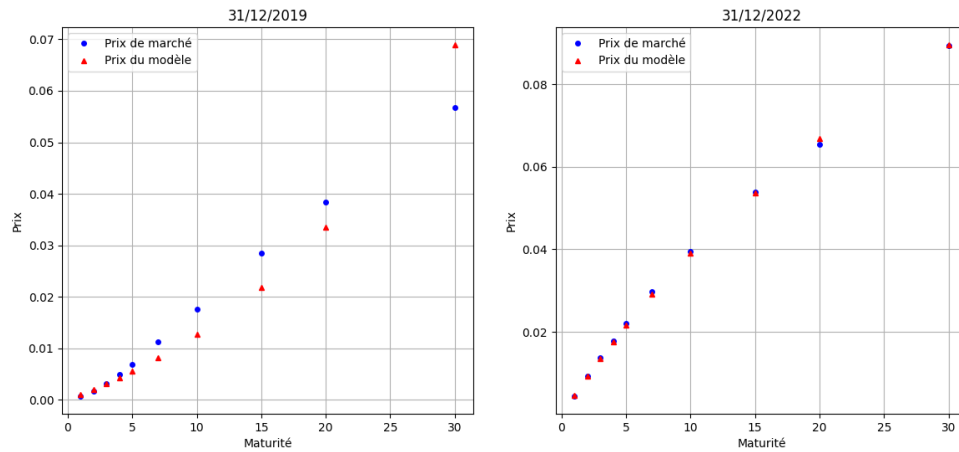
Enfin, nous évaluons les 2 modèles en termes de market consistency en comparant les valeurs du marché et les valeurs recalculés du modèle. Les prix des swaptions ATM côtés et les prix recalculés avec le modèle Hull et White sont représentées par le graphique 4.24. On observera que la qualité de calibrage est bonne pour 2022 mais moindre pour 2019. Concernant le modèle LMM-SABR, nous pouvons apprécier la qualité du calibrage du modèle dans les 2 applications avec le graphique 4.25, où la nappe des volatilités de marché et des volatilités reconstruites avec le modèle LMM-SABR sont très proches (les graphiques à droite représentent les écarts des nappes du modèle et dumarché).

Par ailleurs, nous calculons les racines de l'erreur quadratique moyenne (RMSE, *root-mean-square error*) en valeur et en pourcentage entre les valeurs du marché et les valeurs du modèle. Les résultats des RMSE sont résumés dans les tableaux 4.5 et 4.6:

Table 4.5: Les écarts entre les prix ATM des swaptions côtés et celle du modèle HW

Mesure des écarts	2019	2022
RMSE	50.4085 <i>bp</i>	5.42587 <i>bp</i>
RMSE (relative)	22.6811%	2.49628%

Les résultats sont en ligne avec nos observations graphiques. On constatera que les écarts sont très faibles pour le modèle LMM-SABR dans les 2 cas, tandis que les écarts du modèle Hull et

Figure 4.24: Comparaisons des prix des swaptions ATM du marché et du modèle Hull-White**Table 4.6:** Les écarts entre la nappe de volatilités cotées et celle du modèle LMM-SABR

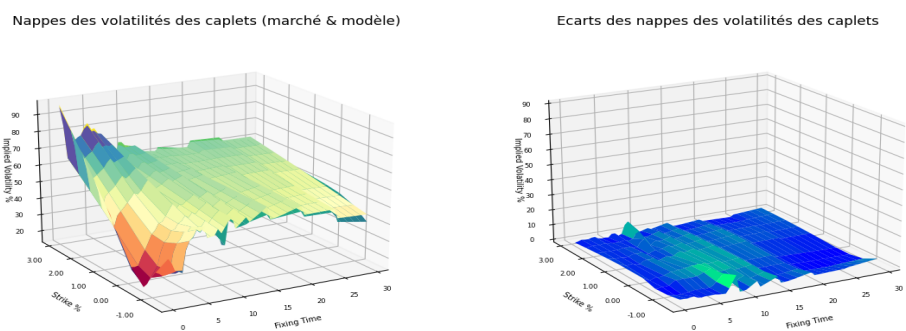
Mesure des écarts	2019	2022
RMSE	1.75718 <i>bp</i>	2.37058 <i>bp</i>
RMSE (relative)	3.52364%	2.68387%

White dépendent des échantillons utilisés. Ce qui confirme les difficultés du modèle Hull-White pour représenter toutes formes de courbes de taux et de reproduire les prix de marché si la courbe des taux s'éloigne du cadre standard d'un côté, et la robustesse du modèle LMM-SABR dans des contextes différents d'un autre.

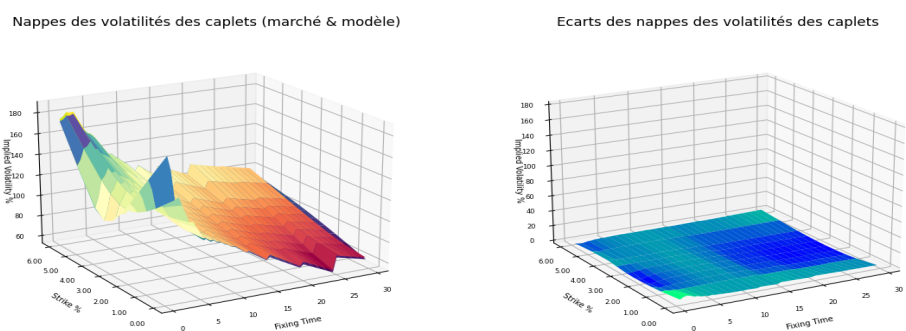
Nous terminons ce chapitre en soulignant des limites existantes du modèle LMM-SABR. D'abord, le nombre de paramètres à calibrer est plus important comparé au modèle Hull-White, ce qui néanmoins n'est pas très problématique car la fréquence de calibrage en assurance est souvent trimestrielle. Puis, comme nous l'avons mentionné, les volatilités implicites obtenues avec l'approximation d'Hagan et al peuvent être explosives pour des options des strikes élevés. Ce qui en générale n'est pas problématique non plus pour nos applications. Par exemple, nous avons sélectionné des strikes pas trop éloignés des valeurs ATM dans ce mémoire. Par ailleurs, des alternatives ont été proposées par Antonov et al (2013)[8] et Obloj (2008)[90]. Enfin, la performance du modèle peut être moindre en cas de perturbation extrême. Par contre, comme Rebonato et al. (2011) [98] l'indiquent, aucun modèle avec un seul régime de volatilité pourrait fournir de solutions adéquates sous de telles circonstances. Par ailleurs, les auteurs ont proposé le modèle à changement de régime Markovian comme alternative pour de telles situations, ce qui

Figure 4.25: Comparaisons des nappes des volatilités des caplets du marché et du modèle LMM-SABR et du marché

(a) 2019



(b) 2022



est hors de la portée de ce mémoire, mais qui pourrait faire l'objet d'une prochaine étude.

Conclusion

En guise de conclusion, nous souhaitons nous resituer dans le contexte actuel et terminerons en résumant les implications pour les assureurs ainsi que les possibles applications de la modélisation des taux d'intérêt dans ces perspectives et des prolongements possibles pour ce mémoire.

Dans l'ensemble, la hausse des taux d'intérêt pourrait soutenir la rentabilité du secteur de l'assurance à long terme. Néanmoins, l'environnement macroéconomique et de marché restera difficile pour les assureurs à court et moyen terme. En raison des conditions de financement plus strictes et de la baisse de la consommation privée et publique, les perspectives de croissance du PIB restent très modérés pour 2023 et 2024 selon la BCE (2023) [10]. Par ailleurs, l'incertitude concernant les mesures monétaires à venir ainsi que les impacts sur l'économie est plus élevée. Ces situations économiques associées aux tensions géopolitiques croissantes entre les principales économies, qui peuvent intensifier la fragmentation économique, pèserait pour les perspectives économiques. Les assureurs sont donc face à des combinaisons d'opportunités et de risques auxquelles ils doivent être prêts à s'adapter et à gérer.

Compte tenu des divers impacts potentiels des hausses de taux d'intérêt, les compagnies d'assurance doivent être proactives que ce soit dans le renouvellement et la refonte des produits, dans l'adaptation d'allocation d'actifs et la diversification des portefeuilles, ou encore dans la gestion ALM et des risques. Il est primordial de bien appréhender le risque de taux dans ces différents aspects.

En termes d'allocation stratégique d'investissement, la hausse de taux et des primes de risque plus importantes signifient non seulement de meilleures opportunités et de meilleurs rendements, mais également permettent aux assureurs d'être plus sélectifs en matière de qualité de crédit des actifs. Selon une enquête réalisée par Goldman Sachs Insurance Asset Management en 2023, les assureurs estiment que l'augmentation des taux aura le plus grand impact sur leurs décisions d'allocation d'actifs au cours des prochaines années, une différence marquante par rapport aux mêmes enquêtes des années précédentes, où les exigences de capital réglementaire

étaient considérées comme le principal facteur¹². En effet, dans le contexte de la hausse de taux, les assureurs pourront envisager de réévaluer leurs allocations d'actifs, réduire les risques de leurs portefeuilles en désinvestissant certains titres plus risqués. Par ailleurs, les assureurs peuvent rééquilibrer leurs portefeuilles en augmentant la part des actifs liquides, par des ajustements et des allocations tactiques, en tenant compte du risque de rachat et du risque de liquidité associés à la hausse de taux.

En termes de gestion ALM, le niveau et la volatilité des taux d'intérêt resteront élevés pendant encore un bon moment. Comme AXA Investment Managers (2022) [16] indique dans leur rapport "Insurance investment outlook 2023", les gaps de duration et de convexité ainsi que les ratios de solvabilité peuvent être très sensibles aux mouvements de la courbe de taux. La modélisation de la courbe de taux dans la gestion ALM et dans les stratégies de couverture sera décisive. Enfin, en termes de gestion de risque, l'évaluation des risques et des tests de stress réguliers de la résilience financière face aux variations des taux d'intérêt et le maintien de fonds propres adéquats seront appréciés.

Le modèle LMM-SABR nous semble être un bon candidat pour des applications dans les différents aspects que nous avons discutés ci-dessus. Dans ce mémoire, nous avons vu la qualité du modèle LMM-SABR en termes de *market consistency* dans les différents environnements de taux, ce qui est fondamental dans les calculs réglementaires. Nous avons également vu que le modèle LMM-SABR cumule les avantages du modèle LMM et du modèle SABR. Le fait de pouvoir modéliser les taux des différentes maturités dans un cadre unifié et consistant permet une meilleure modélisation dans la gestion ALM, notamment si les gaps de duration et de convexité sont sensibles. Tandis que la capacité de tenir compte des volatilités et donc l'anticipation du marché concernant l'incertitude des taux est une opportunité pour capturer les possibilités de hausses du risque de rachat et du risque de liquidité. Une autre piste qui paraît intéressante est de tenir compte des interactions entre risque de taux, risque d'inflation et risque de rachat de manière directe et explicite, ce qui pourra faire l'objet d'une autre étude.

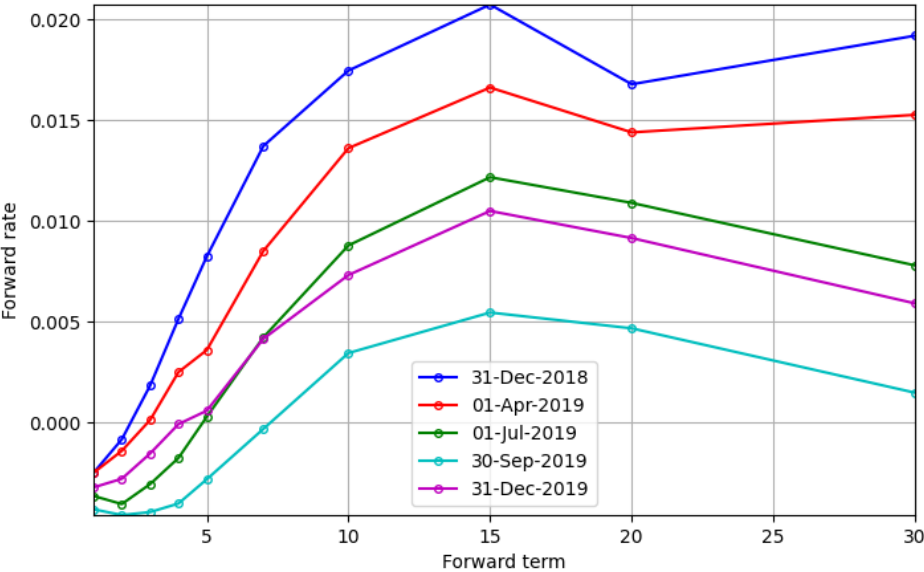
¹²L'enquête est réalisé auprès des de 343 directeurs des investissements (CIO) et directeurs financiers (CFO) des compagnies d'assurance et de réassurance qui représentent plus de 13 000 Mds\$ d'actifs au bilan total, soit environ la moitié du secteur de l'assurance dans le monde.

Annexes

Appendix A. Résultats complémentaires des applications empiriques

Figure A.1: Courbe des taux forwards estimée des différentes dates avec bootstrap

(a) 2019



(b) 2022

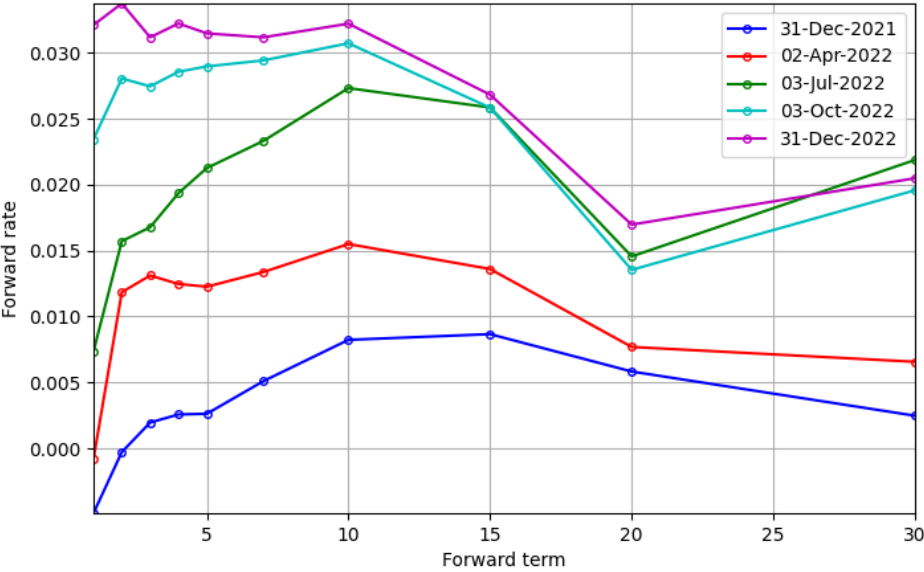
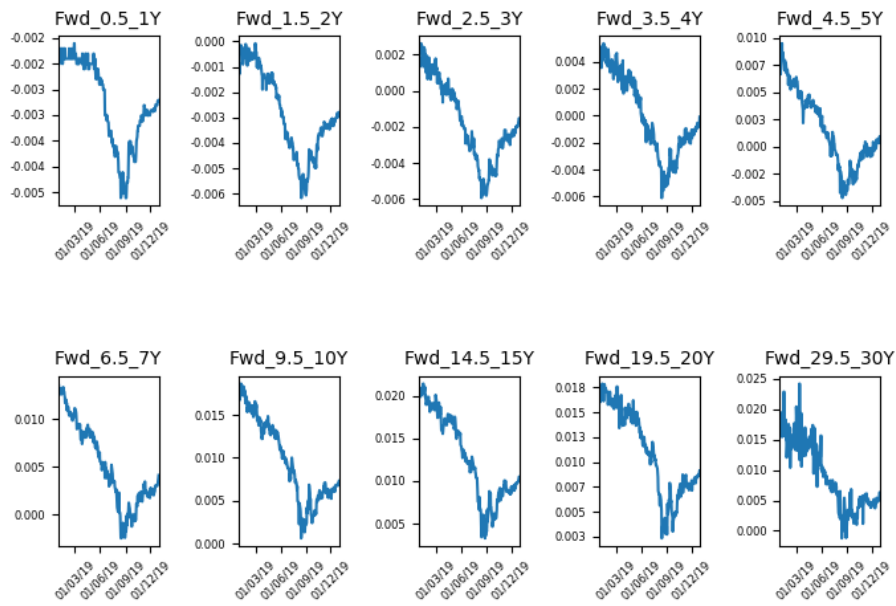


Figure A.2: Séries des taux forwards historiques des différents tenors avec bootstrap

(a) 2019



(b) 2022

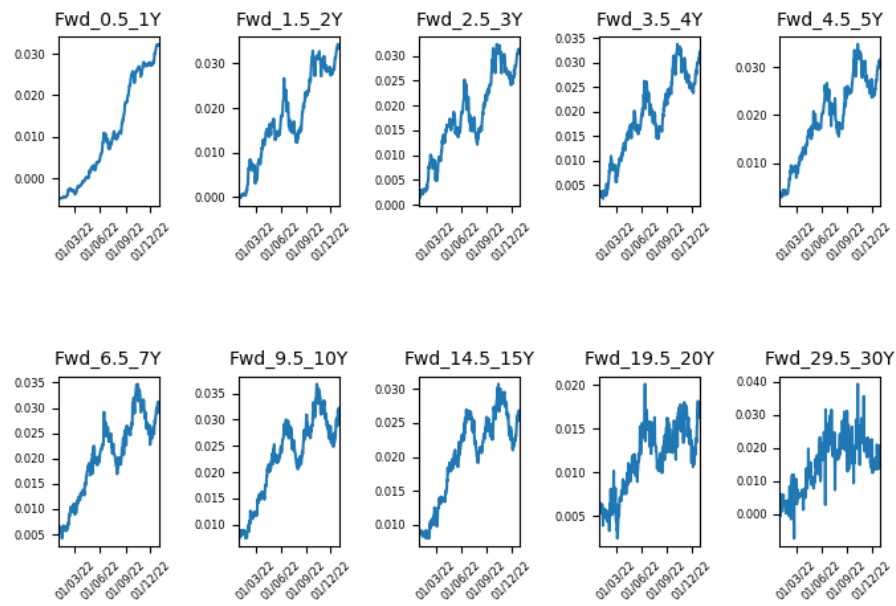


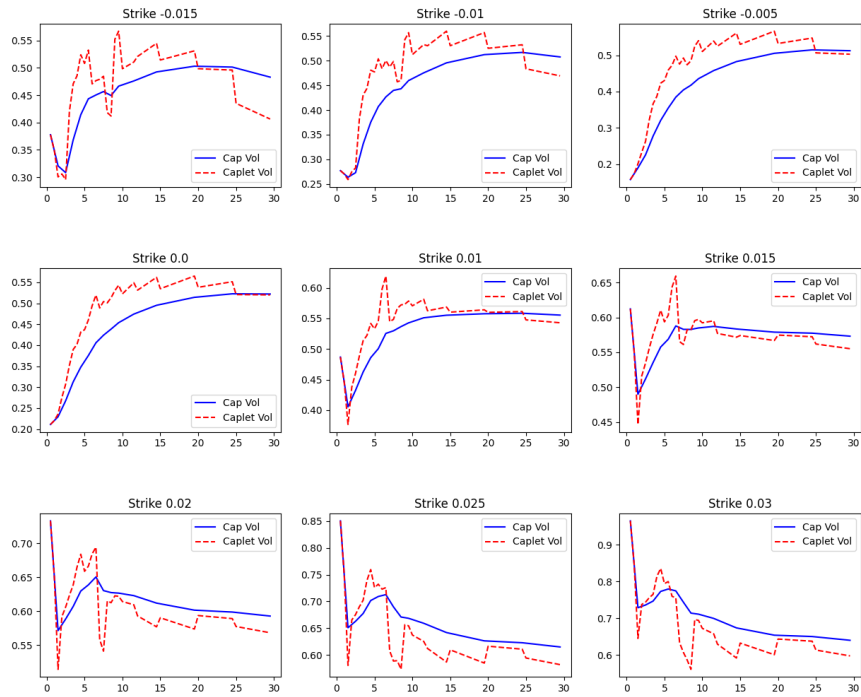
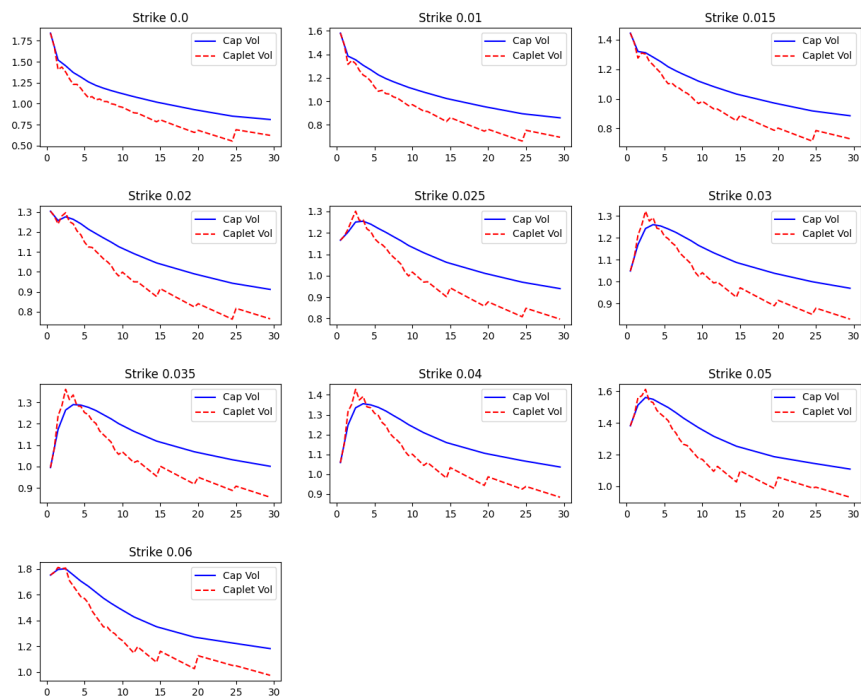
Figure A.3: Volatilités des caplets stripping à partir des nappes des volatilités des caps**(a) 2019****(b) 2022**

Table A.1: Estimation du processus TGARCH du taux forward $F(1, 1, 5)$

Dep. Variable:	y	R-squared:	0.000
Mean Model:	Zero Mean	Adj. R-squared:	0.004
Vol Model:	TARCH/ZARCH	Log-Likelihood:	1474.04
Distribution:	Standardized Student's t	AIC:	-2940.08
Method:	Maximum Likelihood	BIC:	-2925.82
		No. Observations:	261
		Df Residuals:	261
		Df Model:	0

	coef	std err	t	P > t	95.0% Conf. Int.
<i>omega</i>	1.8300e-05	1.601e-06	11.430	2.970e-30	[1.516e-05, 2.144e-05]
<i>gamma[1]</i>	0.1061	2.678e-02	3.963	7.395e-05	[5.365e-02, 0.159]
<i>beta[1]</i>	0.9275	1.315e-02	70.521	0.000	[0.902, 0.953]

	coef	std err	t	P > t	95.0% Conf. Int.
<i>nu</i>	6.3294	2.959	2.139	3.244e-02	[0.530, 12.129]

Covariance estimator: robust

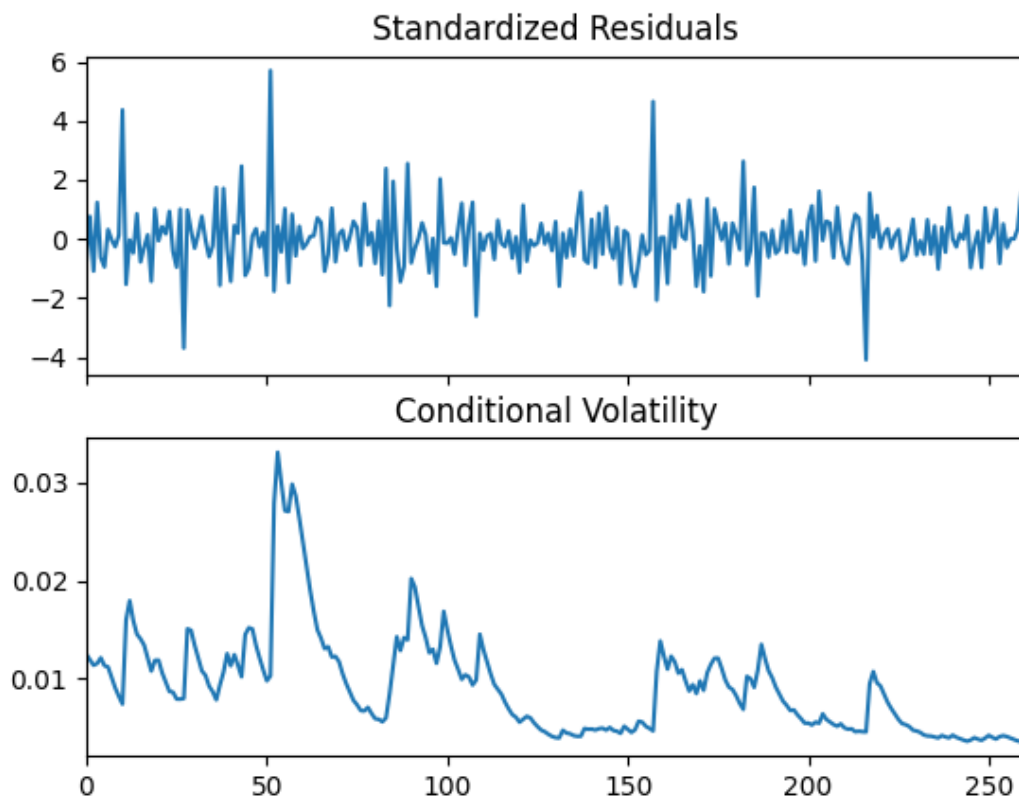
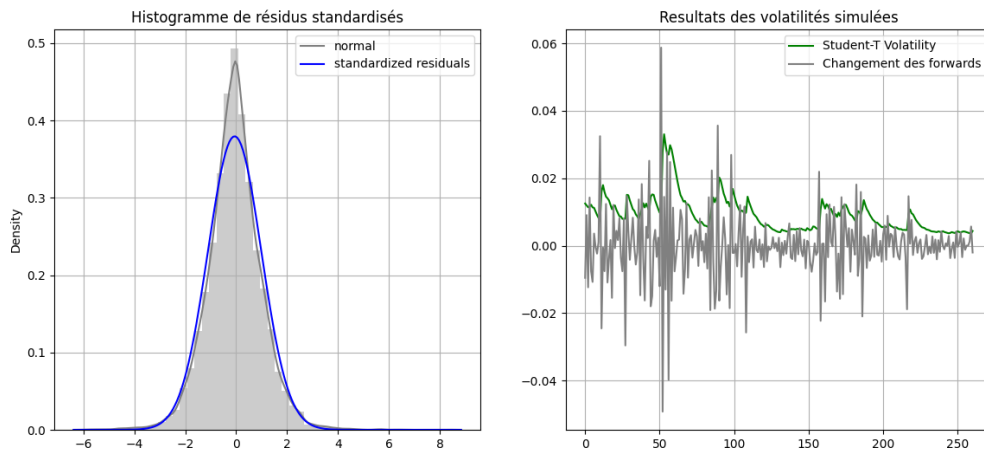
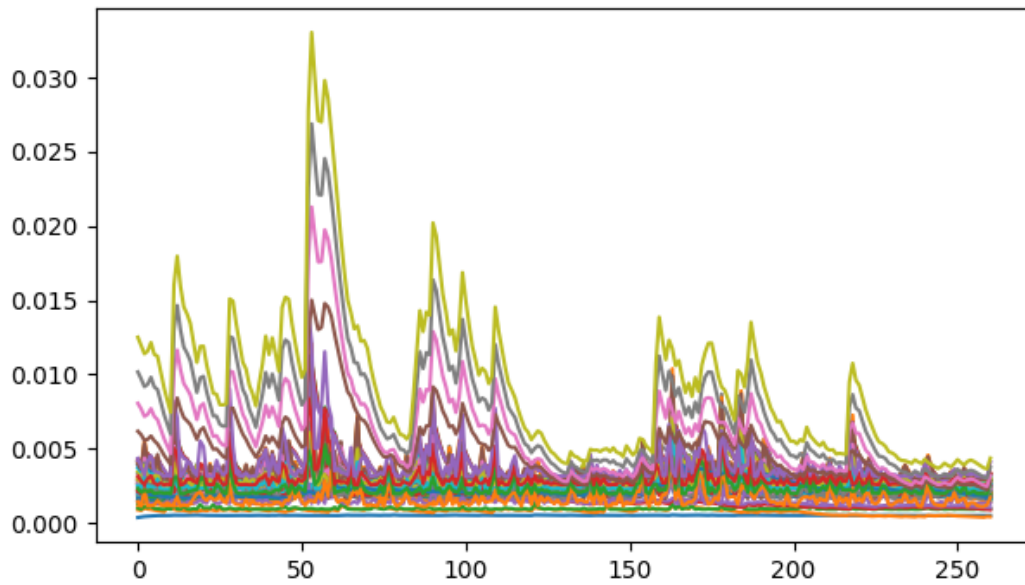
Figure A.4: Résidus standardisés et variances conditionnelles du taux forward $F(29.5, 30)$ 2019

Figure A.5: Ajustement du modèle GARCH du taux forward $F(29.5, 30)$ 2019**Figure A.6:** Volatilités historiques des taux forwards 2019

Forward	ADF Test Statistic	p-value	Forward	ADF Test Statistic	p-value	Forward	ADF Test Statistic	p-value
Fwd_0.5_1.0Y	-17.38	0.00	Fwd_10.5_11.0Y	-17.07	0.00	Fwd_20.5_21.0Y	-8.43	0.00
Fwd_1.0_1.5Y	-19.92	0.00	Fwd_11.0_11.5Y	-15.98	0.00	Fwd_21.0_21.5Y	-8.60	0.00
Fwd_1.5_2.0Y	-18.12	0.00	Fwd_11.5_12.0Y	-16.09	0.00	Fwd_21.5_22.0Y	-8.73	0.00
Fwd_2.0_2.5Y	-3.10	0.03	Fwd_12.0_12.5Y	-10.75	0.00	Fwd_22.0_22.5Y	-8.80	0.00
Fwd_2.5_3.0Y	-20.99	0.00	Fwd_12.5_13.0Y	-18.09	0.00	Fwd_22.5_23.0Y	-8.81	0.00
Fwd_3.0_3.5Y	-14.90	0.00	Fwd_13.0_13.5Y	-18.89	0.00	Fwd_23.0_23.5Y	-8.75	0.00
Fwd_3.5_4.0Y	-15.71	0.00	Fwd_13.5_14.0Y	-19.29	0.00	Fwd_23.5_24.0Y	-8.62	0.00
Fwd_4.0_4.5Y	-4.40	0.00	Fwd_14.0_14.5Y	-19.23	0.00	Fwd_24.0_24.5Y	-15.18	0.00
Fwd_4.5_5.0Y	-20.83	0.00	Fwd_14.5_15.0Y	-18.65	0.00	Fwd_24.5_25.0Y	-14.50	0.00
Fwd_5.0_5.5Y	-18.74	0.00	Fwd_15.0_15.5Y	-17.64	0.00	Fwd_25.0_25.5Y	-13.57	0.00
Fwd_5.5_6.0Y	-8.32	0.00	Fwd_15.5_16.0Y	-16.74	0.00	Fwd_25.5_26.0Y	-17.89	0.00
Fwd_6.0_6.5Y	-21.25	0.00	Fwd_16.0_16.5Y	-16.27	0.00	Fwd_26.0_26.5Y	-17.42	0.00
Fwd_6.5_7.0Y	-21.37	0.00	Fwd_16.5_17.0Y	-16.42	0.00	Fwd_26.5_27.0Y	-11.18	0.00
Fwd_7.0_7.5Y	-19.91	0.00	Fwd_17.0_17.5Y	-17.18	0.00	Fwd_27.0_27.5Y	-23.30	0.00
Fwd_7.5_8.0Y	-19.54	0.00	Fwd_17.5_18.0Y	-7.67	0.00	Fwd_27.5_28.0Y	-26.20	0.00
Fwd_8.0_8.5Y	-13.71	0.00	Fwd_18.0_18.5Y	-7.59	0.00	Fwd_28.0_28.5Y	-12.68	0.00
Fwd_8.5_9.0Y	-14.35	0.00	Fwd_18.5_19.0Y	-7.55	0.00	Fwd_28.5_29.0Y	-13.61	0.00
Fwd_9.0_9.5Y	-14.50	0.00	Fwd_19.0_19.5Y	-7.73	0.00	Fwd_29.0_29.5Y	-9.13	0.00
Fwd_9.5_10.0Y	-14.02	0.00	Fwd_19.5_20.0Y	-7.97	0.00	Fwd_29.5_30.0Y	-9.43	0.00

Table A.2: Résultats des tests ADF des séries de changement des forward

Forward	JB statistic	p-value	Forward	JB statistic	p-value	Forward	JB statistic	p-value
Fwd_0.5_1.0Y	68.00	0.00	Fwd_10.5_11.0Y	128.78	0.00	Fwd_20.5_21.0Y	107.17	0.00
Fwd_1.0_1.5Y	68.24	0.00	Fwd_11.0_11.5Y	105.48	0.00	Fwd_21.0_21.5Y	109.49	0.00
Fwd_1.5_2.0Y	5.52	0.06	Fwd_11.5_12.0Y	49.73	0.00	Fwd_21.5_22.0Y	108.07	0.00
Fwd_2.0_2.5Y	10.96	0.00	Fwd_12.0_12.5Y	18.75	0.00	Fwd_22.0_22.5Y	102.96	0.00
Fwd_2.5_3.0Y	4.43	0.11	Fwd_12.5_13.0Y	9.86	0.01	Fwd_22.5_23.0Y	94.34	0.00
Fwd_3.0_3.5Y	42.80	0.00	Fwd_13.0_13.5Y	7.73	0.02	Fwd_23.0_23.5Y	82.58	0.00
Fwd_3.5_4.0Y	2.27	0.32	Fwd_13.5_14.0Y	6.94	0.03	Fwd_23.5_24.0Y	68.60	0.00
Fwd_4.0_4.5Y	8.91	0.01	Fwd_14.0_14.5Y	6.03	0.05	Fwd_24.0_24.5Y	54.50	0.00
Fwd_4.5_5.0Y	16.84	0.00	Fwd_14.5_15.0Y	5.16	0.08	Fwd_24.5_25.0Y	44.76	0.00
Fwd_5.0_5.5Y	1.39	0.50	Fwd_15.0_15.5Y	6.19	0.05	Fwd_25.0_25.5Y	48.13	0.00
Fwd_5.5_6.0Y	5.70	0.06	Fwd_15.5_16.0Y	13.17	0.00	Fwd_25.5_26.0Y	70.55	0.00
Fwd_6.0_6.5Y	40.31	0.00	Fwd_16.0_16.5Y	28.63	0.00	Fwd_26.0_26.5Y	49.66	0.00
Fwd_6.5_7.0Y	27.65	0.00	Fwd_16.5_17.0Y	45.14	0.00	Fwd_26.5_27.0Y	15.20	0.00
Fwd_7.0_7.5Y	2.54	0.28	Fwd_17.0_17.5Y	53.44	0.00	Fwd_27.0_27.5Y	60.75	0.00
Fwd_7.5_8.0Y	6.65	0.04	Fwd_17.5_18.0Y	56.65	0.00	Fwd_27.5_28.0Y	176.93	0.00
Fwd_8.0_8.5Y	15.23	0.00	Fwd_18.0_18.5Y	61.63	0.00	Fwd_28.0_28.5Y	282.85	0.00
Fwd_8.5_9.0Y	30.07	0.00	Fwd_18.5_19.0Y	70.39	0.00	Fwd_28.5_29.0Y	350.08	0.00
Fwd_9.0_9.5Y	54.39	0.00	Fwd_19.0_19.5Y	81.40	0.00	Fwd_29.0_29.5Y	388.91	0.00
Fwd_9.5_10.0Y	81.12	0.00	Fwd_19.5_20.0Y	92.32	0.00	Fwd_29.5_30.0Y	412.01	0.00

Table A.3: Résultats des test Jarque et Bera des séries de changement des forward

Forward	Model_selected	Forward	Model_selected	Forward	Model_selected
Fwd_0.5_1.0Y	TGARCH	Fwd_10.5_11.0Y	TGARCH	Fwd_20.5_21.0Y	ARCH
Fwd_1.0_1.5Y	TGARCH	Fwd_11.0_11.5Y	GJR_GARCH	Fwd_21.0_21.5Y	ARCH
Fwd_1.5_2.0Y	TGARCH	Fwd_11.5_12.0Y	TGARCH	Fwd_21.5_22.0Y	GARCH
Fwd_2.0_2.5Y	TGARCH	Fwd_12.0_12.5Y	GARCH	Fwd_22.0_22.5Y	GARCH
Fwd_2.5_3.0Y	TGARCH	Fwd_12.5_13.0Y	GARCH	Fwd_22.5_23.0Y	GARCH
Fwd_3.0_3.5Y	ARCH	Fwd_13.0_13.5Y	GARCH	Fwd_23.0_23.5Y	ARCH
Fwd_3.5_4.0Y	GARCH	Fwd_13.5_14.0Y	GARCH	Fwd_23.5_24.0Y	ARCH
Fwd_4.0_4.5Y	GARCH	Fwd_14.0_14.5Y	GARCH	Fwd_24.0_24.5Y	GARCH
Fwd_4.5_5.0Y	GJR_GARCH	Fwd_14.5_15.0Y	TGARCH	Fwd_24.5_25.0Y	ARCH
Fwd_5.0_5.5Y	TGARCH	Fwd_15.0_15.5Y	TGARCH	Fwd_25.0_25.5Y	GJR_GARCH
Fwd_5.5_6.0Y	TGARCH	Fwd_15.5_16.0Y	TGARCH	Fwd_25.5_26.0Y	GJR_GARCH
Fwd_6.0_6.5Y	GARCH	Fwd_16.0_16.5Y	TGARCH	Fwd_26.0_26.5Y	ARCH
Fwd_6.5_7.0Y	GARCH	Fwd_16.5_17.0Y	GARCH	Fwd_26.5_27.0Y	ARCH
Fwd_7.0_7.5Y	TGARCH	Fwd_17.0_17.5Y	ARCH	Fwd_27.0_27.5Y	ARCH
Fwd_7.5_8.0Y	GJR_GARCH	Fwd_17.5_18.0Y	ARCH	Fwd_27.5_28.0Y	ARCH
Fwd_8.0_8.5Y	GJR_GARCH	Fwd_18.0_18.5Y	ARCH	Fwd_28.0_28.5Y	GARCH
Fwd_8.5_9.0Y	GJR_GARCH	Fwd_18.5_19.0Y	ARCH	Fwd_28.5_29.0Y	GARCH
Fwd_9.0_9.5Y	GJR_GARCH	Fwd_19.0_19.5Y	ARCH	Fwd_29.0_29.5Y	GARCH
Fwd_9.5_10.0Y	GJR_GARCH	Fwd_19.5_20.0Y	ARCH	Fwd_29.5_30.0Y	GARCH

Table A.4: Sélection des modèles type GARCH pour chaque tenor

Appendix B. Notions des taux et des produits dérivés classiques

Dans cette annexe, nous présenterons d'abord quelques définitions fondamentales relative aux taux. Ensuite, nous rappellerons des notions de base des martingales et le concept du portefeuille autofinçant et les relations fondamentales entre Absence d'Opportunité d'Arbitrage, martingale et marché complet qui sont utilisés dans ce mémoire. Nous présenterons également les outils de changement de mesures qui seront appliqués dans les modèles par la suite. Enfin, nous présenterons les produits dérivés des taux d'intérêts de base: les FRA, les futures, les options sur obligations, les cap/floors, les swaptions.

B.1 Notions fondamentales des taux

Les définitions relatives aux taux présentées ici s'appuient en partie sur le livre de référence de Brigo et Mercurio (2006) [21] et nous reprenons certaines de leurs notations avec adaptation.

B.1.1 Le taux spot et le taux instantané

Définition B.1.1 (Compte monétaire¹). *Le **compte monétaire** représente un investissement sans risque (localement). Notons $B(t)$ la valeur d'un compte monétaire à la date $t \geq 0$. Supposons que $B(0) = 1$ et que les intérêts s'accumulent de manière continu à un taux sans risque prévalant sur le marché à chaque instant t , noté par r_t . Nous avons alors:*

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \tag{B.1.1}$$

Autrement dit, $B(t)$ est la valeur d'un investissement d'une unité monétaire sur ce compte à la date t . Le taux $r(t)$ est nommé **taux court** ou **taux instantané**.

Afin de faciliter la notation, nous introduisons un facteur d'actualisation stochastique, qui est la

¹Définition 1.1.1, Brigo et Mercurio (2006) [21]

valeur à la date t d'un payoff d'une unité monétaire à la date T :

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp - \left(\int_t^T r_s ds \right) \quad (\text{B.1.2})$$

Nous utiliserons ces 3 expressions de manière interchangeable dans le mémoire.

Définition B.1.2 (Obligation zéro-coupon²). *Une obligation zéro-coupon d'une maturité T est un contrat qui ne verse pas de flux intermédiaires et qui garantie un versement d'une unité monétaire uniquement à la date T . Soit $P(t, T)$ la valeur de cette obligation à date t et $\tau(t, T)$ l'échéance à la maturité. Par définition, $P(T, T) = 1$.*

Le **taux spot** est consistant avec la valeur de l'obligation zéro-coupon. On peut alors le définir comme le taux constant prévalant à la date t , auquel un investissement de $P(t, T)$ unité s'accumulera et atteindra une unité monétaire à l'échéance T . En fonction de la fréquence de composition, on peut distinguer le taux simple, le taux continu, et les taux périodiques (annuel, semestrielle, trimestrielle, etc.).

- En temps continu (périodicité infiniesimale), notons le taux spot $R(t, T)$. Nous avons:

$$R(t, T) := - \frac{\ln P(t, T)}{\tau(t, T)} \quad (\text{B.1.3})$$

On peut écrire $P(t, T)$ en fonction de $R(t, T)$:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)\tau(t, T)} \quad (\text{B.1.4})$$

- En temps discret et en composition simple, notons le taux spot $L(t, T)$. Nous avons:

$$L(t, T) := \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)} \quad (\text{B.1.5})$$

On peut écrire $P(t, T)$ en fonction de $L(t, T)$:

$$P(t, T) = \frac{1}{1 + \tau(t, T)L(t, T)} \quad (\text{B.1.6})$$

²Définition 1.2.1, Brigo et Mercurio (2006) [21]

Le taux instantané $r(t)$ correspond en effet à la limite du taux spot quand T tend vers t^+ :

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T) \quad (\text{B.1.7})$$

$$= \lim_{T \rightarrow t^+} L(t, T) \quad (\text{B.1.8})$$

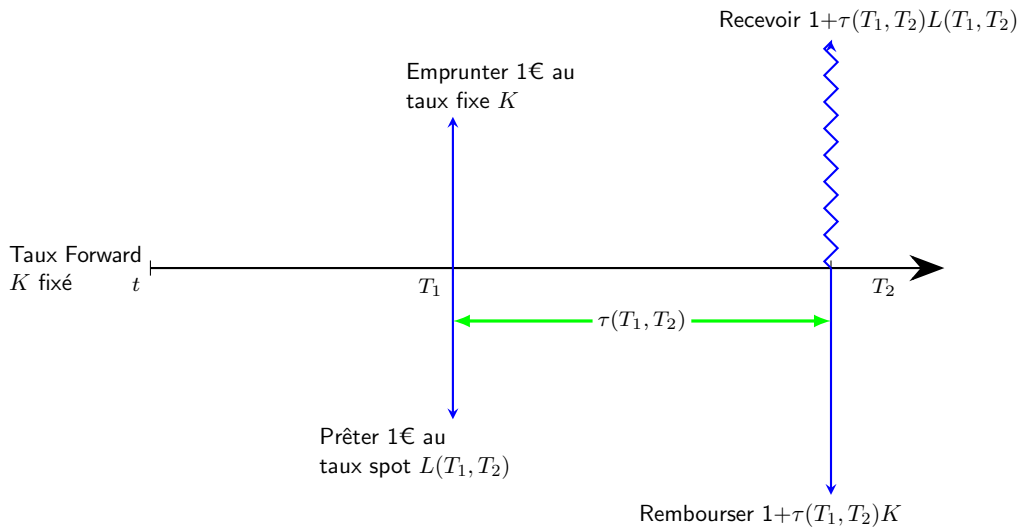
Il est important de distinguer le concept de la valeur d'un compte monétaire et celui du prix d'une obligation zéro-coupon. Comme explicité par Brigo et Mercurio (2006) [21], la valeur d'un compte monétaire est un montant monétaire équivalent: Comme le taux instantané $r(t)$ est stochastique, $B(T)$ est une valeur aléatoire, qui dépend de l'évolution de $r(t)$ entre la date 0 et T . Par contre, $P(0, T)$ est la valeur initiale d'un contrat qui garantie un payoff à la date T et donc est déterministe. Nous verrons dans la section B.4.1, $P(0, T)$ peut être considéré comme l'espérance de l'inverse de $B(T)$ sous la mesure de risque-neutre.

B.1.2 Le taux à terme

Avant de discuter **taux à terme** ou **taux forward**, il est utile d'introduire le **Forward Rate Agreement (FRA)**. Un **Forward Rate Agreement** est un contrat conclu entre deux contreparties à la date t , qui s'engagent à s'échanger un taux d'intérêt fixe d'un prêt ou un emprunt, noté K , d'un montant nominal ou notionnel, noté N , couvrant une période future $[T_1, T_2]$, où la date T_1 est la date d'expiration du contrat FRA, et T_2 est la maturité du prêt ou de l'emprunt. L'entrée dans un FRA permet donc de fixer à l'avance les conditions de taux pour une opération de placement ou de financement. Premier outil de couverture, cet instrument permet de se prémunir d'une hausse de taux d'intérêt (emprunteur) ou d'une baisse de taux (prêteur). Le taux K fixé à la date de conclusion du contrat t est le **taux forward**, noté $F(t, T_1, T_2)$.

L'hypothèse implicite du contrat FRA est qu'il est toujours possible de prêter ou emprunter aux taux prévalant sur le marché à tout moment. Considérons que la contrepartie emprunteur du contrat FRA prête simultanément le même montant de nominal au taux spot $L(T_1, T_2)$ prévalant sur la marché à la date T_1 . En combinant ce prêt, le FRA lui permettra de générer un flux calculé comme le produit du nominal noté N , multiplié par la différence entre le taux spot et le taux fixe. Soit $\tau(T_1, T_2)$ la durée $T_2 - T_1$ couverte par la transaction, Le diagramme des cash flows B.1 illustre les flux générés par ces opérations simultanées:

Figure B.1: Cash Flow d'un FRA



Ce contrat vaut alors à l'échéance T_2 :

$$FRA_{T_2} = N\tau(T_1, T_2) (K - L(T_1, T_2)) \quad (\text{B.1.9})$$

En pratique, les FRA sont généralement réglés à terme à échoir (souvent 2 jours après la date T_1). Le flux échangé correspond exactement à la valeur $V_{FRA}^{T_2}$ dans l'équation (B.1.9), c'est-à-dire les intérêts différentiels sans nominaux actualisés à la date T_1 . Le taux spot $L(T_1, T_2)$ utilisé est souvent les taux monétaires de référence comme l'EURIBOR/LIBOR 3 mois ou 6 mois³. La maturité τ est en général inférieure à 1 an.

Il est possible de déduire le prix d'une obligation zéro-coupon à partir d'une série des taux forwards. Pour simplifier, supposons que nous découpons la temps entre t et T_2 à n intervalles égaux, $t = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T_2$ et soit Δt la durée de chaque intervalle. En AOA, nous avons:

$$P(T_1, T_2) = e^{-\sum_{i=0}^{n-1} f(t, t_i, t_{i+1})\Delta t} \quad (\text{B.1.10})$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, on peut établir la relation suivante entre le taux forward et le prix d'une

³Les Libor USD-1 semaine, USD-2 semaines, GBP, EUR, CHF et JPY ont cessé la publication le 31 décembre 2021. Les Libor USD overnight et 12 mois ont cessé la publication le 30 juin 2023. Les Libor USD-1 mois, -3 mois, 6 mois cesseront sa publication après septembre 2024. Ils sont et seront remplacés par les taux RFR.

obligation zéro-coupon:

$$P(t, T_2) = \exp\left(-\int_t^{T_2} f(t, u) du\right) \quad (\text{B.1.11})$$

Le taux $f(t, T_1)$ est nommé le taux forward instantané et correspond à la limite de $F(t, T_1, T_2)$ quand T_2 tend vers T_1 :

$$f(t, T_1) = \lim_{T_2 \rightarrow T_1^+} F(t, T_1, T_2) \quad (\text{B.1.12})$$

En comparant l'équation (B.1.4) et (B.1.11), nous obtenons immédiatement les relations suivantes entre le taux spot et le taux forward instantané:

$$R(t, T) = \frac{\int_t^T f(t, u) du}{\tau(t, T)} \quad (\text{B.1.13})$$

$$f(t, T) = R(t, T) + \tau(t, T) \frac{\partial R(t, T)}{\partial T} \quad (\text{B.1.14})$$

L'équation (B.1.13) nous indique que $R(t, T)$ peut être considéré comme la moyenne des taux forwards instantanés, ce qui vérifie la théorie d'anticipation rationnelle⁴. Tandis que l'équation (B.1.13) nous indique comment déduire les taux forwards à partir des taux spots (voir plus en détail dans le chapitre 2).

En prenant le logarithme et en prenant les dérivés par la suite des deux côtés de l'équation (B.1.11), nous pouvons établir la relation suivante:

$$-\frac{\partial}{\partial T_1} \ln P(t, T_1) = f(t, T_1) \quad (\text{B.1.15})$$

Le taux instantané, le taux spot continu, et le taux forward instantané que nous venons de voir sont les taux de base à la modélisation des produits de taux d'intérêts.

B.2 Courbes des taux

“Le passage du singulier au pluriel, du taux d'intérêt à la structure des taux d'intérêt représente une transition indispensable”, note De Boissieu (1982) [32]. Malgré “indispensable”, la définition

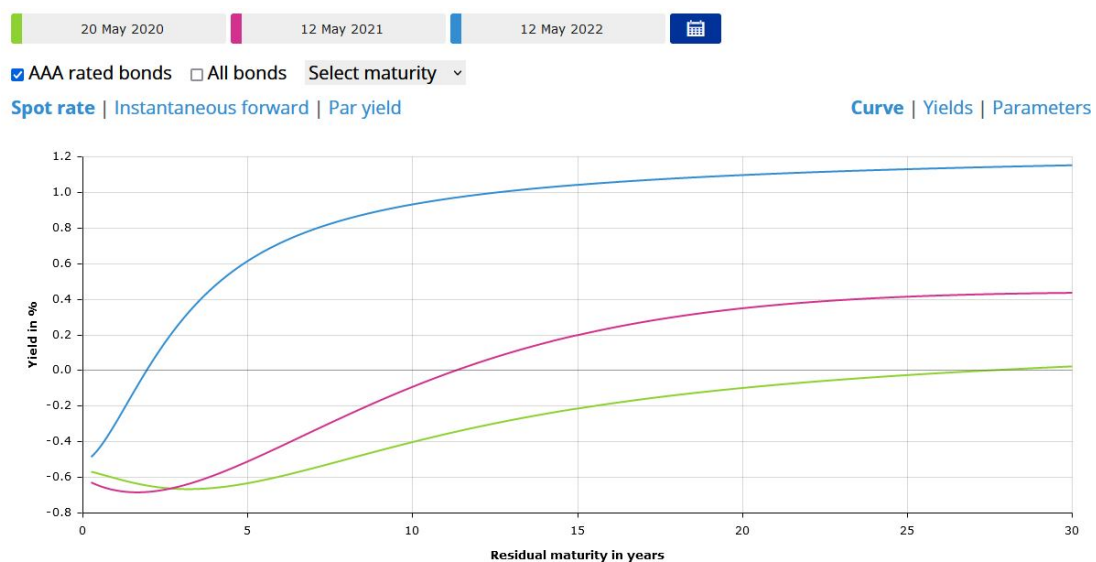
⁴D'autres théories existent tel que la théorie de préférence de liquidité, l'hypothèse de la segmentation des marchés et la théorie de l'habitat préféré. Voir Roncalli (1998) [107] pour un revue des fondements économiques des théories de taux.

de la courbe des taux, ou la structure par terme de taux pendant longtemps n'était pas explicitée, et bien souvent il pouvait submerger des confusions dans le passé. Ici, nous reprenons le concept adopté par Roncalli (1998): La structure par terme des taux est l'ensemble des taux zéro-coupon des différentes maturités, exempt de risque de défaut, prévalant sur le marché à l'instant t : $T \mapsto r(t, T)$. La gamme de prix des obligations associées à cette courbe de taux est la structure par terme des obligations zéro-coupon.

En pratique, des obligations zéro-coupon sur le marché existent pour des maturités de moins d'un an. Au delà d'un an, les obligations sont souvent couponnées. Néanmoins, il est possible de déterminer des taux zéro-coupon avec le démembrement des titres couponnés (strips) en recourant au bootstrapping. Nous obtenons ainsi une suite des taux (noeuds), $r(t, T_1)$, $r(t, T_2)$, \dots , $r(t, T_N)$. La détermination d'une courbe lisse à partir de ces noeuds est abordée dans le chapitre 3.

Graphiquement, différentes formes de courbe de taux sont possibles, tel qu'une courbe ascendante, inversée (descendante), ou ayant une ou plusieurs bosses. Ces formes s'expliquent par les différentes anticipations de taux sur le marché. Par exemple, on retrouve la forme ascendante (la plus fréquente) (12/05/2022) et des courbes présentant des bosses (12/05/2021, 12/05/2020) dans le graphique B.2, qui représente des taux spots des obligations d'état notées AAA par l'ECB.

Figure B.2: Courbe des taux spot⁵



⁵ Source: https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html

En général, une courbe ascendante est une indication d'une économie en expansion normale et reflète le fait que les investissements à long terme sont plus risqués. Puis, dans le creux d'un cycle économique, on peut observer une courbure ascendante accentuée (l'économie dans un creux mais prête pour une reprise, peut-être après des baisses de taux d'intérêt pendant certain temps). En revanche, une courbe de taux inversée se produit généralement au sommet d'un cycle économique: l'expansion ou une bulle peut être suivi d'une récession ou d'une dépression. Enfin, la courbe de taux avec des bosses peut se produire lors du passage entre une courbe normale et une courbe inversée, ou encore, lorsque les anticipations des agents aux différentes termes sont très divergentes (souvent lié aux périodes d'incertitude tel qu'une courte reprise économique suivie d'une autre récession). Quelle que soit la forme de la courbe de taux, il est important à remarquer qu'elle tend à s'aplatir aux échéances les plus éloignées: D'abord, les primes de risque ont tendance à être plus stables à plus long terme. Ensuite, bien que les anticipations des investisseurs pour les taux d'intérêt à court et moyen terme puissent être différentes, leurs anticipations à long terme sont convergentes.

De même, on peut définir la courbe des taux forwards instantanés à l'instant t comme $f(t, T)$ des différentes échéances T : $T \mapsto f(t, T)$. Le graphique B.3 donne la courbe des taux forwards instantanés des mêmes dates que dans le graphique B.2. On peut remarquer que la courbure des courbes des taux forwards instantanés des mêmes dates est plus prononcée que celle des taux spots, ce qui est cohérent avec le fait que le taux spot peut être interprété comme la moyenne des taux forwards instantanés.

Figure B.3: Courbe des taux forwards instantanés⁵



B.3 Notions de base des martingales et stratégie autofinancante

Avant d’aborder les produits dérivés classiques, nous rappelons brièvement les notions de base des martingales et des outils de changement des mesures à l’aide des numéraires qui sont utilisés dans ce mémoire, sans entrer dans les détails techniques ni dans les démonstrations. Dans la plupart des cas, nous présenterons les définitions ou les théorèmes en temps continu. Toutefois, nous ferons appel au cas discret dans certains passages lorsque ce dernier nous paraître plus intuitif. Dans l’ensemble, nous ne chercherons pas à être rigoureux mais plus à donner les intuitions derrière les formules. Pour des développements mathématiques rigoureux et formels, nous invitons les lecteurs à se référer à des articles de référence: Harrison et Pliska (1981[59], 1983[60]) ou à des ouvrages en la matière, tel que Hunt et Kennedy (2004) [70], Musiela et Rutkowski (2005) [78], Karatzas et Shreve (1998) [71] et Shreve (2004) [115].

B.3.1 Définitions de base

Considérons un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) , Ω est l’espace des états du monde et P est une mesure de probabilité. \mathcal{F} est une σ -algèbre ou une tribu représentant l’ensemble des informations disponibles à un instant t . Soit $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$ une filtration continue à droite, i.e.,

$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$, pour tout $0 \leq t < T$, $T < \infty$, avec les hypothèses que Ω et un ensemble nul soient contenus dans \mathcal{F}_0 et que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Rappelons qu'un processus stochastique X est dit \mathcal{F}_t -mesurable si $X(t) \leq x \in \mathcal{F}_t, \forall x \in \mathbb{R}$.

Définition B.3.1 (Martingale⁶). *Considérons un processus stochastique $X(t)$ adapté et intégrable (i.e., $E[|X(t)|] < \infty$), $0 \leq t \leq T$.*

(i) $X(t)$ est une martingale si $E[X(t)|\mathcal{F}(s)] = X(s)$ presque sûrement pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ ⁷.

(ii) $X(t)$ est une sur-martingale (resp. sous- martingale) si $E[X(t)|\mathcal{F}(s)] \leq X(s)$ (resp. $E[X(t)|\mathcal{F}(s)] \geq X(s)$) p.s., pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$.

En termes simples, si un processus est une martingale, l'espérance conditionnelle à un instant donnée de sa valeur future est sa valeur à cet instant même, et ceci est valable pour tous les instants. Notons qu'un processus positif est une martingale si et seulement s'il est une sur-martingale et $E(X_T) = X_0$.

Les sous-martingales et les sur-martingales appartiennent à un sous-ensemble des semi-martingales.

Définition B.3.2 (Martingale Locale⁸). *Soit M un processus adapté continu à droite, pourvu de limites à gauche (càdlàg⁹). On dit que M est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{T_n\}$ tels que $P\{T_n = T\} \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et les processus arrêtés $\{M(t \wedge T_n); 0 \leq t \leq T\}$ soient des martingales pour tout n .*

Il est facile à déduire qu'une martingale locale positive est une surmartingale. Une martingale locale positive est une martingale si et seulement si $E(X_T) = X_0$.

Définition B.3.3 (Prévisible¹⁰). *Un processus $\{X_t; 0 \leq t \leq T\}$ est dit prévisible simple s'il existe des temps $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$ et des variables aléatoires bornées $\xi_0 \in \mathcal{F}_{t_0}, \xi_1 \in \mathcal{F}_{t_1}, \dots, \xi_{n-1} \in \mathcal{F}_{t_{n-1}}$ telles que:*

$$X_t = \xi_i \quad \text{si } t_i < t \leq t_{i+1}$$

⁶Définition 2.3.5 Shreve(2004) [115].

⁷Par la suite, on identifie de manière systématique une variable aléatoire par sa classe d'équivalence. $E[X(t)|\mathcal{F}(s)] = X(s)$ est toujours au sens *presque sûr*.

⁸Meyer 1976[84], cité par Harrison et Pliska 1981[59]), p233.

⁹On notera càglàd continu à gauche, pourvu de limites à droite.

¹⁰Harrison et Pliska (1981) [59], p234.

Une tribu prévisible sur $\Omega \times [0, T]$ est une tribu engendrée par des processus prévisibles.

En temps discret, cela revient à dire qu'un processus $\{X_n; n \in \mathbb{R}\}$ est prévisible s'il est mesurable par rapport à la tribu \mathcal{F}_{n-1} . Ainsi, un processus prévisible est borné, adapté, à trajectoires continues à gauche et constant par morceaux. Nous illustrerons le concept de prévisible avec l'exemple de stratégie de portefeuille dans la section suivante.

Définition B.3.4 (Localement borné¹¹). *Un processus prévisible est dit localement borné si*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)| < \infty \text{ pour tout } t.$$

Un processus adapté, càglàd est prévisible et localement borné. Si X est un processus prévisible localement borné, et que M est une martingale locale, alors l'intégrale stochastique (au sens Lebesgue-Stieltjes) $\int X dM$ est également une martingale locale (Meyer (1976) [?]).

Définition B.3.5 (Mesure martingale équivalente, Dellacherie 1980 [34]). *Une mesure de probabilité Q définie sur le même espace (Ω, \mathcal{F}) est dite équivalente par rapport à P si elles ont les mêmes ensembles négligeables:*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0 \tag{B.3.1}$$

Si P et Q sont équivalentes, la dérivée de Radon-Nikodym¹², notée Z est de carré intégrable par rapport à P . On en déduit facilement que $E^Q(X) = E^P(ZX)$.

Notons par suite \mathcal{Q} l'ensemble des mesures martingales équivalentes à P .

B.3.2 Stratégie de portefeuille et marché complet

Considérons maintenant l'ensemble des titres de base qui sont négociés continûment sur le marché et qui ne versent pas de dividende sur le marché. Notons leurs prix par un vecteur des processus semi-martingale $S = \{S_t; 0 \leq t \leq T\}$ dont les composants S^0, S^1, \dots, S^K sont adaptés, càdlàg et positifs. Par convention, l'actif 0 est un actif sans risque, autrement dit, S^0 est un processus localement sans risque ou à variation finie.¹³ Si S^0 est absolument continue, nous avons $S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$. Pour simplifier, supposons que $S_0^0 = 1$. Un exemple typique est le compte monétaire. Notons $D(0, t) = \frac{1}{S_t^0}$ pour tout t et \mathbf{D} le processus d'actualisation. On peut

¹¹Dellacherie (1980)[34].

¹²Rappelons que le dérivé de Radon-Nikodym, que l'on écrit souvent sous la forme $\frac{dQ}{dP}$ est strictement positive et \mathcal{F} -mesurable, avec $E^P(Z) = 1$ tel que $dQ = ZdP$.

¹³Un processus est dite à variation finie s'il est adapté, càdlàg, et a des trajectoires à variation finie.

définir alors le processus des prix actualisés des actifs $\mathcal{Z} = (Z^1, \dots, Z^K)$ avec $Z^K = \mathbf{D}S^k$ pour $k = 1, \dots, K$.

Définissons ensuite une stratégie de portefeuille par un vecteur de processus prévisible et localement borné $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^K) = \{\phi_t; 0 \leq t \leq T\}$. ϕ_t^k peut être interprété comme la quantité du titre K détenu par l'investisseur à l'instant t . Le processus de valeur d'une telle stratégie est défini par:

$$V_t(\phi) = \phi_t S_t = \sum_{k=0}^K \phi_t^k S_t^k \quad (\text{B.3.2})$$

La stratégie étant prévisible, l'investisseur peut constituer son portefeuille en choisissant les quantités de chaque titre après l'observation des prix S_t et le conserver jusqu'à (après) la prochaine observation des prix S_t . Il convient de souligner que le portefeuille doit être constitué avant l'observation des prix. Pour faciliter l'illustration, nous nous plaçons d'abord en temps discret. Notons $\phi_t S_{t-1}$ la valeur de marché du portefeuille tout de suite après l'observation des prix S_{t-1} et après l'ajustement du portefeuille, $\phi_t S_t$ la valeur de marché du portefeuille tout de suite après l'observation des prix S_t mais avant toute modification du portefeuille. $\phi_t \Delta S_t$ est ainsi la variation de la valeur de marché liée aux variations des prix des titres entre les instants $t-1$ et t . Soit $G_t(\phi)$ le processus des gains cumulés que l'investisseur a réalisés jusqu'à la date t avec la stratégie ϕ , qui est:

$$G_t(\phi) = \sum_{i=1}^t \phi_i \Delta S_i, \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{B.3.3})$$

En temps continu, $G_t(\phi)$ peut s'écrire alors de la manière suivante:

$$G_t(\phi) = \int_0^t \phi_u dS_u = \sum_{k=0}^K \int_0^t \phi_u^k dS_u^k, \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{B.3.4})$$

En pratique, il est possible d'apporter ou de retirer des fonds pour une stratégie de portefeuille. Lorsque ces possibilités sont exclues, la stratégie est dite **autofinancante**. Nous avons alors:

$$\phi_t S_t = \phi_{t+1} S_t$$

Une stratégie autofinancante peut aussi être définie de la manière équivalente:

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_0(\phi)$$

Ainsi, toutes les variations d'une stratégie autofinancante proviennent uniquement des variations des valeurs des titres dans le portefeuille et des ajustements de l'investisseur.

Par ailleurs, une stratégie est dite **admissible** si elle est autofinancante et $V_t(\phi)$ est un processus positive. Cette définition exige non seulement que la richesse initiale de l'investisseur est positive, mais aussi que l'investisseur ne sera jamais en situation d'endettement. Cette contrainte est assez commune en finance et revient à exclure la possibilité de certains types de vente à découvert.

Comme ϕ est un processus prévisible localement borné, S est une martingale locale, G est également une martingale locale. Par la suite, l'ensemble des stratégies admissibles sera noté Φ .

Définition B.3.6 (Titre contingent atteignable¹⁴). *Un titre contingent¹⁵ H est atteignable s'il existe une stratégie autofinancante ϕ tel que $V_t(\phi) = H$. H est dit engendré par ϕ et la valeur associée à H à l'instant t est notée par $\pi = V_t(\phi)$.*

Où π est défini comme un système de prix tel que $\pi : \mathbb{X} \rightarrow [0, \infty)$ qui satisfait:

$$(i) \pi(X) = 0 \text{ ssi } X = 0,$$

$$(ii) \pi(aX + bX') = a\pi(X) + b\pi(X'), \forall a, b \geq 0 \text{ et } \forall X, X' \in \mathbb{X}.$$

Le système de prix π est dit consistant avec le modèle de marché si $\pi(V_t(\phi)) = V_0(\phi)$ pour tout $\phi \in \Phi$. Par la suite, l'ensemble des titres contingents atteignables sera noté par \mathbb{H} et l'ensemble des système de prix consistant avec le modèle sera noté par \mathbb{I} .

Définition B.3.7 (Marché complet). *Un marché est dit complet si tous les titres contingents sont atteignables.*

Enfin, rappelons qu'un arbitrage existe lorsqu'un investissement sans risque avec un fonds initial nul peut générer des flux positifs en t : $V_0(\phi) = 0$, mais $P(V_T(\phi)) > 0$.

¹⁴Harrison et Pliska 1981 [59], P226.

¹⁵Rappelons qu'un titre contingent est une v.a. non négative \mathcal{F}_t -mesurable dont le deuxième moment est défini. Il est peut considéré comme un contrat ou un droit donnant un flux $H(\omega)$ si l'état ω se réalise et un flux nul sinon.

B.3.3 Les relations fondamentales

Les relations entre le système des prix, la mesure martingale équivalente et d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (ci-dessous abrégé en AOA) ont été démontrées par Harrison et Pliska (1981[59], 1983[60]). Nous reportons maintenant ces résultats fondamentaux:

Proposition B.3.1. *Il existe une relation biunivoque entre le systèmes de prix $\pi \in \Pi$ et la mesure de probabilité $Q \in \mathbb{Q}$ via:*

$$(i) \pi(X) = E^Q(B(T)X),$$

$$(ii) Q(A) = \pi(S_T^0 1_A), A \in \mathcal{F}.$$

Théorem B.3.1. *Le marché est exempt d'opportunité d'arbitrage ssi \mathbb{Q} (ou de manière équivalente Π) est non-vide.*

Pour résumer, l'existence d'un système de prix, l'existence d'une mesure martingale équivalente et l'AOA sont trois conditions équivalentes. Un marché est dit **viable** lorsque ces conditions sont satisfaites.

Proposition B.3.2. *Si le marché est viable, il existe alors pour tous les titres contingents atteignables H un prix unique tel que:*

$$\pi = E^Q [D(0, T)H] \tag{B.3.5}$$

pour chaque $Q \in \mathbb{Q}$.

Notons que pour que le prix des titres contingents atteignables soit unique, la condition nécessaire et suffisante est l'AOA. Le marché n'est pas nécessairement complet.

Soit $L(\mathcal{Z})$ l'ensemble de tous les processus prévisibles $\mathcal{H} = (H^1, \dots, H^K) = \{H_t; 0 \leq t \leq T\}$ qui sont intégrables par rapport au processus Z . Rappelons que Z a été défini au début de la section B.3.2 comme le processus des prix des actifs risqués actualisés, qui est un produit de semi-martingales et qui est également semi-martingale. Harrison et Pliska (1983) [60] ont monté le théorém suivant:

Théorem B.3.2. *Si on sélectionne un élément quelconque $Q \in \mathbb{Q}$ comme une mesure de référence, les trois propositions sont équivalentes:*

$$(i) \text{ Le marché est complet sous } Q,$$

(ii) Toute Q -martingale M admet une représentation sous la forme:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \int \mathcal{H}d\mathcal{Z}$$

pour certain $\mathcal{H} \in L(\mathcal{Z})$

(iii) \mathbb{Q} est un singleton.

Autrement dit, le marché est complet si et seulement si la mesure de la martingale est unique. Remarquons que la propriété (ii) n'est autre que la théorème de représentation de la martingale. On peut considérer que \mathcal{Z} est une base pour l'espace \mathcal{M} et que \mathcal{M} est engendré par \mathcal{Z} . En fait, ce théorème nous donne la raison fondamentale pour laquelle les processus semi-martingales fournissent une description naturelle des taux: l'invariabilité avec le changement de mesure et la décomposition unique en une composante prévisible et une composante d'innovation.

B.4 Changement de mesure et choix des numéraires appropriés

B.4.1 Définition de numéraire avec le 1er exemple: compte bancaire

Dans la proposition B.3.2, la valeur d'un titre contingent atteignable est exprimée comme l'espérance de son payoff actualisé ou "normalisé" en utilisant l'actif sans risque S^0 sous la mesure martingale équivalente Q . Ici, S^0 joue en effet le rôle d'un numéraire.

Définition B.4.1 (Numéraire). *Un numéraire est un processus de prix $X(t)$ strictement positif p.s pour tout $t \in [0, T]$.*

Un numéraire est associé à une mesure de probabilité et peut être considéré comme un standard sous lequel les autres actifs peuvent être exprimés en valeur relative. Dans la proposition B.3.2 par exemple, le titre sans risque est utilisé implicitement comme un numéraire associé à l'univers risque-neutre. La valeur de H évaluée en terme de ce numéraire est une martingale sous la probabilité risque-neutre. Notons que S^0 est simplement un numéraire parmi les autres.

Théorem B.4.1. ¹⁶ *Supposons qu'il existe un actif négocié sur le marché qui ne verse pas de dividende N et une mesure de probabilité Q^N , qui est équivalent à la probabilité P . Le prix d'un*

¹⁶2.2.1 Brigo et Mercurio 2006[21]

titre négocié quelconque, relatif à N est une Q^N -martingale:

$$\frac{X_t}{N_t} = E^N \left[\frac{X_T}{N_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{B.4.1})$$

Soit N' un numéraire arbitraire. Alors il existe une mesure de probabilité $Q^{N'}$ équivalente à la probabilité P , tel que le prix d'un actif $Q^{N'}$ contingent atteignable H , normalisé par N' , est une $Q^{N'}$ -martingale:

$$\frac{H_t}{N'_t} = E^{Q^{N'}} \left[\frac{H_T}{N'_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{B.4.2})$$

La dérivée Radon-Nikodym définie sur Q^N est donnée par:

$$\frac{dQ^{N'}}{dQ^N} = \frac{N'_T N_0}{N'_0 N_T} \quad (\text{B.4.3})$$

Par exemple, une obligation zero-coupon $P(t, T)$ peut être calculée comme l'espérance de l'inverse de $B(T)$ sous la mesure de risque-neutre:

$$\frac{P(t, T)}{B(t)} = E^Q \left[\frac{P(T, T)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{B.4.4})$$

Comme $P(T, T) = 1$, nous pouvons déduire,

$$\begin{aligned} P(t, T) &= E^Q \left[\frac{B(t)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad (\text{B.4.5})$$

Le changement de mesure et de numéraire est une technique extrêmement utile pour valoriser les produits dérivés. Un numéraire approprié doit, comme résumé par Brigo et Mercurio (2006) [21], avoir deux propriétés désirables:

- $N_t X_t$ est un titre négociable, ainsi $\frac{N_t X_t}{N_t} = X_t$ est une martingale sous Q^N .
- $\frac{H(X_T)}{N_T}$ est facile à calculer.

Si on utilise l'exemple du compte monétaire $B(0, t)$ dans l'équation (B.3.5) comme numéraire,

lorsque r est constant, on a :

$$\pi(t) = \frac{1}{B_t} E^Q \left[\frac{H_T}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{B.4.6})$$

$$= e^{-r(T-t)} E^Q [H_T] \quad (\text{B.4.7})$$

Ce qui est très facile à calculer et qui est d'ailleurs la base de formule de Black-Scholes. En revanche, lorsque r est stochastique, le calcul s'avère plus compliqué.

Introduisons donc maintenant 2 autres numéraires importants et largement utilisés dans la modélisation des taux.

B.4.2 2ème exemple: Le prix d'une obligation zéro-coupon

Un numéraire alternatif est le zéro-coupon $P(t, T)$ dont la maturité T coïncide avec celle des titres contingents. Définissons un zéro-coupon dont le payoff à l'échéance T est d'1€. La mesure associée, notée Q^T , est appelée mesure forward risque ajustée ou forward risque neutre de maturité T , ou encore abrégée comme mesure forward- T . Nous avons :

$$\pi(t) = P(t, T) E^{Q^T} [H_T | \mathcal{F}_t] \quad (\text{B.4.8})$$

Ainsi, l'espérance du payoffs des titres contingents ou des portefeuilles peut être évaluée par rapport à une obligation zéro-coupon de la même maturité ayant un taux sans risque dans un univers forward neutre. On peut déjà retrouver l'intuition de ce résultat très important dans le modèle de Merton (1973) et le modèle de Black (1976). Par contre, les preuves rigoureuses apparaissaient un peu plus tard dans les travaux de Geman (1989) et Jamshidan (1989).

Illustrons ce résultat avec l'exemple d'un taux forward $F(t, T_1, T_2)$ tel que défini dans la section [B.1.2](#). Sous la probabilité forward-neutre, la valeur à date t d'un contrat FRA, dont le payoff à la maturité est donné par l'équation ([\(B.1.9\)](#)) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} V_{FRA}^t &= E^{Q^{T_2}} \left[\frac{1}{B(S)} \tau(T_1, T_2) N(K - L(T_1, T_2)) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T_2) \tau(T_1, T_2) N(K - L(T_1, T_2)) \end{aligned} \quad (\text{B.4.9})$$

En utilisant l'expression de $L(T_1, T_2)$ ((B.1.5)), nous avons:

$$\begin{aligned}
 V_{FRA}^t &= P(T_1, T_2)\tau(T_1, T_2)N \left(K - \frac{1 - P(T_1, T_2)}{\tau(T_1, T_2)P(T_1, T_2)} \right) \\
 &= P(T_1, T_2)N \left(\tau(T_1, T_2)K - \frac{1}{P(T_1, T_2)} + 1 \right) \\
 &= N (P(T_1, T_2)\tau(T_1, T_2)K - P(t, T_1) + 1)
 \end{aligned} \tag{B.4.10}$$

Il est aisé de comprendre qu'en AOA, la valeur du contrat à la date t doit être égale à 0. Le taux forward ou le taux à terme K qui rend V_{FRA}^t nul définit en effet $F(t, T_1, T_2)$, que nous pouvons déduire:

$$F(t, T_1, T_2) := \frac{1}{\tau(T_1, T_2)} \left(\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} - 1 \right) \tag{B.4.11}$$

qui peut s'écrire également sous la forme:

$$F(t, T_1, T_2)P(t, T_2) = \frac{1}{\tau(T_1, T_2)} (P(t, T_1) - P(t, T_2)) \tag{B.4.12}$$

Cette équation permet d'exprimer $F(t, T_1, T_2)P(t, T_2)$ comme la différence des deux obligations, à un facteur près. $F(t, T_1, T_2)P(t, T_2)$ peut donc être considéré comme le prix d'un titre négociable (la combinaison linéaire des titres négociables est un titre négociable). Ainsi, $F(t, T_1, T_2)$ est une martingale sous la mesure forward-T. Nous avons alors pour tout $0 \leq s \leq t \leq T_1 < T_2$:

$$E^{Q^T} [F(t, T_1, T_2) | \mathcal{F}_s] = F(s, T_1, T_2)$$

De plus, lorsque $t = T_1$, nous avons:

$$E^{Q^T} [L(T_1, T_2) | \mathcal{F}_t] = F(t, T_1, T_2)$$

B.4.3 3ème exemple: Le facteur d'annuité

Considérons maintenant le facteur d'annuité, qui est une combinaison linéaire d'obligations des zéro-coupons avec des échéances $T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}, \dots, T_2$ et τ_i la durée (ou *tenor*) de chaque sous-période

(T_{i-1}, T_i) . Etant une combinaison linéaire des titres négociés, il reste un actif négociable, et peut donc être considérée comme un numéraire. De manière plus formelle,

Définition B.4.2 (Facteur d'annuité). *Le facteur d'annuité est défini comme:*

$$A_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) \quad (\text{B.4.13})$$

La mesure associée est appelé mesure forward swap, que l'on notera $Q^{\alpha,\beta}$. Nous verrons d'ailleurs dans la section suivante que le facteur d'annuité est similaire à la partie de la jambe fixe d'un swap et nous y illustrerons son application.

Ainsi, pour un titre contingent quelconque, son prix à la date t peut être également déduit à l'aide d'un facteur d'annuité comme numéraire, sous l'univers forward swap:

$$\pi(t) = A_{\alpha,\beta}(t) E^{Q^{\alpha,\beta}} \left[\frac{H_T}{A_{\alpha,\beta}(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{B.4.14})$$

Ce résultat sera utile pour la valorisation des produits dérivés ayant plusieurs payoffs, tel que la swaption.

B.5 Produits dérivés classiques

Ces notions fondamentales précisées, nous pouvons à présent définir la notion de produits dérivés de taux d'intérêts. Un produit dérivé ou contrat dérivé de taux d'intérêt est défini par les normes IFRS 9, comme un instrument financier ¹⁷:

- dont la valeur fluctue en fonction de l'évolution du taux ou du prix d'un sous-jacent basé des flux d'intérêt que générerait un prêt d'une date de départ, d'une durée et d'un taux donné;
- qui ne requiert aucun placement net initial ou peu significatif;
- dont le règlement s'effectue à une date future.

Il s'agit d'un contrat entre deux parties, un acheteur et un vendeur, qui fixe des flux financiers

¹⁷Source: Wikipedia.

futurs fondés sur ceux d'un taux sous-jacent, réel ou théorique.

Les transactions sur les produits dérivés des taux sont en forte croissance depuis le début des années 1980 et représentent la part la plus importante des marchés dérivés OTC. A la fin 2022 par exemple, l'encours nominal d'IRD (interest rate derivatives) était de 490,6 billions dollars et représentait 80% de l'encours total des produits dérivés OTC¹⁸.

B.5.1 Swaps de taux: IRS

A la différence du FRA où les flux étaient à sens uniques, le swap de taux d'intérêt vanilla (Interest Rate Swap, abrégé ci-dessous par IRS) est un échange des flux entre 2 parties. Par exemple, A s'engage à verser à B un taux fixe prédéterminé K et B verse à A un taux monétaire variable ou révisible indexé sur un taux référence du marché (par exemple, €STR, OIS, Euribor, TAM, TAG) d'une maturité inférieure à 1 an¹⁹. Comme pour les FRA, ce contrat a une valeur nulle au départ du swap et la valeur de négociation porte sur le taux fixe. Ce taux cristallise les anticipations des investisseurs sur l'évolution du taux d'intérêt monétaire échangée durant la vie du swap. L'IRS est très utilisé par les investisseurs, notamment dans les mortgages, car il leur permet de transformer un emprunt ou un prêt à taux de marché monétaire en un emprunt ou un prêt à taux fixe ou vice-versa. L'argument économique principal justifiant cette popularité est la théorie des avantages comparatifs²⁰.

Dans le jargon financier, les taux fixes versés par A à B sont communément appelés jambe fixe ou partie fixe du swap. A est appelé swap emprunteur ou taux fixe payeur (payer IFS, ci-dessous abrégé par *PFS*). Les taux variables monétaires versées par B à A sont appelés jambe variable (ou partie variable) et B est appelé swap prêteur ou taux fixe receveur (Receiver IFS, ci-dessous abrégé par *RFS*). Les flux échangés entre A et B sont regroupés sous un échancier. Pour formaliser ce contrat, on note, pour une série de dates prédéterminées $T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}, \dots, T_2$ et τ_i la durée (ou *tenor*) de chaque sous-période (T_{i-1}, T_i) ²¹. Pour simplifier, nous supposons que la valeur nominale (de la swaption et tous les autres produits) est d'1€. Le PFS A paye donc un montant $\tau_i K$, tandis que les jambes variables sont données par une série des flux $\tau_i L(T_{i-1}, T_i)$,

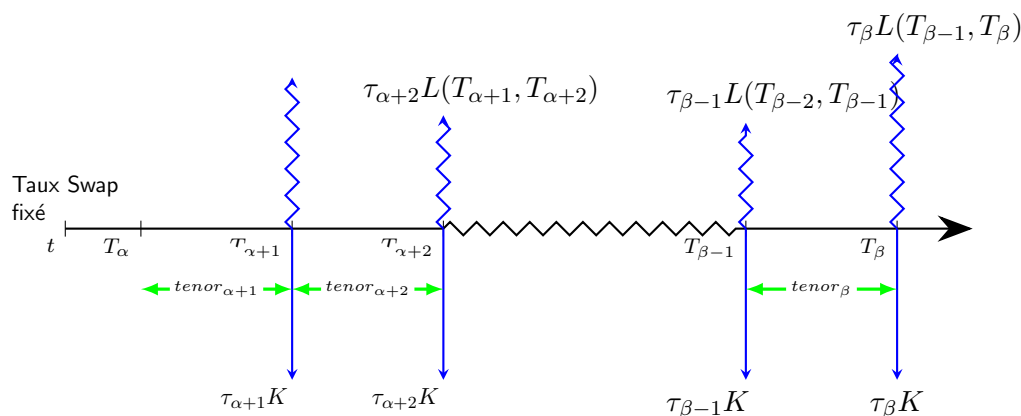
¹⁸Source: BIS OTC Derivatives Statistics.

¹⁹Bien qu'il existe des IRS vanilla de long terme, mais ils restent référencés sur un indice monétaire.

²⁰Voir le chapitre 7 de Hull (2009) [67] pour des illustrations détaillées.

²¹Nous utiliserons d'ailleurs ces notations pour le reste du mémoire lorsqu'il s'agit des payoffs de multi-période, comme dans les CSM et les cap/floors.

Figure B.4: Cash Flow d'un Swap



où $L(T_{i-1}, T_i)$ sont définis à chaque date de révision de taux T_{i-1} pour une date de maturité T_i . Afin de réduire le risque de défaut, il n'y a pas d'échange de principal entre les 2 parties. Les échanges de flux peuvent être illustrés par le diagramme B.4.

Avant d'aborder la valeur d'un IRS, nous apportons quelques précisions sur le produit swap:

- Pour simplifier, nous supposons qu'ici les rythmes des règlements des jambes fixes et des jambes variables sont identiques. En pratique, les fréquences de règlement sont très souvent différentes. Par exemple, des jambes variables sont payés en générale chaque trimestre ou semestre et des jambes fixes annuellement. D'ailleurs, les taux variables sont calculés souvent sur une base *exact/360*, tandis que les jambes fixes sont calculés en suivant généralement une base *actuel/365* ou *30/360*. Il existe également des swaps dont les jambes sont payées en fin de période (swap in arrears). Des ajustements sont dans ce cas nécessaires.
- La nominal N est supposé être constante ici. Néanmoins elle peut être aussi variable voire stochastique, tel que les swaps à amortissement (notionnels dégressifs, souvent liés avec mortgage), les accreting swaps (notionnels croissants), les swaps saisonnières (alternant entre zéro et un montant) ou roll-roaster swap (alternant entre croissant et décroissant). Tant que les notionnels restent déterministes, les méthodes de calcul restent similaires. Par contre, en cas de notionnels stochastiques, la méthode de valorisation ne peut pas être transposée directement et on doit prêter attention au changement de mesure.

La valeur à la date t du PFS est l'espérance de la valeur actualisée des différents pay-offs futures

(la valeur à la date t du RFS est exactement l'inverse):

$$V(PFS_t) = B(t)E^Q \left[\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \frac{1}{B(T_i)} \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K) \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{B.5.1})$$

En changeant la mesure risque neutre Q à la mesure T_i -forward Q_i^T , nous pouvons déduire:

$$V(PFS_t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) E^{T_i} [\tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K) | \mathcal{F}_t] \quad (\text{B.5.2})$$

$$= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) [F(t, T_{i-1}, T_i) - K] \quad (\text{B.5.3})$$

$$= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} [P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i) - P(t, T_i) \tau_i K] \quad (\text{B.5.4})$$

La déduction de l'équation (B.5.3) vient du fait que le taux spot $L(T_{i-1}, T_i)$ est une martingale sous sa propre mesure Q_i^T . Tandis que l'équation (B.5.4) est déduite en utilisant l'équation (B.4.12). Conventionnellement, le taux swap, noté $S_{\alpha, \beta}$, est déterminé comme le taux fixe permettant d'égaliser la partie fixe et la partie variable à la date t ($V_{PFS}^t = 0$), qui vaut donc:

$$S_{\alpha, \beta} = \frac{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} [P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)]}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i)}$$

Ou encore:

$$S_{\alpha, \beta} = \frac{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i F(t, T_{i-1}, T_i)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)} \quad (\text{B.5.5})$$

$$S_{\alpha, \beta} = \frac{1}{A_{\alpha, \beta}(t)} \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) F(t, T_{i-1}, T_i) \quad (\text{B.5.6})$$

Alternativement, notons que l'équation (B.5.3) contient une somme télescopique et elle peut être simplifiée de la manière suivante:

$$V_{PFS}^t = P(t, T_{\alpha}) - P(t, T_{\beta}) - \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i K P(t, T_i) \quad (\text{B.5.7})$$

Notons que nous pouvons obtenir également cette équation en comparant les pay-off du FRA

avec ceux de l'IRS: on observe facilement que l'IRS receveur est assimilé à une série de FRA avec des dates de règlement différées (ou encore la combinaison d'un achat d'une obligation à coupon avec la vente d'un titre à taux flottant sans remboursement du principal à la maturité²²).

$S_{\alpha,\beta}$ vaut alors précisément:

$$S_{\alpha,\beta} = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)} \quad (\text{B.5.8})$$

A l'aide d'un facteur d'annuité, l'équation (B.5.8) peut être s'écrire sous la forme suivante:

$$S_{\alpha,\beta} = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)} = \frac{1}{A_{\alpha,\beta}(t)} (P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta))$$

La valeur du swap est donc:

$$V(\text{Swap}_{\alpha,\beta}(t)) = A_{\alpha,\beta}(t) (S_{\alpha,\beta}(t) - K) \quad (\text{B.5.9})$$

B.5.2 Options sur taux et option sur obligations

Il existe également des produits de types options basés sur l'évolution des taux d'intérêts (*Interest Rate Option*, IRO) ou sur l'évolution du prix des obligations. Les options sur taux sont similaires aux options des actions mais avec un taux de référence comme sous-jacent. Elles sont courantes sur les marchés américains et canadiens. Le prix d'une option d'achat (call) sur un taux référence $r(T)$, avec un taux strike r_K et une maturité T est l'espérance des payoffs sous la mesure de probabilité risque neutre:

$$IRO_{call}(t) = E^Q \left[e^{\int_t^T r(s)ds} \times (r(T) - r_K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{B.5.10})$$

Il existe également sur le marché des options sur obligations, qui donnent l'option d'acheter ou de vendre une obligation à un prix et une date prédéterminée. Pour simplifier, considérons d'abord un call sur une obligation zéro coupon $P(T_\alpha, T_\beta)$, avec un prix strike K . Son prix à la date t sous la mesure de probabilité risque neutre est donné par:

²²Si on tient en compte de risque de crédit, il est évident qu'un swap (des flux versés à un contrepartie périodiquement est moins risqué qu'une obligation d'un émetteur

$$ZBC(t) = E^Q \left[e^{-\int_t^{T_\alpha} r(s)ds} \times ((T_\alpha, T_\beta) - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{B.5.11})$$

L'extension de cette équation à une option à obligation à coupon est quasi immédiate: il suffit de décomposer l'option à obligation à coupon en un portefeuille des options à obligation zéro-coupon. Les options aux obligations sont négociées sur le marché OTC (de gré à gré), mais peuvent aussi être incorporées dans une obligation. Ces dernières sont des obligations à clauses optionnelles (remboursables par anticipation, *callable/puttable bonds*) et donnent la possibilité à l'émetteur ou le porteur de racheter ou d'être remboursé à certaines dates ou pendant certaines périodes de la vie de l'obligation, à des prix prédéterminés (souvent décroissants en fonction du temps).

Pour estimer ces options²³, la tentative naturelle est de recourir à une méthode du type Black-Scholes. Or, le taux utilisé dans la formule de Black-Scholes est supposé être une constante, ce qui est fondamentalement différent d'un modèle de taux, où tous les intérêts de modélisation reposent sur la nature stochastique du taux. Ce problème est résolu par Black (1976) [12] en diffusant le taux forward correspondant à ce taux sous la mesure de forward risque ajusté (voir la discussion dans le chapitre 2). Prenons l'exemple d'une option d'achat européenne sur obligation zéro-coupon. En appliquant le dérivé de Radon-Nikodym:

$$\frac{dQ^T}{dQ} = \frac{B(t)}{B(T)} \frac{P(T, T)}{P(t, T)} \quad (\text{B.5.12})$$

L'équation (B.5.11) peut s'écrire de manière suivante sous la probabilité forward neutre (rappelons que $\frac{B(t)}{B(T)} = e^{-\int_t^T r(s)ds}$ et $P(T, T) = 1$):

$$ZBC(t) = P(t, T_\alpha) E^{Q_{T_\alpha}} \left[e^{-\int_t^{T_\alpha} r(s)ds} (P(T_\alpha, T_\beta) - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{B.5.13})$$

B.5.3 Cap/Floor

Nous introduisons à présent un des produits références sur lesquels une grande partie des modèles actuels de valorisation, les modèles dits de marché se calibrent, à savoir les **caps/floors**. Nous présenterons l'autre produit référence, swaptions, dans la section suivante.

²³Pour une discussion détaillée sur ces options, nous invitons les lecteurs à se référer à [95]. Nous nous contentons de donner une description succinctes sur le principe de valorisation qui est servi dans le cadre du LMM.

Un **cap** est un contrat où le vendeur s'engage à rétribuer son acheteur si le taux d'intérêt référence dépasse un taux prédéterminé que l'on nomme taux d'exercice ou strike, à certaines dates dans le futur. Il est défini par les éléments suivants:

- Le montant nominal N ;
- La fréquence de constatation (fréquence selon laquelle) qui peut être espacée de manière régulière ou irrégulière, le taux de référence est comparé au taux d'exercice),
- l'échéancier des dates de révision de taux $T_\alpha, T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta-1}$;
- l'échéancier des dates de règlement $T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}, \dots, T_\beta$;
- le taux de référence (en général un taux interbancaire référence) $L(T_{i-1}, T_i)$;
- le taux d'exercice (ou strike) K ;
- la maturité.

Le cap est utilisé généralement pour se couvrir d'une hausse des taux consentie par un investisseur qui se finance à un taux flottant, car il permet de plafonner (d'où le nom de cap) le coût de financement au taux cap K . Un cap peut être décomposé en une série des **caplets** à chaque date de règlements dont le payoff est:

$$V_{caplet,t}^{T_i} = NE^Q \left[e^{-\int_t^{T_i} r(s)ds} \times \tau_i \times [L(T_{i-1}, T_i) - K]^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{B.5.14})$$

Chaque caplet peut en effet être considéré comme un *call* appliqué aux taux références du marché. A la différence d'une option sur taux, où la date de révision des taux coïncide avec la date de règlement des flux, la date de règlement d'un caplet est une période postérieure à la date de révision.

D'ailleurs, un caplet peut également être considéré comme un *put* sur obligations zéro-coupon, ce qui peut être vu en récrivant l'équation (B.5.14) en utilisant la loi de l'espérance totale:

$$V_{caplet,t}^{T_i} = NE^Q \left\{ E^Q \left[e^{-\int_t^{T_{i-1}} r(s)ds} \times e^{-\int_{T_{i-1}}^{T_i} r(s)ds} \times \tau_i \times [L(T_{i-1}, T_i) - K]^+ \middle| \mathcal{F}_{T_{i-1}} \right] \middle| \mathcal{F}_t \right\} \quad (\text{B.5.15})$$

$$= NE^Q \left\{ e^{-\int_t^{T_{i-1}} r(s)ds} \times \tau_i \times [L(T_{i-1}, T_i) - K]^+ \times E^Q \left[e^{-\int_{T_{i-1}}^{T_i} r(s)ds} \middle| \mathcal{F}_{T_{i-1}} \right] \middle| \mathcal{F}_t \right\} \quad (\text{B.5.16})$$

$$= NE^Q \left\{ e^{-\int_t^{T_{i-1}} r(s)ds} \times \tau_i \times [L(T_{i-1}, T_i) - K]^+ \times P(T_{i-1}, T_i) \middle| \mathcal{F}_t \right\} \quad (\text{B.5.17})$$

En utilisant la définition du taux $L(T_{i-1}, T_i)$ dans l'équation (B.1.5), nous pouvons déduire:

$$V_{caplet,t}^{T_i} = N(1 + \tau_i K) E^Q \left[e^{-\int_t^{T_{i-1}} r(s)ds} \times \left(\frac{1}{1 + \tau_i K} - P(T_{i-1}, T_i) \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{B.5.18})$$

Ce qui correspond au prix d'un put sur obligation zéro-coupon avec une valeur de nominal $N(1 + \tau_i K)$, et le prix d'exercice $\frac{1}{1 + \tau_i K}$. On peut interpréter $(1 + \tau_i K)$ en effet comme un "facteur" d'ajustement du fait des payoffs différés.

La valeur du cap à la date t est donnée par la somme des caplets et vaut donc:

$$\begin{aligned} Cap(t, \mathcal{T}, N, K) &= \sum_{i=T_{\alpha+1}}^{T_{\beta}} Caplet_i \\ &= \sum_{i=T_{\alpha+1}}^{T_{\beta}} ZBP(t, t_{i-1}, t_i, K'_i). \end{aligned} \quad (\text{B.5.19})$$

où $K'_i = \frac{1}{1 + \tau_i K}$ et \mathcal{T} est l'ensemble des dates de révision des taux $\{T_{\alpha}, T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta-1}\}$.

A l'opposé du cap, un **floor** est un contrat où le vendeur s'engage à rétribuer son acheteur si le taux de référence passe sous un taux d'exercice. Le floor est utilisé généralement pour se couvrir contre une baisse des taux d'intérêts, par exemple pour couvrir un placement à taux variables. Il est défini par les mêmes variables qu'un cap. De manière analogue, un floor peut être décomposé en **floorlets** qui peuvent être considéré comme des puts sur le taux d'intérêts ou un call sur

obligations zéro-coupon. La valeur d'un floor est ainsi donnée par la formule suivante:

$$\begin{aligned} \text{Floor}(t, \mathcal{T}, N, K) &= \sum_{i=T_{\alpha+1}}^{T_{\beta}} \text{flooret}_i \\ &= \sum_{i=T_{\alpha+1}}^{T_{\beta}} ZBC(t, t_{i-1}, t_i, K'_i). \end{aligned} \quad (\text{B.5.20})$$

Selon la pratique du marché, le cap est valorisé selon la formule référence de Black(1976) [12]:

$$\text{Cap}_t^{\text{Black}} = \text{Nominal} \times \sum_{i=T_{\alpha+1}}^{T_{\alpha}} \tau_i \times P(t, T_i) [F_i(t)\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)] \quad (\text{B.5.21})$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{F_j(t)}{K}\right) + \frac{1}{2}v_j^{\text{caplet}2}(T-t)}{v_j^{\text{caplet}}\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= d_1 - v_j^{\text{caplet}}\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

La justification théorique de ce formule avec le modèle LFM (Lognormal Forward Libor Market model) est donnée dans le chapitre 2. Comme les options, les Caps/Floors sont en général cotés en volatilité. La volatilité implicite est ainsi déduite par le modèle de Black.

B.5.4 Swaption

Une **swaption** ou **option sur swap** est un contrat qui donne le droit (et non l'obligation) d'entrer à une future date T_{α} (date de la maturité de l'option) dans un IRS aux caractéristiques prédéfinies. Il existe 2 types de swaptions: la swaption payeuse et la swaption receveuse. La swaption receveuse donne à l'acheteur le droit d'entrer dans un IRS receveur (i.e, recevoir la jambe fixe du swap). A contrario, la swaption payeuse donne à l'acheteur le droit d'entrer dans un IRS payeur (i.e, payer la jambe fixe du swap). Dans une swaption standard, la maturité d'option coïncide avec la première date d'ajustement des taux.

Considérons une swaption (payeuse) européenne standard dont la valeur de l'IRS sous-jacent à la date T_{α} est donnée par l'équation (B.5.3). Comme l'option sur ce swap sera exercée uniquement

si sa valeur est positif, le payoff de l'option est donc:

$$\left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_\alpha) (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+ \quad (\text{B.5.22})$$

La valeur de cette swaption est ainsi:

$$V(\text{Swaption payeuse}(t)) = B(t)E^Q \left[\frac{1}{B(T_\alpha)} \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_\alpha) (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{B.5.23})$$

A la différence d'un cap/floor qui peut être considéré comme la somme des caplets/flooret, une swaption ne peut pas être décomposée du fait de la convexité de la fonction $\max(\cdot, 0)$. En effet, par l'inégalité de Jensen, nous avons:

$$\begin{aligned} & E^Q \left[\left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_\alpha) (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ & \leq \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} E^Q [P(t, T_\alpha) \tau_i (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K)^+ | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

Ce résultat nous indique que la valeur d'une swaption payeuse est toujours plus petite que celle d'un cap de mêmes caractéristiques.

Les acteurs du marché calculent aussi les swaptions par la méthode de Black généralisée en faisant l'hypothèse que les taux forwards swaps suivent une dynamique log-normale. Concrètement, on suppose la dynamique suivante pour les taux Forwards Swaps:

$$\frac{dS_{\alpha,\beta}(t)}{S_{\alpha,\beta}(t)} = v_{\alpha,\beta}(t) dW^{\alpha,\beta}(t) \quad (\text{B.5.24})$$

Notons cette dynamique est un martingale sous la mesure forward swap neutre associée avec le numéraire $A_{\alpha,\beta}$. Une swaption payeuse est valorisée selon (voir également le modèle Swap forward market model dans la section C.1):

$$\Phi(d_1) [P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)] - K\Phi(d_2)A_{\alpha,\beta} \quad (\text{B.5.25})$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_{\alpha,\beta}(t)}{K}\right) + \frac{1}{2}v_{\alpha,\beta}^2(t, T_\alpha)}{v_{\alpha,\beta}(t, T_\alpha)}$$

$$d_2 = d_1 - v_{\alpha,\beta}(t, T_\alpha)$$

Appendix C. Valorisation des swaptions

Dans cette annexe, nous présentons rapidement le modèle de marché Swap (SMM). Puis, nous discutons brièvement l'incompatibilité du modèle LMM et SMM. Il est également possible de valoriser les swaptions avec le modèle LFM par simulation Monte Carlo ou par l'approximation, qui sont couramment utilisées par les praticiens. Elles sont discutées dans la section C.1 et C.2. Enfin, le swap market model peut également s'avérer être exploitable pour valoriser les caps/floors (voir C.2) et des formules d'approximations permettant de retrouver le prix des caps/floors à partir des taux forwards swaps ont été proposés. Les raisonnements étant analogues, quelques lignes d'explications sont données à la fin.

C.1 Swap Market Model

Le modèle de marché Swap (SMM) est introduit par Jamshidian (1997) [73]. Analogue à celle du modèle de marché Libor, Jamshidian (1997) partait du même processus lognormal mais l'appliquait cette fois-ci au taux swap. Ce modèle est connu sous le nom "Lognormal forward Swap Model" (LSM), ou encore "Swap Market Model" (SMM).

Rappelons que le taux de swap peut s'écrire sous la forme suivante (voir l'annexe B.5.1):

$$S_{\alpha,\beta} = \frac{1}{A_{\alpha,\beta}(t)} (P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)) \quad (\text{C.1.1})$$

Le facteur d'annuité $A_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)$ est une combinaison linéaire des titres négociés (obligations des zéro-coupons) (voir section B.4.3) et donc un numéraire. En AOA, le taux forward swap $S_{\alpha,\beta}(t)$ suit alors une martingale sous ce numéraire, qui est associé à la mesure de probabilité dite mesure forward swap neutres, notées $Q^{\alpha,\beta}$. C'est précisément Jamshidian (1997) a choisi comme numéraire et le taux swap est défini par la dynamique suivante :

$$\frac{dS_{\alpha,\beta}(t)}{S_{\alpha,\beta}(t)} = \sigma_{\alpha,\beta}(t) dW^{\alpha,\beta}(t) \quad (\text{C.1.2})$$

Le formule pour valoriser les swaptions payeuses dans le modèle LSM est :

$$\begin{aligned} V(\text{Swaption Payeuse}(t)) &= E^Q \left[\frac{B(t)}{B(T_\alpha)} A_{\alpha,\beta}(T_\alpha) (S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^{\alpha,\beta} \left[\frac{A_{\alpha,\beta}(t)}{A_{\alpha,\beta}(T_\alpha)} A_{\alpha,\beta}(T_\alpha) (S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{C.1.3}) \\ &= A_{\alpha,\beta}(t) E^{\alpha,\beta} [(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K)^+ | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

Ce qui revient exactement au formule de Black des swaptions que nous avons vu dans la section [B.5.4](#).

Tout comme les mesures forward neutres et spot neutre dans le Libor Market Model, il est possible de définir un ensemble des taux swap forward de références et obtenir un modèle unifiant. Jamshidien (1997) fut le premier à proposer le concept de “co-terminal” market model. A partir de son travaux, Galluccio et al. (2007) introduisent le concept des ensembles “admissibles” et classifient les modèles de marché “admissibles” en trois sous-classes qui correspondent aux trois ensembles de taux forwards swaps références définissant chacun un swap market model: le co-initial swap market model (ciSMM), le co-terminal swap market model (ctSMM) et le co-sliding market model (csSMM). Ces modèles présentent chacun des avantages respectivement adaptés aux différentes classes des produits dérivées exotiques des taux. Par exemple, le modèle ctSMM permet de décrire l’ensemble des swaps qui ont la même date de fin mais des dates de début différentes, donc particulièrement adapté pour les swaps sous-jacents d’une swaption bermudienne. Au contraire, les swap co-initial ont tous la même date de début mais avec des dates de fin distinctes. Un exemple typique est une option spread dont le payoff à date T_0 valant la différence (positive) entre 2 taux swap des maturités différentes et un taux strike. Tandis que le csSMM se définit à partir des taux forwards swaps partageant le même durée d’intervalle entre les dates *tenors* (time-to-maturité), qui est plus approprié pour les CMS (*constant maturity swap*). Notons également que le modèle LMM peut être considéré comme un cas particulier du co-sliding swap Market Model. Ces modèles forment des outils puissants de valorisation et de hedging pour les produits dérivés de taux qui dépendent de la distribution conjointe de plusieurs taux de swap.

Pour notre objectif et dans l’application en assurance, le critère le plus important est le produit de référence soit liquide et le prix soit fiable. Nous pouvons donc principalement nous appuyer sur les modèle LMM et SMM. Nous invitons les lecteurs à se référer à l’article d’origine pour les

détails et également à Huang et Scaillet (2003) pour un très bon résumé des résultats.

C.2 Incompatibilité du modèle LMM et SMM

Nous avons vu que le modèle de Black était compatible avec le Libor Market Model pour la valorisation des caps/floors et avec le Swap Market Model pour la valorisation des swaptions. L'idéal pour les praticiens qui utilisent tous ces modèles serait que le Libor Market Model et le Swap Market Model puissent être compatibles et que l'on obtiendrait alors un consensus sur l'utilisation de ces modèles, puisqu'il implique un prix unique reconnu de tous pour les produits dérivés de références et par la même la plupart des produits dérivés de taux qui en découlent. Cet idéal n'est malheureusement pas vrai en théorie.

Pour pouvoir comparer ces 2 modèles, il importe de choisir une mesure de probabilité unique, par exemple la mesure de probabilité forward neutre ou alors la mesure forward swap neutre. Si l'on considère la mesure forward neutre que nous avons utilisé pour exprimer la dynamique des taux forwards avec le Libor Market Model, il est possible de retrouver la dynamique des taux forwards swaps sous la mesure de probabilité forward (Proposition 6.8.1, Brigo et Mercurio (2006) [21]) :

$$\frac{dS_{\alpha,\beta}(t)}{S_{\alpha,\beta}(t)} = m_{\alpha,\beta}(t)dt + \sigma_{\alpha,\beta}(t)dW^{m(t)}(t)$$

avec

$$m_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\sum_{i,j=\alpha+1}^{\beta} \mu_{ij}(t)\delta_i\delta_j B(t,T_i)B(t,T_j)\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j F_i F_j}{1 - B(t,T_\alpha,T_\beta)}$$

$$\mu_{ij}(t) = \frac{\sum_{k=i}^{\beta} \delta_k B(t,T_\alpha,T_k) \left(B(t,T_\alpha,T_\beta) \sum_{k=\alpha+1}^{j-1} \delta_k B(t,T_\alpha,T_k) + \sum_{k=j}^{\beta} \delta_k B(t,T_\alpha,T_k) \right)}{\left(\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \delta_k B(t,T_\alpha,T_k) \right)^2}$$

Symétriquement, il est aussi possible de réécrire la dynamique du taux forward sous la mesure de probabilité forward swap neutre. Nous invitons les lecteurs à se référer à Brigo et Mercurio

(2006) [21] (Proposition 6.8.2) pour le résultat.

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \sum_{k=m(t)}^j \frac{\delta_k F_k(t) \sigma'_j(t) \sigma_k(t)}{1 + \delta_k F_k(t)} dt + \sigma'_j(t) (\mu_{\alpha,\beta,j}(t) dt) dW^{\alpha,\beta}(t)$$

avec

$$\mu_{\alpha,\beta,j}(t) = 2 \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \left(1_{i \leq j} - \frac{1}{2} \right) \delta_i \frac{B(t, T_i)}{C_{\alpha,\beta}(t)} \sum_{k=\min(i+1, j+1)}^{\max(i, j)} \frac{\delta_k \rho_{jk}(t) \sigma'_k(t) F_k(t)}{1 + \delta_k F_k(t)}$$

$$C_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \delta_i B(t, T_i)$$

Ces formules montrent bien que la lognormalité de l'un de ces 2 sous jacent (taux forward ou taux forward swap) n'entraîne pas nécessairement la lognormalité de l'autre. Théoriquement, nous pouvons parler pour ces deux modèles d'une incompatibilité de distribution probabiliste. En pratique, il s'avère néanmoins que cette incompatibilité est loin d'être désastreuse. Brace et al. (1998) [17] montrent par exemple que la distribution des taux swaps calculés à partir des taux Forward n'est pas loin d'être lognormale. Brigo et Mercurio (2006) ont représenté graphiquement la distribution des taux forward swap obtenus à partir des taux forward et ont trouvé que dans un grand nombre de cas elle coïncidait avec une distribution lognormale.

Reste donc à choisir un modèle. La plupart des chercheurs et des praticiens privilégient le LFM comme modèle central pour les deux marchés avec la justification de la tractabilité mathématique (Brace et al. (1998) [17]). Un autre argument avancé par Brigo et Mercurio (2006) est que les taux forwards sont en quelque sorte plus "fondamentales" que les taux de swap et il est plus naturel d'exprimer les taux de swap à terme en termes des taux à forward plutôt que de faire l'inverse. Toutefois, Gallacio et al. (2007) montrent que la tractabilité mathématique du modèle SMM est comparable que celle du LMM. Ils montrent même que la calibration jointe des caplets et des swaptions "diagonale" (dont les sous-jacent sont des taux forward swap co-termniaux) est plus rapide, plus robuste et plus transparente dans le SMM que dans le LMM. Enfin, Gallacio et al. (2007) montrent également que le point de vue que le taux forward est plus "fondamentale" n'est pas valide. Comme nous allons discuter dans la section suivante, les taux forward swap peuvent être considérés comme des combinaisons linéaires des taux LIBOR à terme avec un bon niveau de précision, et la réciproque est également vrai. Le choix des modèles dépendent

donc des caractéristiques des produits à valoriser (notamment les sous-jacent) et du contexte de l'utilisation des modèles.

C.3 Valorisation des swaptions avec le modèle LFM

Une autre possibilité de la valorisation des swaptions avec le modèle LFM (par simulation Monte Carlo ou par l'approximation), qui est couramment utilisée par les praticiens.

C.3.1 Valorisation des swaptions avec le modèle LFM via simulation Monte carlo

Pour valoriser les swaptions via le Libor Market Model¹, on peut avoir recours à une simulation de Monte Carlo. Rappelons que le taux de swap peut s'écrire sous la forme suivante (voir la section B.5.1 dans l'annexe B) :

$$S_{\alpha,\beta} = \frac{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i F_i(t)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)}$$

En notant

$$w_i(t) = \frac{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)} \quad (\text{C.3.1})$$

Nous avons :

$$S_{\alpha,\beta} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} w_i(t) F_i(t) \quad (\text{C.3.2})$$

l'équation (C.3.2) montre que le taux swap $S_{\alpha,\beta}$ peut être considéré approximativement comme une moyenne pondérée ou une combinaison linéaire des taux forward $F_i(t)$. Le mot "approximativement" est employé car les w ne sont pas des pondération au sens propre puisqu'il dépendent de F .

D'ailleurs, sous la mesure forward Q^α , le pay-off d'une swaption payeuse vaut alors :

$$\begin{aligned} V(\text{Swaption Payeuse}(t)) &= E^Q \left[\frac{B(t)}{B(T_\alpha)} A_{\alpha,\beta}(T_\alpha) (S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, \alpha) E^{Q^\alpha} [A_{\alpha,\beta}(T_\alpha) (S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K)^+ | \mathcal{F}_t] \end{aligned} \quad (\text{C.3.3})$$

Grâce à cette dernière expression et l'équation (C.3.2), il est possible de simuler les différentes

¹De manière analogue, il est possible de valoriser les caplets via le Swap Market Model, qui est décrit brièvement dans l'annexe C.4.

trajectoires des taux forwards $(F_{\alpha+1}(T_\alpha), F_{\alpha+2}(T_\alpha), \dots, F_\beta(T_\alpha))$ en discrétisant leur dynamique conjointe (selon les équations (2.42), (2.34) et (2.43)) avec un schéma numérique (Euler ou Milstein). Puis, à partir de ces simulations, on reconstitue des taux swaps simulés et ensuite d'en déduire les différents pay-offs et enfin retrouver le prix par simulation Monte-Carlo. Toutefois, même en dépit des techniques de l'optimisation que les chercheurs ont proposé, les simulations de monte-carlo peuvent s'avérer coûteuses en temps de calculs.

C.3.2 Formules analytiques d'approximations des swaptions avec le modèle LFM

Ces implémentations lourdes peuvent néanmoins être allégées grâce aux formules d'approximations développées, qui sont basées sur la relation approximativement linéaire entre la swaption et le taux forward l'équation (C.3.2) et (C.3.3)). Par exemple, les formules de rang 1 et de rang r proposés par Brace (1996) et Brace (1997) effectuent deux approximations : la première consiste à figer (*freezing*) les drifts en remplaçant les taux forwards $F_j(t)$ dans l'équation (2.42) et (2.43) par leur valeur initiales $F_j(0)$. Cette approximation permet de transformer les drifts en déterministe et décrire tous les taux forwards avec des mouvements browniens géométriques (GBM) sous la mesure Q^α . La deuxième approximation consiste à remplacer la matrice de variance covariance intégrée (de rang $\beta - \alpha$ en générale) des taux forwards avec une matrice de rang réduite (1 ou r respectivement, avec $r \ll \beta - \alpha$). Cette dernière est déterminée respectivement à partir de la plus grande ou les r plus grandes valeur(s) propre(s) et leur(s) vecteur(s) propre(s) associé(s).

D'autres formules sont proposés par Rebonato (1998) et Hull & White (1999), qui sont très populaires du fait de la simplicité tout en obtenant des résultats empiriques satisfaisants. Nous les présentons rapidement maintenant.

Toujours à partir de la relation entre taux forward swap et taux forwards (l'équation (C.3.2)) et basé sur des études empiriques montrant que la variabilité des "pondérations" w est beaucoup plus faible par rapport à la variabilité des taux forward F , Rebonato (1998) propose de figer les "pondérations" :

$$S_{\alpha,\beta} \approx \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} w_i(0) F_i(t)$$

En dérivant les 2 côtés, on a :

$$dS_{\alpha,\beta} \approx \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} w_i(0) dF_i(t) = (\dots)dt + \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} w_i(0)\sigma_i(t)F_i(t)dW_i(t)$$

ce qui permet de déduire immédiatement la variation quadratique de $\ln S_{\alpha,\beta}$:

$$(d\ln S_{\alpha,\beta})(d\ln S_{\alpha,\beta}) \approx \sum_{i,j=\alpha+1}^{\beta} w_i(0)w_j(0)\rho_{i,j}\sigma_i(t)\sigma_j(t)F_i(t)F_j(t)dt$$

Rebonato (1998) effectue ensuite la 2ème approximation en *freezing* les taux forwards $F_j(t)$ (remplacer par leur valeur initiales $F_j(0)$). En prenant l'intégrale de cette variance approximée, il obtient la formule suivante :

$$\begin{aligned} (v_{\alpha,\beta}^{LFM,Reb})^2 &:= \int_0^{T_\alpha} (d\ln S_{\alpha,\beta})(d\ln S_{\alpha,\beta}) \\ &= \sum_{i,j=\alpha+1}^{\beta} \frac{w_i(0)w_j(0)F_i(0)F_j(0)}{S_{\alpha,\beta}^2(0)} \rho_{ij} \int_0^{T_\alpha} \sigma_i(t)\sigma_j(t)dt \end{aligned} \quad (C.3.4)$$

Hull & White (1999) proposent une alternative à la formule proposée par Rebonato. La différence est que les pondérations ne sont pas figées avant l'étape de différenciation. Concrètement, ils proposent d'abord de différencier l'équation (C.3.2) qui devient :

$$\begin{aligned} dS_{\alpha,\beta}(t) &= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} [w_i(t)dF_i(t) + F_i(t)dw_i(t)] + (\dots)dt \\ &= \sum_{i,k=\alpha+1}^{\beta} \left[w_k(t)\delta_{k,i} + F_i(t)\frac{\partial w_i(t)}{\partial F_k(t)} \right] dF_k(t) + (\dots)dt \end{aligned} \quad (C.3.5)$$

avec $\delta_{k,i} = 1$ si $i = k$ et 0 sinon, et

$$\frac{\partial w_i(t)}{\partial F_k(t)} = \frac{w_i(t)\tau_k}{1 + \tau_k F_k(t)} \left[\frac{\sum_{l=k}^{\beta} \tau_l \prod_{j=\alpha+1}^l \frac{1}{1 + \tau_j F_j(t)}}{\sum_{l=\alpha+1}^{\beta} \tau_l \prod_{j=\alpha+1}^l \frac{1}{1 + \tau_j F_j(t)}} - 1_{i \geq l} \right]$$

En notant $w_k^{HW}(t) := w_k(t) + \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} F_i(t)\frac{\partial w_i(t)}{\partial F_k(t)}$, qui est entièrement déterminé par les taux

forwards, l'équation (C.3.5) devient :

$$dS_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{l=\alpha+1}^{\beta} w_k^{HW}(t) dF_k(t) + (\dots)dt$$

Notons également que la terme $w_k(t)$ dans la pondération proposée par Hull et White correspond à celle de Rebonato. Cette remarque met en évidence le gain de précision apporté par la dérivée première du taux Swap dans Hull & White (1999) par rapport à la pondération de Rebonato.

Ensuite, l'approximation de Hull et White (1999) va alors consister, comme pour celle proposée par Rebonato, à figer cette nouvelle pondération $w_k^{HW}(t)$ à $t = 0$ et ils ont obtenu :

$$\left(v_{\alpha,\beta}^{LFM,HW}\right)^2 = \sum_{i,j=\alpha+1}^{\beta} \frac{w_i^{HW}(0)w_j^{HW}(0)F_i(0)F_j(0)}{S_{\alpha,\beta}^2(0)} \rho_{ij} \int_0^T \sigma_i(t)\sigma_j(t)dt$$

Ces formules proposées par les différents auteurs mettent clairement en évidence la relation entre volatilité des swaptions avec la volatilité instantanée des taux forwards et la corrélation instantanée. Elles permettent toutes d'estimer directement à partir des volatilités des swaptions et d'éviter le recours à de coûteuses simulations de monte-carlo à chaque itération du processus d'estimation des paramètres de volatilité et de corrélation. Ces formules sont essentielles dans une perspective de calibration du LMM et sont très utilisés en pratique dans les processus de calibration. Les résultats empiriques montrent qu'ils permettent des ajustements parfaits aux marché des caps tout en restant peu éloigné du marché des swaptions (Brigo et Mercurio (2006) [21]).

C.4 Valorisation des caplets avec le modèle SMM

Comme nous avons mentionné à la fin de la section C.2, le swap market model peut également s'avérer être exploitable pour valoriser les caps/floors et des formules d'approximations permettant de retrouver le prix des caps/floors à partir des taux forwards swaps ont été proposés. Les raisonnements étant analogues, nous nous contentons de donner quelques lignes à titre de justification et de complétude.

En effet, similaire au fait qu'un taux forward swap peut être interprété approximativement comme

une somme pondérée des taux LIBOR forward, un taux LIBOR forward peut être formellement écrit comme une somme pondérée de deux taux de forward swap co-terminal consécutifs (Galluccio et al. 2007)²:

$$F_i(t) = w_{ii}(t)S_{i,M}(t) + w_{i,j+1}(t)S_{i+1,M}(t)$$

avec

$$\begin{aligned} w_{ii}(t) &= \frac{v_i(t)}{(v_i(t) - v_{i+1}(t))} \\ w_{i,i+1}(t) &= \frac{-v_{i+1}(t)}{(v_i(t) - v_{i+1}(t))} \\ v_j(t) &= \sum_{k=i}^{M-1} \tau_{k+1} \prod_{j=i+1}^k (1 + \tau_j S_{j,M}(t)) \\ w_{ii}(t) + w_{i,i+1}(t) &= 1 \end{aligned}$$

Donc il ne reste plus qu'à figer les pondérations pour l'approximation. Tout parallèle aux techniques d'approximation que nous avons vus dans la section C.3.2, des approches du type Rebonato, du type Hull & White, du type rang 1 sont proposés. Galluccio et al. (2007) ont également proposé une approche du type Hull & White tronqué et une approche "spread-option". Excepté l'approche rang 1, toutes les autres (notamment celle de Hull & White) donnent d'assez bonnes approximations.

²Notons que la "pondération" $w_{ii}(t)$ est positive tandis que $w_{i,i+1}(t)$ est négative.

Appendix D. Deux autres modèles de marché à volatilité stochastique

Dans cette annexe, nous complétons la discussion des modèles à volatilités stochastiques du chapitre 2 et nous décrivons rapidement le modèle de Wu et Zhang (2002) [122] et le modèle DD-SVLMM.

Généralement, les modèles de marché à volatilité stochastique s'écrivent sous la mesure de probabilité Q_i :

$$dF_i(t) = a_i(t)\phi(F_i(t))(\nu(t))^\beta dW^{Q_i}(t) \quad (\text{D.0.1})$$

$$d\nu(t) = a_\nu dt + b_\nu dW_\nu(t) \quad (\text{D.0.2})$$

où i et ϕ sont des fonctions déterministes, a_ν et b_ν sont des processus adaptés, $\beta \in [0; 1]$, $dW^{Q_i}(t)$ et $dW_\nu(t)$ sont des mouvements browniens qui sont possiblement corrélés.

D.1 Wu et Zhang (2002)

Contrairement au modèle d'Andersen et Brotherton-Ratcliffe (2001) que nous avons mentionné ci-dessus, Wu et Zhang (2002) [122] autorisent la possibilité d'une corrélation non nulle entre les mouvements browniens des processus des taux Forwards et des volatilités. Afin d'assurer qu'il n'y ait pas de terme correcteur supplémentaire dans le drift de ν lors du changement de mesure, Wu et Zhang (2002) [122] décrivent d'abord le processus du taux forward sous la mesure de probabilité risque neutre Q :

$$\frac{dF_i(t)}{F_i(t)} = \sqrt{\nu(t)}\sigma_i(t) \cdot \left(-\sqrt{\nu(t)}\Gamma_i(t)dt + dW(t) \right)$$

$$d\nu(t) = \kappa(\theta - \nu(t))dt + \varepsilon\nu(t)dZ_\nu(t)$$

où

$$\Gamma_{i-1}(t) - \Gamma_i(t) = \frac{\tau_i F_i(t)}{1 + \tau_i F_i(t)} \sigma_i(t) \quad (\text{D.1.1})$$

$$\frac{(\sigma_i(t) \cdot dW(t)) dZ(t)}{\|\sigma_i(t)\|} = \rho_i(t) dt \quad (\text{D.1.2})$$

Dans ce processus, la variance suit un processus du type CIR avec un élément racine carrée qui garantit des variances non négatives et le retour à la moyenne. κ et θ sont des constantes positives, σ_i est un vecteur de fonctions déterministes qui impact le niveau de smile, ε est une constante positive qui contrôle la courbure du smile avec la condition de Feller $2\kappa\theta > \varepsilon^2$ satisfaite. $\Gamma_i(t)$ est un vecteur de fonctions déterministes tel que décrit par l'équation (D.1.1) et $\sqrt{V(t)}\Gamma_i(t)$ représente le pourcentage de volatilité affectant le taux forward. $dW(t)$ est un vecteur de mouvements browniens sous Q , dZ_ν est un autre mouvement brownien qui est corrélé avec $dW(t)$ selon (D.1.2), dont ρ_i contrôle la pente du smile au niveau ATM.

En appliquant le changement de mesure, on retrouve pour les dynamique sous la mesure de probabilité forward neutre :

$$\frac{dF_i(t)}{F_i(t)} = \sqrt{V(t)} \sigma_i(t) \cdot dW^i(t) \quad (\text{D.1.3})$$

$$dV(t) = [\kappa\theta - (\kappa + \varepsilon\xi_i(t)) V(t)] dt + \varepsilon\sqrt{V(t)} dZ_\nu(t)^i \quad (\text{D.1.4})$$

où

$$\xi_i(t) = \sum_{k=1}^i \frac{\tau_k F_k(t)}{1 + \tau_k F_k(t)} \|\sigma_k(t)\| \rho_k(t) \quad (\text{D.1.5})$$

Notons que le drift dans le processus des taux forward est nul ici. Par contre, les taux forwards sont présents dans le drift du processus de volatilité. Afin d'assurer la tractabilité analytique, les taux forward sont figés à date 0 :

$$\xi_i(t) \approx \sum_{k=1}^i \frac{\tau_k F_k(0)}{1 + \tau_k F_k(0)} \|\sigma_k(t)\| \rho_k(t) \quad (\text{D.1.6})$$

Avec cette approximation, le processus de volatilité devient :

$$dV(t) = \kappa \left[\theta - \tilde{\xi}_i(t)V(t) \right] dt + \varepsilon \sqrt{V(t)} dZ_\nu(t)^i(t) \quad (\text{D.1.7})$$

avec $\tilde{\xi}_i(t) = 1 + \frac{\varepsilon}{\kappa} \xi_i(t)$

A présent, l'équation (D.1.7) n'est qu'un processus racine carré n'impliquant plus d'autres processus. A partir de ce processus, la formule de valorisation d'un caplet est donnée par:

$$\begin{aligned} \text{Caplet}(0, F_i(t), K, \tau_i, V(t)) = & \tau_i P(0, T_i) \left(F_i(0) E_0^i \left[e^{X(T_{i-1})} 1_{\{F_i(T_{i-1}) > K\}} \right] \right. \\ & \left. - K E_0^i \left[1_{\{F_i(T_{j-1}) > K\}} \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{D.1.8})$$

avec $X(t) = \ln \left(\frac{F_i(t)}{F_i(0)} \right)$.

Par la suite, les dérivations des solutions sont similaires à celles du modèle de Heston : D'abord, en utilisant la fonction génératrice des moments $\phi(X(t), V(t), t; z) = E_0^i [e^{zX(T_{i-1})}]$, les deux espérances dans l'équation (D.1.8)) sont données par :

$$E_0^i \left[e^{X(T_{i-1})} 1_{\{F_i(T_{i-1}) > K\}} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_R \frac{\text{Im} \left[e^{-iu \ln \left(\frac{K}{F_i(0)} \right)} \right] \tilde{\phi}(iu + 1)}{u} du \quad (\text{D.1.9})$$

$$E_0^i \left[1_{\{F_i(T_{j-1}) > K\}} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_R \frac{\text{Im} \left[e^{-iu \ln \left(\frac{K}{F_i(0)} \right)} \right] \tilde{\phi}(iu)}{u} du \quad (\text{D.1.10})$$

où $\tilde{\phi}(z) = \phi(0, V(0), 0, z)$. En générale, $\phi(x, V, t; z)$ satisfait la PDE de Kolmogorov backward tel que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \kappa(\theta - V(t)) \frac{\partial \phi}{\partial V} - \frac{1}{2} \|\sigma_j^2(t)\| V \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 V^2 \frac{\partial \phi}{\partial V^2} + \varepsilon \rho_j V \|\sigma_j(t)\| \frac{\partial^2 G_j}{\partial V \partial x} = 0 \quad (\text{D.1.11})$$

sous contrainte de la condition terminale : $\phi(X, V, t; z) = e^{zx}$

Comme dans Heston (1993), Wu et Zhang (2006) considèrent la fonction génératrice des moments d'un processus affine sous la forme : $\phi(X(t), V(t), t, z) = e^{A(\tau, z) + B(\tau, z)V + zx}$, où τ est la durée restante jusqu'à la maturité. En remplaçant cette solution dans (D.1.11), les auteurs ont obtenu un système d'équations différentielles avec des conditions initiales, dont l'équation pour $B(\tau, z)$

est une équation Riccati, qui n'a pas de solution analytique pour des coefficients généraux. En imposant des coefficients constants par morceaux, ils parviennent à obtenir une solution analytique (proposition 4.1, Wu et Zhang (2006) [122]):

$$\begin{aligned}
 A(\tau, z) &= A(\tau_i, z) + \frac{\kappa\theta}{\varepsilon^2} \left(a + d(\tau - \tau_i) - 2 \ln \left(\frac{1 - g_i e^{d(\tau - \tau_i)}}{1 - g_i} \right) \right) \\
 B(\tau, z) &= B(\tau_i, z) + \frac{(a + d - \varepsilon^2 B(\tau_i, z)) (1 - e^{d(\tau - \tau_i)})}{\varepsilon^2 (1 - g_i e^{d(\tau - \tau_i)})} \\
 &\text{pour } \tau_i \leq \tau < \tau_{i+1}
 \end{aligned}$$

où

$$a = \kappa\xi - \rho\varepsilon\sigma z; \quad d = \sqrt{a^2 - \sigma^2\varepsilon^2(z^2 - z)}; \quad g = \frac{a + d - \varepsilon^2 B(\tau_i, z)}{a - d - \varepsilon^2 B(\tau_i, z)}$$

D.2 Displaced Diffusion Stochastic Volatility Libor Market Model

Le modèle DD-SVLMM, comme le modèle de Wu et Zhang (2006), est un Libor Market Model à volatilité stochastique dont la volatilité suit un processus CIR. Par contre il suppose une corrélation nulle entre les browniens du taux forward et de la volatilité. A la place, un terme DD (Displaced Diffusion) est introduite dans le drift de la dynamique des taux forward. Ce terme DD permet non seulement de capturer le skew, mais aussi des taux négatifs. Ce modèle a été étudié par Joshi et Rebanto (2003) [76], Gatarek (2003) [49], Piterbarg (2003) [94], etc. Le modèle DD-SVLMM peut en effet s'écrire sous la forme du modèle de Heston. A titre d'illustration, nous présentons une version simple dont les coefficients sont constants et la dynamique est la suivante (sous la même mesure de probabilité Q^i) :

$$\begin{aligned}
 dF_i(t) &= (bF_i(t) + (1 - b) F_i(0)) \sigma_i(t) \sqrt{\nu(t)} dW_i^i(t) \\
 d\nu(t) &= \kappa(\theta - \nu(t)) dt + \varepsilon \sqrt{\hat{\nu}(t)} dW_\nu(t)
 \end{aligned} \tag{D.2.1}$$

avec

$$\begin{aligned}
 dW_i^i(t) dW_j^i(t) &= \rho_{ij} dt \\
 dW_i^i(t) dW_\nu(t) &= 0
 \end{aligned}$$

Comme le modèle de Wu et Zhang (2006), $\sigma_i(t)$ est responsable du niveau de smile et le paramètre ε contrôle la courbure du smile. Par contre, la pente de la courbure n'est plus capturée par la corrélation, mais par le paramètre b_i . Notons que b_i peut être plus grand que 1 ou être négatif. Il est facile à récrire la dynamique du taux forward comme :

$$\frac{dF_i(t)}{F_i(t) + \frac{1-b}{b}F_i(0)} = b\sigma_i(t)\sqrt{\nu(t)}dW_i^i(t) \quad (\text{D.2.2})$$

D'ailleurs, $d(F_i(t) + (\frac{1-b}{b})F_i(0)) = d(F_i(t))$. La dynamique (D.2.3) peut ainsi s'écrire également de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d\iota_i(t)}{\iota_i(t)} &= \sqrt{\hat{\nu}(t)}dW_i^i(t) \\ d\hat{\nu}(t) &= \kappa(\hat{\theta} - \hat{\nu}(t))dt + \hat{\varepsilon}\sqrt{\hat{\nu}(t)}dW_\nu(t) \end{aligned} \quad (\text{D.2.3})$$

où

$$\begin{aligned} \iota_i(t) &= F_i(t) + \frac{1-b}{b}F_i(0) \\ \hat{\nu}(t) &= b^2\sigma_i^2\nu(t) \\ \hat{\theta} &= b^2\sigma_i^2\theta \\ \hat{\varepsilon} &= b\sigma_i\varepsilon \end{aligned}$$

On retrouve donc la forme standard d'un modèle de Heston. Ainsi, les méthodes de dérivation et de calibration du modèle de Heston sont applicables ici.

Piterparg (2003) [94] propose une version plus générale avec des paramètres variables dans le temps : Le concept de "effective skew" et "effective volatilité" permet la calibration des smiles de volatilités pour l'ensemble de swaption. En combinant avec la technique "freezing",

$$\begin{aligned} \frac{dF_i(t)}{F_i(t)} &= \sqrt{V(t)}((b_i(t)F_i(t) + (1-b_i(t))F_i(0))\sigma_i(t))\left(-\sqrt{V(t)}\underline{\mu}_i(t)dt + d\underline{W}(t)\right) \\ dV(t) &= \kappa(\theta - V(t))dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dZ(t) \\ dZ(t)d\underline{W}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.2.4})$$

Nous pouvons constater qu'ici les coefficients ne sont plus "time-homogenous" mais dépendent du temps.

Appendix E. Autres méthodes d'estimation et de calibration

Dans cette annexe, nous complétons les discussions du chapitre 3.

E.1 Autre méthodes de reconstruction de la courbe des taux initiale

E.1.1 Spline de lissage

L'autre direction d'extension et d'amélioration des méthodes de McCulloch (1975) [80] est d'imposer une pénalité de lissage. Par exemple, Fisher et al. (1995) proposent d'ajouter une pénalité de lissage constante dans les fonctions B-spline pour modéliser directement la courbe de taux forward :

$$\min \sum_{j=1}^J \left(P_j - \tilde{P}_j(f) \right)^2 + \lambda \int_0^{t_k} (f)^2 dt \quad (\text{E.1.1})$$

Le paramètre λ contrôle l'arbitrage entre l'ajustement (premier terme) et le lissage (second terme) et les auteurs le calibrent par la méthode de validation croisée généralisée. Pour un λ fixe, on peut utiliser des moindres carrés non linéaires pour la minimisation.

Néanmoins, Bliss (1997) [14] montre que cette méthode aboutit à des sous-estimations pour toutes les maturités courtes et suggère une pénalité de lissage variable. Suivant cette piste, Waggoner (1997) [120] propose une méthode VRP (Variable Roughness Penalty) pour estimer les taux forwards :

$$\min \sum_{j=1}^J \left(P_j - \tilde{P}_j(f) \right)^2 + \int_0^{t_k} \lambda(s) (f''(s))^2 ds \quad (\text{E.1.2})$$

avec

$$\lambda t = \begin{cases} 0,1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 100 & 1 \leq t \leq 10 \\ 100000 & 10 \leq t \end{cases}$$

dont t mesuré en année. Cette fonction de pénalité en 3 échelons permet d'ajouter de la flexibilité à l'extrémité courte tout en atténuant les oscillation à l'extrémité longue. L'étude de Waggoner (1997) [120] mené sur le marché américain, le découpage des échelons correspondent à la différence des maturités entre *bills*, *notes* et *bonds*. En considérant que le découpage de Waggoner (1997) [120] ne s'applique pas forcément dans les autres marchés, Anderson et Sleath (2001) [7] proposent une variante du modèle de Waggoner (1997) avec une forme fonctionnelle de pénalité qui varie continûment sur les maturités (le marché britannique dans leur application et d'ailleurs ce modèle est celui adopté par la banque d'Angleterre). Ce modèle minimise :

$$\min \sum_{j=1}^J \left[\frac{P_j - \tilde{P}_j(f)}{D_j} \right]^2 + \int_0^{t_k} \lambda(s) (f''(s))^2 ds \quad (\text{E.1.3})$$

avec

$$\log \lambda(t) = L - (L - S)e^{(-t/\mu)}$$

dont D_j est la duration modifiée de l'obligation i . Les écarts entre les prix de marché et les prix théoriques est donc pondérée par l'inverse de la duration modifiée des obligations, ce qui permet de tenir compte des erreurs de pricing observées pour les obligations qui sont plus volatiles que les autres. D'ailleurs, comme on peut le constater, seuls trois paramètres (L , S et μ) doivent être estimés avec cette méthode (à comparer aux cinq paramètres de lissage de Waggoner (1997)).

E.1.2 Modèles paramétriques

Dans les modèles paramétriques, une forme de fonction est préalablement sélectionnée et les paramètres sont déterminés pour l'ensemble des maturités. Parmi les exemples couramment utilisées sont le modèle Nelson-Siegel (1987) [87] et son extension le modèle Nelson-Siegel-Svensson (1994) [117]. Afin de capturer les formes monotones avec des bosses observées dans les courbes de taux, Nelson-Siegel (1987) [87] partent de la courbe des taux à terme instantanés qu'ils modélisent avec une forme paramétrique parcimonieuse :

$$f(t, \theta) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{t}{\alpha_1}} + \beta_2 \frac{t}{\alpha_1} e^{-\frac{t}{\alpha_1}} \quad (\text{E.1.4})$$

A partir de cette fonctionnelle des taux à terme instantanés, Nelson-Siegel déduisent alors une

fonctionnelle pour le taux zéro-coupon en intégrant les taux à terme instantanés :

$$R(t, \theta) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{\alpha_1}{t} \left(1 - e^{-\frac{t}{\alpha_1}}\right) - \beta_2 e^{-\frac{t}{\alpha_2}} \quad (\text{E.1.5})$$

Il est aisé de constater que le taux spot tend vers $\beta_0 + \beta_1$ quand la maturité tend vers 0 (taux court instantané), et que le taux spot tend vers β_0 quand la maturité tend vers l'infini (taux consol). β_0 donne donc la valeur asymptotique des structure par terme des taux spot $r(\infty)$ et des taux forward instantanées $f(\infty)$. β_1 peut être considéré comme le spread entre le taux consol et le taux court instantané, et peut être également interprété comme la pente de la structure par terme des taux zéro-coupon. Cette fonction garantit un taux instantané positif pour des paramètres $\beta_0 > 0$, $\beta_0 + \beta_1 > 0$. Tandis que β_2 affecte la courbure de la structure des termes sur les termes intermédiaires et peut générer une courbe concave ou convexe selon le signe de β_2 ¹. Enfin, $\alpha > 0$ mesure la vitesse de convergence de la structure des termes vers le taux consol. Cette formule implique alors pour la fonction d'actualisation $\delta(t, \theta) = e^{-tR(t, \theta)}$ d'être une double exponentielle.

Bien que Nelson-Siegel (1987) [87] autorise des formes monotones et bosselées, il ne peut pas représenter des courbes ayant à la fois des bosses et des creux. En partant de ce modèle, Svenson (1994) [117] améliore encore la flexibilité et l'ajustement en rajoutant un second terme de décroissance exponentielle $\beta_3 e^{-\frac{t}{\alpha_2}}$:

$$f(t, \theta) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{t}{\alpha_1}} + \beta_2 \frac{t}{\alpha_1} e^{-\frac{t}{\alpha_1}} + \beta_3 \frac{t}{\alpha_2} e^{-\frac{t}{\alpha_2}} \quad (\text{E.1.6})$$

En intégrant les taux à terme instantanés, on trouve alors la fonctionnelle suivante pour les taux zéro-coupons :

$$R(t, \theta) = \beta_0 + \beta_1 \frac{\alpha_1}{t} \left(1 - e^{-\frac{t}{\alpha_1}}\right) + \beta_2 \left[\frac{\alpha_1}{t} \left(1 - e^{-\frac{t}{\alpha_1}}\right) - e^{-\frac{t}{\alpha_1}} \right] + \beta_3 \left[\frac{\alpha_2}{t} \left(1 - e^{-\frac{t}{\alpha_2}}\right) - e^{-\frac{t}{\alpha_2}} \right] \quad (\text{E.1.7})$$

où β_3 est analogue à β_2 et détermine l'amplitude et la direction de la deuxième bosse. Le paramètre α_2 , analogue à α_1 , spécifie la position de la deuxième bosse.

¹Par ailleurs, ces 3 paramètres sont réinterprétés comme des modèles à trois facteurs (de niveau, de pente et de courbure) dans les travaux de Diebold et Li (2006) [37].

Comparé aux méthodes de spline, ces modèles sont plus robustes par rapport aux erreurs de mesures et aux valeurs aberrantes dans les données. De plus, avec des fonctions lisses, des paramètres ayant des interprétations intuitives et ayant un comportement asymptotique sur le long terme garanti, ces modèles ont un grand succès parmi les méthodes d'estimation de la courbe de taux des intérêts et de la gestion des risques de portefeuille. Selon le document technique publié par BIS (Bank for International Settlements) en 2005[11], ces 2 approches sont celles les plus adoptés par les principales banques centrales pour l'estimation des courbe de taux. Enfin, les études empiriques (ex. Bliss 1997 [14]) montrent également des évidences en leur faveur.

E.2 Autre méthode de calibration des corrélations

E.2.1 Méthode d'optimisation d'angle

Une méthode alternative, basé sur l'approche SAP (standard angles parameterization), est introduit par Rebonato et Jackel (2001) [104]. Ils proposent de choisir une matrice $\rho(\theta)$ de rang n , qui est décomposée comme suit :

$$\rho(\theta) = B(\theta)B(\theta)' \quad (\text{E.2.1})$$

On peut toujours prendre $B \in \mathbb{R}^M$ en posant les $M - n$ dernières colonnes nulles. Chaque ligne de la matrice B dans l'équation (3) peut être considéré comme les coordonnées polaires d'un point sur la surface d'une hypersphère de rayon 1 dans un sous-espace de n -dimension dans \mathbb{R}^M . En notant $b_{i,k}$ les éléments de la matrice B , la ligne i peut être obtenue à partir des coordonnées angulaires $\theta_{i,k}$ selon :

$$b_{i,k}(\theta) = \begin{cases} \cos \theta_{i,k} \prod_{j=1}^{k-1} \sin \theta_{i,j}, & k = 1, 2, \dots, n-1 \\ \prod_{j=1}^{n-1} \sin \theta_{i,j}, & k = n \\ 0, & k > n \end{cases} \quad (\text{E.2.2})$$

Une interprétation géométrique de la SAP donnée par Rapisarda et al. (2007) [97] peut aide à la compréhension : de manière simplifiée, la SAP consiste en effet à appliquer une suite de rotations Jacobi à un vecteur unitaire situé dans un espace cartésien multidimensionnelle et obtenir un ensemble de vecteurs unitaires \mathbf{v}_i . Une matrice de corrélation peut être donc visualisée comme le

résultat des projections mutuelles de cet ensemble de vecteurs (chaque éléments de la matrice de la corrélation correspond en effet aux produits scalaires par paire de cet ensemble de vecteurs).

Il est important de noter que, par cette construction, la matrice $B(\theta)$ obtenue à partir d'un angle $\theta_{i,k}$ arbitraire satisfait toujours les propriétés fondamentales d'une matrice de corrélation². Notons que le nombre de paramètres $(\theta_{i,k})$ à estimer ici est de $n(n-1)$, tandis que le nombres de points à ajuster $(\rho_{i,j})$ est seulement $n(n-1)/2$. La redondance dans la paramétrisation d'angle vient essentiellement du fait que la matrice de corrélation dépend des angles entre les vecteurs \mathbf{v}_i au lieu des vecteurs \mathbf{v}_i mêmes. Autrement dit, elle ne dépend que des différences entre les $\theta_{i,k}$. Rapisarda et al. (2007) [97] donnent une solution à ce problème. Les auteurs proposent de fixer d'abord le premier vecteur tel que \mathbf{e}_1 afin d'éliminer la premier source de redondance. Ensuite, on pose $\theta_{i,k} = 0$ pour tout $k \geq i$ et faire varier $\theta_{i,k}$, $k = 1, \dots, i-1$, uniquement dans $[0, \pi]$. Ce qui est justifié par la correspondance bijective entre les vecteurs de norme unitaire et les angles $\theta_{i,k}$ dans l'hémisphère supérieur de l'espace. Ainsi, les éléments de la matrice B , $b_{i,k}$ sont :

$$b_{i,k}(\theta) = \begin{cases} \cos \theta_{i,k} \prod_{j=1}^{k-1} \sin \theta_{i,j}, & k = 1, 2, \dots, \min(i, n) \\ \prod_{j=1}^{M-1} \sin \theta_{i,j}, & k = \min(i, n) \\ 0, & k > \min(i, n) \end{cases} \quad (\text{E.2.3})$$

Ce paramétrage est nommé RTAP ("Right Trapezoid Angles Parameterization") par les auteurs. L'approximation de la matrice de corrélation de rang plein consiste donc à trouver les paramètres qui minimisent la distance entre ρ et $\rho(\theta)$. En d'autres termes, cela revient en terme de norme de Frobenius à trouver une solution au problème de minimisation :

$$\|\rho - \rho(\theta)\|^2 = \sum_{i,k=1}^M \|\rho_{i,k=1} - \rho_{i,k=1}(\theta)\|^2$$

²Voir annexe A dans Rebonato et Jackel (2001) [104] pour une preuve.

Bibliography

- [1] ACPR. La situation des assureurs soumis à solvabilité ii en france fin 2022. Analyses et synthèses 148, Autorité de contrôle prudentiel et de résolution, 2023. Source : <https://acpr.banque-france.fr/la-situation-des-assureurs-soumis-solvabilite-ii-en-france-fin-2022>.
- [2] ACPR. Le marché de l'assurance-vie en 2022. Analyses et synthèses 146, Autorité de contrôle prudentiel et de résolution, 2023. Source : https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20230320_as146_av_2022_vf.pdf.
- [3] Yakov Amihud and Haim Mendelson. Liquidity, maturity, and the yields on u.s. treasury securities. *The Journal of Finance*, 46(4):1411–1425, 1991.
- [4] Leif Andersen and Jesper Andreasen. Volatile volatilities. *Risk*, pages 163–168, 15 2002.
- [5] Leif Andersen and Rupert Brotherton-Ratcliffe. Extended libor market models with stochastic volatility. *Journal of Computational Finance*, 9, 12 2001.
- [6] Nicola Anderson, Francis Breedon, Mark Deacon, Andrew Derry, and Gareth Murphy. *Estimating and interpreting the yield curve*, volume 6. John Wiley & Sons Incorporated, 1996.
- [7] Nicola Anderson and John Sleath. New estimates of the UK real and nominal yield curves. Bank of England working papers 126, Bank of England, March 2001.
- [8] Alexandre Antonov, Michael Konikov, and Michael Spector. Sabr spreads its wings. *Risk*, 26:58–63, 01 2013.
- [9] Jaroslav Baran and Jan Voříšek. Volatility indices and implied uncertainty measures of European government bond futures. Working Papers 43, European Stability Mechanism, May 2020.
- [10] BCE. Évolutions économiques, financières et monétaires. Bulletin économique 4, Banque centrale européenne, 2023.

- [11] BIS. Zero-coupon yield curves: technical documentation. Technical Report 25, Bank for International Settlements, 2005.
- [12] Fischer Black. The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, 3(1):167–179, 1976.
- [13] Fischer Black and Piotr Karasinski. Bond and option pricing when short rates are lognormal. *Financial Analysts Journal*, 47(4):52–59, 1991.
- [14] Robert R. Bliss. Movements in the term structure of interest rates. *Economic Review*, 82(Q 4):16–33, 1997.
- [15] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307–327, April 1986.
- [16] Amaury Boyenval, Christophe Herpet, and Arnaud Lebreton. Insurance investment outlook 2023: Adapting to the higher-for-longer paradigm. Technical Report 4, AXA Investment Manager, 2022.
- [17] Alan Brace, Tim Dun, and Geoff Barton. Towards a central interest rate model. *Option pricing, interest rates and risk management*, pages 278–313, 2001.
- [18] Alan Brace, Dariusz Gatarek, and Marek Musiela. The Market Model of Interest Rate Dynamics. *Mathematical Finance*, 7(2):127–155, April 1997.
- [19] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. A mixed-up smile. *Risk*, 13, 01 2000.
- [20] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Displaced and Mixture Diffusions for Analytically-Tractable Smile Models*, pages 151–174. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [21] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*, volume 2. Springer, 2006.
- [22] Damiano Brigo, Fabio Mercurio, and Giulio Sartorelli. Alternative asset-price dynamics and volatility smile. *Quantitative Finance*, 3:173–183, 06 2003.
- [23] Markus K. Brunnermeier. Rethinking monetary policy in a changing world. Finance development, International Monetary Fund, March 2023.

- [24] Éric Burgayran. *L'économétrie des structures par termes des taux d'intérêts*. PhD thesis, Université Paris Dauphine, 1998.
- [25] Charles Cao and R S Tsay. Nonlinear time-series analysis of stock volatilities. *Journal of Applied Econometrics*, 7(S):S165–85, 1992.
- [26] Andrew Carverhill. When is the short rate markovian? *Mathematical Finance*, 4(4):305–312, 1994.
- [27] Moorad Choudhry and Michele Lizzio. Chapter 5 - fitting the term structure. In Moorad Choudhry and Michele Lizzio, editors, *Advanced Fixed Income Analysis (Second Edition)*, pages 85–111. Butterworth-Heinemann, San Diego, second edition edition, 2015.
- [28] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, and Stephen A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2):385–407, 1985.
- [29] John C. Cox and Stephen A. Ross. The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3(1):145–166, 1976.
- [30] Christian Crispoldi, Gérald Wigger, and Peter Larkin. *SABR and SABR LIBOR Market Models in Practice : With Examples Implemented in Python*. Palgrave Macmillan London, 2015.
- [31] D.J. Daley and D. Vere-Jones. *An Introduction to the Theory of Point Processes: Volume I: Elementary Theory and Methods*. Probability and Its Applications. Springer New York, 2006.
- [32] Christian de Boissieu and Guglielmi Jean-Marie. *Formation et rôle des taux d'intérêt*, volume 1. PARIS : ECONOMICA, 1982.
- [33] Banque de France. Bulletin de la banque de france. Technical Report 243/3, Novembre/Décembre 2022. Source :https://publications.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/bdf243-3_placements-assureurs.pdf.
- [34] C. Dellacherie. Un survol de la theorie de l'integrale stochastique. *Stochastic Processes and their Applications*, 10(2):115–144, September 1980.

- [35] Jaime Cuevas Dermody and Eliezer Zeev Prisman. Term structure multiplicity and clientele in markets with transactions costs and taxes. *The Journal of Finance*, 43(4):893–911, 1988.
- [36] Institut des Actuaire. Révision de la directive solvabilité ii - risque de liquidité. Production des groupes de travail, Institut des Actuaire, 2022.
- [37] Francis X. Diebold and Canlin Li. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics*, 130(2):337–364, 2006.
- [38] P. Doust. Modelling discrete probabilities. Technical report, Quantitative Analysis Group, RBS, 2007.
- [39] Bruno Dupire. Pricing with a smile. *Risk*, 7(1):18–20, 1994.
- [40] ESMA EBA, EIOPA. Joint committee report on risks and vulnerabilities in the eu financial system. Technical Report JC 2023 07, EBA, EIOPA, ESMA, March 2023.
- [41] ECB. Financial stability review. Technical report, European Central Bank, May 2019.
- [42] ECB. Update on economic, financial and monetary developments. Economic Bulletin 5, European Central Bank, 2023.
- [43] EIOPA. Opinion on the 2020 review of solvency ii. General publications, European Insurance and Occupational Pensions Authority, 2020.
- [44] EIOPA. Financial stability report june 2023. Technical Report 22 June 2023, European Insurance and Occupational Pensions Authority, 2023.
- [45] Robert Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987–1007, 1982.
- [46] ESRB. Report on systemic risks in the eu insurance sector. Technical report, European Systemic Risk Board, December 2015.
- [47] Bettina Farkas, Ulf Lewrick, Tomas Stastny, and Nikola Tarashev. Insurance companies' holdings of sovereign debt. Bis quarterly review, Bank for International Settlements, March 2023. Source : https://www.bis.org/publ/qtrpdf/r_qt2303z.htm.
- [48] Damien Fontanes. Analyse de l'impact des modèles de taux sur le Best Estimate, 2016.

- [49] Dariusz Gatarek. Libor market model with stochastic volatility. *SSRN Electronic Journal*, 03 2003.
- [50] Dariusz Gatarek, Przemyslaw Bachert, and Robert Maksymiuk. *The LIBOR Market Model in Practice*. Wiley Finance, 2007.
- [51] Rajna Gibson, François-Serge Lhabitant, and Denis Talay. *Modeling the term structure of interest rates : a review of the literature*, volume 5. Now Publishers, 2010. ISBN : 978-1601983725.
- [52] Lawrence R Glosten, Ravi Jagannathan, and David E Runkle. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, 48(5):1779–1801, 1993.
- [53] Christian Gouriéroux and O. Scaillet. Estimation of the term structure from bond data. Technical report, 1994.
- [54] W.H. Greene. *Econometric Analysis*. Econometric Analysis. Pearson, 2018.
- [55] Patrick Hagan and Andrew Lesniewski. Libor market model with sabr style stochastic volatility. 01 2006.
- [56] Patrick Hagan and Andrew Lesniewski. Libor market model with sabr style stochastic volatility. *JP Morgan Chase and Ellington Management Group*, 32:57, 2008.
- [57] Patrick S. Hagan, Deep Kumar, Andrew Lesniewski, and Diana E. Woodward. Managing smile risk. *Wilmott Magazine*, September:84–108, 2002.
- [58] James D. Hamilton. *Time Series Analysis*. Princeton University Press, 1994.
- [59] J.Michael Harrison and Stanley R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11(3):215–260, 1981.
- [60] J.Michael Harrison and Stanley R. Pliska. A stochastic calculus model of continuous trading: Complete markets. *Stochastic Processes and their Applications*, 15(3):313–316, 1983.

- [61] David Heath, Robert Jarrow, and Andrew Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60(1):77–105, 1992.
- [62] Pierre Henry-Labordere. Unifying the bgm and sabr models: A short ride in hyperbolic geometry. *SSRN Electronic Journal*, 03 2006.
- [63] Steven L. Heston. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, 6(2):327–343, April 1993.
- [64] Thomas S Y Ho and Sang-bin Lee. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance*, 41(5):1011–29, 1986.
- [65] John Hull and Alan White. Pricing Interest-Rate-Derivative Securities. *Review of Financial Studies*, 3(4):573–592, 1990.
- [66] John Hull and Alan White. Bond option pricing based on a model for the evolution of bond prices. *Advances in futures and options research : a research annual.*, 6:1–13, 1993.
- [67] John C. Hull. *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Prentice Hall, 6. ed., pearson internat. ed edition, 2006.
- [68] John C Hull and Alan D White. Numerical procedures for implementing term structure models i : Single-factor models. *The Journal of Derivatives*, 2(1):7–16, 1994.
- [69] John C Hull and Alan D White. Numerical procedures for implementing term structure models ii : Two-factor models. *The Journal of Derivatives*, 2(2):37–48, 1994.
- [70] Philip Hunt and Joanne Kennedy. *Financial Derivatives in Theory and Practice, Revised Edition*. Wiley, Chichester, 2004.
- [71] Steven E. Shreve Ioannis Karatzas. *Brownian motion and stochastic calculus*. Graduate texts in mathematics ; 113. Springer, New York, 2nd ed. edition, 1998.
- [72] J. James and N. Webber. *Interest Rate Modelling*. Wiley Series in Financial Engineering. Wiley, 2000.

- [73] Farshid Jamshidian. LIBOR and swap market models and measures. *Finance and Stochastics*, 1(4):293–330, 1997.
- [74] Farshid Jamshidian and Yu Zhu. Scenario simulation: Theory and methodology. *Finance and Stochastics*, 1:43–67, 02 1996.
- [75] Robert A. Jarrow. The term structure of interest rates. *Annual Review of Financial Economics*, 1(1):69–96, 2009.
- [76] Mark Joshi and Riccardo Rebonato. A displaced-diffusion stochastic volatility libor market model: motivation, definition and implementation. *Quantitative Finance*, 3(6):458–469, 2003.
- [77] S. G. Kou. A Jump-Diffusion Model for Option Pricing. *Management Science*, 48(8):1086–1101, August 2002.
- [78] Marek Rutkowski Marek Musiela. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer Berlin, Heidelberg, 2005.
- [79] J Huston McCulloch. Measuring the Term Structure of Interest Rates. *The Journal of Business*, 44(1):19–31, January 1971.
- [80] J. Huston McCulloch. The tax-adjusted yield curve. *The Journal of Finance*, 30(3):811–830, 1975.
- [81] Markus Meister. Smile modeling in the libor market model.
- [82] Nicolas Merener and Paul Glasserman. Numerical solution of jump-diffusion LIBOR market models. *Finance and Stochastics*, 7(1):1–27, 2003.
- [83] Robert Merton. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, pages 141–183, 1973.
- [84] Paul-André Meyer. Un cours sur les intégrales stochastiques (exposés 1 à 6). *Séminaire de probabilités de Strasbourg*, 10:245–400, 1976.
- [85] Kristian R. Miltersen, Klaus Sandmann, and Dieter Sondermann. Closed form solutions for term structure derivatives with log-normal interest rates. *The Journal of Finance*, 52(1):409–430, 1997.

- [86] Massimo Morini and Fabio Mercurio. No-arbitrage dynamics for a tractable sabr term structure libor model. *Journal of Risk*, 2007.
- [87] Charles Nelson and Andrew F Siegel. Parsimonious modeling of yield curves. *The Journal of Business*, 60(4):473–89, 1987.
- [88] Daniel B Nelson. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica*, 59(2):347–370, March 1991.
- [89] Per Nymand-Andersen. Yield curve modelling and a conceptual framework for estimating yield curves: evidence from the European Central Bank’s yield curves. Statistics Paper Series 27, European Central Bank, February 2018.
- [90] Jan Obloj. Fine-tune your smile: Correction to Hagan et al. *Wilmott Magazine*, 2008.
- [91] OECD. Global insurance market trends 2022. Technical report, Organisation for Economic Co-operation and Development, 24 July 2023. Available at <https://www.oecd.org/pensions/globalinsurancemarkettrends.htm>.
- [92] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [93] C.W. Oosterlee and L.A. Grzelak. *Mathematical Modeling And Computation In Finance: With Exercises And Python And Matlab Computer Codes*. World Scientific Publishing Company, 2019.
- [94] Vladimir Piterbarg. A stochastic volatility forward libor model with a term structure of volatility smiles. *Applied Mathematical Finance*, 12, 10 2003.
- [95] R. Portait and P. Poncet. *Finance de marché: instruments de base, produits dérivés, portefeuilles et risques*. Dalloz, 2009.
- [96] Michael J. D. Powell. *Approximation Theory and Methods*. Cambridge University Press, 1981.
- [97] Francesco Rapisarda, Damiano Brigo, and Fabio Mercurio. Parameterizing correlations: a geometric interpretation. *Ima Journal of Management Mathematics*, 18:55–73, 2007.

- [98] R. Rebonato, K. McKay, and R. White. *The SABR/LIBOR Market Model: Pricing, Calibration and Hedging for Complex Interest-Rate Derivatives*. Wiley, 2011.
- [99] Riccardo Rebonato. Calibration of the bgm model. *Risk*, page 74–79, March 1999.
- [100] Riccardo Rebonato. *Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives: The LIBOR Market Model and Beyond*. Princeton University Press, 2002.
- [101] Riccardo Rebonato. *Volatility and Correlation: The Perfect Hedger and the Fox*. John Wiley Sons, Ltd, 08 2004.
- [102] Riccardo Rebonato. A time-homogenous, sabr-consistent extension of the lmm: Calibration and numerical results. *Risk*, 01 2007.
- [103] Riccardo Rebonato and Ian Anthony Cooper. *The limitations of simple two-factor interest rate models*. Institute of Finance and Accounting, London Business School, 1995.
- [104] Riccardo Rebonato and Peter Jaeckel. The most general methodology to create a valid correlation matrix for risk management and option pricing purposes. *Journal of Risk*, 2, 04 2001.
- [105] Riccardo Rebonato and Richard White. Linking caplets and swaptions prices in the lmm-sabr model. *The Journal of Computational Finance*, 2, 12 2009.
- [106] Rebonato Riccardo. Interest–rate term–structure pricing models: a review. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 460(2043):667–728, March 2004.
- [107] Thierry Roncalli. *La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique : application à la structure par terme française du 10 février 1994 au 30 août 1996*. PhD thesis, Université Bordeaux 4, 1998.
- [108] MARK RUBINSTEIN. Displaced diffusion option pricing. *The Journal of Finance*, 38(1):213–217, 1983.
- [109] Marek Rutkowski and Marek Musiela. Continuous-time term structure models: Forward measure approach (*). *Finance and Stochastics*, 1(4):261–291, 1997.
- [110] Patrick Saner. The old normal: interest rate rises signal relief for insurers’ returns, but likely more volatility. *Economic insights* 1, Swiss Re Institute, February 2023.

- [111] JGM Schoenmakers and B Coffey. *Stable implied calibration of a multi-factor LIBOR model via a semi-parametric correlation structure*. Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, 2000. Preprint 611.
- [112] Enrique Sentana. Quadratic ARCH Models. *The Review of Economic Studies*, 62(4):639–661, 10 1995.
- [113] Gary Shea. Pitfalls in smoothing interest rate term structure data equilibrium models and spline approximation. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19:253–269, 09 1984.
- [114] GARY S. SHEA. Interest rate term structure estimation with exponential splines: A note. *The Journal of Finance*, 40(1):319–325, 1985.
- [115] Steven E Shreve. *Stochastic calculus for finance 2, Continuous-time models*. Springer, 2004.
- [116] James M. Steeley. Estimating the gilt-edged term structure: Basis splines and confidence intervals. *Journal of Business Finance & Accounting*, 18(4):513–529, 1991.
- [117] Lars E.O. Svensson. Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992 - 1994. NBER Working Papers 4871, National Bureau of Economic Research, Inc, September 1994.
- [118] Ruey S. Tsay. *Analysis of financial time series*. Wiley series in probability and statistics. Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, 2. ed. edition, 2005.
- [119] OLDRICH A. VASICEK and H. GIFFORD FONG. Term structure modeling using exponential splines. *The Journal of Finance*, 37(2):339–348, 1982.
- [120] Daniel Waggoner. Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices. FRB Atlanta Working Paper 97-10, Federal Reserve Bank of Atlanta, 1997.
- [121] Florent Wilhelmy. *Analyse des modèles de taux d'intérêts pour la gestion actif-passif*, 2010.
- [122] Lixin Wu and Fan Zhang. Libor market model with stochastic volatility. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2(2):199–227, 2006.
- [123] Jean-Michel Zakoian. Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18(5):931–955, 1994.

- [124] Christian Zühlsdorff. Extended libor market models with affine and quadratic volatility. Bonn Econ Discussion Papers 6/2002, Bonn, 2002.