

**Mémoire présenté le :
pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuares**

Par : Bertrand BILONGI

Titre du mémoire :

Modélisation de l'inflation au sein du modèle interne non-vie de Groupama dans un environnement de forte inflation

Confidentialité ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☐ 1 an ☒ 2 ans)

:

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

Membres présents du jury de la
filière :

Signature :

Entreprise :

Nom : GROUPAMA

Signature :

Directeur de mémoire en
entreprise

Membres présents du jury de
l'Institut des Actuares :

Signature :

Nom : GOUMAR

Signature :



Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels** (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable
entreprise :



Signature du candidat :



Résumé

Dans le contexte actuel de forte inflation, l'activité d'assurance, notamment en non-vie se trouve impactée. Cela s'observe au niveau des prestations des sinistres. En effet, la hausse inflationniste expose la compagnie d'assurance à des coûts d'expositions plus conséquents et donc une réévaluation à la hausse des sinistres futurs, avec un accroissement du risque de réserves insuffisant, auquel cas, la hausse des paiements des sinistres et le renforcement des réserves impacteraient la rentabilité de la compagnie d'assurance.

Un remède à ce phénomène serait une augmentation des primes, au risque d'engendrer des impacts négatifs auprès des consommateurs et au niveau de la compétitivité vis-à-vis de la concurrence. Une solution à ce problème serait d'exclure des risques spécifiques de la police ou une augmentation des franchises pour les profils les plus risqués.

Notre étude n'abordera pas les différentes mesures tarifaires citées ci-dessus. Elle se limitera à la prise en compte de l'inflation dans le calcul du capital économique, au niveau des risques de souscription Non-vie du Modèle interne partiel de Groupama et plus précisément, au niveau des risques des primes.

Dans le modèle interne partiel de Groupama, l'inflation est un phénomène qui peut aggraver l'impact de la sinistralité sur le portefeuille et elle se compose d'une partie économique et d'autres facteurs plus spécifiques et propres à des secteurs donnés, communément appelées inflations spécifiques.

Notre objectif sera de challenger les différents modèles de prise en compte de l'inflation actuellement utilisés chez Groupama, avec des modèles alternatifs plus paramétrés permettant de mieux considérer l'évolution propre de chaque indice d'inflation spécifique dans le temps en rendant compte notamment des effets de saisonnalité et des effets de retard.

Cette approche permettra, en premier lieu, d'évaluer la pertinence de chacun des modèles, par la mise en évidence de leurs avantages et inconvénients, ensuite, s'en suivra une étude de cohérences de chacun d'eux, face aux variations des chocs inflationnistes puis nous effectuerons des tests de sensibilité.

La finalité de cette démarche sera, d'une part, de voir si l'utilisation d'un modèle avec des données d'inflations observées et non pas anticipés, comme c'est le cas actuellement avec le modèle de Barrie et Hibbert dans le calibrage de l'inflation économique, améliorerait la modélisation de l'inflation. D'autre part, nous répondrons aux limites des modèles de prise en compte de l'inflation spécifique

Nous nous sommes donc focalisés sur les LoBs (Line of Business) à forte demande en capital économique, en l'occurrence la LoB MTPL qui comporte des sinistres liés à l'automobile mais

aussi ceux à développements longs, précisément les rentes liées aux accidents corporels qui peuvent subir les effets des hausses des prix bien au-delà de la collecte des primes. Il y a aussi la LoB Fire avec les pertes d'exploitations, les coûts de constructions dont les contrats peuvent atteindre une dizaine d'années

Mots clés : SCR, Inflation, GSE, RT, Non-Vie, Risque de primes, Modèle interne, Solvabilité II

Abstract

In the current context of high inflation, the insurance business, particularly in non-life, is being impacted. This can be seen in the claims payments. Indeed, the inflationary rise exposes the insurance company to higher exposure costs and thus to an upward revaluation of future claims, with an increase in the risks of insufficient reserves, in which case the rise in claims payments and the strengthening of reserves would impact on the profitability of the insurance company.

A remedy for this would be an increase in premiums, which could have a negative impact on consumers and on competitiveness. A remedy would be to exclude specific risks from the policy or to increase deductibles for the riskiest profiles.

Our study will not deal with the different tariff measures, as mentioned above, but will limit itself to the consideration of inflation in the calculation of economic capital at the level of non-life underwriting risks in Groupama's Partial Internal Model, and more precisely, at the level of premium risks.

In Groupama's Partial Internal Model, inflation is a measure of loss severity and includes an economic component and other more specific, sector-specific factors, commonly referred to as specific inflations.

Our objective will be to challenge the different models for taking inflation into account, currently used at Groupama, with alternative models that are more parameterised and that would allow us to better consider the specific evolution of each specific inflation over time by taking into account, in particular, the effects of seasonality and the effects of delay.

Firstly, it will allow us to evaluate the relevance of each of the models, by highlighting their advantages and disadvantages, then we will study their coherence in the face of variations in inflationary shocks and then we will carry out sensitivity tests.

The aim of this approach will be to see whether the use of a model with observed and not anticipated inflation data, as is currently the case, improves the modelling of inflation.

We therefore focused on LoBs (Lines of Business) with high demand for economic capital, in this case the MTPL LoB which includes motor-related claims but also those with long developments, specifically personal injury annuities which can be affected by price increases well beyond the premium collection. There is also the LoB Fire with business interruption, construction costs, whose contracts can reach ten years.

Key words: SCR, Inflation, ESG, TR, Non-Life, Premium risks, Internal model, Solvency II

Remerciements

Je remercie premièrement Ali GOUMAR qui m'a fait confiance et m'a donné l'opportunité d'effectuer cette alternance au sein de l'équipe validation du modèle interne non-vie de Groupama, dont je remercie chacun des membres pour leur professionnalisme, leur patience et leur bonne humeur. J'ai beaucoup appris d'eux, notamment avec différents sujets auxquels j'ai été mis à contribution. Je remercie également mon tuteur académique Olivier LOPEZ, directeur de l'institut des Statistiques de Sorbonne Université, pour son apport au sujet et ses différents conseils.

Je remercie Youva MANSOUR pour sa disponibilité, sa pédagogie et sa contribution dans l'élaboration de ce mémoire, ainsi que Mustapha EL-AZIMANI et Zakaria MOULIM pour leurs conseils et expériences du sujet.

De plus, je remercie Denis ROUSSET, directeur de la Direction Risques Contrôle et Conformité Groupe pour l'intérêt qu'il porte à nos différents travaux et la confiance qu'il ne cesse de nous accorder. Mes remerciements vont également à Renaud BRUNEL, directeur de la Direction des Risques Opérationnels et Contrôles permanent, pour ses suivis hebdomadaires et ses différents conseils.

Je tiens également à remercier Valentine NAPOLEON pour sa contribution à l'élaboration de ce mémoire, son partage et sa disponibilité. Je remercie également Marie HERR, Léo REICHARDT, ainsi que l'ensemble des membres de la Direction Risques Contrôle et Conformité pour leur accueil et leur bonne humeur tout au long de mon alternance.

Pour finir, je remercie également ma famille qui ne cesse de me soutenir et l'ont fait le long de mes études.

Synthèse

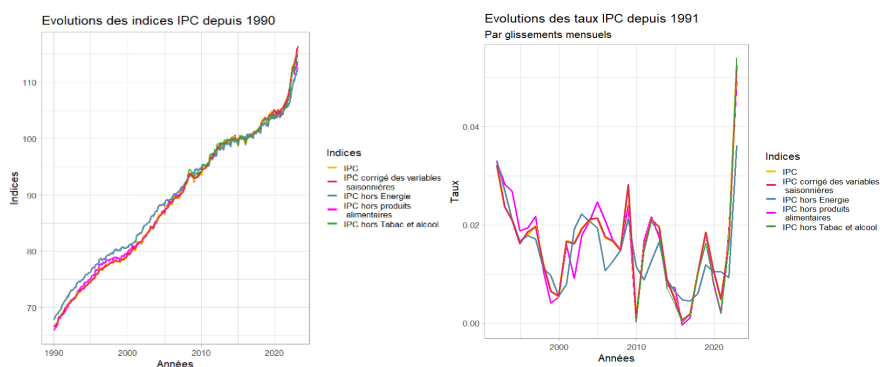
L'évaluation de l'impact de l'inflation sur les portefeuilles d'assurance non-vie requiert une bonne connaissance des paramètres économiques, notamment des facteurs de risques. Cela concerne à la fois les provisions et les primes. Le risque de prime se traduit par une situation où les coûts des sinistres futurs pourraient être supérieurs aux primes. Une hausse d'inflation peut impacter les coûts des sinistres. Cela se manifeste davantage sur les sinistres graves dont les paiements peuvent s'effectuer sur plusieurs années.

L'objectif de cette étude est de challenger les différents modèles actuellement utilisés avec des méthodes alternatives pour en évaluer la fiabilité mais aussi en apporter une amélioration dans le cas où cela serait possible.

La modélisation actuelle se décompose d'une part, par le calibrage de l'inflation économique qui est modélisé avec un générateur des scénarios utilisant le modèle de Barrie & Hilbert et d'autre part, par le calibrage de la volatilité de l'inflation spécifique avec un modèle relationnel entre les historiques des taux des différentes branches d'activité et le taux économique (IPC).

Nous avons relevé certains points d'attention dans ces approches tels qu'un calibrage plutôt orienté vers une probabilité risque neutre pour l'inflation économique et une insuffisance des choix de modèles de régression adaptés à des tailles d'échantillons très réduites. Nous nous sommes alors donné l'initiative d'orienter la modélisation des scénarios d'inflation économique sur des modèles influencés uniquement par l'historique des observations tels que les modèles d'équilibre et le modèle autorégressif. Concernant l'inflation spécifique, il a fallu palier à l'insuffisance des variables explicatives qui causait une autocorrélation des résidus et dans certains cas, des résidus non gaussiens et voir même hétéroscédastique.

Pour ce faire, dans un premier temps nous avons donné une description des inputs et des modèles actuels de Groupama. Ensuite nous avons testé des modèles alternatifs et enfin effectué des tests de sensibilités afin de valider ces modèles



La modélisation de l'inflation économique se fait à l'aide de l'indice des prix à la consommation (IPC) et celle de l'inflation spécifique à l'aide des indices sectoriels. Nos résultats ne porteront

qu'uniquement sur les lignes d'activités (LoB) à fort besoin en capital économique telles que MTPL, MOTOR, FIRE et GTPL.

Les graphiques ci-dessus nous donnent les dynamiques des différents taux entrant en inputs des modèles.

Modélisation de l'inflation :

- Notre approche ne se limitera qu'à la prise en compte de l'inflation dans le risque de primes. Le calibrage de la sinistralité est fait en suivant les étapes suivantes :
 - Mise en as-if des sinistres individuels
 - Estimation des lois de sévérités et des fréquences

Résultats techniques hors sur inflation

La mise en as-if des sinistres se fait avec l'inflation future moyenne et les résultats techniques (RT) sont les suivants :

Résultats hors sur-inflation		Résultats hors sur-inflation	
LOB MTPL: RT en M€		LOB FIRE: RT en M€	
	Quantile 1/200		Quantile 1/200
CR	-148,79	CR	-319,96
GAN	-73,91	GAN	-184,46
GMA	-132,16	GMA	-380,39
GROUPE	-361,94	GROUPE	-830,25

Cette inflation moyenne sera retranchée lors du calcul du RT y compris prime future avec la formule suivante :

$$b_i = \frac{a_i - E(a_i) + \sigma \cdot \varepsilon}{1 + K_i}$$

Avec :

- K_i : l'inflation future moyenne des taux spécifiques utilisée lors de la mise en as-if.
- a_i : les scénarios de l'inflation économiques issues du GSE
- σ : la volatilité de l'inflation économique
- ε : un bruit blanc gaussien centré et réduit

Dans le calibrage de l'inflation économique, les modèles utilisés dans ce mémoire sont : le modèle de Barrie & Hilbert, auto-régressif et le modèle de Vasicek.

1. Modèle actuel de Groupama (Barrie & Hilbert)

C'est un modèle risque neutre qui calibre l'inflation comme étant la différence entre les taux nominaux et réels.

Les taux nominaux sont modélisés avec le modèle de Black Karasinski à deux facteurs et les taux réels par la méthode de Hull-White à 2 facteurs également. Ces deux modèles contiennent un mécanisme de retour vers la moyenne pour pouvoir avoir une constante dans le temps des valeurs des scénarios générés. En revanche, l'inflation qui en résulte a une moyenne inatteignable c'est-à-dire l'espérance des scénarios n'est pas finie.

Les résultats de ce modèle sont les suivants :

Analyse de l'inflation économique			
LOB MTPL: RT en M€			
	Quantile 1/200 hors sur-inflation	Quantile 1/200 B&H	Ecart
CR	-148,79	-166,44	11,86%
GAN	-73,91	-80,16	8,45%
GMA	-132,16	-154,17	16,66%
GROUPE	-361,94	-415,94	14,92%

Analyse de l'inflation économique			
LOB FIRE: RT en M€			
	Quantile 1/200 hors sur-inflation	Quantile 1/200 B&H	Ecart
CR	-319,96	-321,42	0,46%
GAN	-184,46	-184,59	0,07%
GMA	-380,39	-378,86	-0,40%
GROUPE	-830,25	-830,78	0,06%

La comparaison est faite entre les résultats techniques qui n'intègre que l'inflation moyenne utilisée dans la mise en as-if et ces mêmes résultats auxquels la sur-inflation est rajoutée pour remplacer la moyenne projetée de l'inflation spécifique par le taux observé. Nous remarquons que les résultats techniques varient vers la hausse puisque les apports de la sur-inflation sont supérieurs à ceux des moyennes.

2. Modèles alternatifs à celui de Groupama

- Modèle de Vasicek

C'est un modèle à 1 facteur qui permet la prédiction des taux de fin de période, en tenant compte de la volatilité environnante. Il suppose une diffusion autorégressive des taux avec un facteur de retour vers la moyenne. La dynamique des taux est influencée par le non seulement par le processus stochastique, mais aussi par un paramètre de dérive qui lorsqu'il est positif, fait varier la dynamique des taux à la hausse.

Analyse de l'inflation économique			
LOB MTPL: RT en M€			
	Quantile 1/200 hors sur-inflation	Quantile 1/200 Vasicek	Ecart
CR	-148,79	-168,70	13,38%
GAN	-73,91	-80,64	9,10%
GMA	-132,16	-158,89	20,23%
GROUPE	-361,94	-422,93	16,85%

Analyse de l'inflation économique			
LOB FIRE: RT en M€			
	Quantile 1/200 hors sur-inflation	Quantile 1/200 Vasicek	Ecart
CR	-319,96	-321,10	0,36%
GAN	-184,46	-184,55	0,05%
GMA	-380,39	-380,60	0,06%
GROUPE	-830,25	-830,76	0,06%

Bien que supérieur aux résultats hors sur-inflation, le modèle de Vasicek est moins prudent que le modèle actuel.

Ce phénomène peut s'expliquer par le calibrage de retour à la moyenne dont la valeur est plus élevée dans le modèle de Vasicek par rapport à Barrie & Hilbert.

- Modèle autorégressif à changement de régime

C'est un modèle calibré avec les données historique de l'inflation économique dont il permet une bonne réplcation. Le modèle mis en place est une autorégression d'ordre 1 avec deux régimes qui se composent d'un régime d'inflation faible et d'un autre d'inflation plus élevée qui sont calibrés avec une chaîne de Markov à deux états.

Les résultats techniques obtenus à l'aide de ces derniers sont les suivants :

Analyse de l'inflation économique			
LOB MTPL: RT en M€			
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 AR	Ecart
CR	-166,44	-167,68	0,75%
GAN	-80,16	-80,12	-0,05%
GMA	-154,17	-154,83	0,43%
GROUPE	-415,94	-418,43	0,60%

Analyse de l'inflation économique			
LOB FIRE: RT en M€			
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 AR	Ecart
CR	-321,42	-322,45	0,32%
GAN	-184,59	-185,19	0,32%
GMA	-378,86	-380,99	0,56%
GROUPE	-830,78	-831,65	0,10%

Conclusion de la modélisation de l'inflation économique

Le modèle Barrie & Hilbert ne permet pas de générer des scénarios de forte inflation comme celle observée au courant de l'année 2022. En revanche, le modèle de changements de régime d'inflation permet la simulation de scénarios d'inflation plus larges au cours de la première année, mais l'impact sur le résultat technique reste néanmoins limité du fait du mécanisme de retour à la moyenne.

Puisque le modèle de Vasicek, est calibré dans un univers monde réel, ses paramètres découlent de l'historique de l'indice IPC, en modélisant l'ensemble des phénomènes historiques depuis 1945.

3. Modélisation alternative de l'inflation spécifique

Le modèle actuel est relativement simple mais donne lieu à une distribution très conservatrice des taux d'inflation spécifique au regard des données historiques.

Dans une approche alternative, nous avons en premier temps revu la formule de simulation des taux spécifiques en rajoutant un coefficient directeur ϕ provenant de la régression linéaire des données.

$$C_i(t) = K_i + \phi_i(CPI(t) - E(CPI(t)) + \sigma_i \epsilon_t)$$

$$K_i = \mu_i + \phi_i E(CPI(t)) \text{ et } E(C_i(t)) = K_i$$

$$\text{Volatilité Inflation Spécifique : } b_i = \frac{\phi_i(CPI(t) - E(CPI(t)) + \sigma_i \epsilon_t}{1 + K_i}$$

Le recentrage de l'inflation économique issue du GSE est fait pour conserver la valeur moyenne K_i utilisée dans la mise en as-if comme moyenne de l'inflation spécifique. Cette moyenne sera par la suite remplacée par le taux d'inflation réalisé en utilisant la formule de la sur-inflation présentée en amont de cette note de synthèse.

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 RS	Quantile 1/200 Alt. AR	Ecart RS vs B&H	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs RS
CR	-321,42	-322,45	-323,10	0,32%	0,52%	0,20%
GAN	-184,59	-185,19	-186,98	0,32%	1,29%	0,97%
GMA	-378,86	-380,99	-383,33	0,56%	1,18%	0,61%
GROUPE	-830,78	-831,65	-835,67	0,10%	0,59%	0,48%

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 Vasicek	Quantile 1/200 Alt. Vasicek	Ecart RS vs Vasicek	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs Vasicek
CR	-321,42	-321,10	-324,74	-0,10%	1,03%	1,13%
GAN	-184,59	-184,55	-187,63	-0,02%	1,64%	1,67%
GMA	-378,86	-380,60	-382,98	0,46%	1,09%	0,62%
GROUPE	-830,78	-830,76	-835,24	0,00%	0,54%	0,54%

Nous avons aussi essayé d'avoir une vision des scénarios économiques non centrés pour se conformer à la non-existence de l'espérance des scénarios issues du modèle de B&H :

$$C_i(t) = K_i + \phi_i(CPI(t)) + \sigma_i \epsilon$$

Avec pour espérance :

$E(C_i(t)) = K_i + \phi_i E(CPI(t))$ que l'on suppose égale à la valeur moyenne long terme utilisée pour la mise en as-if des sinistres.

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 RS	Quantile 1/200 Alt. AR	Ecart RS vs B&H	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs RS
CR	-321,42	-322,45	-322,30	0,32%	0,27%	-0,05%
GAN	-184,59	-185,19	-186,03	0,32%	0,78%	0,45%
GMA	-378,86	-380,99	-381,38	0,56%	0,67%	0,10%
GROUPE	-830,78	-831,65	-836,71	0,10%	0,71%	0,61%

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 Alt. B&H				
CR	-321,42	-322,46		0,32%		
GAN	-184,59	-186,38		0,97%		
GMA	-378,86	-381,30		0,64%		
GROUPE	-830,78	-837,20		0,77%		

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 Vasicek	Quantile 1/200 Alt. Vasicek	Ecart RS vs Vasicek	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs Vasicek
CR	-321,42	-321,10	-323,09	-0,10%	0,52%	0,62%
GAN	-184,59	-184,55	-187,06	-0,02%	1,33%	1,36%
GMA	-378,86	-380,60	-381,17	0,46%	0,61%	0,15%
GROUPE	-830,78	-830,76	-836,00	0,00%	0,63%	0,63%

Par la suite, nous nous sommes tournés sur un modèle d'autorégression d'ordre 2.

La modélisation y est faite avec des données différenciées 1 fois. En plus de l'historique des taux spécifiques, nous y avons ajouté également celle de l'inflation économique par mesure de dépendance :

$$[\Delta C_i(t) - \Delta C_i(t-1)](t) = \alpha_i[\Delta CPI(t) - \Delta CPI(t-1)](t) + \phi_i[\Delta C_i(t-1) - \Delta C_i(t-2)] + \epsilon(t)$$

Où:

- $\Delta C_i(t)$ le taux annuel d'inflation spécifique en t
- $\Delta CPI(t)$ le taux annuel d'inflation économique en t

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 RS	Quantile 1/200 Alt. AR	Ecart RS vs B&H	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs RS
CR	-321,42	-322,45	-321,49	0,32%	0,02%	-0,30%
GAN	-184,59	-185,19	-185,25	0,32%	0,36%	0,03%
GMA	-378,86	-380,99	-381,86	0,56%	0,79%	0,23%
GROUPE	-830,78	-831,65	-835,23	0,10%	0,54%	0,43%

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 Vasicek	Quantile 1/200 Alt. Vasicek	Ecart RS vs Vasicek	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs Vasicek
CR	-321,42	-321,10	-321,89	-0,10%	0,14%	0,24%
GAN	-184,59	-184,55	-185,17	-0,02%	0,31%	0,34%
GMA	-378,86	-380,60	-381,29	0,46%	0,64%	0,18%
GROUPE	-830,78	-830,76	-833,60	0,00%	0,34%	0,34%

Conclusion des modélisations alternatives de l'inflation spécifique :

Ces modèles testés permettent une robustesse statistique qui n'était pas le cas dans la prise en compte de l'inflation spécifique dans le modèle actuel. De plus, ils ont pour avantage de capter des phénomènes inflationnistes plus extrêmes tout en ayant des résultats techniques comparables au modèle actuel. Cela révèle une certaine adaptation à l'inflation réelle de l'économie.

4. Conclusion

Dans cette démarche de challenger des modèles actuellement utilisés par Groupama, nous avons relevé plusieurs limites, notamment la vision risque neutre où l'inflation est vue comme une anticipation du marché, pouvant sous-estimer les facteurs d'influences économiques. En somme, les modèles économiques actuels ne tiendront compte que des variations des prix d'actifs, notamment des obligations. Cependant, cette vision n'a pas réellement connaissance des variations de prix de toutes les composantes qui alimentent l'indice IPC. Alors il peut se créer un certain nombre des décalages en cas de hausse prix de certains produits spécifiques étant donné qu'avec la mondialisation et l'interdépendance des pays entre eux, les risques de chocs se voient accrus aujourd'hui, comme l'ont montré le covid et la guerre en Ukraine.

C'est pourquoi, nous nous étions donné l'objectif de mettre en place des modèles pouvant capter des taux extrêmes pour voir premièrement, à quel point la prudence du modèle actuel est suffisante et dans le cas contraire le niveau d'impact sur le résultat technique.

Globalement, le modèle actuel est assez robuste au regard des faibles écarts obtenus par rapport aux modèles alternatifs.

Summary

Assessing the impact of inflation on non-life insurance portfolios requires a good understanding of economic parameters, including risk factors. This concerns both reserves and premiums. Premium risk is a situation where future claims costs may exceed premiums. An increase in inflation can impact claims costs. This is most apparent in the case of large claims, where payments may be made over several years.

The objective of this study is to challenge the various models currently used with alternative methods to assess their reliability and also to improve them where possible.

The current modelling consists, on the one hand of the calibration of economic inflation which is modelled with a scenario generator using the Barrie & Hilbert model and, on the other hand, of the calibration of the volatility of specific inflation with a relational model between the historical rates of the different branches of activity and the economic rate (CPI).

We noted certain points of attention in these approaches, such as a calibration rather oriented towards a risk-neutral probability for economic inflation and an inadequacy in the choice of regression models adapted to very small sample sizes. We then took the initiative of orienting the modelling of economic inflation scenarios on models influenced only by the history of observations, such as the equilibrium models and the autoregressive model. For specific inflation, it was necessary to overcome the insufficiency of the explanatory variables which caused an autocorrelation of the residuals and in certain cases, non-Gaussian and even heteroscedastic residuals.

The structure of the study was as follows:

First, we gave a description of the inputs and the current models of Groupama. Then we tested alternative models and finally carried out sensitivity tests in order to validate these models.

Economic inflation is modelled using the consumer price index (CPI) and specific inflation is modelled using sectoral indices. Our results will focus only on the LoBs with high economic capital requirements such as MTPL, MOTOR, FIRE and GTPL.

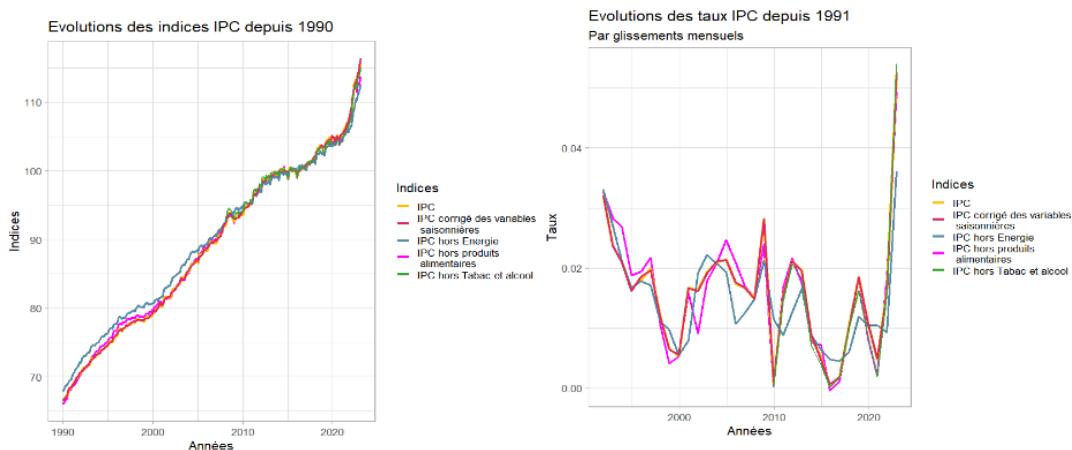


Figure 2 Inputs des modèles utilisés

The graphs above give us the dynamics of the different rates entering the models.

Inflation modelling:

Our approach will be limited to the inclusion of inflation in the premium risk. The calibration of the claims experience is done in the following steps:

- Setting individual claims as-if
- Estimation of severity and frequency laws

Technical results excluding inflation:

The claims adjustment is done with average future inflation and the technical results (RT) are as follows:

Résultats hors sur-inflation		Résultats hors sur-inflation	
LOB MTPL: RT en M€		LOB FIRE: RT en M€	
	Quantile 1/200		Quantile 1/200
CR	-148,79	CR	-319,96
GAN	-73,91	GAN	-184,46
GMA	-132,16	GMA	-380,39
GROUPE	-361,94	GROUPE	-830,25

This average inflation will be subtracted when calculating the RT including future premium with the following formula:

$$b_i = \frac{a_i - E(a_i) + \sigma \cdot \varepsilon}{1 + K_i}$$

With :

- K_i : The average future inflation of specific rates used in the as-if setting.
- a_i : The economic inflation scenarios from the GSE
- σ : The volatility of economic inflation
- ε : Centred and reduced white Gaussian noise

In the calibration of economic inflation, the models used in this paper are: the B&H auto-regressive model and the Vasicek model.

1. Current Groupama model (Barrie & Hilbert)

This is a risk-neutral model that calibrates inflation as the difference between nominal and real rates.

Nominal rates are modelled with the two-factor Black Karasinski model and real rates by the two-factor Hull-White method. Both models contain a mean-reverting mechanism to ensure that the values of the generated scenarios are constant over time. However, the resulting inflation has an unattainable mean, i.e. the expectation of the scenarios is not finite.

The results of this model are as follows:

Analyse de l'inflation économique				Analyse de l'inflation économique			
LOB MTPL: RT en M€				LOB FIRE: RT en M€			
	Quantile 1/200 hors sur-inflation	Quantile 1/200 B&H	Ecart		Quantile 1/200 hors sur-inflation	Quantile 1/200 B&H	Ecart
CR	-148,79	-166,44	11,86%	CR	-319,96	-321,42	0,46%
GAN	-73,91	-80,16	8,45%	GAN	-184,46	-184,59	0,07%
GMA	-132,16	-154,17	16,66%	GMA	-380,39	-378,86	-0,40%
GROUPE	-361,94	-415,94	14,92%	GROUPE	-830,25	-830,78	0,06%

The comparison is made between the technical results which only incorporate the average inflation used in the as-if setting and these same results to which over-inflation is added to replace the projected average of specific inflation by the observed rate. We note that the technical results vary upwards since the contributions of over-inflation are higher than those of the averages.

2. Alternative models to the Groupama models

- Vasicek Model

This is a one-factor model that allows the prediction of end-of-period rates, taking into account the surrounding volatility. It assumes an autoregressive diffusion of rates with a mean reversion factor. The dynamics of the rates are influenced not only by the stochastic process, but also by a drift parameter which, when positive, causes the dynamics of the rates to vary upwards.

Analyse de l'inflation économique			
LOB MTPL: RT en M€			
	Quantile 1/200 hors sur-inflation	Quantile 1/200 Vasicek	Ecart
CR	-148,79	-168,70	13,38%
GAN	-73,91	-80,64	9,10%
GMA	-132,16	-158,89	20,23%
GROUPE	-361,94	-422,93	16,85%

Analyse de l'inflation économique			
LOB FIRE: RT en M€			
	Quantile 1/200 hors sur-inflation	Quantile 1/200 Vasicek	Ecart
CR	-319,96	-321,10	0,36%
GAN	-184,46	-184,55	0,05%
GMA	-380,39	-380,60	0,06%
GROUPE	-830,25	-830,76	0,06%

Although superior to the results without over-inflation, the Vasicek model is less conservative than the current model.

This can be explained by the mean-reversion calibration, which is higher in the Vasicek model than in Barrie & Hilbert.

- Autoregressive model with regime switching

It is a model calibrated with historical data on economic inflation and allows for a good replication. The model implemented is a first order autoregression with two regimes consisting of a low inflation and a higher inflation regime that are calibrated with a two-state Markov chain.

The technical results obtained with the latter are as follows:

Analyse de l'inflation économique			
LOB MTPL: RT en M€			
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 AR	Ecart
CR	-166,44	-167,68	0,75%
GAN	-80,16	-80,12	-0,05%
GMA	-154,17	-154,83	0,43%
GROUPE	-415,94	-418,43	0,60%

Analyse de l'inflation économique			
LOB FIRE: RT en M€			
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 AR	Ecart
CR	-321,42	-322,45	0,32%
GAN	-184,59	-185,19	0,32%
GMA	-378,86	-380,99	0,56%
GROUPE	-830,78	-831,65	0,10%

Conclusion on economic inflation modelling:

The Barrie & Hilbert model does not allow the generation of high inflation scenarios such as the one observed during 2022. In contrast, the inflation regime change model allows for the simulation of broader inflation scenarios in the first year, but the impact on the technical result remains limited due to the mean-reversion mechanism.

Since the Vasicek model is calibrated in a real-world universe, its parameters are derived from the history of the CPI index, modelling all historical phenomena since 1945.

3. Alternative modelling of specific inflation

The current model is relatively simple but results in a very conservative distribution of specific inflation rates with respect to historical data.

In an alternative approach, we first revised the formula for simulating specific rates by adding a steering coefficient ϕ from the linear regression of the data.

$$C_i(t) = K_i + \phi_i(CPI(t) - E(CPI(t))) + \sigma_i \epsilon_t$$

$$K_i = \mu_i + \phi_i E(CPI(t)) \text{ and } E(C_i(t)) = K_i$$

$$\text{Volatility Specific Inflation: } b_i = \frac{\phi_i(CPI(t) - E(CPI(t))) + \sigma_i \epsilon_t}{1 + K_i}$$

The refocusing of economic inflation from the GSE is done to keep the average value K_i used in the as-if setting as the average of specific inflation. This average will subsequently be replaced by the inflation rate achieved using the over-inflation formula presented at the beginning of this briefing note.

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 RS	Quantile 1/200 Alt. AR	Ecart RS vs B&H	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs RS
CR	-321,42	-322,45	-323,10	0,32%	0,52%	0,20%
GAN	-184,59	-185,19	-186,98	0,32%	1,29%	0,97%
GMA	-378,86	-380,99	-383,33	0,56%	1,18%	0,61%
GROUPE	-830,78	-831,65	-835,67	0,10%	0,59%	0,48%

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 Vasicek	Quantile 1/200 Alt. Vasicek	Ecart RS vs Vasicek	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs Vasicek
CR	-321,42	-321,10	-324,74	-0,10%	1,03%	1,13%
GAN	-184,59	-184,55	-187,63	-0,02%	1,64%	1,67%
GMA	-378,86	-380,60	-382,98	0,46%	1,09%	0,62%
GROUPE	-830,78	-830,76	-835,24	0,00%	0,54%	0,54%

We have also tried to have a view of the unfocused economic scenarios to conform to the non-existence of the scenario expectation from the B&H model:

$$C_i(t) = K_i + \phi_i(CPI(t)) + \sigma_i \epsilon$$

With the expectation that:

$E(C_i(t)) = K_i + \phi_i E(CPI(t))$ which is assumed to be equal to the long-run average value used for the setting of claims.

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 RS	Quantile 1/200 Alt. AR	Ecart RS vs B&H	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs RS
CR	-321,42	-322,45	-322,30	0,32%	0,27%	-0,05%
GAN	-184,59	-185,19	-186,03	0,32%	0,78%	0,45%
GMA	-378,86	-380,99	-381,38	0,56%	0,67%	0,10%
GROUPE	-830,78	-831,65	-836,71	0,10%	0,71%	0,61%

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 Vasicek	Quantile 1/200 Alt. Vasicek	Ecart RS vs Vasicek	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs Vasicek
CR	-321,42	-321,10	-323,09	-0,10%	0,52%	0,62%
GAN	-184,59	-184,55	-187,06	-0,02%	1,33%	1,36%
GMA	-378,86	-380,60	-381,17	0,46%	0,61%	0,15%
GROUPE	-830,78	-830,76	-836,00	0,00%	0,63%	0,63%

Subsequently, we turned to autoregression models:

The first is an AR(2), with a dependence on two years of history of the specific rate. But the calibration was done here on the differentiated series of these rates. In addition to the history of specific rates, we have also added the history of economic inflation as a measure of dependence:

$$[\Delta C_i(t) - \Delta C_i(t-1)](t) = \alpha_i[\Delta CPI(t) - \Delta CPI(t-1)](t) + \phi_i[\Delta C_i(t-1) - \Delta C_i(t-2)] + \epsilon(t)$$

Où:

- $\Delta C_i(t)$ the annual rate of specific inflation in t
- $\Delta CPI(t)$ the annual rate of economic inflation in t

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 RS	Quantile 1/200 Alt. AR	Ecart RS vs B&H	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs RS
CR	-321,42	-322,45	-321,49	0,32%	0,02%	-0,30%
GAN	-184,59	-185,19	-185,25	0,32%	0,36%	0,03%
GMA	-378,86	-380,99	-381,86	0,56%	0,79%	0,23%
GROUPE	-830,78	-831,65	-835,23	0,10%	0,54%	0,43%

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 Alt. B&H				
CR	-321,42	-321,11				-0,10%
GAN	-184,59	-184,98				0,21%
GMA	-378,86	-379,94				0,29%
GROUPE	-830,78	-833,05				0,27%

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 Vasicek	Quantile 1/200 Alt. Vasicek	Ecart RS vs Vasicek	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs Vasicek
CR	-321,42	-321,10	-321,89	-0,10%	0,14%	0,24%
GAN	-184,59	-184,55	-185,17	-0,02%	0,31%	0,34%
GMA	-378,86	-380,60	-381,29	0,46%	0,64%	0,18%
GROUPE	-830,78	-830,76	-833,60	0,00%	0,34%	0,34%

Conclusion of alternative models of specific inflation:

The models tested provide a statistical robustness that was not the case when specific inflation was taken into account in the current model. Moreover, they have the advantage of capturing more extreme inflationary phenomena while having technical results comparable to the current model. This reveals a certain adaptation to the real inflation of the economy.

4. Conclusion

In this process of challenging the models currently used by Groupama, we have identified several limitations, in particular the risk-neutral view in which inflation is seen as an anticipation of the market, which may underestimate the economic factors of influence. In short, the current economic models will only take into account changes in asset prices, particularly bonds. However, this view is not really aware of the price changes of all the components that feed into the CPI. So there may be a number of lags in the case of price increases in specific products, since with globalization and the interdependence of countries, the risks of shocks are increasing today, as evidenced by the covid and the war in Ukraine.

This is why we set ourselves the objective of setting up models that could capture extreme rates to see, firstly, to what extent the current model's prudence is sufficient and, secondly, the level of impact on the technical result.

Overall, the current model is quite robust in terms of the small deviations obtained compared to the alternative models.

Table des matières

Résumé.....	0
Abstract	2
Remerciements	3
Synthèse	4
Summary	10
Introduction	18
Partie I : Contexte de l'étude	20
Chapitre I: Contexte réglementaire.....	20
1.1. Solvabilité 2	20
1.2. Modèle interne.....	21
1.3. Principe de calcul du SCR.....	22
1.4. Risque de primes et de réserves.....	25
1.5. Modélisation des sinistres attritionnels et graves.....	28
1.5.1. Calibrage des sinistres	28
1.5.2. Modélisation des sinistres graves.....	29
1.5.2.1. Le modèle mathématique	30
1.5.2.2. Mise en as if des sinistres graves.....	30
1.5.3. Modélisation des sinistres attritionnels	31
1.6. Distribution du résultat technique à 1 an.....	33
1.7. Courbe EIOPA	35
Chapitre II: Contexte inflationniste	36
2.1. Situation et impact de la crise inflationniste en assurance Non-vie.....	36
2.2. Générateur des scénarios économiques (GSE).....	38
2.2.1. Différence entre probabilité risque neutre et univers monde réel	39
2.2.2. Mise en œuvre d'un générateur des scénarios économiques.....	39
2.2.3. Exigences règlementaires	40
2.2.4. Schéma de projection de scénarios d'un GSE.....	40
2.2.5. Procédure mathématique	41
2.2.6. Validation des scénarios d'inflation économique.....	42
2.2.7. Inputs des scénarios d'inflation économique	43
2.2.8. Inputs des scénarios d'inflation spécifique	46
2.3. Choix de la profondeur d'historique.....	49
Partie II : Inflation économique.....	52
Chapitre III: Modèle actuel de Groupama.....	52
3.1. Description du modèle	52
3.1.1. Principe général.....	52
3.1.2. Inflation conditionnelle par la méthode de B&H.....	54

3.1.2.1. Modèle des taux nominaux	55
3.1.2.2. Modèle de taux réels.....	56
3.2. Analyse descriptive.....	57
3.3. Dynamique de projection.....	57
3.3.1. Projection à $t = 1$	57
3.3.2. Diffusion à $t > 1$ an.....	58
3.4. Mesure d'impact sur le risque de primes	59
3.5. Avantages et inconvénients du modèle	59
3.6. Limites de l'étude actuelle.....	60
Chapitre IV : Approches alternatives au modèle de B&H.....	61
4.1. Modèle d'équilibre	61
4.1.1. Modèle d'équilibre partiel : Vasicek à 1 facteur.....	61
4.1.1.1. Description de l'approche	61
4.1.1.2. Analyse descriptive.....	63
4.1.1.3. Tests de validation des hypothèses de régression linéaires.....	63
4.1.1.4. Dynamique de projection.....	64
4.1.1.5. Densité des projections à $t = 1$ et $t = 30$ ans.....	64
4.1.2. Mesure d'impact sur le risque des primes	65
4.1.3. Avantages et inconvénients.....	65
4.2. Modèle d'auto-régression à changement des régimes	66
4.2.1. Description de l'approche	66
4.2.2. Dynamique de projection.....	67
4.2.3. Analyse descriptive.....	68
4.2.4. Mesure d'impacts sur les résultats techniques	70
4.2.5. Avantages et inconvénients.....	70
4.3. Validation du modèle	71
4.3.1. Validation des projections long-terme	71
4.3.2. Validation des projections court-terme	73
Partie III : Inflation spécifique	75
Chapitre V : Prise en compte de l'inflation sectorielle	75
5.1. Calibrage de l'inflation spécifique	76
5.1.1. Hypothèses de calibration	77
5.1.2. Impact de l'inflation économique centrée	77
5.2. Limites des procédures de calibrations actuelles	78
5.3. Limites des procédures de calibrations actuelles	78
5.4. Avantages et inconvénients du modèle	81
Chapitre VI : Modèles spécifiques alternatifs.....	82
6.1. Modèle de relation affine entre l'inflation économique et spécifique	82

6.2.	Modèle de relation affine entre l'inflation économique centrée et spécifique	84
6.3.	Le modèle autorégressif d'ordre deux AR(2).....	85
6.4.	Le modèle vectoriel autorégressif (VAR)	88
6.5.	Résultats de la mise en place de ces modèles :	92
Partie IV : Validation des modèles alternatifs		93
Chapitre VII: Backtesting et tests de sensibilités.....		93
7.1.	Backtests.....	93
7.2.	Tests de sensibilités	97
		98
		98
Conclusion.....		99
Annexes		101
Bibliographies		107

Introduction

Depuis plusieurs mois, l'inflation est à un niveau élevé, bien au-dessus de l'objectif annuel de 2 % de la Banque centrale européenne. Au niveau de la zone Euro, elle était de 5,9 % en février 2022 puis 8,6% en juin 2022 pour enfin frôler les 9% en juillet 2022. En France, elle a atteint 6,1% en juillet 2022 et est grandement alimentée par la hausse de prix de l'énergie.

Cette inflation provoque des situations d'incertitudes en créant de grandes instabilités économiques. Elle trouve son origine des différentes crises qui se sont succédé depuis 2019. La Covid-19 est le premier facteur qui l'a alimentée, notamment avec les différentes mesures drastiques de confinements qui avaient quasi mis à l'arrêt l'ensemble de l'économie mondiale, ralentissant ainsi la chaîne des productions de telle sorte à engendrer des situations de récessions inflationnistes qui poussèrent les gouvernements à soutenir la demande. L'offre quant à elle restait limitée puisque la relance demandait du temps et cela a donc fait grimper les prix, notamment ceux des ressources énergétiques.

Il s'en est suivi, en février 2022, une nouvelle crise, celui du conflit Ukraino-Russe qui touche principalement le gaz en plus de certains produits de premières nécessités. Avec les sanctions infligées à la Russie, la baisse des exportations en provenance de ce pays entraîna une baisse des niveaux des stocks de gaz dans la plupart des pays européens. À noter que le prix de l'électricité français est directement lié au gaz, puisque la production de cette dernière découle principalement des centrales fonctionnant au gaz.

Cela met en évidence l'interdépendance économique mondiale qui s'est vue impactée par la crise sanitaire, les conflits géopolitiques et les effets du changement climatique, avec des répercussions sur la conception et l'approvisionnement des différents produits, comme par exemple les pièces détachées automobiles, les produits mécaniques, informatiques, électroniques et des matériaux de construction. Ces éléments sont des composants principaux des secteurs d'activité de l'assurance Non-vie et dont les variations des prix influencent directement ceux de la sinistralité. Par conséquent, nous observons une propagation de l'inflation dans divers secteurs d'activités.

Une inflation persistante et élevée pourrait entraîner une insuffisance des réserves pour des sinistralités long terme. En revanche pour le court terme, l'inflation agirait sur la compétitivité des compagnies d'assurance en leur imposant une baisse de leurs marges de telle sorte à ne pas trop se démarquer de la concurrence.

Pour éviter l'installation d'une situation de stagflation, la banque centrale a opté pour une augmentation des taux d'intérêts. L'activité des assureurs non-vie en est directement impactée, à cause de l'inversion de son cycle de production et de la nature indemnitaire de ses couvertures des risques.

Par conséquent, l'inflation comprimerait les marges de souscription tout en exerçant une pression sur les réserves. Les secteurs de responsabilité civile, avec un étalonnement des paiements dans le temps, après la réception des primes et ceux d'assurances automobiles seront les plus immédiatement touchés.

De plus, l'indemnisation pour les rentes corporelles augmente plus vite que l'inflation car elle est liée à la hausse des salaires des tiers personnes, de leurs frais de déplacements ou encore des coûts médicaux. Les prestations sont directement impactées par l'inflation et l'assureur doit s'assurer de sa capacité de paiement.

En effet, la particularité en assurance est l'inversion du cycle de production, qui contrairement à un système commercial classique, où les coûts de production des produits ainsi que la marge peuvent être connus d'avance. Ce processus est inversé en assurance : l'assuré ne reçoit une prestation qu'à posteriori du paiement préalable d'une prime et l'assureur ne pourra prendre connaissance des coûts liés à son activité qu'à sa clôture. Cela expose l'assureur alors à des aléas pouvant occasionner un non-respect de ses engagements et par la même occasion, mettre en péril son activité. Il est donc obligé d'anticiper toute fluctuation future du marché et adapter en amont sa prime future aux aléas à venir.

Il est de ce fait crucial pour lui, de mieux comprendre les incertitudes auxquelles il doit faire face, en établissant précisément le montant de la prime incorporant les provisions nécessaires pour payer les sinistres futurs, tout en garantissant un montant de fonds propres suffisants pour couvrir les risques bicentennaires.

L'enjeu de ce mémoire est d'intégrer l'évolution de l'inflation dans la vision économique des risques d'un assureur non-vie et d'en mesurer l'impact en termes de capital économique pour les risques de primes.

Il faut noter qu'une compagnie d'assurance segmente son activité en groupes homogènes, par exemple tout ce qui est lié à l'assurance santé non assimilable à la vie est mis ensemble, de même pour l'automobile. Alors, la prise en compte de l'inflation tient compte également de cette singularité, en considérant non seulement l'inflation économique (par l'indice IPC), mais également l'inflation spécifique liée à différents secteurs.

Nous commencerons tout d'abord par visualiser le cadre de fonctionnement de l'assurance Non-Vie, en faisant un rappel sur la norme comptable en vigueur, ce qui nous permettra de comprendre les concepts fondamentaux de la structure du bilan prudentiel d'une compagnie d'assurance.

Partie I : Contexte de l'étude

Chapitre I: Contexte réglementaire

1.1. Solvabilité 2

Afin de garantir le respect de ses engagements, l'assureur est soumis à une forte réglementation. Solvabilité II est un ensemble de règles fixant le régime de solvabilité applicable aux entreprises d'assurances dans l'Union Européenne. Il est entré en vigueur depuis le 1er janvier 2016. Son cadre d'application se divise en 3 piliers :

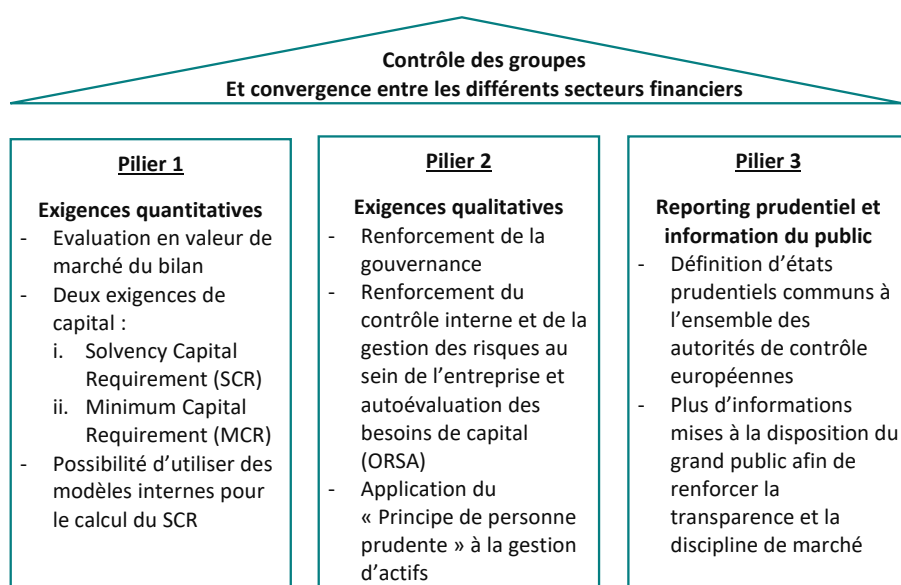


Figure 1 : Piliers de Solvabilité 2

Cette norme comptable apporte :

- Une meilleure adaptation des exigences de capital au profil de risque.
- Un renforcement de la gouvernance et de la gestion des risques
- Une harmonisation européenne des normes et pratiques de contrôle
- Et un principe de proportionnalité

Nous nous focaliserons uniquement sur le pilier 1. La directive de ce pilier est de définir les normes et les modalités des composantes du bilan prudentiel dont la décomposition se présente comme suit :

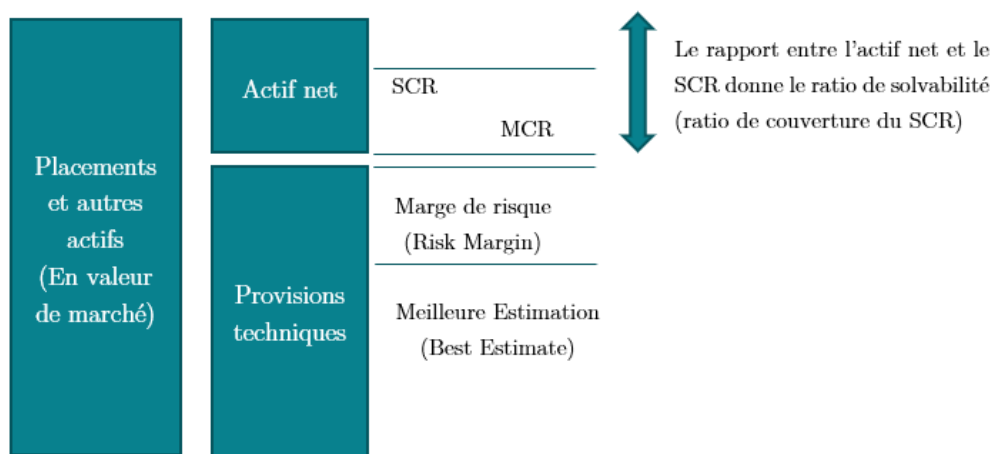


Figure 2 : Bilan prudentiel en assurance Non-vie

L'actif est valorisé au prix du marché tel qu'indiqué par un principe comptable connu sous le nom de « just value ». Cette juste valeur peut également correspondre à la valeur nette actualisée des flux futurs de cet actif et est estimée en fonction des probabilités de variation économiques, notamment les risques financiers, ou encore la probabilité d'occurrence des risques réels comme une catastrophe naturelle. Alors, dans l'estimation de la valeur de l'actif, les plus et moins-values latentes sont prises en compte c'est-à-dire que les fluctuations des résultats sont prises en compte pour s'assurer une marge de positivité du bilan en cas de hausse de sinistralité.

Le passif suit le même principe de juste valeur que l'actif. Il est constitué des fonds propres (actif net) et des provisions techniques. Ces derniers correspondent au montant actualisé qu'une entreprise paierait si elle transférait ses engagements vers une autre entité agréée dans le marché de l'assurance ou de réassurance. Ces provisions techniques sont la somme entre une marge de risque et le Best Estimate (montant, en vision moyenne, dont l'assureur a besoin pour indemniser ses assurés en cas de sinistralité).

1.2. Modèle interne

Le modèle interne en solvabilité 2 est un processus de calcul de la valeur du capital réglementaire d'une compagnie d'assurance, le plus adapté à son profil risque.

Sa mise en place requiert au préalable l'approbation du régulateur qui en France est l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR). Opter pour ce choix doit être justifié puisque ce type de modèle exige une surveillance accrue et une adaptation constante aux variations du portefeuille.

Groupama a opté pour ce choix de modèle interne partiel (MIP) dans le calcul du SCR_{groupe} et du SCR_{solo} à cause de :

- L'inadéquation de certains risques tels que les risques agricoles au calcul du capital économique par la formule standard.
- La particularité du modèle interne à analyser des risques de façon plus fine, qui n'est pas le cas avec la formule standard, notamment avec la structure de réassurance interne qui participe pleinement au fonctionnement opérationnel et à l'atténuation des risques du groupe.

1.3. Principe de calcul du SCR

Le SCR est le montant cible que la compagnie d'assurance doit posséder pour exercer son métier. Il a pour objectif de permettre à l'entreprise de faire face aux événements extrêmes de probabilité bicentenaire. Autrement dit, il correspond à la Value at Risk à 99,5% de la variation de l'actif net de l'organisme d'assurance à horizon d'un an.

La Value At Risk (VaR) définit, de façon probabiliste, le montant maximal de perte qui ne devrait pas être dépassé sur un horizon de temps donné : 1 an pour l'assurance non-vie.

Son calcul se fait par trois méthodes possibles :

- La formule standard : il s'agit d'un modèle proposé par le régulateur
- Un modèle interne : il s'agit d'un modèle mis en place par l'entreprise, avec l'accord au préalable du régulateur, afin de modéliser et mesurer au mieux les risques qu'elle encourt
- La méthode USP (Undertaking specific parameters)

L'illustration ci-dessous est une représentation de la prise en compte de la diversification entre les risques qui composent le SCR :

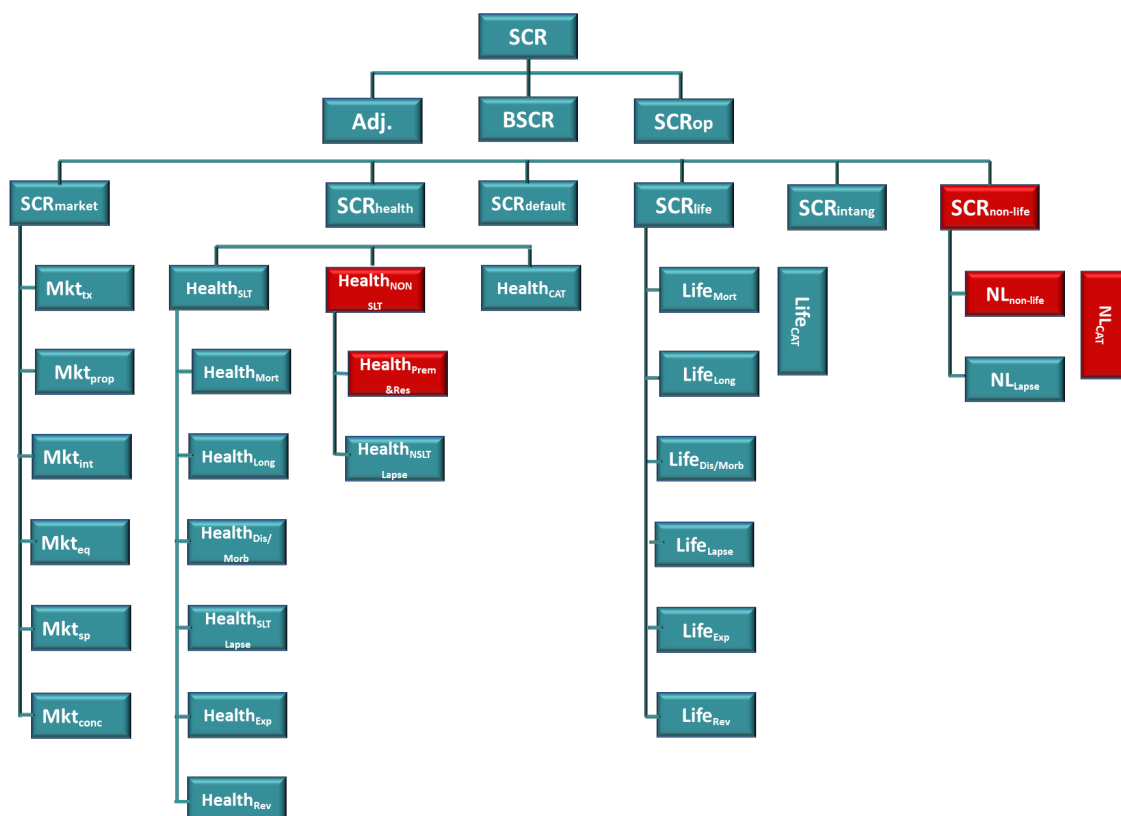


Figure 3 : Décomposition du SCR

Groupama a choisi de mettre en place un modèle interne partiel pour calculer le SCR de souscription non-vie et santé non similaire à de la vie (voir les éléments en rouge dans la figure 3).

La formule standard utilise la Value at Risk pour calculer le SCR. Afin de garder une homogénéité lors de l'agrégation de la partie modèle interne partiel et celle formule standard, la mesure de risque utilisée pour calculer le SCR dans le modèle interne partiel sera également la Value at risk.

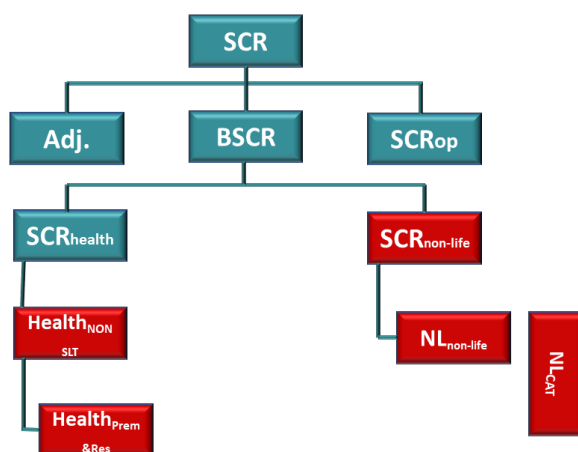


Figure 4 : Décomposition du SCR Non-vie de Groupama

L'article R.351-11 et les articles 33 et 55 du règlement délégué décrivent les différentes catégories de segmentation des engagements de l'assureur. Cela peut se faire par devise ou par famille de risques appelées segments de risque (i.e. non-vie, vie, santé non SLT, santé SLT,...) qui par la suite seront eux aussi regroupés selon leurs lignes d'activités dont l'appellation anglaise est line of business (LoB). Les actes délégués définissent ces différentes LoB qui sont au nombre de 12 pour l'assurance non-vie.

Cette structuration est décrite dans « l'orientation sur la valorisation des provisions techniques » publiée en 2014 par l'EIOPA et stipule que pour établir des hypothèses, il est primordial que les groupements constitués par segmentation des risques soient homogènes.

Au sein d'une ligne d'activité (LoB), l'assureur peut segmenter ses engagements par groupe homogène de risques en fonction des risques sous-jacents. Ces groupes homogènes constituent la maille dans laquelle sont calculés les Best Estimates et les segments, contenant plusieurs LoBs, constituent la maille utilisée pour le calcul de la formule standard.

Par critère d'homogénéité, les risques comprendront des caractères de similitude qui par conséquent permettront à l'entreprise d'avoir un équilibre entre les crédibilités des données. Cela aura pour avantage de fiabiliser l'homogénéité des structures des risques, ainsi que des analyses statistiques qui en découlent.

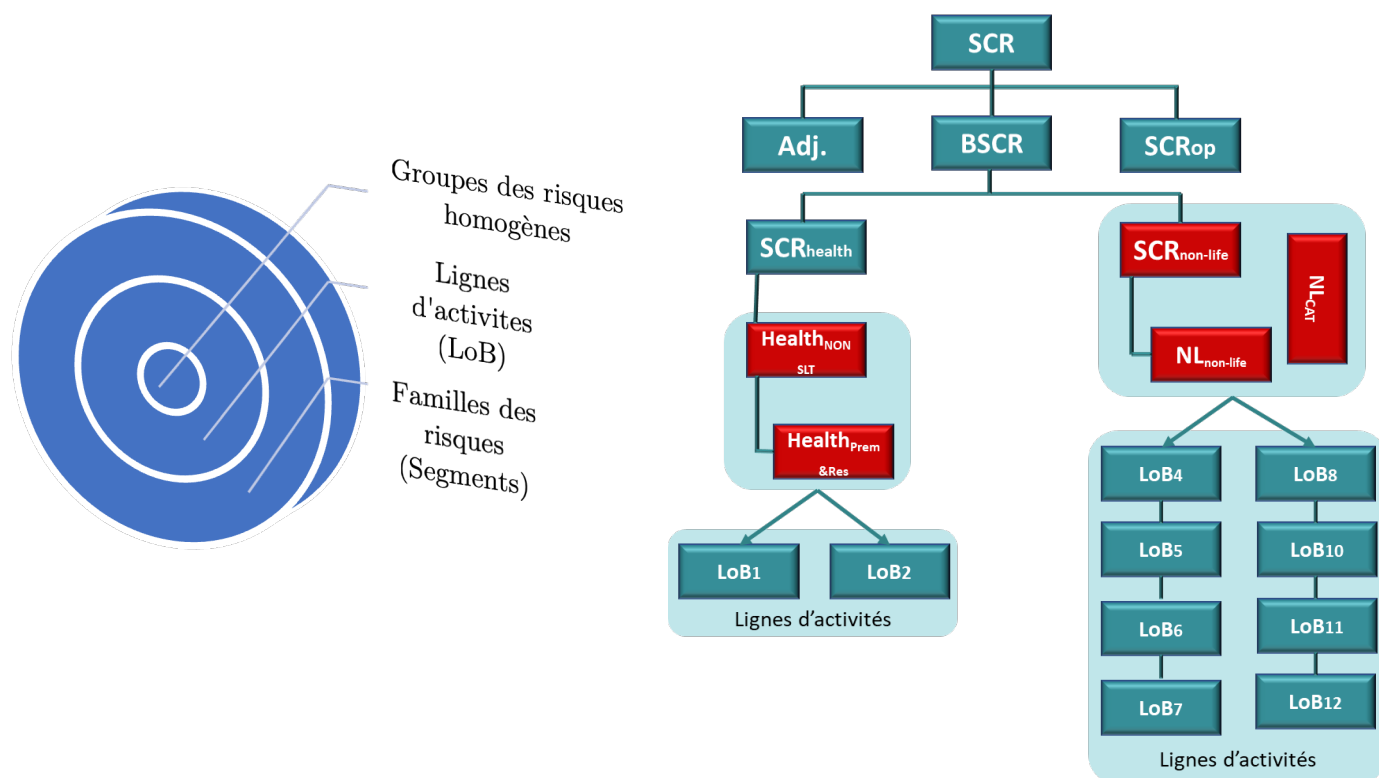


Figure 5 : Décomposition du risque de souscription Non-Vie de Groupama

Les groupes de risques homogènes dans notre cas peuvent être constitués des risques de primes et de réserves qui constitueront des lignes d'activités (LoB). Ces lignes d'activités constitueront par la suite des familles des risques, comme cela s'observe sur le graphique de droite, notamment en segments non-vie et santé non SLT du modèle interne partiel de Groupama.

Les enjeux de cette segmentation sont :

- La précision du calcul du Best Estimate
- Le calcul du SCR
- Un bon cadre de reporting

En parlant des différents segments des risques de Groupama, ils sont répartis de la façon suivante :

- Par entités (Caisses régionales, Gan, Italy, GMA,...)
- Par sévérité des risques (Attritionnels, graves, CATs)

Les risques de souscription non-vie, auxquels l'assureur est confronté, se décomposent comme suit :

- Le risque de primes
- Le risque de réserves
- Le risque CAT

Nous nous focaliserons, dans notre étude, sur le risque de primes.

1.4. Risque de primes et de réserves

En Solvabilité 2, le risque de primes, à horizon 1 an, correspond à des éventualités des coûts des sinistres futurs supérieurs aux primes reçues. Ce risque provient des souscriptions au cours de la période et son évaluation tient compte des évaluations des pertes et des primes futurs puisque ces derniers nécessitent une estimation de la sinistralité et du portefeuille futur (Fréquence/coût).

- Risque de portefeuille : Ce risque provient des rotations du portefeuille c'est-à-dire de la variation des primes brutes (hors réassurance). Il se compose du risque de niveau de prime payé par les assurés et du risque de volume de cette prime. Ce volume est impacté par le nombre des renouvellements des contrats et aux affaires nouvelles. Risque de pertes futures : La fréquence et la sévérité des aléas déterminent le niveau des pertes potentielles auxquelles l'assureur peut être confrontée. Ce qui lui confère la possibilité de mettre en place des mesures préventives à ces dernières.

Le risque de réserves résulte de la possibilité d'une mauvaise anticipation, dans les provisions best estimate, du risque de variation défavorable de la sinistralité et affect le montant, ainsi que la date de règlementation des sinistres déjà survenus.

En parlant des provisions, il en existe de plusieurs types mais les deux principales sont celles pour sinistres connus et celles pour sinistres inconnus :

- Les provisions pour sinistres connus : Provisions des sinistres déjà déclarés à l'assureur, mais dont les règlements n'ont pas encore été faits.

Il est possible de les évaluer selon la méthode dossier-dossier. Dans ce cas de figure, pour chaque sinistre déclaré, l'assureur estime de façon probabiliste le montant correspondant du décaissement.

L'autre méthode d'estimation de cette provision est une méthode globale, généralement statistique, qui vise à établir le montant total des décaissements à prévoir sur les dossiers en cours.

- Les provisions pour sinistres inconnus (IBNR : Incurred But Not Reported) : Provisions des sinistres qui se sont produits, mais pas encore déclarés à l'assureur.

Les provisions sont calculées à l'aide d'une méthode d'analyse de sinistres ou des prestations de l'assureur appelée « triangle de développement ». C'est un outil qui analyse le déroulement temporel des sinistres ou des prestations de la survenance à la clôture des règlements.

Les sinistres peuvent être classifiés en 3 catégories, selon leurs survenances et les coûts qu'ils peuvent engendrer. Nous les définissons de la manière suivante :

- Les sinistres Attritionnels : Ce sont des sinistres courants avec une grande fréquence de survenance et dont les coûts sont inférieurs à un seuil.
- Les sinistres Graves : Ils sont moins fréquents que les premiers mais par contre, ils ont des sévérités plus élevées et au-dessus du seuil précédemment cité.
- Les sinistres CAT : Ce sont les dommages liés aux catastrophes naturelles. Leurs fréquences sont encore plus faibles que celles des sinistres graves mais avec une sévérité encore plus importante.

Pour revenir sur la définition du risque de prime, il peut également être défini comme le niveau d'incertitude de la charge ultime en fin de la 1^{ère} année d'une nouvelle année de survenance, c'est-à-dire l'incertitude de la quantité :

$$P_1 + BE_1$$

Avec :

- P_1 : Le paiement de 1^{ère} année
- BE_1 : La provision pour sinistres, estimée en fin de 1^{ère} année, et relative à la nouvelle année de survenance.

Schématiquement, la volatilité à 1 an équivaut à l'ajout d'une nouvelle diagonale au triangle initial qui correspondra aux survénances durant l'année :

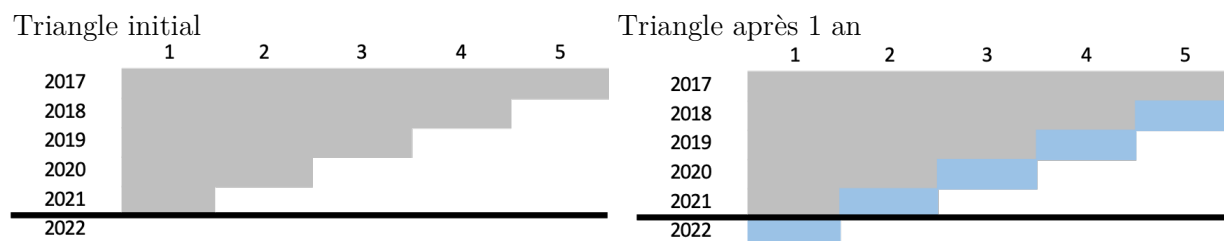


Figure 6 : Prise en compte de la volatilité 1 an

La diagonale en bleu correspond :

- Aux boni/mali des survénances passées pour lequel la réévaluation de 1 an après de l'ultime correspond au risque de réserves ;
- Aux paiements et charges de la nouvelle année de survénance dont la vision ultime correspondra au risque de primes

Le résultat technique de la 1^{ère} année dans le calcul du SCR est effectué avec la formule :

$$TR_i = Pr_i - (P_i + BE_i^{Res}) - F_i$$

Tel que :

- Pr_i : Volume de primes sous risque de 1^{ère} année relatif aux contrats tacitement reconduits et aux affaires nouvelles de 1^{ère} année (primes acquises)
- P_i : Paiements des nouveaux sinistres en t=1 an
- F_i : Frais relatifs à la nouvelle année de souscription
- BE_i^{Res} : Provision pour sinistres best estimate à la date t=1 an

Dans le modèle, le terme BE_i^{Res} relatif aux nouveaux sinistres survenus en 1^{ère} période n'est pas explicite. L'approche consiste à modéliser globalement la quantité $P_i + BE_i^{Res}$ à partir d'une charge globale ultime à laquelle est appliquée une cadence de paiements.

L'ensemble de ces éléments est escompté en date t=0 suivant un cadencement propre à chaque élément constituant le résultat technique.

Par ailleurs, il est également possible de modéliser la sinistralité sur des mailles plus fines pour répondre à différentes contraintes, notamment l'application des traités de réassurance, car ces derniers peuvent exiger un découpage plus fin que les LoB. Cependant, pour être capable de mesurer la contribution d'un business unit au niveau du SCR groupe et Groupama SA, la maille de modélisation de la sinistralité ne doit pas se chevaucher, car la modalité de réassurance le requiert.

1.5. Modélisation des sinistres attritionnels et graves

1.5.1. Calibrage des sinistres

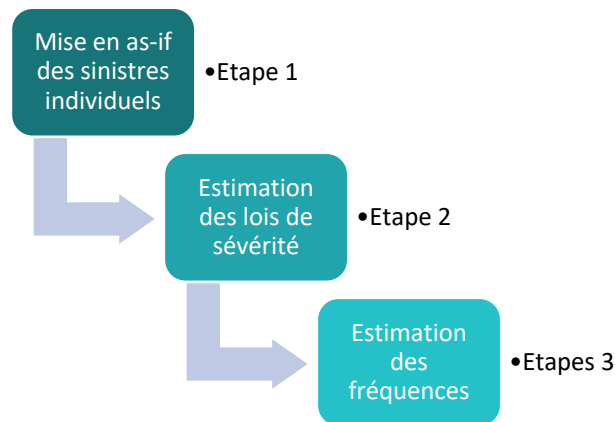


Figure 7 : Procédures de modélisation des sinistres

Le processus de calibrage des sinistres doit suivre les étapes suivantes :

Le choix des lois et l'estimation des paramètres de fréquence et de sévérité sont faits à partir :

- De la mise en as-if des sinistres historiques et projetés à l'ultime, y compris inflation future moyenne, faisant comme si les sinistres survenaient durant l'année de modélisation.
- Du triangle du nombre de sinistres se trouvant au-dessus du seuil de séparation entre sinistres attritionnels et graves.

Ce dernier est projeté à l'ultime en le retraitant des variables d'exposition, à partir par exemple du montant revalorisé des primes ou du nombre des contrats.

Ce choix repose sur des méthodes statistiques usuelles en assurance non-vie :

- Tests d'adéquation
- Maximum de vraisemblance
- Méthode des moments
- Tests de sensibilité des paramètres
- Jugements d'experts

Par défaut, l'historique de données utilisé pour le choix des lois et l'estimation des paramètres est celui débutant le plus possible dans le passé. Dans certains cas, il est néanmoins possible de retraiter l'historique de données disponibles afin de garantir le caractère approprié de la distribution de probabilité prévisionnelle par rapport non seulement à l'historique des pertes, mais aussi à toutes les données et informations nouvelles non négligeables y afférentes. Ces cas font alors l'objet d'une justification dans la documentation annuelle du calcul du SCR, notamment en se basant sur les justifications des experts métier.

1.5.2. Modélisation des sinistres graves

La modélisation des sinistres graves est un élément important en assurance de biens et responsabilités. Malgré leur faible fréquence, l'impact de ces derniers sur les résultats est important, car ils peuvent être très coûteux. Ceci est une considération majeure dans l'assurance automobile, où les sinistres pour dommages corporels peuvent entraîner d'importants coûts au fil du temps. Ainsi, la modélisation des sinistres graves, notamment leur fréquence, est un point clé pour comprendre les primes pures des assurés.

La présence de sinistres graves dans les données peut troubler l'homogénéité des risques puisqu'ils se comportent différemment par rapport aux attritionnels et donc du calcul du Best Estimate, pouvant occasionner la probabilité que les sinistres dépassent les primes acquises dans le futur. Alors, il est préconisé en Solvabilité 2, d'identifier les sinistres qu'on pourrait qualifier de graves et procéder à des ajustements, le cas où cela s'avèrerait nécessaire c'est-à-dire, trouver par exemple un seuil à partir duquel on exclurait ces sinistres du triangle ou encore procéder à un écrêtement.

Ces types de modèles varient selon la LoB étudiée dont les principales auprès de Groupama sont les suivantes :

- Motor Third Party Liability (MTPL)
- Motor (MOTOR)
- Fire (FIRE)
- General Third Party Liability (GTPL)

Le calibrage des sinistres graves se réalise en premier avant celui des attritionnels. Chez Groupama, ces sinistres sont définis par leurs coûts mis en as-if. En procédant de la sorte, on approcherait la dernière valeur du coût d'un sinistre compte tenu de son évolution dans le temps. Et la mise en as-if permettrait une actualisation de ce montant en y appliquant un retraitement de l'inflation

Les graves sont modélisés par un modèle fréquence/coût qui permet de déterminer le quantile 99,5% des pertes engendrées par ces derniers annuellement. Ce modèle se fait en simulant le nombre de sinistres survenus sur une année, puis en simulant leurs coûts individuels. Avec un nombre assez grand de simulations, nous obtiendrons un échantillon de pertes dont le quantile empirique 99,5% approcherait le quantile théorique.

1.5.2.1. Le modèle mathématique

Comme cela a été dit dans les lignes précédentes, la charge ultime des graves survenus durant la période est modélisée à l'aide d'un modèle collectif de fréquence x sévérités :

$$C_t = \sum_{i=1}^{n_t} X_i, \forall t$$

Avec :

- n_t : La variable aléatoire correspondant au nombre de sinistres dépassant le seuil, qui surviendront durant l'année t
- X_i : La variable aléatoire des coûts du sinistre i y compris inflation future moyenne, survenu pendant l'année t

La procédure de simulation est de pouvoir générer des C_t , $\forall t \in [1, 2 \times 10^5]$ afin de déterminer les pertes annuelles ayant une probabilité de 0,5% de survenir.

En revenant sur les lois de sinistralités, au sein du modèle de Groupama, la fréquence des sinistres est modélisée avec une loi binomiale négative tandis que les montants avec une loi de Pareto.

1.5.2.2. Mise en as if des sinistres graves

L'indexation des sinistres historiques crée un échantillon de sinistres as-if N+1 qui contient implicitement l'inflation future. Les sinistres sont supposés se produire en N+1, et leurs paiements futurs comprennent l'inflation (inflation moyenne) en conséquence.

La provision dossier par dossier contient implicitement l'inflation future, les lignes qui suivent le décrivent plus en détail.

Comme cela a été rappelé, la provision dossier par dossier correspond au Best Estimate de la provision basée sur les données connues

Les montants historiques des sinistres sont ajustés à l'inflation comme suit (mise en œuvre si 2022) :

- Les paiements passés sont vieilliss en fonction de l'année de survenance du sinistre et de l'année de développement.

Par exemple, pour un sinistre survenu en 2012, un paiement effectué en 2013 (année de développement t+1), est vieilli jusqu'en 2022+1, c'est-à-dire 2023 :



Figure 8 : Mise en As-if

- Si une année de développement $t+9$ s'applique au montant de la provision observée au 31 décembre 2021, du sinistre survenu en 2012, ce dernier aura une mise en as-if qui s'évaluera sur $2022+9$:

	2012	2021	2022	...	2031
Survenance	X		$X \cdot I(2022)/I(2012)$		
Provision		50			$50 \cdot I(2031)/I(2021)$

Ainsi, par ce procédé de mise en as if, nous disposons d'un échantillon de sinistres de survenance équivalente $n+1$, et dont les montants (de paiements, de provisions et de coûts) contiennent implicitement une inflation future en cohérence avec l'inflation historique constatée sur les portefeuilles.

Afin d'avoir l'historique complet de chaque sinistre mis en as if, la méthodologie décrite précédemment peut être mise en œuvre à chaque date d'inventaire.

Néanmoins, Groupama n'applique pas cette approche, car l'inflation future modifie la cadence de développement. Par exemple, une provision historiquement stable durant plusieurs années ne décroît pas en as if dans cette approche. Cette problématique est d'autant plus forte que les indices d'inflation utilisés sont importants.

Ainsi, Groupama applique une méthode dite « rétrospective » consistant à :

- Mettre en as if uniquement la dernière charge connue au 31/12/n : paiements individuels + provisions
- Répliquer les boni/mali constatés historiquement en partant du dernier montant mis en as if 31/12/n et en remontant au 1^{er} montant :

Par exemple, si le sinistre historique est multiplié par 1,2 entre le 31/12/n-1 et le 31/12/n, le montant as if 31/12/n-1 est égal au montant as if 31/12/n divisé par 1,2. Ainsi, de proche en proche, on obtient l'historique complet de chaque sinistre as if.

Nous avons opté pour la deuxième méthode qui a l'avantage de répondre aux problématiques suivantes :

- Les boni/mali constatés historiquement doivent être observables sur les données as if ; cela évite des distorsions par rapport aux hypothèses de projection utilisées dans le cadre du provisionnement.
- La mise en as if des sinistres ne crée pas implicitement de boni/mali non observés sur les sinistres historiques.

Le déroulé as if de ce sinistre est bien conforme au déroulé historique.

1.5.3. Modélisation des sinistres attritionnels

Les sinistres attritionnels correspondent à la sinistralité récurrente dont les montants sont inférieurs à un certain seuil.

Ils sont définis comme la charge totale à l'ultime retranchée de la charge des sinistres graves et des $IBNR_{grave}$. Ces $IBNR_{grave}$ sont estimés en faisant la moyenne des sinistres graves déjà déclarés.

En effet, puisque la charge à l'ultime totale est la somme des charges ultimes graves et attritionnels auxquelles sont rajoutés les différents IBNR correspondants. Alors, pour avoir uniquement les attritionnels, il suffirait d'y retrancher les graves :

$$Ult_{attri_{total}} = Ult_{totale} - (Ult_{grave} + IBNR_{grave})$$

Ce qui correspond à :

$$Ult_{attri_{total}} = Ult_{attri} + IBNR_{attri}$$

Contrairement aux sinistres graves, la modélisation des attritionnels résulte du rapport des charges ultimes attritionnels d'une année avec le total des primes acquises de cette même année $\left(\frac{S}{P}\right)$. Une telle modélisation tient compte des variations du portefeuille et celles des sinistralités.

Au sein du modèle interne de Groupama, on les modélise avec la loi log normale. Cependant, on constate une saisonnalité au niveau de l'évolution temporaire des $\frac{S}{P}$. Il est alors nécessaire d'en tenir compte et de réduire la volatilité de l'estimation. Pour ce faire, on le calibre avec :

- Le modèle de moyennes mobiles qui pondère les observations passées des $\left(\frac{S}{P}\right)_t$ par les primes. Cette moyenne est faite sur un horizon donné, ici les N dernières années :

$$MA_t^N = \frac{\sum_{k=1}^N P_{t-k} \times \left(\frac{S}{P}\right)_{t-k}}{\sum_{k=1}^N P_{t-k}}$$

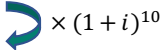
- Le modèle exponentiel qui correspond à une moyenne des $\left(\frac{S}{P}\right)_t$ historiques pondérés par le temps car on suppose une tendance temporaire au niveau des RC Auto et Dommage auto, tandis que le modèle standard Groupama est une moyenne pondérée par les primes :

$$EWMA_t = \begin{cases} \left(\frac{S}{P}\right)_1 & \text{si } t = 1 \\ \lambda \left(\frac{S}{P}\right)_t + (1 - \lambda)EWMA_{t-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Il faudra distinguer les effets de l'inflation sur les charges de ceux sur les primes. La vision ultime des charges contient d'une part l'inflation historique et d'autre part l'inflation future dont cette dernière est captée par la méthode de projection de type Chain-Ladder.

En cas d'égalité des inflations passées et futures, les charges à l'ultime de survénance $t=1$, en valeur historique est mise en as if sur n année en y incorporant l'inflation future. Cette même charge correspondra alors à sa valeur passée multipliée par $(1 + i)^n$. La charge ultime de survénance $t=2$ sera, en se basant sur la première, un produit de sa valeur initiale avec $(1 + i)^{n-1}$.

On observe mieux ce décalage dans le temps à travers l'illustration ci-dessous :

	P1	P2	P3	P4	P5	
Survenance 2010	2010	2011	2012	2013	2014	
As if 2022	2022	2023	2024	2025	2026	

Avec i = indice d'inflation

Si les primes et les sinistres suivent un même indice, la prime de 2010 mise en as if pour 2022 est également multipliée par $(1+i)^{10}$. Il en est de même pour celle des années suivantes, en réduisant de moins 1, à chaque fois la puissance du coefficient multiplicateur.

On devrait trouver alors, en ratio, les mêmes $\frac{S}{P}$ qu'avec les valeurs historiques, en faisant le rapport des charges corrigées et des primes misent en as-if.

Cela nous ramène à dire que les $\frac{S}{P}$ historiques ne nécessitent pas de retraitements de l'inflation lorsque :

- L'inflation historique et l'inflation future sont équivalentes
- Les primes et les sinistres sont inflatés par le même indice.

Cependant, ce second point est difficile à vérifier du fait :

- De la difficulté d'identification des variations liées à l'inflation pure des primes puisqu'en cas de revalorisation tarifaire, cela se fait au global sans isoler les effets inflationnistes des revalorisations techniques pures
- De la complication des cycles de marché de certains segments. Elle peut avoir pour effet, la complication de l'analyse en rapportant une difficulté dans l'isolement de l'inflation pure des autres variables tarifaires.

De ce fait, dans la pratique, on ne retraite pas l'inflation dans le processus de calibrage des $\frac{S}{P}$ attritionnels.

1.6. Distribution du résultat technique à 1 an

Le SCR relatif au risque de primes ne peut être directement obtenu par le quantile d'une distribution continue. En effet, l'application des traités de réassurance induit des effets non continus (par exemple Stop Loss) que l'on ne peut capter simplement à partir des distributions statistiques usuelles.

Ainsi, la distribution du résultat technique en fin de 1^{re} année est obtenue par tirages de Monte Carlo à partir des éléments suivants :

- La sinistralité future – ceci suppose de modéliser :
 - La charge sinistre (attritionnel, grave, CAT) en brut de réassurance
 - L'inflation future

- L'application des traités de réassurance
- Les primes reçues et les primes cédées en réassurance. Les primes de reconstitution sont perçues comme des charges au même titre que les sinistres
- Les différents frais : Acquisition, Administration et Gestion
- Les taux d'escompte
- La dépendance entre les risques

Cependant, pour effectuer le calibrage, la sinistralité devra prendre en compte les hypothèses d'inflation futures moyennes, nous considérerons alors la loi de :

$$S = X \times \sum_i u_i \times E(I_i)$$

On notera :

- a_i : L'inflation annuelle provenant du générateur des scénarios économiques (ESG) pour les périodes futures i
- I_i : Indices d'inflation cumulés tel que $I_i = \prod_{j=1}^i (1 + C_j)$
- C_j : L'inflation spécifique
- X : Sinistralité ultime hors inflation
- u_i : Cadence de paiements déterministe hors inflation tel que $\sum_i u_i = 1$
- $S' = X \times \sum_i u_i \times I_i$: Sinistralité ultime y compris inflation
- K : Moyenne long terme de l'inflation spécifique

On a alors,

$$S = X \times \sum_i u_i \times \prod_{j=1}^i (1 + E(C_j))$$

Nous souhaitons avoir :

$$S' = X \times \sum_i u_i \times \prod_{j=1}^i (1 + C_j)$$

Avec les cadences de paiements comprenant l'inflation future, nous essayons de retrouver les différents paiements des sinistres en une vision correspondante à l'année de modélisation, 2023 pour notre cas. Cela se fait grâce à l'application de l'inflation future moyenne.

Le sinistre simulé devient alors, après l'application de l'inflation future :

$$S' = S \times \sum_i p_i \times \frac{\prod_{j=1}^i (1 + C_j)}{\prod_{j=1}^i (1 + E(C_j))}$$

Avec :

$$p_i = \frac{u_i \times \prod_{j=1}^i (1 + E(C_j))}{\sum_k (u_k \times \prod_{j=1}^k (1 + E(C_j)))} : \text{ Cadences des paiements y compris inflation future}$$

$\frac{\prod_{j=1}^i (1 + C_j)}{\prod_{j=1}^i (1 + E(C_j))}$ est le retraitement de l'inflation par un rapport de la sinistralité au cumul des projections de l'inflation future moyenne (Inflation espérée). Ensuite, il suffira de multiplier le quotient par le cumul des taux d'inflations futures (Taux d'inflation).

C'est par ce rapport $\frac{I_i}{I_{\text{Espérée}_i}} = \frac{\prod_{j=1}^i (1+C_j)}{\prod_{j=1}^i (1+E(C_j))} = \prod_{j=1}^i (1+b_j)$ que nous allons déterminer le paramètre de sur-volatilité.

Nous avons alors,

$$\frac{I_i}{I_{\text{Espérée}_i}} \times \frac{I_{\text{Espérée}_{i-1}}}{I_{i-1}} = 1 + b_i$$

Or,

$$I_i = \prod_{j=1}^i (1 + C_j)$$

Et donc,

$$b_i = \frac{C_j - E(C_j)}{1 + E(C_j)}$$

Avec $C_j = K + (a_i - E(a_i)) + \sigma \varepsilon$

b_i a un impact direct puisqu'il fait intervenir, en plus de l'inflation économique, l'inflation spécifique. Les résultats vont varier en fonction du taux spécifique estimé. Si ce dernier est inférieur à la projection utilisée pour la mise en as-if de la sinistralité, la sur-inflation aura pour conséquence de faire baisser le résultat technique.

1.7. Courbe EIOPA

La courbe EIOPA est utilisée pour actualiser les calibrations liées au flux d'écoulement des sinistres sur plusieurs années avec les cadences de paiement. Elle fournit la valeur actuelle des paiements, communément appelée NPV (Net Present Value), c'est-à-dire qu'elle donne les taux d'actualisation pour chaque année future de telle sorte à avoir une rentabilité certaine et sans risque.

Alors, ces rentabilités sont liées à celles des placements financiers non risqués. Si l'on place la valeur actuelle dans un placement à taux sans risque, on obtient le montant nécessaire pour payer les sinistres dans le futur pour chaque année de développement.

Avec cette méthode, il n'est plus nécessaire de mettre de côté la totalité de la somme correspondant au montant des sinistres futurs, mais plutôt de définir seulement un montant au moment présent dont la valeur future correspondrait à celle de l'ensemble des sinistres.

L'actualisation à l'aide du taux sans risque de l'EIOPA a lieu après que les sinistres soient inflatés. L'inflation est prise en compte dans la détermination de la valeur des sinistres futurs.

La courbe EIOPA, quant à elle, détermine la valeur actuelle des sinistres, en tenant compte de la rentabilité liée au taux sans risque. Cette valeur actuelle correspond à la valeur totale des sinistres inflatés.

Chapitre II: Contexte inflationniste

2.1. Situation et impact de la crise inflationniste en assurance Non-vie

En premier lieu, nous aborderons l'origine d'une crise inflationniste et ensuite nous ferons intervenir l'assureur comme agent impacté par cette dernière.

Pour commencer, il faut savoir qu'un marché économique est la rencontre entre deux entités, pouvant être des personnes physiques ou morales, qui échangent des biens ou des services. C'est d'une part le demandeur et d'autre part l'offreur. Le niveau d'activité résulte de la rencontre entre les courbes de cette offre et cette demande, on parle d'équilibre du marché lorsqu'il y a une égalité des deux.

Ces deux courbes sont sensibles à la variation des quantités ou du niveau des prix des biens ou services sur le marché. La variation des prix est causée par l'inflation et celle des quantités par la croissance économique.

La crise sanitaire liée à la covid 19, notamment avec les différentes mesures de confinement dans le monde, a réduit considérablement la production et la commercialisation des biens et services, occasionnant un choc d'offre et de demande négatif sur ce marché.

En effet, la propagation de la covid a constitué un choc majeur pour la croissance mondiale et a touché quasiment tous les secteurs. Plusieurs pays ont vu leur PIB par habitant s'effondrer, notamment à cause de ces différents chocs. Pour mieux comprendre ces fluctuations, nous allons essayer d'être plus explicites sur ces chocs économiques :

- Le choc de l'offre : C'est une variation imprévue et conséquente du niveau de production affectant le coût de production des biens et services

La courbe de l'offre peut être décrite comme la tendance liée au niveau de production par rapport à l'évolution des prix c'est-à-dire plus les prix sont élevés, plus la quantité produite l'est également. Cela pourrait s'interpréter autrement en disant que la hausse de production nécessite des moyens (main-d'œuvre, matériels, financement, etc.), alors produire plus augmente les coûts et donc les prix des produits.

Une augmentation brutale des prix des biens que les entreprises ont besoin pour produire, avec les mêmes moyens à leur disposition reviendrait plus cher et elles seront obligées de baisser leur niveau de production. La courbe de l'offre se déplacera alors vers la gauche.

- Le choc de la demande : C'est une variation imprévue et conséquente de la demande de l'ensemble des marchés (demande globale) des biens ou des services.

Il se matérialise lorsque le revenu des ménages diminue, leur consommation en sera aussi impactée impliquant ainsi un déplacement de la courbe de la demande vers la gauche.

Schématiquement, ils se manifestent de la manière suivante :

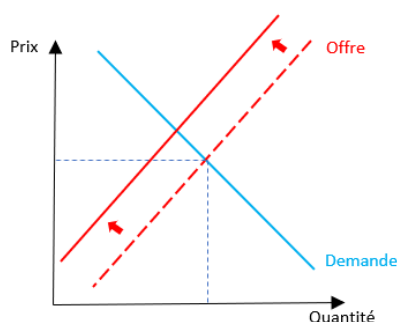


Figure 9: Choc de l'offre

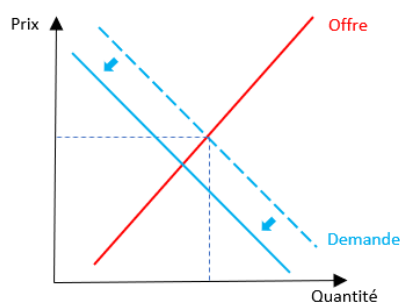


Figure 10: Choc de la demande

La covid-19 a eu pour particularité d'engendrer les deux chocs en même temps. Les mesures des confinements ont contraint les entreprises à réduire le plus possible tout investissement et activité. Il en est de même pour les ménages qui se sont limités sur l'achat des produits de première nécessité. Ceci a ainsi généré un nouveau point d'équilibre des deux courbes.

Cependant, l'évolution des prix dépendait du niveau mutuel de ces deux chocs c'est-à-dire, si celui de l'offre était plus grand que celui de la demande, le prix aurait augmenté. Et inversement, le prix aurait baissé.

En revanche, si l'évolution de ces deux chocs était proportionnelle alors le niveau des prix n'aurait pas changé.

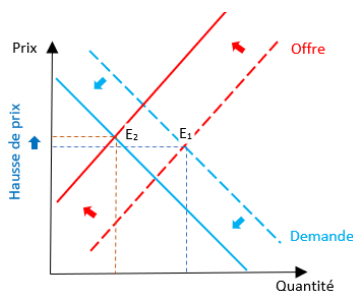


Figure 11: Choc d'offre plus

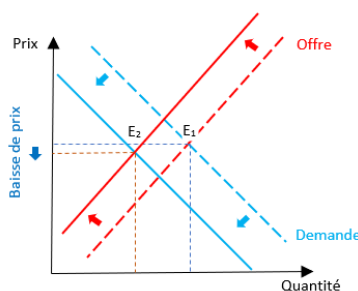


Figure 12: Choc de demande plus

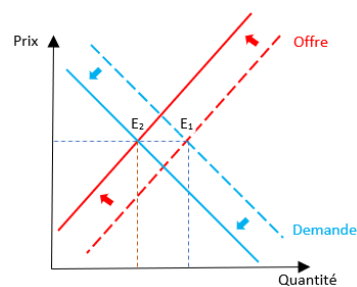


Figure 13: Chocs équivalents

Quoi qu'il en soit, la quantité quant à elle baisserait toujours, traduisant ainsi une baisse de l'activité économique.

Cependant le constat était que la situation sanitaire avait plutôt occasionné une baisse de la demande plus élevée que celle de l'offre. Mais là n'est pas le souci, les conséquences de cette crise n'ont pas été moindre. Elles ont conduit à une situation de récession économique c'est-à-dire une baisse de l'activité qui engendrerait une hausse de licenciement et par conséquent une baisse des consommations et d'investissements. De façon cyclique, ces phénomènes s'enchaînaient pour créer une spirale. Une désinflation a également été constaté, due au ralentissement du marché du

pétrole, avec une très forte chute du baril. Alors, pour agir et remettre en marche l'activité, il a fallu soutenir la demande en injectant de l'argent dans l'économie et inciter les ménages à dépenser.

Néanmoins, les possibilités d'agir sur l'offre se sont avérées limitées et n'ont pas permis de la réadapter à la situation puisque le confinement n'était que temporaire. Il n'a pas alors été nécessaire d'adapter le système de production à un phénomène passager. La reprise de la production a été alors plus faible que la demande créant des pénuries de certains biens et une hausse des prix. Ceci explique l'inflation liée au covid.

Les conséquences de cette inflation se répercutent sur l'assurance non-vie en ce moment, notamment sur la branche automobile. En effet, les sinistres attritionnels sont plus fréquents ce qui nécessite des pièces de rechange pour les réparations qui doivent être importées de divers endroits. Or, face à la hausse rapide de la demande, plusieurs composants ont vu pendant un certain temps leurs prix augmenter.

Enfin, en février 2022, survient la guerre entre la Russie et l'Ukraine occasionnant une crise sur l'offre de certains produits, en l'occurrence ceux dont les ménages ainsi que plusieurs secteurs d'activités dépendent. Pour citer certaines de ces activités ayant un impact direct chez les consommateurs, l'industrie des transports des marchandises en serait un exemple, à l'instar de l'acheminement des pièces détachées qui pourront par la suite subir une répercussion de la hausse des coûts de transport. Les coûts de déplacement des membres du personnel soignant, également pourront également être impactés, causant ainsi un accès aux soins limité pour les personnes victimes d'un dommage corporel en situation de dépendance.

S'il s'avérait que cette fluctuation s'installait dans la durée, les assureurs se verraient dans l'obligation d'augmenter leurs niveaux des primes.

2.2. Générateur des scénarios économiques (GSE)

Avant d'aborder les méthodes utilisées pour concevoir les scénarios d'inflation, nous rappellerons d'abord ce qu'est un générateur de scénarios économiques (GSE).

Un GSE est un modèle de simulation des comportements temporels des variations économiques et financières. Dans les scénarios monde réel, le GSE permet d'obtenir des projections futures des observations actuelles en prenant en compte les interactions qui peuvent exister entre les sources des risques et leurs distributions. C'est un outil majeur dans la gestion des risques car il permet de résoudre des problèmes insolubles analytiquement, c'est-à-dire des processus dont l'application ne peut s'effectuer lorsque les distributions associées ne sont pas connues ou estimables. Ce n'est pas toujours le cas lorsqu'il s'agit des données économiques car elles sont plus souvent dérivées de données empiriques, ne correspondant pas à des distributions bornées.

Cette vision future est motivée par la volonté pour une compagnie d'assurance de se garantir un excédent permanent, par différence entre l'actif du bilan prudentiel et la valeur des engagements actualisés.

2.2.1. Différence entre probabilité risque neutre et univers monde réel

Avant de mettre en place un modèle de génération des scénarios économiques, il faut tout d'abord savoir que ce dernier se calibre selon deux types d'approches (entre probabilité risque neutre ou univers monde réel) et dont le choix dépend de l'objectif assigné au GSE.

- Dans les scénarios monde réel, c'est l'historique des actifs financiers qui entre dans la construction des distributions prédisant leurs fluctuations futures. Les prévisions qui en résultent varient selon la fenêtre temporelle choisie pour l'historique et les hypothèses macroéconomiques de prévision c'est-à-dire la méthode utilisée pour estimer la prime de risque. Alors, les rendements futurs incluent implicitement une prime de risque sous-jacente dans le temps.
- Dans la probabilité risque neutre, le cadre est plus théorique et permet d'effectuer une valorisation des différents instruments associés à des risques financiers et cela sans recourir à d'éventuelles hypothèses de prime de risque associée.

2.2.2. Mise en œuvre d'un générateur des scénarios économiques

Deux principales questions peuvent être posées lors de la mise en œuvre d'un GSE. La première est celle du choix du schéma ou de la structure de représentation de l'évolution des scénarios futurs (dynamique de projection) des variables macroéconomiques et financières dans le temps : l'inflation, dans notre cas. Ensuite, la seconde question est celle du choix de méthode à adopter pour générer ces scénarios.

La construction et la mise en œuvre d'un GSE implique les quatre étapes suivantes :

1. Identification des sources de risque considérées et les variables financières à calibrer (taux d'intérêt, inflation, rendements boursiers, etc.)
2. Choix d'un modèle de projection pour chaque variable
3. Sélection de la structure de dépendance entre les sources de risque pour obtenir des dynamiques (projections) cohérentes
4. Estimation et calibration des paramètres du modèle choisi.

2.2.3. Exigences réglementaires

Concernant les exigences réglementaires, les GSE s'intègrent bien dans les principes de ComFrame¹ ainsi que des règles de l'EIOPA. En ce qui concerne le cadre de gestion des risques associés à ces régimes réglementaires, des analyses stochastiques ont été considérées, qui ont fourni des résultats suffisamment larges pour refléter l'ampleur et la complexité des risques et permettre de déterminer la distribution statistique de ces résultats. La formule standard et le modèle interne utilisés pour quantifier le risque et fixer les exigences minimales de fonds propres peuvent utiliser le GSE dans le cadre de la réglementation et des nouvelles exigences de Solvabilité II.

2.2.4. Schéma de projection de scénarios d'un GSE

Comme mentionné plus haut, le choix de la structure de projection pour chacune des variables du GSE peut être considéré comme une problématique à part entière. Elle concerne la définition du schéma graphique de transition entre deux valeurs successives, observées à la date t et $t + 1$ de la même variable, par exemple. Ainsi à chaque variable du GSE peut correspondre une structure de projection. Afin de simplifier l'analyse, on suppose dans la suite que la structure de projection choisie est la même pour toutes les variables. De même, on définit un nœud comme la réalisation possible de la variable modélisée à une date donnée. Une trajectoire correspond ainsi à l'ensemble des nœuds successifs qui forment un scénario futur possible d'évolution de la variable macro-économique.

En particulier, deux principales structures peuvent être avancées à ce stade : la structure de projection linéaire d'une part et la structure de projection par arborescence de l'autre. La différence principale entre ces deux structures se situe au niveau de la nature de la dépendance entre les différentes trajectoires simulées. Alors que pour les structures de projection linéaire, une seule trajectoire est dérivée à partir de chaque nœud, les structures par arborescence supposent quant à elles que chaque nœud possède différents nœud-enfants et ainsi différentes trajectoires possibles sont déduites à partir de chaque nœud. En assurance non-vie, c'est la structure linéaire qui est retenue.

¹ ComFrame (Common Framework for the Supervision of Internationally Active Insurance Groups) : Cadres réglementaires internationaux des assurances venant de l'association internationale des contrôleurs d'assurance

Les graphiques suivants illustrent la différence entre ces deux structures :

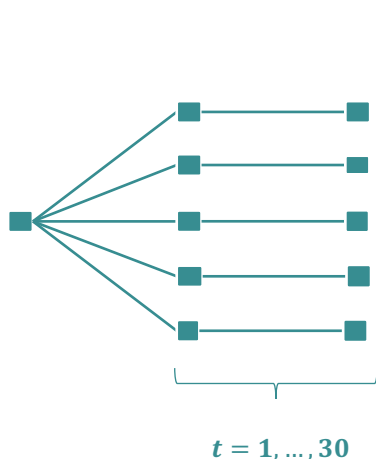


Figure 14 : Structure linéaire

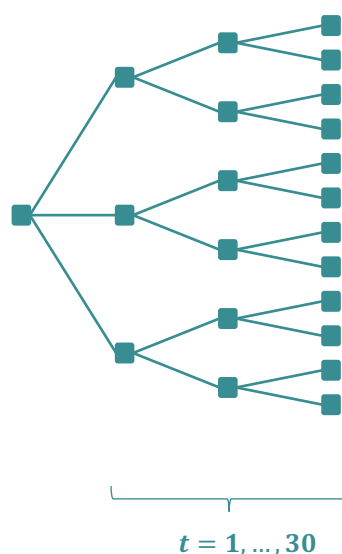


Figure 15 : Structure par arborescence

2.2.5. Procédure mathématique

Les scénarios générés en assurance non-vie se font à l'aide d'approche par échantillonnages, construites à partir de marginales et des corrélations spécifiées. L'échantillonnage pur est la méthode de génération de scénarios la plus connue. A chaque nœud de l'arbre de scénarios, on tire de façon aléatoire différentes valeurs à partir d'un processus stochastique. Cela se fait soit par un tirage direct à partir d'une distribution, soit par l'évolution du processus selon une formule explicite.

Dans ce cadre, la dynamique de plusieurs variables peut être supposée suivre un processus stochastique de type mouvement brownien géométrique. Les scénarios d'évolution de ces variables sont ainsi simulés à partir des hypothèses sur la discrétisation d'un processus brownien géométrique défini par exemple par :

$$dX(t) = \delta x(t)dt + \sigma x(t)dw(t)$$

Où :

$x(t)$: La variable économique (Inflation)

δ : Le drift

σ : La volatilité

$w(t)$: Le mouvement brownien géométrique

On pourra ainsi simuler des processus stochastiques sur un intervalle de temps donné, en attribuant des valeurs aléatoires au mouvement brownien et en calculant par la suite $X(t)$.

Sur le plan pratique, les scénarios d'inflation générés dans le modèle de Groupama le sont comme suit :

- Simulation d'un ensemble de 5000 scénarios d'inflation à un temps $t=1$ (la fourchette du risque Solvabilité II en assurance non-vie), puis projection de ces derniers de façon

déterministe sur un horizon de 30 ans, avec un pas de temps annuel. L'inflation de la première année provient directement du générateur de scénarios économiques suivant un processus stochastique comme décrit ci-dessus, tandis que celle des années suivantes (l'inflation conditionnelle) dépend directement de la simulation de la première année. Elle servira pour l'écoulement des sinistres à l'ultime.

- Calibrage des lois de sinistralité en tenant compte, dans la mise en as-if des montant des sinistres historiques et de l'inflation future moyenne.
- Calcul de la sinistralité avec inflation à l'ultime en y intégrant également la volatilité.

Une fois le calibrage des scénarios de l'inflation réalisé, il s'en suit ceux des simulations du résultat technique et de la sinistralité.

Concernant les résultats techniques (TR), 200 000 simulations de ces derniers seront générées : elles correspondront aux simulations de l'année à venir.

Ensuite, à chacune de ces simulations sera incorporé un des 5000 scénarios d'inflation provenant du GSE. Ce processus se fera par répétition des scénarios d'inflation jusqu'à l'atteinte du dernier résultat technique c'est-à-dire 40 répétitions des 5000 scénarios sur les 200 000 RT.

Une méthode identique sera utilisée pour le calibrage des montant de sinistres. Ceux-ci une fois générés, des cadences de paiements sur 30 années y seront appliquées. De manière plus simplifiée, cela se résume au fait d'appliquer les taux d'inflation à chaque paiement cadencé jusqu'à leurs écoulements.

2.2.6. Validation des scénarios d'inflation économique

Le générateur des scénarios économiques peut conduire à des erreurs de calibration et d'implémentation dans le modèle pouvant alors générer des valeurs erronées, en décalage avec ce qui était attendu de la simulation. C'est pourquoi, la mise en place d'un processus de validation des différentes trajectoires d'inflations simulées est nécessaire et ce, dans le but d'assurer leur fiabilité.

Concernant les scénarios monde réel, cette validation se fait sur l'ensemble des projections bien que la première année soit la seule à être stochastique.

L'objectif est de s'assurer qu'ils traduisent bien la réalité économique et cela malgré le manque des tests adéquats garantissant la fiabilité des scénarios générés. Le moyen d'y arriver est d'en tester les sensibilités par rapport aux différents paramètres de calibrage.

La validation se fait en trois étapes, la première est l'observation des représentations graphiques qui devront traduire une dynamique cohérente et plausible. La deuxième et dernière observations seront sur des critères numériques et statistiques.

Nous allons emprunter quelques critères de validation de scénarios risque neutre pour les adapter au modèle actuel :

- Nous observerons si les trajectoires générées par nos simulations se superposent, sur le court terme, à celles des taux initiaux c'est-à-dire une comparaison des moyennes des taux simulés (nominaux et réels) aux taux forwards initiaux correspondants à chacun d'eux (market consistency).
- Les projections long terme seront validées sur des critères de cohérence avec les cibles économiques fixées lors de la modélisation. En somme, nous testerons pour les taux court terme et long terme, la correspondance entre les trajectoires moyennes et leurs trajectoires cibles.
- Ensuite nous évalueront la cohérence du modèle à l'aide des tests statistiques. Nous vérifierons également que la corrélation implémentée dans les inputs du modèle se retrouve bien dans les trajectoires.

2.2.7. Inputs des scénarios d'inflation économique

Comme cela a été énoncé dans les lignes précédentes, les taux nominaux et réels interviennent dans la modélisation des scénarios de l'inflation économique. Ces données sont fournies à Groupama par Moody's Analytics. Les taux nominaux sont calibrés sur les obligations françaises et allemandes. Ce sont des taux sans risque. Par contre, les taux réels sont essentiellement calibrés sur les obligations françaises, le marché y est plus liquide et représentent l'inflation implicite. On utilise les données passées de l'inflation pour calibrer l'évolution future des taux réels.

Les modèles alternatifs quant à eux, utiliseront l'indice des prix à la consommation.

Seuls les scénarios d'inflation (stochastiques) simulés à $t=1$ an seront utilisés et les projections en $t > 1$ an seront déterministes, avec une dépendance à cette première année. De ce fait, la validation des scénarios d'inflation dépendra des outputs de cette première année.

Pour nous baser sur les données d'inflation économique française, nous utiliserons, dans le modèle interne de Groupama, l'indice que produit l'institut national de la statistique et des études économiques (INSEE) qui en dispose sous différents variants, selon les éléments qui les composent. Nous avons :

L'IPC incluant tous les produits (IPC)

- L'IPC incluant tous les produits, corrigé des variations saisonnières (IPC hors VS)
- L'IPC excluant le tabac et l'alcool (IPC hors T&A)
- L'IPC excluant l'énergie (IPC hors Energie)
- L'IPC excluant les produits alimentaires (IPC hors PA)

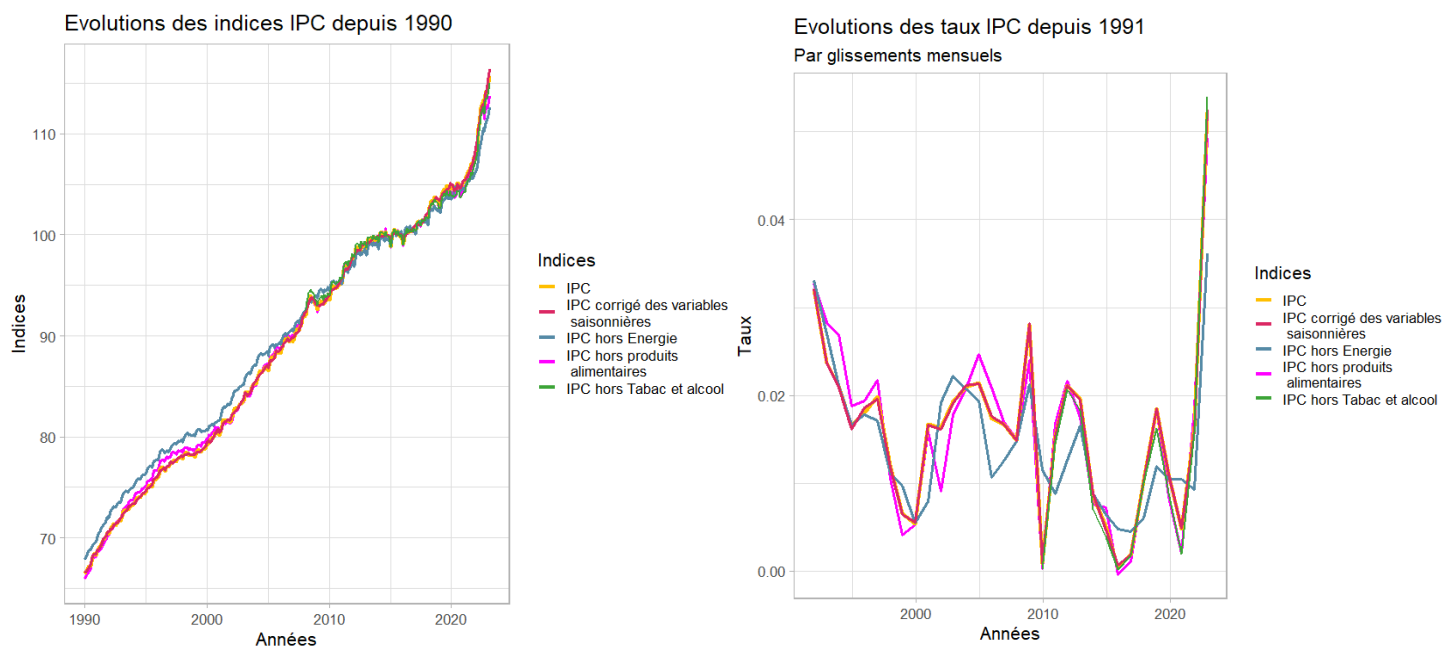


Figure 16 : Evolution de l'indice d'inflation économique en France depuis 1990

Le taux d'inflation excluant l'énergie connaît, d'une part, une volatilité moindre, en comparaison des autres et d'autre part, il est moins impacté par la hausse inflationniste de ces 2 dernières années. Ce phénomène traduit bien une causalité de l'énergie dans ces chocs. Par ailleurs, même sans l'énergie, ces chocs inflationnistes subsistent. Comme mentionné à l'introduction de cette étude, de multiples éléments interdépendants influencent l'environnement économique global et par conséquent la variation de l'inflation également.

Ces indices spécifiques observés sont disponibles dans une base mensuelle depuis janvier 1990, à l'exception de l'IPC hors tabac et alcool dont l'historique ne commence qu'en janvier 2008. Le tableau suivant présente une comparaison statistique :

- Vision fin 2021 :

		IPC	IPC hors Energie	IPC hors Alimentaire	IPC hors Tabac	IPC hors VS	IPCH
Variations annuelles	Moyenne	1,49%	1,39%	1,49%	0,39%	1,48%	1,18%
	Ecart-type	0,77%	0,67%	0,86%	0,64%	0,77%	0,91%
	IC 99,5%	[0,5%,1,04%]	[0,53%,1,01%]	[0,47%,1,07%]	[0,54%,1%]	[0,5%,1,04%]	[0,45%,1,09%]
	Max	3,21%	3,31%	3,28%	2,07%	3,21%	3,16%
	Min	0,04%	0,45%	-0,04%	0,01%	0,06%	0,09%
	Skewness	-0,15964943	0,8106195	-0,11794314	1,44506675	-0,14137814	0,09098102
	Kurtosis	2,58017301	3,32480033	2,18595549	3,55389032	2,57436175	1,79213994

Figure 17 : Statistiques descriptives des différents IPC en fin 2021

- Vision fin 2022 :

		IPC	IPC hors Energie	IPC hors Alimentaire	IPC hors Tabac	IPC hors VS	IPCH
Variations annuelles	Moyenne	1,60%	1,46%	1,60%	0,54%	1,60%	1,33%
	Ecart-type	1,00%	0,77%	1,04%	1,08%	1,00%	1,22%
	IC 99,5%	[0,65%,1,34%]	[0,73%,1,26%]	[0,64%,1,36%]	[0,62%,1,37%]	[0,65%,1,34%]	[0,58%,1,42%]
	Max	5,22%	3,61%	4,93%	5,39%	5,25%	5,91%
	Min	0,04%	0,45%	-0,04%	0,01%	0,06%	0,09%
	Skewness	1,21659758	1,0203319	0,75566721	3,00488037	1,25418424	1,49099229
	Kurtosis	6,37116851	3,70098763	4,37920082	13,2021858	6,48514333	6,78848033

Figure 18 : Statistiques descriptive des différents IPC en fin 2022

- Les six indices sont comparables en termes de croissance moyenne. L'IPC hors tabac et alcool a progressé moins vite que les autres indices, ce qui s'explique par le fait que ce dernier a un historique plus court. De grandes différences dans les écarts-types mensuels sont notables, mais ces différences sont éliminées dans les trois premiers indices au niveau annuel. L'IPC hors énergie est moins volatil, ce qui est raisonnable compte tenu de la forte volatilité des prix de l'énergie tandis que l'IPC hors alimentation est plus volatile, ce qui s'explique par la faible volatilité des prix alimentaires.
- Les indices sont très corrélés :

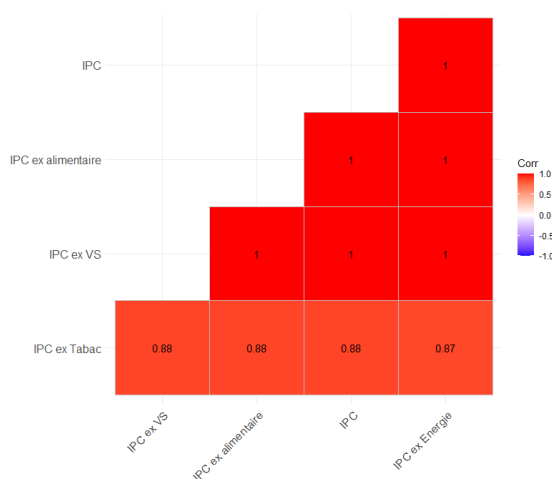


Figure 19 : Corrélations des indices

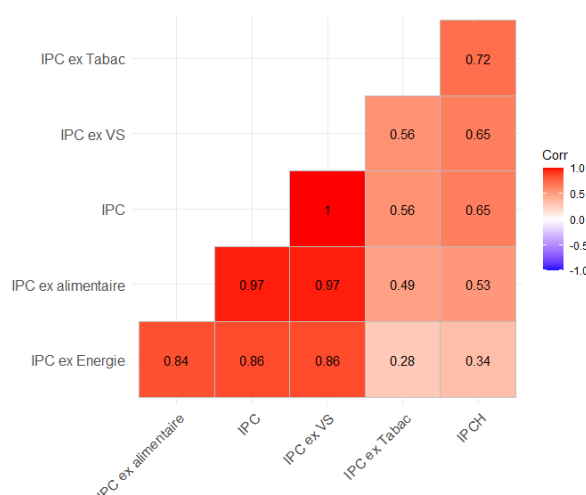


Figure 20 : Corrélations des taux

Etant donné la similarité de ces indices, faire le choix de l'un d'entre eux, à l'exception de l'indice excluant le tabac, ne devrait pas impacter les résultats de la modélisation. Cependant, s'il peut être justifié que certaines LoB ne soient pas affectées par l'inflation énergétique, une option visant à prendre l'IPC excluant l'énergie pourrait être envisagée. Il convient de noter que cette option entraînera une volatilité moindre. Dans ce qui suit, nous utilisons l'IPC corrigé des variables saisonnières pour éviter les biais lors du calcul des variations annuelles à l'aide de fenêtres glissantes.

2.2.8. Inputs des scénarios d'inflation spécifique

Pour rappel, l'inflation qui intervient dans la modélisation des coûts des sinistres liés aux activités de l'assureur se décompose en une partie économique, englobant toutes les activités, mais aussi en une partie plus sectorielle, liée à une branche d'activité donnée.

Ces indices se présentent de la manière suivante :

Segmentation des risques		Sinistralité	
LoB SII	Segments	Attritionnelle	Grave
Dommages aux biens	Incendie	FFB	
	Construction	BT01	
RC Générale	Construction	BT01	
	Particulier	CPI	Dommages Corporels
	Professionnel	CPI	
RC Automobile		Pièces détachées	Dommages Corporels
Dommages Automobiles		Pièces détachées	
Frais de Soins		Santé	
Assistance		CPI	
Protection Juridique		CPI	
Perte des revenus		CPI	

- CPI : Indice d'inflation économique
- FFB : Indice mesurant l'évolution des coûts de construction de divers éléments d'un immeuble courant à Paris, il est publié par la Fédération Française de Bâtiment.
- BT01 : Indice officiel de révision des prix de la construction, qui mesure l'évolution du coût des facteurs de production dans le bâtiment.
- Pièces détachées : indice CPI pour les pièces détachées et accessoires pour véhicules personnels
- Dommages corporels : Inflation calculée sur la base des indemnités moyennes constatées dans les études de la FFSA sur les sinistres corporels en assurance automobile pour la gravité Blessures sans AIPP et Décès.
- Santé : indice ONDAM (objectif national de dépenses d'assurance maladie) fixé dans le cadre de la loi de financement de la sécurité sociale.

Les graphiques ci-dessous présentent les comparaisons des évolutions temporelles de ces indices spécifiques. La visualisation se fait sur les indices, mais également au niveau des taux puisque seuls ces derniers seront utilisés comme inputs de modélisation.

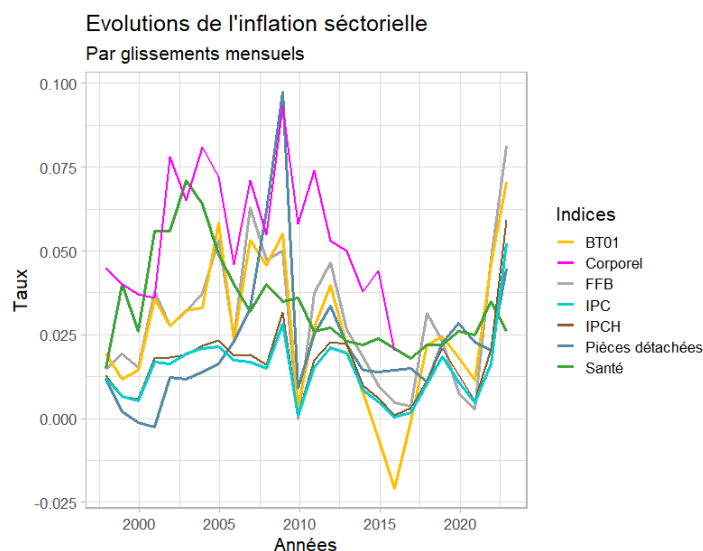


Figure 21 : Comparaison des taux

Dans la construction, les délais peuvent être longs entre le dépôt du permis de construction et l'aboutissement du logement achevé. Entre ces deux événements, il est possible d'observer des

variations des prix. Cependant, malgré la fin des travaux, un risque subsiste toujours. D'où l'existence des garanties décennales dans ce secteur.

L'évolution des prix des matériaux de construction est reflétée par l'indice BT01 qui est publié mensuellement par l'institut nationale de la statistique et des études économiques (INSEE).

Il y a un autre type d'indice de construction dont le nom est identique à l'organisme qui le publie, il s'agit d'indice produit par la Fédération Française du Bâtiment (FFB). Il évalue le coût de la construction d'un immeuble de type parisien, contrairement au BT01 qui a une vision nationale. L'évaluation des prix est celle des composants qui interviennent dans la construction des logements hors les coûts des terrains.

Voici quelques de ces composants :

- Les matériaux de construction
- Les frais administratifs
- La main-d'œuvre
- Les taxes
- etc

En isolant graphiquement les évolutions des taux de ces deux indices, nous observons une grande similitude dans leurs variations temporelles. Cependant, le taux FFB a des tendances un peu plus à la hausse que le BT01. Le graphique ci-dessous le représente parfaitement :

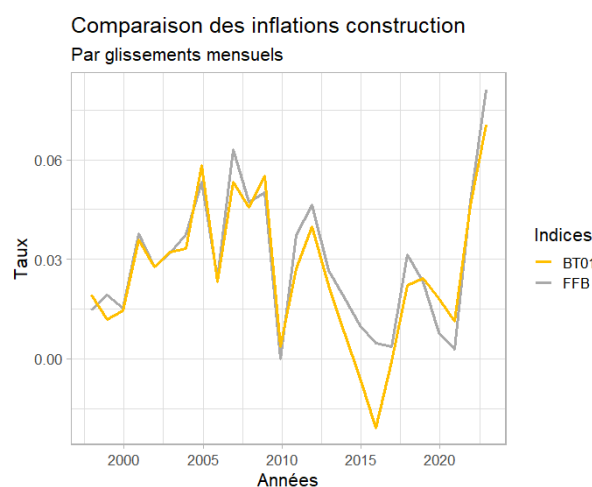


Figure 32 : Comparaison des taux FFB et

Les périodes de disponibilité des données de ces différents indices se présentent comme suit :

	Fréquence	Historique disponible
FFB	Trimestrielle	1994-2023
BT01	Mensuelle	T1 1992 - T4 2023
Pièces détachées	Mensuelle	1990 - 2023
Santé	Mensuelle	1990 - 2023
Taux Ouvriers Santé	Mensuelle	2000 - 2023
Corporel	Annuelle	1993 - 2015

Figure 23 : Historique disponible des indices spécifiques

Dans le modèle interne de Groupama, il est d'usage de tronquer ces indices pour s'aligner à l'historique des taux nominaux et réels.

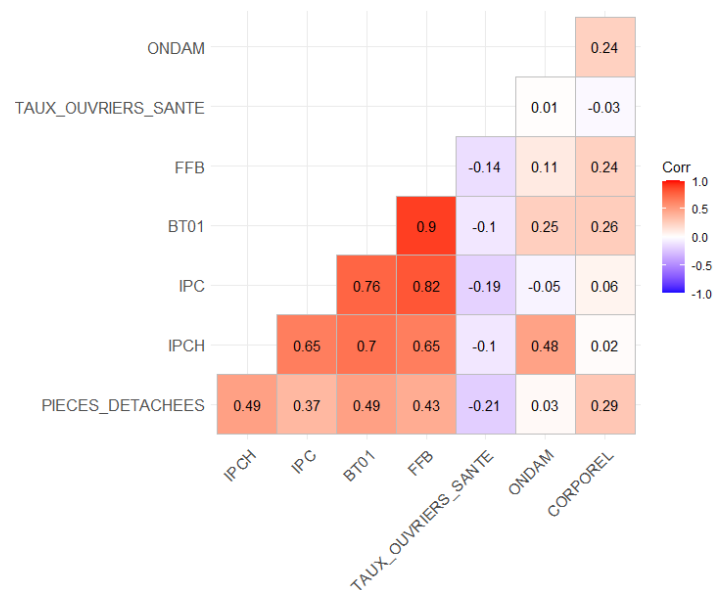


Figure 24 : Comparaison des taux d'inflation

Hormis les taux ouvriers santé, ONDAM et corporels qui sont dans l'ensemble faiblement corrélés avec les autres, les taux sont assez corrélés avec l'inflation économique sur l'historique de 1991 à 2022. Les taux d'inflation lié à la construction sont les plus corrélés entre eux et l'inflation économique. Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que les matériaux de construction proviennent pour la plupart de l'importation et sont donc sensibles aux fluctuations des taux de change, des fluctuations occasionnées par les variations des valeurs monétaires des pays.

Voici les densités empiriques des différents taux annuels d'inflation, calculées par glissements mensuels :

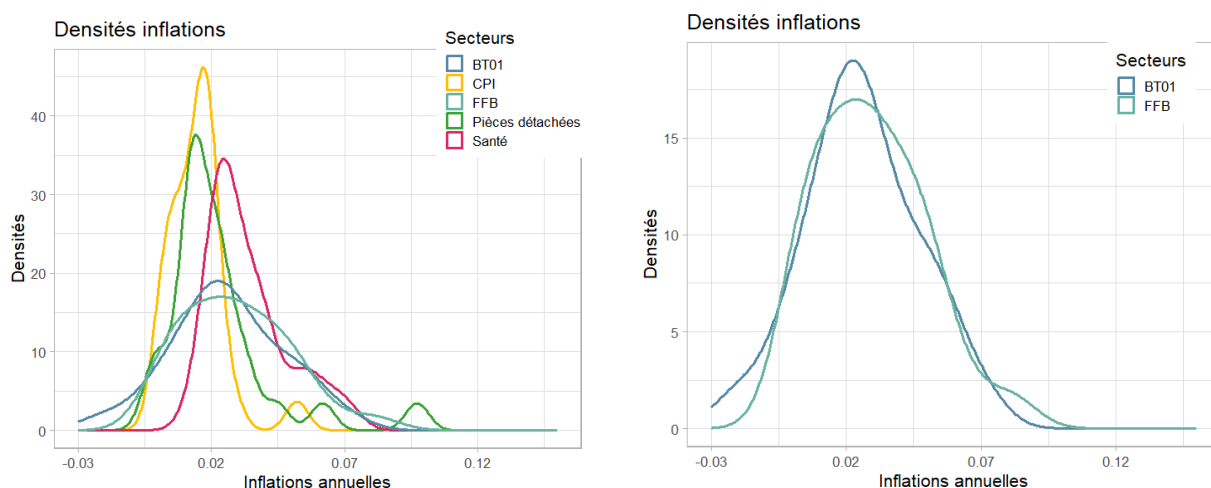


Figure 25 : Comparaison des densités des taux

Les indices d'inflation spécifiques sont plus volatiles, avec une assez forte hétérogénéité et ont connu des variations plus extrêmes que l'indice des prix à la consommation (IPC). C'est également visible sur les courbes des densités avec des queues de distribution à droite plus épaisses que celle de l'indice des prix à la consommation.

Toute l'historique disponible		ONDAM	BT01	FFB	CORPOREL	TAUX OUVRIERS SANTE	PIECES DETACHEES	IPCH	IPC
Variations annuelles	Moyenne	3,37%	4,82%	4,55%	5,89%	14,62%	2,16%	1,64%	1,60%
	Ecart-type	1,44%	4,48%	3,92%	1,87%	60,56%	1,88%	1,15%	1,00%
	IC 99,5%	[0,89%,2%]	[3,21%,5,75%]	[2,76%,5,08%]	[1,11%,2,64%]	[36,33%,84,79%]	[1,22%,2,55%]	[0,71%,1,6%]	[0,65%,1,34%]
	Max	7,10%	16,77%	15,64%	9,30%	305,01%	9,73%	5,91%	5,22%
	Min	1,50%	-2,08%	0,00%	2,00%	0,71%	-0,25%	0,09%	0,04%
	Skewness	1,07269161	1,17892157	1,65461394	-0,020548759	4,584737922	2,262585233	1,709135467	1,216597581
	Kurtosis	3,23419588	3,46226256	5,129852	2,155381638	22,02834277	9,394264228	7,808598422	6,371168508

Figure 24 Toute l'historique disponible des indices spécifiques

Les indices de prix de construction sont les plus volatiles, plus particulièrement, l'indice FFB qui a connu des périodes des hausses très extrêmes où l'inflation pouvait doubler d'une année à l'autre. Cela peut s'expliquer par la plus grande profondeur d'historique disponible.

Historique à partir de 1992		ONDAM	BT01	FFB	CORPOREL	TAUX OUVRIERS SANTE	PIECES DETACHEES	IPCH	IPC
Variations annuelles	Moyenne	3,37%	2,61%	2,98%	5,89%	14,62%	2,16%	1,64%	1,55%
	Ecart-type	1,44%	1,93%	1,85%	1,87%	60,56%	1,88%	1,15%	0,97%
	IC 99,5%	[0,89%,2%]	[1,25%,2,62%]	[1,2%,2,51%]	[1,11%,2,64%]	[36,33%,84,79%]	[1,22%,2,55%]	[0,71%,1,6%]	[0,63%,1,31%]
	Max	7,10%	7,04%	8,12%	9,30%	305,01%	9,73%	5,91%	5,22%
	Min	1,50%	-2,08%	0,00%	2,00%	0,71%	-0,25%	0,09%	0,04%
	Skewness	1,07269161	0,00614138	0,53091952	-0,020548759	4,584737922	2,262585233	1,709135467	1,379186139
	Kurtosis	3,23419588	3,11048641	3,18371879	2,155381638	22,02834277	9,394264228	7,808598422	7,389179033

Figure 25 Historique des différents indices spécifiques à partir de 1992

2.3. Choix de la profondeur d'historique

Le taux d'inflation en France a subi une hausse considérable, il est passé de 3,7% en février 2022 à 6,3%, un an plus tard, en février 2023. Ces hausses historiques n'ont plus été observées depuis 1990, ce qui traduit encore à quel point ces observations sont exceptionnelles. L'institut national de la statistique et des études économiques (INSEE) a publié l'historique de l'évolution de l'inflation en France depuis 1945 qui se présente comme suit

:

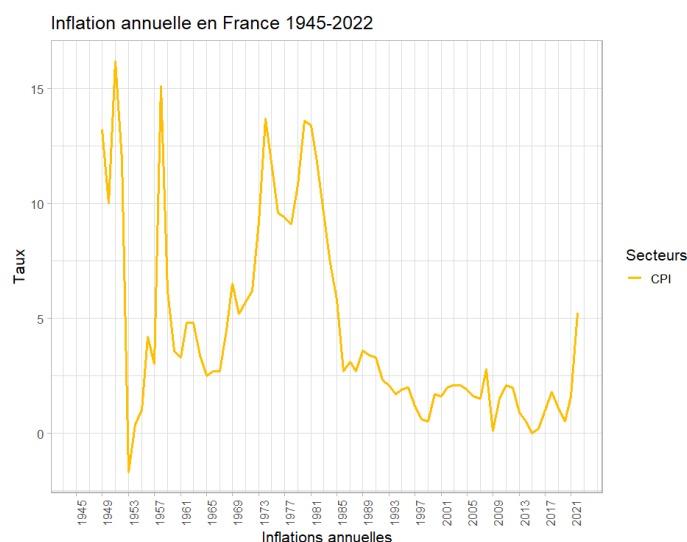


Figure 26 Evolution en % de l'inflation économique en France depuis 1945

Dans le cadre de ces travaux et à des fins de comparaison, seul l'historique mensuel jusqu'en 1990 sera utilisé car il s'agit de la période sur laquelle les scénarios actuellement utilisés par Groupama sont calibrés c'est-à-dire sous base de la profondeur de l'historique des taux nominaux et réels qui va rarement au-delà de 1990.

Groupama utilise des distributions annuelles pour le calibrage de l'inflation au sein de son modèle. Pour obtenir ces taux annuels, à partir des indices d'inflation, il existe deux méthodes possibles :

Méthode 1

Méthode 1	Taux annuels d'une année à l'autre (par exemple de janvier à janvier)	
	Avantages	Inconvénients
	Les taux sont décorrélés car il n'y a pas de chevauchement comme c'est le cas avec la méthode 2. Par conséquent, les estimateurs de moyenne, écart-type,... sont également sans biais.	Etant donné que nos données ne sont disponibles qu'à partir de 1990, les observations ne porteront que sur 30 années, traduisant ainsi une grande faiblesse historique;

$$Taux_t = \frac{\sum_{i=1}^{12}(a_i)_t}{\sum_{i=1}^{12}(a_i)_{t-1}} - 1$$

Avec :

a : Indice d'inflation

i : Mois d'observation

t : Année

Méthode 2

Méthode 2	Taux annuels calculés par glissement annuel (en utilisant les données mensuelles)	
	Avantages	Inconvénients
	En faisant un glissement annuel, cela génère beaucoup plus des données que ce qui était le cas avec la première méthode	Il y a l'apparition d'une forte autocorrélation entre les données à cause de la méthode employée, puisque le glissement introduit un biais dans l'estimation

$$Taux_t = \left(\frac{(a_i)_t}{(a_i)_{t-1}} - 1 \right) \times 12$$

Où :

i : est égale à janvier ou septembre

Le glissement est une succession de ratios d'indices consécutifs, calculé sur 12 mois pour avoir une variation annuelle.

Voici des illustrations comparatives de ces deux méthodes avec un historique remontant à 1990, jusqu'en décembre 2022 :

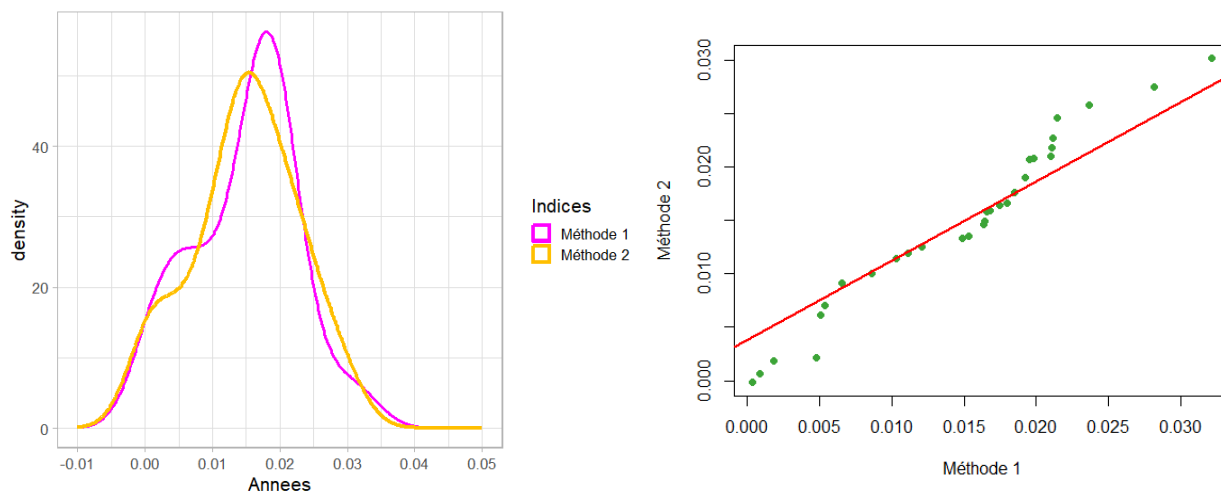


Figure 27 Comparaison des distributions de deux approches

Les deux méthodes ont des quantiles et des densités proches. Sur nos travaux, nous travaillerons avec un historique débutant en 1992 en guise de comparabilité avec les données utilisées par Groupama. Cependant, plus nous réduirons cet historique, moins la fiabilité des données sera garantie.

Partie II : Inflation économique

Pour rappel, en assurance, les différents modèles utilisés sont choisis selon certains critères de modélisation dont le premier n'est rien d'autre que la nature du risque. Ces risques, plus précisément ceux qui entrent en jeu dans la mise en place d'un générateur des scénarios économiques (GSE) sont des séries chronologiques, à l'instar des risques d'action, de crédit ou encore des risques des taux. C'est ce dernier qui nous intéresse, plus spécifiquement les taux d'inflation. Nous allons procéder par un examen détaillé du calibrage des modélisations mises en place actuellement par Groupama dans son modèle interne partiel non-vie, en y décelant premièrement les différentes incompatibilités avec l'univers monde réel, ensuite les avantages que ces modèles pourraient apporter et en fin de compte nous examinerons les limites que ces derniers engendrent en termes de validation des scénarios générés.

Chapitre III: Modèle actuel de Groupama

3.1. Description du modèle

3.1.1. Principe général

Les scénarios du modèle actuellement implémenté par Groupama résultent du modèle des taux de Barrie & Hibbert (B&H), à partir duquel l'inflation est implicitement calculée comme la différence entre les taux nominaux et les taux réels.

Dans ce générateur d'inflation économique de Barrie & Hibbert (B&H), les taux nominaux et réels sont modélisés à l'aide des modèles à deux facteurs.

Sa mise en œuvre est très complexe du fait qu'il fait appel à un grand nombre des paramètres.

Les scénarios à $t = 1$ an proviennent directement du générateur de scénarios économiques et ceux à plus d'un an sont calculés à partir de taux réels et de taux nominaux simulés à $t = 1$ an par la relation d'Irving-Fisher :

$$(1 + r_{(1,T)})(1 + i^c_{(1+T)}) = 1 + n_{(1,T)} \quad (1)$$

Où :

- $r_{(1,T)}$ et $n_{(1,T)}$: Taux réel et nominal de maturité T en date $t = 1$ an
- $i^c_{(1+T)}$: Taux d'inflation annuel en $t = 1 + T$ conditionnellement aux conditions de marché à $t = 1$ an.

Cette approche pose des problèmes car les scénarios obtenus ne sont pas vraiment des scénarios du monde réel. En effet, ils reflètent davantage les anticipations des acteurs du marché à l'année $t=1$, qui sont incluses dans la prévision de la courbe des taux à l'année $t=1$.

La relation d'Irving-Fisher quant à elle peut être décrite comme celle qui se base sur les transactions commerciales et donne une interprétation mathématique décrivant que la valeur des marchandises échangées est égale à celle de la monnaie échangée. Mathématiquement, cela s'interprète comme ceci :

$$m \times v = p \times u$$

Où :

- m : masse monétaire
- v : vitesse de transaction monétaire
- p : niveau général des prix, c'est-à-dire le rapport entre la quantité de monnaie en circulation et l'ensemble des biens en service
- u : volume de transaction

Nous avons alors deux résultats :

- L'existence d'un lien entre la valeur nominale de la production et la quantité de monnaie en circulation, $p \times u$;
- L'inflation est fonction du taux de croissance de la masse monétaire.

Fisher ajoutera une expression définissant le taux réel en fonction des taux nominaux et d'inflation ex post :

$$1 + r(t) = \frac{1 + n(t)}{1 + i(t)}$$

$$n(t) = i(t) + r(t) + r(t) \times i(t)$$

Où :

$r(t)$: le taux court réel.

$n(t)$: le taux court nominal

$i(t)$: le taux d'inflation.

Lorsque $r(t) \times i(t)$ est suffisamment petit, il est possible d'en déduire l'équation de Fisher :

$$n(t) = i(t) + r(t)$$

Ce qui implique que :

$$i(t) = n(t) - r(t) \quad (2)$$

En remplaçant $i(t)$ par $i^c(1 + T)$, $n(t)$ par $n(1, T)$ et $r(t)$ par $r(1, T)$, on retrouve bien l'équation (1).

3.1.2. Inflation conditionnelle par la méthode de B&H

En se concentrant sur les scénarios pour les années de projection (inflation conditionnelle), il convient de noter qu'ils sont modélisés de manière déterministe et dépendamment de la simulation stochastique de la première année.

A titre de rappel, le cadre de modélisation classique pour prévoir les taux d'inflation monde réel est un calcul ex post qui calcule l'inflation à partir de la trajectoire des taux d'intérêt nominaux et réels. La relation utilisée est toujours la relation d'Irving-Fisher, mais ici nous utilisons la formule (2) qui indique le taux réalisé en t , et non le taux attendu par le marché.

Supposons $i(t)$ est le taux d'inflation instantané en t , l'obtention de l'inflation annuel (entre $t - 1$ et t) s'effectue par la formule suivante :

$$I(t) = \exp \int_{t-1}^t i(s) ds - 1$$

Par discrétisation, on retrouve la formule utilisée par Groupama dans le modèle de B&H, aussi connue sous le nom anglais Derived Interest Rate:

$$I(t) = \exp \left(n(t-1) - \frac{1}{2(r(t-1) + r(t))} \right) - 1$$

- L'inflation réalisée pourra être modélisée à partir de cet indice $I(t)$ en ajoutant une survolatilité et un éventuel mécanisme de retour à la moyenne.
- Dans le modèle actuellement utilisé, l'inflation conditionnelle est calculée en AOA² (Equation (1)). Cela correspond donc à une situation de probabilité risque neutre, liée aux anticipations du marché.

Pour remédier à cette situation, nous allons, dans l'approche alternative, implémenter une dépendance directe de l'inflation conditionnelle à son historique réalisé en $t = 1$ an. Cela reviendrait à calculer l'inflation conditionnelle par espérance conditionnelle. $E[I(t) | M_1]$ où :

- $I(t)$ est le taux d'inflation annuel en t
- E est l'espérance sous la probabilité monde-réel
- M_1 modélise les conditions de marché à $t = 1$ an.

Ce calcul diffère structurellement de la situation de non-arbitrage et dans les scénarios actuels de Groupama, cela reviendra à calculer :

$$E[I(t) | n(1), r(1)]$$

² AOA : Absence d'opportunité d'arbitrage

$$= E \left[\exp \left(n(t-1) - \frac{1}{2(r(t-1) + r(t))} \right) - 1 \mid n(1), r(1) \right]$$

Voici les différents modèles utilisés dans le calibrage actuel de l'inflation économique par Groupama :

3.1.2.1. Modèle des taux nominaux

Le modèle des taux nominaux fait partie de la famille des modèles de taux court c'est-à-dire le modèle est calibré sur le taux sans risque sur une période infinitésimale. Cette modélisation des taux courts est faite à l'aide du modèle de Black Karasinski³ à 2 facteurs avec un drift.

Il s'agit d'un modèle en absence d'opportunité d'arbitrage qui génère des distributions non stationnaires prenant en compte des taux négatifs.

Son équation de diffusion est :

$$d \log(rt) = a(\mu - \log(rt))dt + \sigma dW_t$$

Cette équation différentielle stochastique peut être résolue de la même façon que l'équation différentielle stochastique du modèle de Vasicek à un facteur que nous allons décrire plus loin :

$$\log(r_u) = (\log(rt) - \mu)e^{-a(u-t)} + \mu + \sigma e^{-au} \int_t^u e^{az} dW_z$$

Le logarithme du taux court r_u suit une loi normale, donc le taux court suit une loi lognormale. De la même manière que dans le cadre du modèle de Vasicek, l'espérance et la variance du taux court qui caractérisent sa distribution peuvent donc être calculés.

De plus, le modèle de Black-Karasinski à un facteur peut être étendu avec l'ajout d'autres facteurs. En particulier, le modèle de Black-Karasinski à deux facteurs permet une plus grande souplesse dans la modélisation grâce à l'ajout du taux long.

L'équation de diffusion du modèle de Black-Karasinski à deux facteurs est :

$$\begin{cases} d \log(rt) = a_1(\log(mt) - \log(rt))dt + \sigma_1 dW_t^1 \\ d \log(mt) = a_2(\mu - \log(mt))dt + \sigma_2 dW_t^2 \end{cases}$$

Pour avoir une diffusion de l'inflation avec une convergence vers une valeur cible, il est crucial que les paramètres a_1 et a_2 de la formule ci-dessus puissent être positifs.

En l'appliquant sur nos données, le modèle Black-Karasinski à 2 facteurs avec un coefficient de déplacement s'écrit :

$$\begin{cases} d \log(n(t) + \delta) = \alpha_1(\log m(t) - \log(n(t) + \delta)) + \sigma_1 dZ_t^1 \\ d \log m(t) = \alpha_2(\mu(t) - \log m(t)) + \sigma_2 dZ_t^2 \end{cases}$$

Avec :

$n(t)$: Taux nominal

³ « Bond and option pricing when short rates are lognormal », Fisher Black et Piotr Karasinski en 1991

α_1 et α_2 : Vitesses de retour à la moyenne

$m(t)$: Processus de moyenne long-terme

$\mu(t)$: Moyenne asymptotique (déterministe)

δ : Coefficient de déplacement ou shift

σ_1 et σ_2 : Volatilités

$(Z_t^1)_{t \geq 0}$ et $(Z_t^2)_{t \geq 0}$: Mouvements Browniens corrélés selon $d\langle Z^1, Z^2 \rangle_t = \rho_{12} dt$.

3.1.2.2. Modèle de taux réels

Le modèle de taux réels est également un modèle qui raisonne sur le taux court mais il s'agit ici du taux court réel, c'est-à-dire le taux sans risque corrigé de l'inflation. Le taux court est ici modélisé via un modèle de Hull-White qui est un modèle stationnaire, i.e. l'éventail des valeurs possibles reste constant avec le temps. Cela est permis par un mécanisme de retour à la moyenne : le taux court ne peut pas trop s'éloigner de sa moyenne long-terme qui peut évoluer dans le temps mais est déterministe. Le modèle autorise également le taux court à prendre des valeurs négatives.

Le modèle de Hull & White s'écrit :

$$dr(t) = \kappa(\theta(t) - r(t)) + \sigma dW_t$$

Avec :

$r(t)$: Taux réel

κ : Vitesse de retour à la moyenne

$\theta(t)$: Moyenne long-terme (déterministe)

σ : Volatilité

$(W_t)_{t \geq 0}$: Mouvement Brownien tel que $d\langle W, Z^1 \rangle_t = \rho_1 dt$ et $d\langle W, Z^2 \rangle_t = \rho_2 dt$.

Des cibles sont ajoutées dans ces deux modèles pour que la distribution des taux nominaux et réels soit conforme à des prédictions économiques effectuées par Moody's Analytics. Ces cibles ne sont pas connues.

Dans ce contexte, l'espérance du taux d'inflation annuel $I(t)$ est infinie. En effet, si on considère deux variables aléatoires normales centrées réduites (G_1, G_2) de corrélation ρ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(e^{G_1} + G_2)] &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp(e^x + y) \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right) dx dy \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc une certaine limite du modèle actuel :

- L'incapacité de calculer la diffusion de l'inflation de façon déterministe, comme une espérance conditionnelle à la première année

- Il y a également une grande sensibilité à la graine aléatoire et au nombre des scénarios générés, rendant ainsi l'espérance empirique de la première année des simulations non bornée.
- Il y a donc une grande complexité de validation de ces scénarios puisque la connaissance de la moyenne réelle n'est pas réalisable.

Tout cet éventail d'incompatibilités avec une situation monde réel sera pris en compte dans notre travail avec des méthodes alternatives, avec un calcul par espérance conditionnelle de la diffusion de l'inflation, comme ça sera le cas pour les modèles autorégressifs à changement des régimes et le modèle de Vasicek que nous allons voir par la suite.

3.2. Analyse descriptive

		IPC	B&H 1an
Variations annuelles	Moyenne	1,60%	2,57%
	Ecart-type	1,00%	0,60%
	IC 99,5%	[0,65%,1,34%]	[0,59%,0,62%]
	Max	5,22%	4,80%
	Min	0,04%	0,38%
	Skewness	1,21659758	0,01768653
	Kurtosis	6,37116851	3,00709633

Nous observons un grand décalage entre les scénarios du modèle actuel et l'historique des observations. Le modèle actuel sous-estime la volatilité observée dans l'économie, avec une mauvaise réplcation des quantiles de l'environnement économique français. De plus, une grande partie des quantiles historiques n'y est pas répliquée.

3.3. Dynamique de projection

Nous allons par la suite comparer les scénarios générés par le modèle actuel, à sa première année, à sa projection en $t=30$ ans.

3.3.1. Projection à $t = 1$

Les scénarios de la première année sont stochastiques et leurs paramètres de modélisation se basent sur les fluctuations observées sur le marché. Seuls ces scénarios seront pris en compte dans la simulation des différents résultats techniques des lignes d'activités de la compagnie. En revanche, en guise de validation, il nous est nécessaire d'observer leur comportement au cours du temps et de vérifier leur cohérence avec les objectifs économiques fixées. L'objectif premier de la diffusion de l'inflation économique est de se conformer à celui de la BCE (Banque Centrale Européenne), d'avoir une inflation convergente vers 2%.

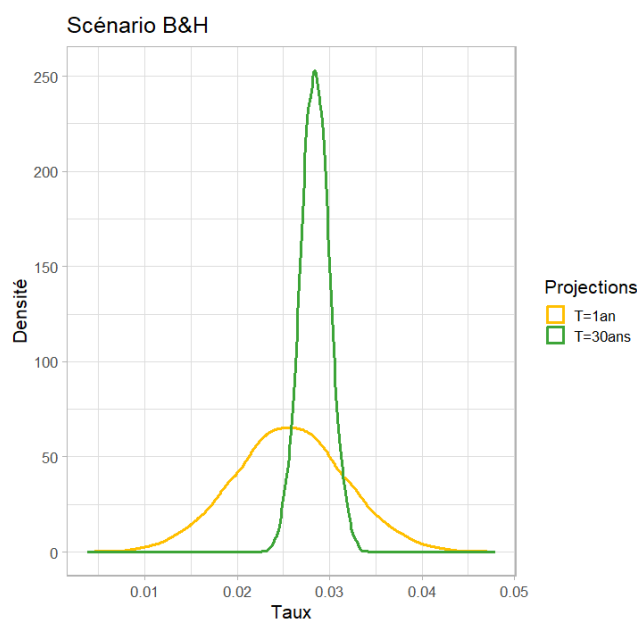


Figure 28 Scénarios $t=1\text{an}$ vs $t=30\text{ans}$

Sur le graphique ci-dessus, on remarque que les densités des projections des scénarios d'inflation sont plutôt gaussiennes, avec un grand nombre d'observations proches de 2,5% pour $t=30\text{ans}$, sans pour autant atteindre la moyenne long terme de 2%. A $t=1\text{an}$, les observations sont beaucoup plus adverses. Ce qui traduit pleinement une convergence.

3.3.2. Diffusion à $t > 1\text{an}$

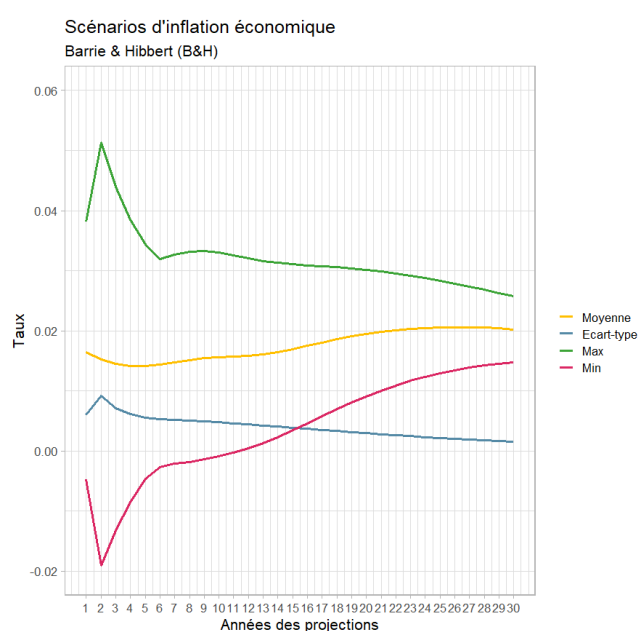


Figure 29 : Diffusion du EGS de l'inflation spécifique en 2021

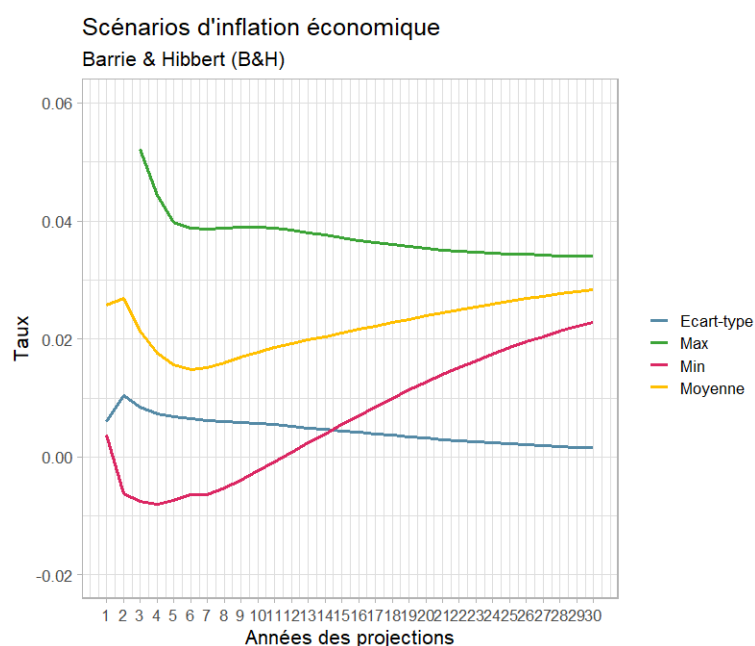


Figure 10 : Diffusion du EGS de l'inflation spécifique en 2022

Les premiers éléments mis en avant, dans les graphiques ci-dessus, sont les volatilités de l'inflation conditionnelle convergeant bien vers 0, ce qui est cohérent. Ensuite, il y a la variation dans la diffusion deux années, notamment par la prise en compte des différentes crises (géopolitique et énergétique). L'objectif d'inflation à long terme se rapproche de 2 %, cet objectif ne sera pas atteint en court terme. Nous supposons une installation de l'inflation dans

la durée, avec des effets plus ou moins variables selon les secteurs d'activités et un impact plus conséquent en assurance non-vie.

Les données recueillies avec le générateur des scénarios économiques serviront à la validation de la cohérence de ce dernier, selon les prévisions des économistes.

Il faut retenir que les scénarios de la diffusion, c'est-à-dire ceux pour lesquels t est supérieur à 1 an, ne seront pas utilisés dans Modèle interne du fait qu'en assurance non-vie, le risque est évalué sur un horizon d'un an.

3.4. Mesure d'impact sur le risque de primes

Nous présenterons ici les résultats techniques au niveau des risques de primes des LoBs dont la matérialité est plus importante (MTPL et FIRE), en utilisant le modèle actuel de modélisation de l'inflation économique (Barrie et Hibbert).

Ces résultats seront divisés dans des mailles plus fines qui constituent ces LoBs, à l'occurrence les entités du groupe (les caisses régionales et Gan), le réassureur interne (GSA), mais également sur une vision globale pour avoir l'impact général que subit la LoB.

Voici les résultats avec la méthode de Barrie et Hibbert (B&H):

Résultats 2022 :

Analyse de l'inflation économique			
LOB MTPL: RT en M€			
	Quantile 1/200 hors sur-inflation	Quantile 1/200 B&H	Ecart
CR	-148,79	-166,44	11,86%
GAN	-73,91	-80,16	8,45%
GMA	-132,16	-154,17	16,66%
GROUPE	-361,94	-415,94	14,92%

Analyse de l'inflation économique			
LOB FIRE: RT en M€			
	Quantile 1/200 hors sur-inflation	Quantile 1/200 B&H	Ecart
CR	-319,96	-321,42	0,46%
GAN	-184,46	-184,59	0,07%
GMA	-380,39	-378,86	-0,40%
GROUPE	-830,25	-830,78	0,06%

Les lignes hors sur-inflation contiennent les résultats techniques où seule l'inflation utilisée dans la mise en as-if de la sinistralité grave est utilisé. C'est une projection moyenne qui devra par la suite être remplacée par le taux d'inflation réalisé. En fonction de la différence de grandeur de ces taux remplacés, l'évolution des résultats techniques sera impactée, nous l'aborderons dans la modélisation de l'inflation spécifique. Nous observons un grand besoin en capital au niveau des LoBs MTPL et FIRE qui contiennent principalement des sinistres à très forts coûts. La sur-inflation modélisée avec la méthode de B&H augment les résultats techniques dans l'ensemble.

3.5. Avantages et inconvénients du modèle

Nous dresserons une liste des avantages et inconvénients de l'usage de chacune des méthodes testées, en commençant par la méthode de Barrie et Hibbert qui est celle actuellement utilisée dans le modèle interne partiel de Groupama.

Avantages

- Le modèle de Barrie & Hibbert est très répandu auprès des assureurs, ce qui fait de lui un des modèles de référence.
- Les cibles dans les modèles permettent d'introduire un jugement d'expert sur les évolutions des scénarios proches des quantités économiques.

Inconvénients

- Le calcul de l'inflation comme une différence entre les taux nominaux et réels génère une inflation implicite pouvant être différente de celle réalisée. Ce qui ne correspond pas à une vision monde réel.
- Le raisonnement sur les taux courts non facilement observables sur le marché, comme c'est le cas avec le modèle actuel, ne permet pas d'avoir une comparaison de ces taux courts simulés avec ceux historiques.
- Le calibrage actuel a montré une certaine lacune dans ses simulations, avec des taux moins élevés que ceux observés au courant de l'année 2022. De plus, on a observé une certaine faiblesse de la volatilité des taux annuels par rapport à celle de l'historique.
- La sensibilité à la graine aléatoire et au nombre de scénarios, comme nous l'avions dit plus haut sont également des facteurs à prendre en compte dans la mise en place de ce modèle.

3.6. Limites de l'étude actuelle

Groupama implémente l'inflation par le modèle de Barrie et Hibbert comme une différence entre les taux nominaux et réels. Cette procédure équivaut à une inflation implicite et non pas à une inflation réalisée. Cette inflation anticipée ne traduit pas la réalité économique et peut créer un biais dans la prise en compte de l'inflation dans le modèle. En termes de matérialisation, nous avons observé ces phénomènes dans les mesures de dispersion des simulations de la première année de projection. En fin d'année 2021 et malgré l'impact de la crise sanitaire et des chocs générés par la relance de l'économie mondiale, la dynamique des scénarios d'inflation économique du modèle actuel présentait un maximum de taux à 5,13% et une volatilité de 1,61% qui étaient au deçà du 6,1% observé en France en juillet 2022. Le modèle, tel qu'il a été implémenté, sous-estime donc l'inflation réellement constatée, d'où la nécessité de mettre en place des méthodes alternatives.

Chapitre IV : Approches alternatives au modèle de B&H

Nous rappelons que l'objectif de ces travaux est de challenger le modèle actuel utilisé par Groupama avec d'autres modèles de taux, et sur une vision monde réel, dans le but de juger de son efficacité et de savoir si un modèle alternatif améliore les résultats de calibration.

4.1. Modèle d'équilibre

Les modèles d'équilibre sont ceux adaptés aux projections long terme, en incluant un processus de retour vers la moyenne c'est-à-dire que les périodes des forts taux se succèdent par celles aux taux bas où le taux tend vers la moyenne de ses facteurs dans le temps, avec l'utilisation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dans la modélisation des diffusions longs termes.

Le modèle se présente comme suit :

$$di_t = \alpha(\mu - i_t)dt + \sigma i_t^\theta dW_t$$

En fonction de la valeur de θ , on a :

- $\theta = 0$: Modèle de Vasicek qui est un modèle d'équilibre partiel)
- $\theta = \frac{1}{2}$: Modèle de Cox, Ross et Ingersoll (CIR), un modèle d'équilibre général

Puisque le modèle de Cox, Ross et Ingersoll ne prend pas en compte les taux négatifs, nous nous limiterons au modèle de Vasicek pour avoir une vision globale des variations probables.

4.1.1. Modèle d'équilibre partiel : Vasicek à 1 facteur

4.1.1.1. Description de l'approche

Le modèle de Vasicek est un processus stochastique de modélisation des taux. Il décrit le mouvement des taux comme résultant d'une seule source de risque.

C'est un modèle qui permet la prédiction des taux de fin de période, en tenant compte de la volatilité environnante, de la moyenne des taux long terme et des facteurs risque de marché.

Le mouvement des taux est affecté d'une part, par le facteur de dérive $\alpha(\mu - i_t)$ qui produit un effet à la hausse lorsque la différence est positive et d'autre part, par un processus stochastique appelé « processus de Weiner » aussi appelé mouvement brownien. En l'absence de chocs de marché, le taux d'inflation reste constant. Ce modèle permet également de simuler des taux négatifs.

L'approche mathématique du modèle de Vasicek à 1 facteur est :

$$di_t = \alpha(\mu - i_t)dt + \sigma dW_t$$

Ce processus de retour à la moyenne a beaucoup de sens pour modéliser l'inflation du fait de l'interprétabilité de ses paramètres :

- i_t : inflation au temps t
- μ : la moyenne à long terme de l'inflation. Ce paramètre peut intégrer l'opinion d'experts dans l'inflation anticipée. Nous l'avons fixé à 2% pour refléter l'objectif de la BCE.
- α : vitesse de retour à la moyenne du processus
- σ : volatilité du mouvement brownien

Pour pouvoir utiliser ce modèle, il est nécessaire d'en préciser la discrétisation :

$$\begin{cases} dX_t = \alpha(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t, \\ X_0 = x \end{cases}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*$$

Par le calcul d'Îto, le système d'équation précédent devient :

$$X_t = x + \int_0^t \alpha(X_s, s)ds + \sigma \int_0^t (X_s, s)dW_s$$

Pour procéder au calcul, nous définissons un processus d'actualisation de carré intégrable : $Y_t = f(t, X_t) = X_t e^{\alpha t}$

Dans le cas de l'équation différentielle de Vasicek, nous aurons :

$$\begin{aligned} di_t &= \alpha(i_t, t)dt + \sigma(i_t, t)dW_t \\ &= \alpha(\mu - i_t)dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

Tel que $Y_t = f(t, i_t) = i_t e^{\alpha t}$

En appliquant la formule d'Îto,

$$\begin{aligned} df(t, i_t) &= \delta_t f(t, i_t)dt + \delta_i f(t, i_t)di_t + \frac{1}{2} \delta_i^2 f(t, i_t)(di_t)^2 \\ &= \alpha i_t e^{\alpha t} dt + e^{\alpha t} di_t \\ &= \alpha i_t e^{\alpha t} dt + e^{\alpha t} (\alpha(i_t, t)dt + \sigma(i_t, t)dW_t) \\ &= \alpha e^{\alpha t} dt + \sigma e^{\alpha t} dW_t \\ \int_0^t df(t, i_t) &= \int_0^t \alpha e^{\alpha s} ds + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \\ i_t e^{\alpha t} - i_0 e^{0t} &= e^{\alpha t} - 1 + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \\ i_t &= i_0 e^{-\alpha t} + 1 - e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{\alpha(s-t)} dW_s \\ E[i_t] &= i_0 e^{-\alpha t} + 1 - e^{-\alpha t} \\ Var[i_t] &= E[i_t^2] - E[i_t]^2 \\ &= E\left[\left(\int_0^t e^{\alpha(s-t)} dW_s\right)^2\right] \end{aligned}$$

Par isométrie d'Îto,

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^t e^{\alpha(s-t)} dW_s\right)^2\right] &= E\left[\int_0^t |e^{\alpha(s-t)}|^2 dW_s\right] \\ &= \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha} \end{aligned}$$

- $\alpha = \mu(1 - \exp(-\alpha))$
- $b = \exp(-\alpha)$
- $\varepsilon_t = W_t \sigma_i \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\alpha t)}{2\alpha}}$

Alors,

$$i_{t+1} = \mu(1 - \exp(-\alpha)) + \exp(-\alpha)i_t + W_t \sigma_i \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\alpha t)}{2\alpha}}$$

Ce qui correspond à l'équation d'un modèle autorégressif d'ordre 1.

4.1.1.2. Analyse descriptive

		IPC	B&H 1an	Vasicek 1an
Variations annuelles	Moyenne	1,60%	2,57%	3,60%
	Ecart-type	1,00%	0,60%	1,26%
	IC 99,5%	[0,65%;1,34%]	[0,59%;0,62%]	[1,23%;1,3%]
	Max	5,22%	4,80%	8,29%
	Min	0,04%	0,38%	-0,93%
	Skewness	1,216597581	0,017686528	-0,080781824
	Kurtosis	6,371168508	3,007096326	2,992390809

	IPC	B_H 1an	Vasicek 1an
Quantile 99,5%	4,91%	4,14%	6,68%

Une comparaison des statistiques descriptives de la première année de simulation est faite entre les scénarios générés, le modèle actuel et l'historique de l'indice CPI observée en France.

Le modèle de Vasicek est plus adverse que le modèle actuel c'est-à-dire qu'il contient une volatilité de l'inflation plus élevée. Son quantile 99,5% environne les 7%, ce qui traduit une capture des situations de forte inflation bien au-delà de ce qui a été observé depuis 1990.

4.1.1.3. Tests de validation des hypothèses de régression linéaires

Les paramètres du modèle de Vasicek proviennent d'une régression linéaire entre l'ensemble de l'historique disponible en t de l'indice économique et son décalage en t-1.

Les hypothèses de régression sur les résidus sont vérifiées sur le tableau ci-dessous :

Tets de validation des hypothèses de régression		
Tests	Résultats	Interprétations
R2	92%	Le pouvoir explicatif du modèle est de 92%
Test de Fisher	p-value < 2,2e-16	Le modèle est significatif
Kolmogorov Smirnov	p-value = 0,213	Les résidus sont gaussiens
ARCH(1)	p-value= 0,454	Homoscédasticité des résidus vérifié
Breusch-Godfrey	p-value = 0,006	Autocorrélation des résidus vérifiée

4.1.1.4. Dynamique de projection

A titre de rappel, en assurance Non-vie, la simulation des taux n'est stochastique qu'à la première année. Par conséquent, la diffusion de ces derniers se fait de façon déterministe et le moyen d'y procéder est d'effectuer une espérance des variations $i_{t+\Delta t}$. Pour le modèle de Vasicek, cela revient de à effectuer une espérance d'un modèle AR(1).

La dynamique de projection de l'espérance de cette expression :

$$i_{t+1} = a + bi_t + \varepsilon_t$$

$$E[i_{t+1}] = E[a + bi_t + \varepsilon_t]$$

En supposant $E[i_0] = i_0$ car déterministe,

$$E[i_{t+1}] = a + b E[i_t]$$

Or, $E[i_t] = b^j i_0 + a \sum_{j=0}^{t-1} b^j$, on a alors par changement des variables :

$$E[i_{t+1}] = a + b^{t+1} i_0 + a \sum_{j=0}^{t-1} b^{j+1} = b^{t+1} i_0 + a \sum_{j=0}^t b^j$$

$\sum_{j=0}^t b^j$ correspond à la somme d'une suite géométrique. De ce fait,

$$E[i_{t+1}] = b^{t+1} i_0 + a \frac{1-b^{t+1}}{1-b}, \text{ avec } b \neq 1$$

$$\begin{aligned} b^{t+1} i_0 + a \frac{1-b^{t+1}}{1-b} &= \exp(-\alpha)^{t+1} i_0 + \mu(1 - \exp(-\alpha)) \frac{1 - \exp(-\alpha)^{t+1}}{1 - \exp(-\alpha)} \\ &= \exp(-\alpha)^{t+1} i_0 + \mu(1 - \exp(-\alpha)^{t+1}) \end{aligned}$$

Lorsque t converge vers l'infini, la dynamique de l'inflation convergera vers μ qui est la moyenne long terme (2% pour notre cas).

4.1.1.5. Densité des projections à $t = 1$ et $t = 30$ ans

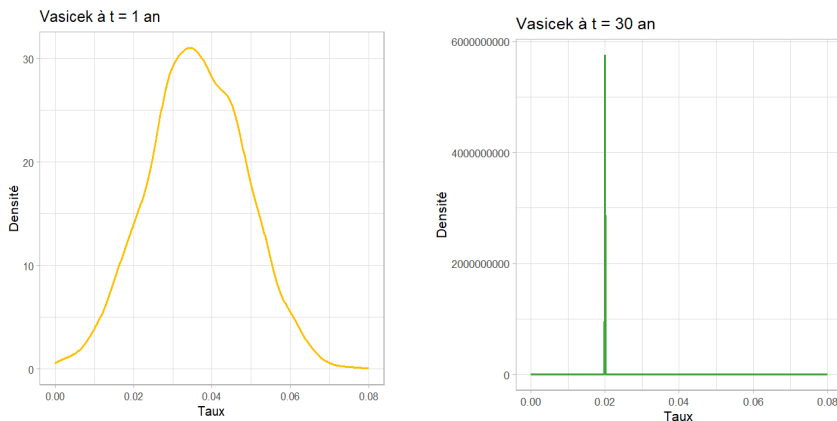


Figure 11 Comparaison des densités de projections

4.1.1.6. Comparaison des scénarios d'inflation

En comparant les graphiques ci-dessous, la différence entre les deux modèles est que la méthode de Vasicek couvre un intervalle de variation de l'inflation plus large à la première année par rapport à la méthode de B&H, mais cela ne s'installe pas dans la durée puisque cette dernière converge rapidement vers la valeur cible.

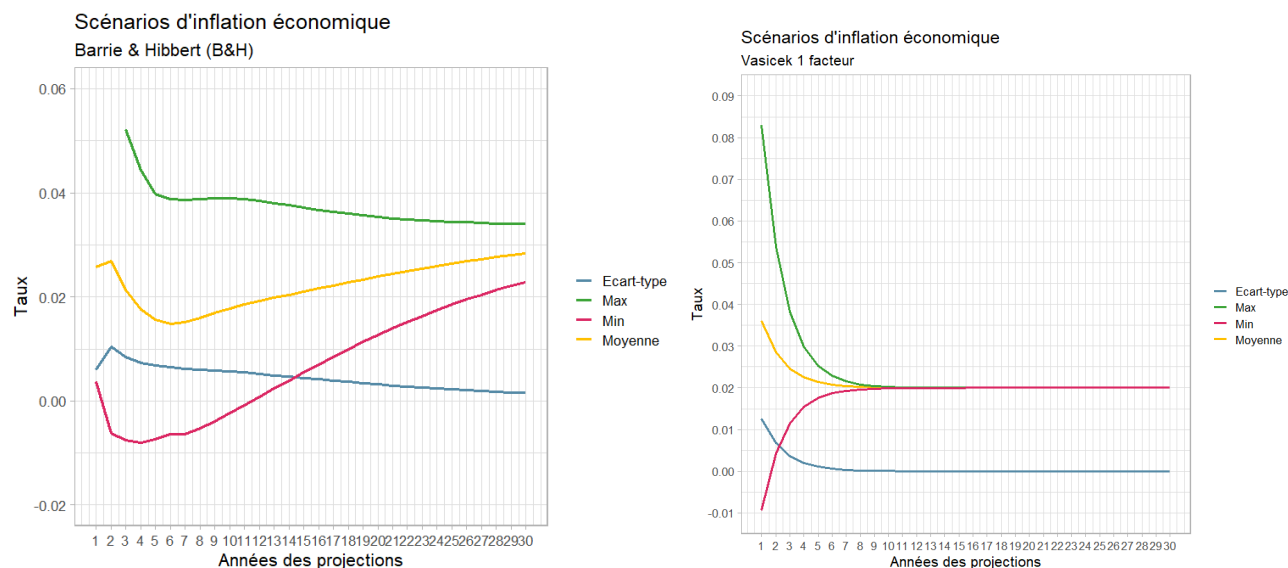


Figure 12 Comparaison des diffusions de l'inflation

4.1.2. Mesure d'impact sur le risque des primes

Comme pour la méthode de B&H, une mesure d'impact est faite au niveau des risques de primes des LoBs MTPL et FIRE :

Analyse de l'inflation économique			
LOB MTPL: RT en M€			
	Quantile 1/200 hors sur-inflation	Quantile 1/200 Vasicek	Ecart
CR	-148,79	-168,70	13,38%
GAN	-73,91	-80,64	9,10%
GMA	-132,16	-158,89	20,23%
GROUPE	-361,94	-422,93	16,85%

Analyse de l'inflation économique			
LOB FIRE: RT en M€			
	Quantile 1/200 hors sur-inflation	Quantile 1/200 Vasicek	Ecart
CR	-319,96	-321,10	0,36%
GAN	-184,46	-184,55	0,05%
GMA	-380,39	-380,60	0,06%
GROUPE	-830,25	-830,76	0,06%

Par comparaison au modèle actuel, la modélisation de l'inflation avec Vasicek a des résultats plus faibles car nous constatons une baisse des résultats techniques. Ce phénomène est lié à la grande vitesse de retour vers la moyenne qui y est très élevée.

4.1.3. Avantages et inconvénients

Avantages

- Le modèle est basé directement sur l'indice d'inflation économique
- C'est un modèle qui est plus facile à calibrer car il n'a pas besoin de beaucoup des paramètres

- La distribution est connue et facile à être modélisée, avec des formules explicites.
- De plus, il tient compte de la structure temporelle des taux c'est-à-dire que les taux sont différents dans le temps.

Inconvénients

- Une convergence rapide en moyen terme vers la cible de 2% par rapport au modèle actuel de Groupama
- Le modèle présente aussi certaines limites telles que la présence d'autocorrélations entre les résidus.
- Il présente également une capacité faible dans la reconstitution, par les simulations, de la courbe des taux initiale.

4.2. Modèle d'auto-régression à changement des régimes

4.2.1. Description de l'approche

Le modèle autorégressif est un modèle approprié pour obtenir une réplcation fiable de l'historique de l'inflation en France, même antérieur à 1990. Pour capter les différentes variations des scénarios d'inflation, l'interaction entre régimes hauts et bas de l'inflation peut être implémentée dans le modèle à l'aide d'une chaîne de Markov.

En utilisant le maximum de vraisemblance sur le modèle AR(1) de l'historique des taux annuels d'inflation, les paramètres des scénarios 1 an sont les suivants :

	Paramètres	Valeurs
Modèle Autorégressif à changement des régimes	μ_1	1,75%
	μ_2	7,92%
	α	71,32%
	σ_1	0,76%
	σ_2	4,01%
	$p_{1,1}$	97,65%
	$p_{2,2}$	44,80%

Figure 13 Paramètres du modèle autorégressif à changement des régimes

Ces distributions du modèle AR(1) à changement de régime d'inflation est un compromis entre les données historiques depuis 1945, plus adverse et celles à partir de 1990 beaucoup moins volatiles. Elle permet d'anticiper les variations extrêmes d'inflation que ce soit à la hausse tout comme à la baisse.

La probabilité d'être au régime 1 à la première simulation provient de la distribution stationnaire de Markov.

Après avoir calibré les paramètres du modèle par maximum de vraisemblance, les probabilités de la matrice de transition sont par la suite calibrées avec une formule fermée de telle sorte que la cible soit égale à 2%.

Cela génère comme spécificités :

- Le régime d'inflation actuel est modélisé par une chaîne de Markov homogène (X_t) à deux états et de matrice de transition M :

$$M = \begin{pmatrix} p_{1,1} & 1 - p_{1,1} \\ 1 - p_{2,2} & p_{2,2} \end{pmatrix}$$

La probabilité d'être dans l'état 1 est p_1 et celle dans l'état 2 est p_2 .

- L'état de la chaîne (X_t) influe sur les paramètres de la tendance et de la volatilité de l'inflation. Avec le modèle autorégressif, ce modèle à deux régimes se présente comme ceci :

$$C_{t+1} = \begin{cases} \mu_1 + \alpha(C_t - \mu_1) + \sigma_1 \epsilon_{t+1} & \text{si } X_{t+1} = 1 \\ \mu_2 + \alpha(C_t - \mu_2) + \sigma_2 \epsilon_{t+1} & \text{si } X_{t+1} = 2 \end{cases}$$

Avec $(\epsilon_t)_{t \geq 0}$ des bruits blancs gaussiens centrés réduits.

La vitesse de retour à la moyenne est la même dans les deux régimes à cause du faible nombre des données.

Voici à quoi correspondent les paramètres du modèle :

- μ_1, μ_2 : Moyennes long terme des régimes 1 et 2 de l'inflation
- α : Vitesse de retour à la moyenne
- σ_1, σ_2 : Volatilité des différents états d'inflation
- $p_{1,1}, p_{2,2}$: Probabilité liées à chacun des états

4.2.2. Dynamique de projection

En réécrivant le modèle C_{t+1} , nous avons :

$$C_{t+1} = \mu_{X_{t+1}} + \alpha(C_t - \mu_{X_{t+1}}) + \sigma_{X_{t+1}} \epsilon_{t+1}$$

La diffusion de l'inflation se calcule comme une espérance conditionnelle aux scénarios de la première année et à l'état de la chaîne de Markov.

Pour chaque année n , différente de la première, l'inflation est donnée par :

$$\mathbb{E}[C_n \mid C_1 = i_1, X_1 = x_1] = \sum_{(x_2, \dots, x_n) \in \{1,2\}^{n-1}} E[C_n \mathbf{1}_{\{X_2=x_2, \dots, X_n=x_n\}} \mid C_1 = i_1, X_1 = x_1]$$

Pour $n \in \{2, \dots, 30\}$

Pour un scénario $\{X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}$

Tel que

$$(x_2, \dots, x_n) \in \{1,2\}^{n-1},$$

L'inflation C_n s'exprime en fonction de C_1 , inflation à l'année 1, de la manière suivante :

$$C_n = \mu_{x_n} + \alpha^{n-1}(C_1 - \mu_{x_2}) + \sum_{i=1}^{n-2} \alpha^i (\mu_{x_{n-i}} - \mu_{x_{n-i+1}}) + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha^i \sigma_{x_{n-i}} \epsilon_{n-i}$$

$$= \sum_{i=2}^n \alpha^{n-i}(1-\alpha)\mu_{x_i} + \alpha^{n-1}C_1 + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha^i \sigma_{x_{n-i}} \epsilon_{n-i}$$

$\epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ sont gaussiens centrés et réduits et donc leur espérance est nulle.

Et en fonction de la succession d'état de la matrice de passage M , cette espérance devient :

$$\mathbb{E}[C_n | C_1 = i_1, X_1 = x_1] = \sum_{i=2}^n \alpha^{n-i}(1-\alpha)(M^{i-1}\mu)(x_1) + \alpha^{n-1}i_1$$

Par rapport au modèle actuel, le modèle à changement de régime permet de couvrir un intervalle plus étendu de scénario d'inflation, comme c'est le cas dans les graphiques ci-dessus.

Par ailleurs, avec la hausse de l'inflation observée en 2022, le modèle de changement des régimes capture correctement ces fluctuations extrêmes dans ses simulations. Et avec le mécanisme de retour à la moyenne cette adversité du modèle s'atténue au bout de 17 années de projection.

4.2.3. Analyse descriptive

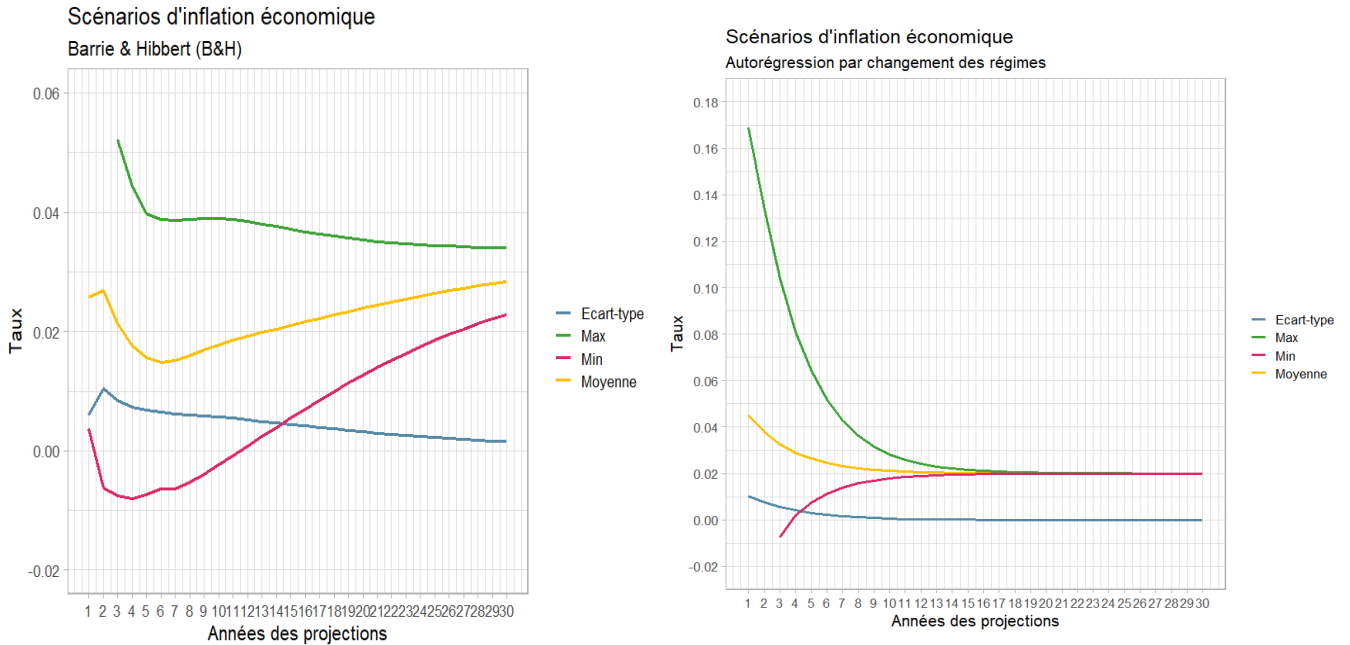


Figure 14 Dynamique de projection régime switching 2022

Le modèle de B&H capte des scénarios d'inflation dans un intervalle débutant un peu plus au-dessus de 0 à environ 5%, avec une moyenne se situant aux environs de 3%. Contrairement à ce modèle, l'autorégressif à changement des régimes testé, permet de capturer des scénarios jusqu'à plus de 16%, avec une moyenne globale de plus de 4%.

Au regard des observations de variation d'inflation de 2022, mais aussi des phénomènes d'extrêmes inflations des années antérieures à 1990, le processus de changement de régime capture au mieux les situations de fort taux.

En revanche, avec une cible fixée à 2%, le modèle autorégressif prévoit un retour vers cette valeur vers la 17 années contrairement au modèle de B&H qui ne l'atteint pas.

		IPC	B&H 1an	Vasicek 1an	AR 1an
Variations annuelles	Moyenne	1,60%	2,57%	3,60%	4,51%
	Ecart-type	1,00%	0,60%	1,26%	1,02%
	IC 99,5%	[0,65%;1,34%]	[0,59%;0,62%]	[1,23%;1,3%]	[1%;1,05%]
	Max	5,22%	4,80%	8,29%	16,90%
	Min	0,04%	0,38%	-0,93%	-4,99%
	Skewness	1,216597581	0,017686528	-0,080781824	1,59598707
	Kurtosis	6,371168508	3,007096326	2,992390809	26,3577088

	IPC	RS_1an	B_H_1an	Vasicek_1an
Quantile 99,5%	4,91%	9,82%	4,14%	6,68%

Dans l'analyse statistique des différents modèles utilisés, comparée à celle du modèle actuel et à l'historique de l'inflation économique, nous constatons que les modèles de Vasicek et l'autorégressif à changement de régime sont les plus adverses et cela malgré l'ajout d'une cible de projection. Cependant, les écart-types de ces derniers sont proches de celui de l'historique.

Projection à $t = 1$

Le modèle génère des scénarios plus volatiles que le modèle actuellement utilisé par Groupama. En spécifique, les pics inflationnistes observés ces deux dernières années restent inférieurs au quantile à 99,5 % du scénario de changement de régime, ce qui n'est pas le cas dans le scénario actuel.

Diffusion à $t=30$ an

Les volatilités des projections des scénarios d'inflation, dans l'approche actuelle, est fortement influencée par les scénarios de la première année. Comparée au modèle de changement des régimes, la volatilité du modèle actuel est moins importante à la première année, par contre, à la trentième année, les phénomènes s'inversent et les scénarios du modèle à changement des régimes deviennent moins adverses que ceux du modèle actuel. Cela s'explique par le fait que le modèle AR a une espérance finie, contrairement au modèle actuel, dont la valeur équivaut à la cible fixée.

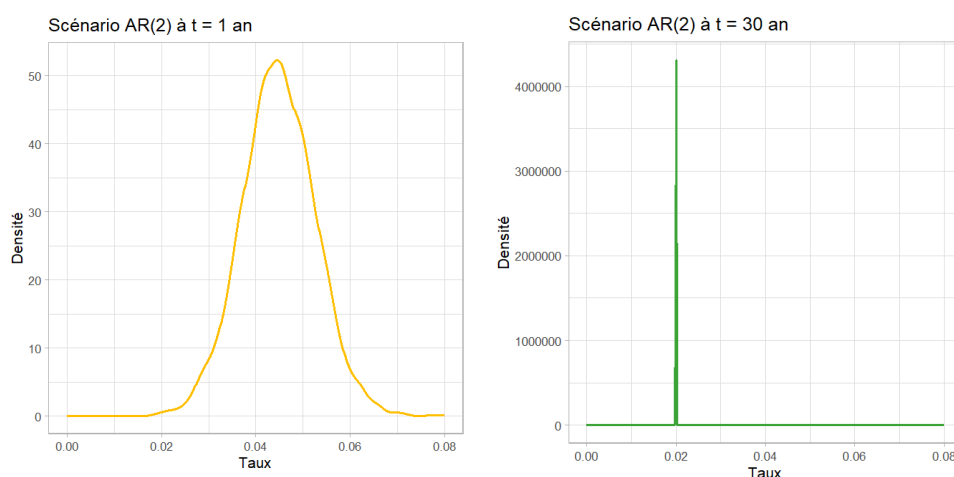


Figure 15 Comparaison des densités à $t = 1$ an et $t=30$ ans

Le graphique de gauche correspond aux scénarios 30 ans du modèle de B&H, actuellement utilisé par Groupama. Il y est clair que la volatilité long terme est une anticipation de la réalisation du marché observée à la première année. Cependant, à droite, les scénarios sont indépendants de cette réalisation.

4.2.4. Mesure d'impacts sur les résultats techniques

Analyse de l'inflation économique			
LOB MTPL: RT en M€			
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 AR	Ecart
CR	-166,44	-167,68	0,75%
GAN	-80,16	-80,12	-0,05%
GMA	-154,17	-154,83	0,43%
GROUPE	-415,94	-418,43	0,60%

Analyse de l'inflation économique			
LOB FIRE: RT en M€			
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 AR	Ecart
CR	-321,42	-322,45	0,32%
GAN	-184,59	-185,19	0,32%
GMA	-378,86	-380,99	0,56%
GROUPE	-830,78	-831,65	0,10%

Malgré des scénarios plus adverses à horizon 1 an, l'impact en termes de résultat technique du modèle à changement de régime reste limité et conforte ceux du modèle de B&H.

4.2.5. Avantages et inconvénients

Avantages

- Ce modèle est capable d'expliquer les observations historiques des taux d'inflation antérieurs aux années 1990. Le taux d'inflation de la France dans les années 1970 était d'environ 10 %. Du coup, avec le modèle de haut régime, toutes ces observations interviennent de manière cohérente dans le calibrage du modèle, ce qui n'est pas le cas pour les autres modèles.
- Il offre la possibilité d'inclure un objectif moyen long terme de l'inflation, en l'occurrence les 2% proposés par la Banque centrale Européenne. Par cette cible, les scénarios plus volatiles générés par le modèle se modère pour se conformer à la réalité. Le taux de 4,5 % observé en mars 2022 ou encore celui de 6,3% observé en février 2023 se situent parmi valeurs simulées à t=1an malgré le fait qu'ils soient très extrêmes. Alors, l'inflation conditionnelle compense ces observations avec le mécanisme de retour à la moyenne.
- C'est un modèle qui prend en entrée les taux d'inflation, ce qui lui donne la possibilité d'être directement modélisé sur les indices des prix à la consommation de la France qui est une inflation réalisée et non pas une inflation implicite. Et donc, nous pourrions y voir une approximation de l'inflation utilisée sur les paiements des sinistres.

- Les résultats de ce modèle se justifient économiquement. Ils mettent en évidence le retour des taux d'inflation extrêmes avec potentiellement le risque de voir ces phénomènes s'installer dans la durée.

Inconvénients

L'inconvénient du modèle pourrait venir de la complexité qu'il y a dans sa mise en place. Il demande plusieurs paramètres qui pour la plupart demandent des modélisations supplémentaires.

4.3. Validation du modèle

4.3.1. Validation des projections long-terme

Etant donnée la non-existence de l'espérance des scénarios du modèle de B&H, la validation des diffusions long terme se fait sur base des cibles repères en fonction des années de projection. Ces cibles sont calibrées sur les moyennes, les variances et les quantiles.

- Test basé sur la moyenne :

Les cibles des taux nominaux et réels selon les maturités 30 ans et 100 ans, sont fournis, à Groupama, par les économistes de Moody's Analytics.

Ces cibles sont d'une part, inconditionnelles c'est-à-dire que nous n'avons pas connaissance de la période où elles seront atteintes et d'autre part, définies sur des horizons de projection précis. La période maximale des cibles inconditionnelles est de 30ans dans le modèle actuel de Groupama. Ces cibles sont fixées tous les deux ans.

Cibles fixées pour les années 2020 et 2021 :

Parmi les cibles inconditionnelles, nous avons celles sur les dispersions et elles se présentent de la manière suivante :

- Test basé sur les quantiles :

Ce test permet d'évaluer la sensibilité des quantiles des taux générés par rapport aux cibles de dispersions fixées.

Nous allons comparer les quantiles des taux simulés sur deux années correspondant à deux cibles différentes, compte tenu que ces cibles sont à chaque fois fixées pour deux.

Sa nouvelle actualisation se fera en septembre 2022. Alors, la comparaison sera entre 2021 et 2018 d'une part et ensuite entre 2022 et 2021.

	Hypothèses de distribution du taux d'intérêt	Dispersion 2021	Dispersion 2018
Nominal	Taux court (1 an)	3,73%	3,09%
	Taux long (30 ans)	2,92%	2,31%
Réel	Taux court (1 an)	2,91%	2,85%
	Taux long (30 ans)	2,16%	2,08%

Les tableaux ci-dessus présentent une volatilité plus élevée en 2021 qu'en 2018. Cela entraînera des écarts inter-quantiles plus élevés en 2021. Ce même effet est envisageable pour les scénarios de 2022.

La comparaison de ces cibles avec les données simulées se présente comme ceci :

	Cible de moyennes 2022	Taux moyens projetés	Ecart
		Horizon 30 ans	
Taux nominal de maturité 1 an	2,16%	2,69%	0,53%
Taux nominal maturité 10 ans	2,81%	2,81%	0,00%
Taux réel de maturité 1 an	0,80%	0,96%	0,16%
Taux réel maturité 10 ans	1,97%	1,51%	-0,46%

Nous observons les taux nominaux de maturité 1 an (respectivement de maturité 10 ans) produisent des écarts de 0,15% et de 0,21% à la 30^{ème} année de projection. Pour les taux réels ces écarts sont encore plus faibles. On y conclut une bonne approximation du modèle au regard des prévisions.

Cibles fixées pour les années 2022 et 2023 :

	Horizon long terme		Horizon ultra long terme	
	30 ans		100 ans	
	Cible	Taux moyen projeté	Cible	Taux moyen projeté
Taux nominal de maturité 1 an	2,61%	2,73%	3,58%	3,72%
Taux nominal maturité 10 ans	3,21%	3,11%	3,98%	3,97%

L'objectif est d'avoir l'écart le plus faible possible entre les paramètres des taux projetés et leurs cibles. On constate que les écarts ne sont pas significatifs pour les deux horizons de projection.

Test basé sur la moyenne :

Les cibles de ce test sont fixées en fonction des diffusions long terme (30 ans) et ultra long terme (100 ans)

Test basé sur les quantiles :

Ce test permet d'évaluer la sensibilité des quantiles des taux générés par rapport aux cibles de dispersions fixées.

Nous allons comparer les quantiles des taux simulés sur deux années correspondant à deux cibles différentes, compte tenu que ces cibles sont à chaque fois fixées toutes les deux années.

Comparaison des paramètres de calibrage du modèle de Barrie et Hibbert :

Modèles	Paramètres	2018	2021	2022
Black-Karasinski 2 facteurs	$\alpha 1$	0,212	0,235	0,235
	$\alpha 2$	0,064	0,069	0,067
	$\sigma 1$	0,205	0,217	0,218
	$\sigma 2$	0,105	0,170	0,170
	Shift	0,039	0,036	0,036
Hull-White 2 facteurs	$\alpha 1$	0,315	0,298	0,309
	$\alpha 2$	0,061	0,061	0,068
	$\sigma 1$	0,02	0,019	0,020
	$\sigma 2$	0,011	0,011	0,013
	Correlations	-0,571	-0,571	-0,628

4.3.2. Validation des projections court-terme

La validation des projections court-terme se fait par les processus de cohérence avec le marché (market-consistency). La notion de cohérence avec le marché consiste à injecter, de manière intuitive, dans le modèle, des données de marché.

Les approches risque neutre et monde réel peuvent toutes les deux être validées par cette approche.

Pour que cette approche soit valide, dans notre cas, les scénarios simulés sur le court terme devront suivre la courbe initiale forward c'est-à-dire que nous calculerons les taux forwards à partir de la courbe initiale.

Ces taux forward au appelés taux à terme, sont des taux que l'on fixe dans le présent c'est-à-dire à $t=0$ et que l'on suppose atteindre sur une période prédéfinie. Il s'agit communément des valeurs d'obligations zéro coupon en $t=0$.

Lors du processus de calibrage, la projection court terme (horizon 1 ans à 3 ans environ) devra être de plus en plus proche de la courbe forward initiale. Il définit un rendement certain des taux zero coupon sur la variation de temps définie.

Le calcul des taux forwards se fait à partir des taux spots (nominaux et réels) en utilisant la formule suivante :

$$F(t_i, t_{i+1}) = \left[\frac{(1 + r_i)^{d_{i+1}}}{(1 + r_{i+1})^{d_i}} \right]^{\frac{1}{d_{i+1} - d_i}} - 1$$

Avec :

$F(t_1, t_2)$: Le taux forward entre les maturités i et $i + 1$ pour $i \geq 1$

r_i : Le taux zéro-coupon de maturité t_i

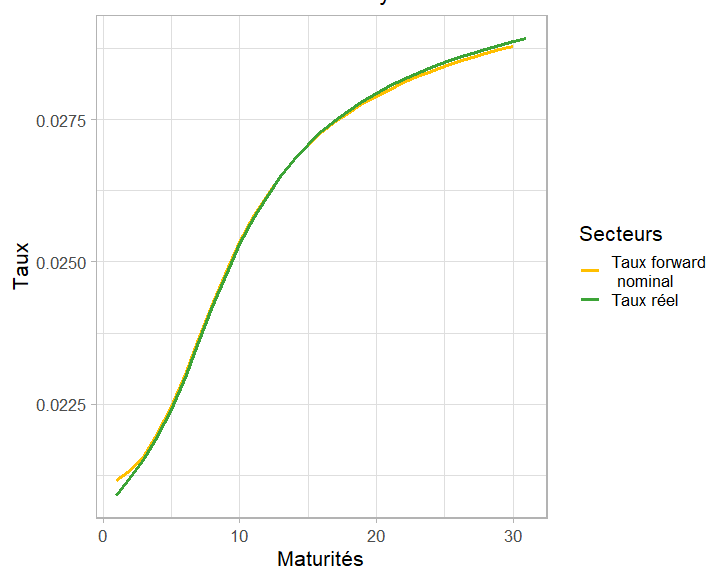
r_{i+1} : Le taux zéro-coupon de maturité t_{i+1}

d_i : Le nombre d'année entre la date initiale et la maturité t_i

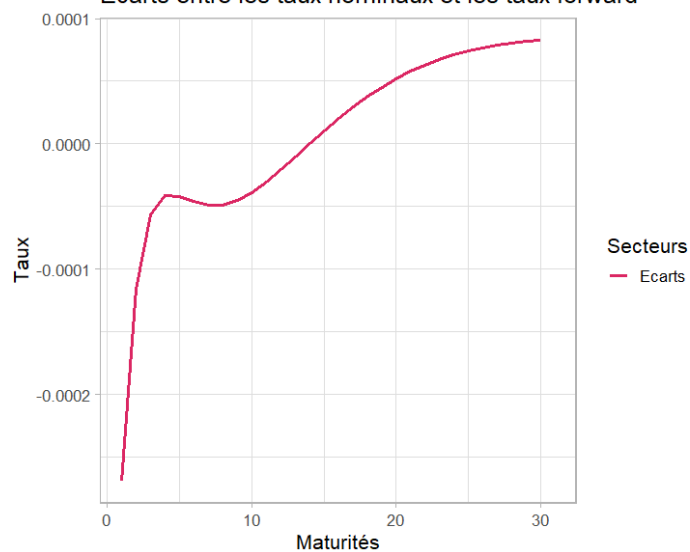
d_{i+1} : Le nombre d'année entre la date initiale et la maturité t_{i+1}

Taux nominal :

Taux forward initial vs Moyen GSE Nominal

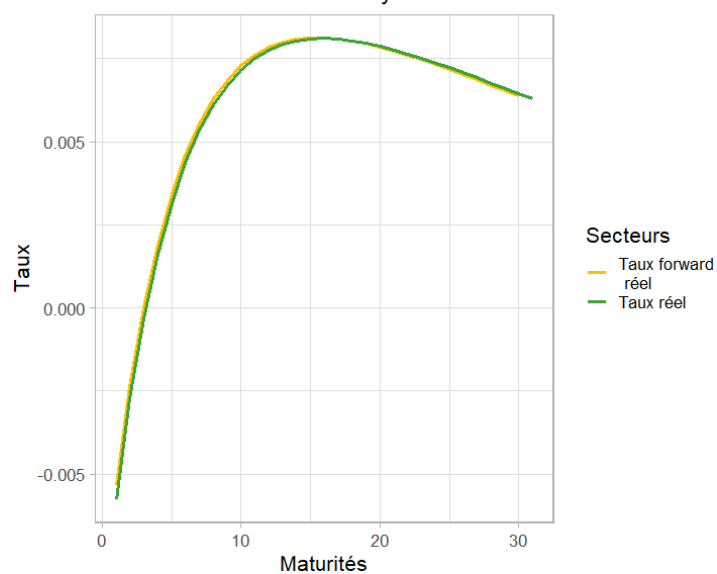


Ecarts entre les taux nominaux et les taux forward

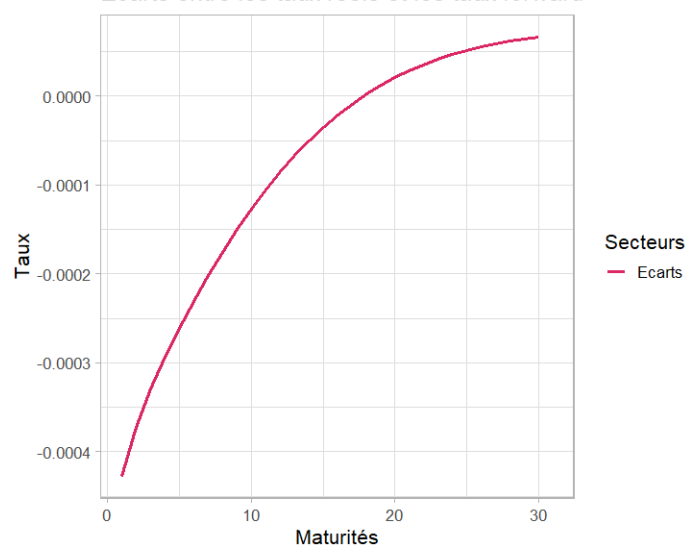


Taux réel :

Taux forward initial vs Moyen GSE réel



Ecarts entre les taux réels et les taux forward



Nous remarquons que les projections sont significativement proches des courbes forwards initiales avec des écarts n'excédants 0,0001% pour les taux réels et nominaux sur le court terme.

Partie III : Inflation spécifique

Chapitre V : Prise en compte de l'inflation sectorielle

L'inflation est dite spécifique si l'augmentation des prix d'un bien ou un service lié à un secteur d'activité se fait de manière disproportionnelle à l'indice des prix à la consommation. Plusieurs facteurs peuvent expliquer ce phénomène, notamment un déséquilibre entre l'offre et la demande ou encore la hausse des coûts de production d'un bien.

En assurance Non-vie, cela fait référence à la variation distincte du coût de la sinistralité d'une ligne d'activité à une autre. Chaque LoB étant distincte l'une de l'autre, faisant appel à des phénomènes économiques différents, tarifier leurs risques demande une compréhension plus fine du comportement du marché des biens et services assurés de façon à adapter au mieux les montants des primes d'assurances.

La prise en compte de cette inflation, dans le modèle actuel de Groupama, consiste à calibrer, d'une part, la moyenne long terme de projection de cette inflation et d'autre part, à modéliser des volatilités induites par chaque indice par une formule relationnelle entre ces derniers et l'indice d'inflation économique. C'est-à-dire que nous effectuons une régression linéaire entre l'historique de l'indice des prix à la consommation et celui de chaque indice spécifique pour avoir les paramètres nécessaires à la prise en compte de l'inflation spécifique.

Ce mode de modélisation consiste à ne conserver que la volatilité des différents indices, du fait que leurs moyennes ont déjà été prises en compte dans la mise en as-if de la sinistralité.

Les indices spécifiques dont il est question, ont été présentés dans le chapitre de présentation des inputs du modèle.

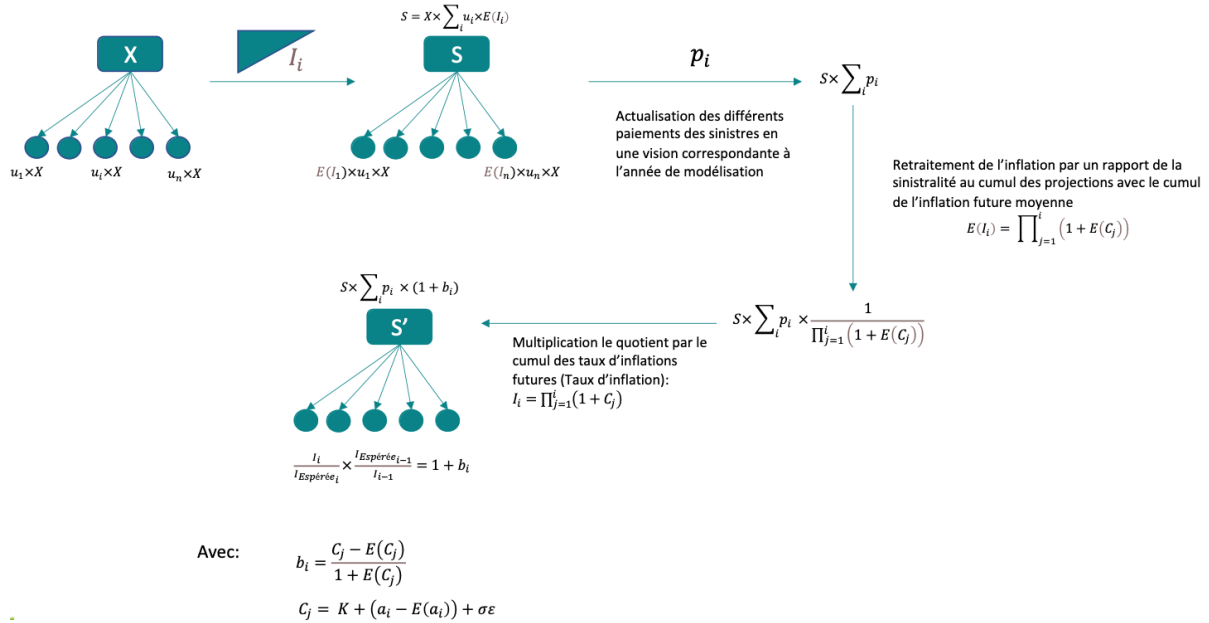
Pour rappel, ces indices influent les LoBs de la manière suivante :

Segmentation des risques		Sinistralité	
LoB SII	Segments	Attritionnelle	Grave
Dommages aux biens	Incendie	FFB	
	Construction	BT01	
RC Générale	Construction	BT01	
	Particulier	CPI	Dommages Corporels
	Professionnel	CPI	
RC Automobile		Pièces détachées	Dommages Corporels
Dommages Automobiles		Pièces détachées	
Frais de Soins		Santé	
Assistance		CPI	
Protection Juridique		CPI	
Perte des revenus		CPI	

Les corrélogrammes de ces indices montrent, dans l'ensemble, une absence d'autocorrélation avec l'historique.

Le calibrage de ces indices se fait au niveau de la volatilité globale moyenne et de l'anticipation de l'inflation spécifique, plutôt qu'à une modélisation très fine de l'inflation. Cela permet de conserver l'hypothèse d'un taux d'inflation spécifique moyen constant, tout en tenant compte de la volatilité globale et du retour à la moyenne qui se produit avec l'inflation.

5.1. Calibrage de l'inflation spécifique



Nous sommes sensé avoir comme montant des sinistres $Ult = X \times \sum_i u_i \times I_i$, les différents paiements sont inflatés en fonction de l'année de leurs exécutions. Et vu que nous ne disposons pas de l'inflation future réelle, nous inflation par la moyenne $E(I_i)$.

Cependant, il peut avoir un écart entre cette inflation moyenne et l'inflation qui se réalisera. Pour corriger ce biais, nous ajoutons une sur-inflation qui permet d'intégrer cette volatilité c'est-à-dire nous regardons que serait le taux à appliquer à S pour retrouver Ult .

Pour y arriver, nous définissons une nouvelle cadence des paiements p_i telle que $Ult = S \times \sum_i p_i \times \frac{I_i}{E(I_i)}$, avec $p_i = \frac{u_i \times E(I_i)}{\sum_j u_j \times E(I_j)}$

Pour u_i , nous les supposons comme étant hors inflation car nous considérons que l'inflation passé égale à celle future.

De manière générale, en définissant les cadences avec les méthodes classiques telles que les chain-ladder, l'inflation s'y retrouve de manière implicite. Il est alors nécessaire de la retirer pour éviter pour éviter des effets de double comptage qui pourraient augmenter considérablement les paiements annuels. Et donc, nous retirons cet effet pour appliquer le taux d'inflation I_i sur les cadences de paiements.

Dans le modèle de Groupama, l'hypothèse retenu est celle d'avoir un même effet entre l'inflation passé et future et donc, ni les u_i (Cadences hors inflation) et ni les p_i ne sont utilisées. Les cadences issues du chain-ladder sont retenues comme telles en ne retraitant pas l'inflation du

triangle. Dans ce cas de figure, on fait allusion que les p_i sont directement calibrés dans les triangles de paiements passés du fait de la constance des effets de l'inflation.

5.1.1. Hypothèses de calibration

L'inflation économique modélisée dans la première partie ne sert juste qu'à calibrer les scénarios des différentes inflations spécifiques.

La modélisation actuelle de Groupama suppose une relation directe entre l'inflation économique centrée et chaque inflation spécifique, avec un coefficient directeur égal à 1 .

Pour rappel, ce modèle se présente de la manière suivante :

$$C_i(t) = K_i + [CPI(t) - E(CPI(t))] + \sigma_{residus_input_REX_i} \cdot \varepsilon_i$$

Tels que :

- $C_i(t)$ est le taux annuel d'inflation spécifique i en date t ;
- $CPI(t)_i$ est le taux annuel d'inflation économique en date t provenant du GSE ;
- ε : un bruit blanc gaussien centré et réduit, simulé pour chaque simulation mais supposé constant pour toutes les années de projection (hypothèse d'une translation par l'inflation spécifique constante sur l'horizon de projection pour chaque simulation).
- $\sigma_{residus_input_REX}$ est la volatilité des résidus de la régression linéaire entre les taux IPC et spécifique, réévaluée avec une marge de prudence calibrée par jugement d'experts.

Les moyennes long terme K_i de chaque indice spécifique sont calibrées par jugement d'expert en fonction de la fluctuation inflationniste observée durant l'année et de l'estimation du retour à la moyenne sur la base d'observations historiques.

Quant à $\sigma_{Inflation_spécifique}$, la volatilité retenue pour l'inflation spécifique, elle est modélisée pour la première année de diffusion des scénarios économiques et est récupérée pour effectuer l'implémentation de l'inflation spécifique de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{CPI} &= \sigma_{(GSE_{t=1})} \\ \sigma_{Inflation_spécifique_1} &= \sqrt{\sigma_{CPI}^2 + \sigma_{residus_régression_linéaire}^2} \\ \sigma_{Inflation_spécifique} &= \sigma_{Inflation_spécifique_1} + \text{Marge prudence} \\ \sigma_{residus_input_REX} &= \sqrt{\sigma_{Inflation_spécifique}^2 - \sigma_{CPI}^2} \end{aligned}$$

La valeur de la marge de prudence ajoutée est estimée par jugement d'expert et s'ajuste chaque année en fonction de la situation économique.

5.1.2. Impact de l'inflation économique centrée

Le centrage de l'inflation économique se justifie par le fait que ce dernier permet de se conformer à la vision Best Estimate qui stipule que la moyenne de l'inflation spécifique soit une constante.

$$\mathbb{E}[C_i(t)] = K_i + E[CPI(t)] - E[CPI(t)] + \sigma_{Inflation_{specifique_i}} \cdot E[\varepsilon_i] = K_i$$

Ce recentrage n'est pas nécessaire lorsque les scénarios d'inflation économique sont stationnaires. Cela suppose une indépendance de l'espérance du CPI au temps. Il est alors possible d'exprimer ce terme de recentrage à l'aide des paramètres de modélisation. Et donc, le test de stationnarité doit être effectué pour justifier le choix de la formule à utiliser. Cela rend ce recentrage nécessaire uniquement en cas de non-stationnarité.

5.2. Limites des procédures de calibrations actuelles

Dans le cadre du modèle de B&H, les scénarios d'inflation économique simulées par les GSE présentent une caractéristique de non-stationnarité. Néanmoins, en appliquant un modèle autorégressif qui converge vers la moyenne, il devient possible de considérer cette dernière comme constante au taux cible. La non-stationnarité entraîne une fluctuation de la volatilité d'une année de diffusion à l'autre par rapport au temps t . Si le temps de retour est si faible au point que l'écart-type du modèle ne se rapproche pas de zéro à " $t=30$ ans", il en résulte que la moyenne est considérée comme inatteignable. Cette situation est clairement observée dans le modèle de B&H élaboré par Groupama, où l'espérance du modèle de B&H tend vers l'infini.

Par conséquent, la valeur de $E[CPI(t)]$ connaîtra des variations selon les scénarios suivants :

- Si elle est finie, mais dépendante du temps " t " : Dans ce cas, elle pourrait être déterminée par un modèle présentant une tendance déterministe. Cela aurait pour conséquence de ne pas établir de lien entre un modèle sans recentrage et un modèle avec recentrage.
- Si elle est infinie, ce qui nous amène à remettre en question l'utilisation de cette modélisation du CPI dans le contexte de l'inflation spécifique $C_i(t)$.

5.3. Limites des procédures de calibrations actuelles

Le modèle relationnel sur $C_i(t)$ est une pratique observée sur le marché, mais il n'est pas cohérent de supposer que le coefficient dans le modèle relationnel de l'inflation spécifique et de l'inflation économique soit fixé à 1, comme c'est le cas dans le modèle actuel. Ce coefficient est le plus souvent estimé par régression linéaire, ce qui, en plus de ne pas perdre les propriétés Best Estimate du modèle, garantit une mesure cohérente de la relation entre les deux inflations. Ainsi, cela évite d'introduire un biais dans les estimations, surtout si l'inflation économique n'explique pas de manière significative l'inflation spécifique.

Quant à la volatilité spécifique $\sigma_{Inflation_{specifique}}$, elle est calibrée à partir de la volatilité des résidus d'une régression $\sigma_{residus_régression_linéaire}$ dont le choix des variables est l'un des suivants :

$$- I_{spec_i} = CPI_i + b + \varepsilon_i \quad (1)$$

$$- I_{spec_i} = a * CPI_i + b + \varepsilon_i \quad (2)$$

$$- I_{spec_i} = a * année_i + b + \varepsilon_i \quad (3)$$

$$- I_{spec_i} = CPI_i + a * année_i + b + \varepsilon_i \quad (4)$$

$$- I_{spec_i} = a1 * CPI_i + a2 * année_i + b + \varepsilon_i \quad (5)$$

$$- I_{spec_i} = a1 * I_{spec_{i-1}} + a1 * I_{spec_{i-2}} + b + \varepsilon_i \quad (6)$$

Tels que :

- CPI est l'historique de l'inflation économique (IPC)
- I_{spec_i} Correspondent aux données historiques des différentes inflations spécifiques

Ne pas effectuer un calibrage par modélisation linéaire entre l'inflation économique et sectorielle est susceptible de créer un écart entre le modèle actuellement implémenté dans le modèle interne de Groupama et celui utilisé pour la calibration de sa volatilité.

Le modèle (1) a une pente de 1 entre l'inflation spécifique et économique. Le modèle (2) est celui où on ne fixe pas le coefficient du CPI à 1.

Dans les modèles (3), (4) et (5), des paramètres supplémentaires sont introduits comme *l'année*. Cependant, nous avons remarqué que cela rendait le modèle non stationnaire.

Le modèle (6) est le seul reposant sur une autorégression en présupposant une stationnarité dans la variable modélisée.

Ensuite, parmi ces choix de modèles, un seul est retenu pour le calibrage de la volatilité spécifique. La comparaison se fait dans le modèle actuel sur la base du R^2 ajusté le plus élevé. Bien que ce choix puisse être pertinent, il n'en demeure pas moins insuffisant du moment où les hypothèses de régression ne sont pas validées.

Par ailleurs, nous travaillons avec des données à caractère temporel, la non-satisfaction de critère de stationnarité pourrait engendrer des paramètres erronés à partir des régressions fallacieuses.

De plus, une marge de prudence est constamment rajouter sur la volatilité issue du modèle pour la rendre plus fiable et conservatrice face à des phénomènes de hausse d'inflation, mais la valeur de cette dernière n'est pas justifiable statistiquement.

Résultats d'analyses :

BT01 :

Hors données stationnaires :

BT01	BT01(i) = CPI(i) + b + e(i)	BT01(i) = aCPI(i) + b + e(i)	BT01(i) = a.année(i) + b + e(i)	BT01(i) = CPI(i) + a.année(i) + b + e(i)	BT01(i) = a1.CPI(i) + a2.année(i) + b + e(i)	BT01(i) = a1*BT01_{i-1} + a2*BT01_{i-2} + b + e(i)
Significativité des variables (F-test)	0,0004%					
Ordonnées à l'origine	0,010317024	-0,003519118	0,957152636	0,299545324	-0,397882536	0,014173331
Coeff directeur 1	1	1,96803794	-0,000464761	1	2,06053688	0,376044772
Coeff directeur 2				-0,000144146	0,000195884	0,077558575
Ecart-type	1,30%	1,10%	1,74%	1,30%	1,09%	1,62%
R2	23,09%	60,45%	1,69%	23,49%	59,80%	11,72%
Normalité des résidus (test de Shapiro-wilk)	36,94%	42,71%	48,14%	19,78%	68,40%	81,84%
Décorrélation des résidus (test de Durbin-Watson)	1,80%	11,60%	1,00%	1,00%	10,00%	57,60%
Homoscédasticité (test de Breusch-Pagan)	100,00%	38,50%	15,34%	30,84%	54,02%	61,37%
AIC	-258,5041681	-266,4174204	-239,1030733	-256,781175	-265,0248124	-241,4222051

Avec données stationnaires :

BT01	$BT01(i) = CPI(i) + b + e(i)$	$BT01(i) = aCPI(i) + b + e(i)$	$BT01(i) = a.année(i) + b + e(i)$	$BT01(i) = CPI(i) + a.année(i) + b + e(i)$	$BT01(i) = a1.CPI(i) + a2.année(i) + b + e(i)$	$BT01(i) = a1*BT01_{(i-1)} + a2*BT01_{(i-2)} + b + e(i)$
Significativité des variables (F-test)	0,0037%					
Ordonnées à l'origine	0,000401739	9,02836E-05	-0,676112343	-0,524260258	-0,432240486	-0,000106558
Coeff directeur 1	1	1,611926976	0,000337247	1	1,605982934	-0,824665011
Coeff directeur 2				0,000261351	0,000215359	-0,275740172
Ecart-type	2,39%	2,25%	3,11%	2,38%	2,24%	2,35%
R2	23,86%	45,98%	-3,05%	21,82%	44,16%	38,82%
Normalité des résidus (test de Shapiro-wilk)	72,76%	45,48%	75,49%	83,24%	33,28%	44,24%
Décorrélation des résidus (test de Durbin-Watson)	0,00%	0,00%	0,20%	0,20%	0,00%	61,60%
Homoscédasticité (test de Breusch-Pagan)	100,00%	55,18%	83,14%	54,41%	48,64%	58,69%
AIC	-207,03068	-208,525572	-190,4391421	-205,2494846	-206,6933896	-204,1378909

FFB :

Hors données stationnaires :

FFB	$FFB(i) = CPI(i) + b + e(i)$	$FFB(i) = aCPI(i) + b + e(i)$	$FFB(i) = a.année(i) + b + e(i)$	$FFB(i) = CPI(i) + a.année(i) + b + e(i)$	$FFB(i) = a1.CPI(i) + a2.année(i) + b + e(i)$	$FFB(i) = a1*FFB_{(i-1)} + a2*FFB_{(i-2)} + b + e(i)$
Significativité des variables (F-test)	0,0028%					
Ordonnées à l'origine	0,01378721	0,003347922	0,938016934	0,280409622	-0,236966592	0,021776728
Coeff directeur 1	1	1,730378946	-0,000453495	1	1,786755567	0,217523226
Coeff directeur 2				-0,000132879	0,000119366	0,02046494
Ecart-type	1,18%	1,06%	1,58%	1,17%	1,05%	1,58%
R2	26,75%	56,07%	2,46%	27,29%	54,82%	-1,70%
Normalité des résidus (test de Shapiro-wilk)	13,36%	55,57%	40,82%	7,24%	53,94%	92,44%
Décorrélation des résidus (test de Durbin-Watson)	39,60%	46,40%	20,00%	35,20%	39,60%	75,60%
Homoscédasticité (test de Breusch-Pagan)	100,00%	17,05%	23,92%	39,52%	18,70%	98,29%
AIC	-264,3725877	-268,8723807	-244,9405849	-262,6588892	-267,1156828	-242,7790487

Avec données stationnaires :

FFB	$FFB(i) = CPI(i) + b + e(i)$	$FFB(i) = aCPI(i) + b + e(i)$	$FFB(i) = a.année(i) + b + e(i)$	$FFB(i) = CPI(i) + a.année(i) + b + e(i)$	$FFB(i) = a1.CPI(i) + a2.année(i) + b + e(i)$	$FFB(i) = a1*FFB_{(i-1)} + a2*FFB_{(i-2)} + b + e(i)$
Significativité des variables (F-test)	0,0011%					
Ordonnées à l'origine	0,000425016	2,14462E-05	-0,983426091	-0,831574006	-0,712657468	-0,000125507
Coeff directeur 1	1	1,79290621	0,000490341	1	1,783107708	-0,856922781
Coeff directeur 2				0,000414445	0,000355011	-0,313349318
Ecart-type	2,52%	2,29%	3,29%	2,50%	2,27%	2,49%
R2	21,98%	50,56%	-2,37%	20,80%	49,39%	39,10%
Normalité des résidus (test de Shapiro-wilk)	75,80%	53,52%	44,61%	64,46%	27,98%	79,84%
Décorrélation des résidus (test de Durbin-Watson)	0,20%	0,00%	0,40%	0,20%	0,60%	75,20%
Homoscédasticité (test de Breusch-Pagan)	100,00%	62,45%	60,90%	88,83%	64,87%	65,10%
AIC	-204,0485529	-207,5066814	-187,1282125	-202,545651	-205,9485683	-200,7688071

Pièces détachées :

Hors données stationnaires :

Pièces détachées	$PC(i) = CPI(i) + b + e(i)$	$PC(i) = aCPI(i) + b + e(i)$	$PC(i) = a.année(i) + b + e(i)$	$PC(i) = CPI(i) + a.année(i) + b + e(i)$	$PC(i) = a1.CPI(i) + a2.année(i) + b + e(i)$	$PC(i) = a1*PC_{(i-1)} + a2*PC_{(i-2)} + b + e(i)$
Ordonnées à l'origine	0,006575245	0,004643145	-0,751454699	-1,408762107	-1,772204356	0,012759859
Coeff directeur 1	1	1,135206428	0,000384909	1	1,552925837	0,422163974
Coeff directeur 2				7,05E-04	0,000882571	-0,021361094
Ecart-type	1,69%	1,68%	1,84%	1,57%	1,53%	1,69%
R2	15,15%	15,85%	-0,27%	15,06%	27,99%	11,65%
Normalité des résidus (test de Shapiro-wilk)	0,02%	0,04%	0,0003%	0,0007%	0,02%	0,07%
Décorrélation des résidus (test de Durbin-Watson)	0,20%	0,40%	1,40%	0,60%	0,00%	92,40%
Homoscédasticité (test de Breusch-Pagan)	100,00%	0,02%	91,41%	89,67%	0,00%	0,00%
AIC	-242,9850227	-241,0831013	-235,8229809	-245,2043726	-244,8475544	-238,7125475

Avec données stationnaires :

Pièces détachées	$PC(i) = CPI(i) + b + e(i)$	$PC(i) = aCPI(i) + b + e(i)$	$PC(i) = a.année(i) + b + e(i)$	$PC(i) = CPI(i) + a.année(i) + b + e(i)$	$PC(i) = a1.CPI(i) + a2.année(i) + b + e(i)$	$PC(i) = a1*PC_{(i-1)} + a2*PC_{(i-2)} + b + e(i)$
Ordonnées à l'origine	-0,001362229	-0,001874521	-0,294536482	-0,143739437	0,00861014	-0,001062267
Coeff directeur 1	1	2,010151798	0,000146292	1	2,010295511	-0,795271023
Coeff directeur 2				7,09226E-05	-5,22278E-06	-0,532241238
Ecart-type	2,39%	1,97%	3,33%	2,38%	1,97%	2,40%
R2	23,91%	63,80%	-3,72%	21,10%	62,35%	44,05%
Normalité des résidus (test de Shapiro-wilk)	0,36%	98,82%	0,00%	0,39%	98,87%	0,00%
Décorrélation des résidus (test de Durbin-Watson)	4,40%	42,80%	1,20%	6,80%	52,00%	31,20%
Homoscédasticité (test de Breusch-Pagan)	100,00%	12,34%	76,60%	98,70%	12,28%	1,71%
AIC	-207,2137866	-216,0371678	-186,5648961	-205,2299469	-214,0372965	-202,9469403

Le premier constat est de voir , en terme de comparaison, que les résultats avec stationnarisation des données ont des écart-types plus élevé et de ce fait plus prudents que la modélisation actuelle.

Nous observons également que la stationnarité des inputs ne déprécie pas les R carré ajusté mais n'améliore pas pour autant. Cela peut s'observer au niveau des résultats des tests d'hypothèses. Actuellement auprès de Groupama, c'est la volatilité du modèle ayant le R carré ajusté le plus élevé qui est retenue comme paramètre de l'inflation spécifique. Cependant, le faible nombre d'observation dégrade la qualité de la régression linéaire après qu'on ait éliminé la racine unitaire des inputs. Il y a des phénomènes d'autocorrélation des résidus qui apparait, c'est le cas pour FFB et BT01.

5.4. Avantages et inconvénients du modèle

Avantages

- Il s'agit d'un modèle simple avec peu de paramètres à estimer.
- Il est facilement interprétable

Inconvénients

- Les hypothèses de calibrage exposées sont des hypothèses très fortes qui ne correspondent pas à l'évolution historique des taux d'inflation spécifique par rapport au taux d'inflation économique. En particulier, nous observons des disparités entre les taux moyens d'évolution des différents indices d'inflation spécifique ainsi qu'une faible corrélation avec l'inflation économique.
- Dans le processus de calibration des paramètres de ces modèles sur données historiques, un certain nombre d'hypothèses supplémentaires sont effectuées. Certaines hypothèses entrent en conflit avec les hypothèses du modèle et d'autres ne sont pas en cohérence avec l'évolution historique des taux d'inflation.

Chapitre VI : Modèles spécifiques alternatifs

En ce qui concerne les méthodes alternatives, nous avons effectué une comparaison entre plusieurs structures d'optimisation du modèle de B&H afin de trouver la méthode de calibration de l'inflation spécifique la plus optimale. Nous cherchions la méthode qui permettrait d'améliorer le modèle de B&H en prenant en compte de manière adaptée l'inflation spécifique.

En supposant que l'espérance de l'inflation spécifique déterminée par un modèle de tendance déterministe, cela reviendrait, comme nous l'avons vu sur les lignes précédents, d'avoir un rapprochement entre le modèle avec l'inflation économique centrée et celui avec cette inflation non centrée.

De ce fait, nous allons élaborer une comparaison d'impact de ces deux approches pour en évaluer les impacts qu'elles pourraient avoir sur les résultats techniques :

6.1. Modèle de relation affine entre l'inflation économique et spécifique

Ce modèle n'inclut pas le recentrage de l'inflation économique en raison de l'absence d'une espérance finie par rapport aux scénarios générés par le modèle de B&H. En d'autres termes, les caractéristiques des scénarios produits par le modèle de B&H ne permettent pas de déterminer un point d'ancrage pour l'inflation économique dans ce contexte.

Pour rappel, ce modèle est le suivant :

$$C_i(t) = K_i + CPI(t) + \sigma_{Inflation_{spécifique}_i} \epsilon$$

Ce phénomène soulève un problème de cohérence par rapport au modèle de B&H en introduisant un décalage entre l'inflation moyenne anticipée, qui a été utilisée dans la mise en 'as-if' de la sinistralité, et la moyenne réelle de l'inflation spécifique. Pour corriger ce biais, il serait nécessaire de procéder à une répétition complète de la mise en 'as-if' de l'ensemble de la sinistralité avec la nouvelle espérance K .

Une solution possible à ce phénomène serait de maintenir la moyenne K et de réaliser une régression linéaire entre la différence $C_i - K$ et l'inflation économique centrée.

$$C_i(t) - K = \phi_i(CPI(t) - E[CPI(t)]) + \sigma_{Inflation_{spécifique}_i} \epsilon$$

En supposant $CPI(t)$ stationnaire, $E[CPI(t)] = c^{ste}$, alors :

$$\begin{aligned} E[C_i(t)] &= K' + E[CPI(t)] + \sigma_{Inflation_{spécifique}_i} E[\epsilon] \\ &= K' + c^{ste} \end{aligned}$$

Ce qui revient à passer d'un modèle non centré à un modèle centré :

$$\begin{aligned} C_i(t) &= K' + CPI(t) + \sigma_{Inflation_{spécifique}_i} \epsilon = \\ &= K' + CPI(t) + E[CPI(t)] - E[CPI(t)] + \sigma_i \epsilon \\ &= K + CPI(t) - E[CPI(t)] + \sigma_{Inflation_{spécifique}_i} \epsilon \end{aligned}$$

Avec $K = K' + E[CPI(t)]$ supposé égale à la moyenne long terme

Cette modélisation peut être réalisée avec l'ajout du paramètre ϕ_i , qui jouera un rôle prédominant dans les méthodes alternatives.

Par ailleurs, nous allons réexaminer la valeur de la pente de la relation entre les deux types d'inflations, en utilisant un coefficient directeur basé sur les données de modélisation, y compris dans le calibrage de la volatilité spécifique. Ainsi, nous obtenons :

En terme de calibrage, nous prenons également en compte des paramètres de pente et de constante issues de la regression linéaire entre les taux spécifique et économique (IPC)

- Inflation spécifique : $C_i(t) = K'_i + \phi_i CPI_{GSE}(t) + \sigma_{Rex_i} \epsilon_t$
- Modèle de volatilité spécifique : $I_i(t) = \beta_i + \phi_i CPI_{historique}(t) + \sigma_i \epsilon_t$

Avec :

- β_i et ϕ_i Des paramètres issus de la régression linéaire
- I_i Historiques des taux spécifiques (BT01, FFB, Corporel, Pièces détachées)
- CPI_{GSE} Scénarios IPC issues du GSE
- $CPI_{historique}$ Historique de l'IPC de l'INSEE
- C_i Scénarios taux spécifiques

La formule de la survolatilité est donc la suivante :

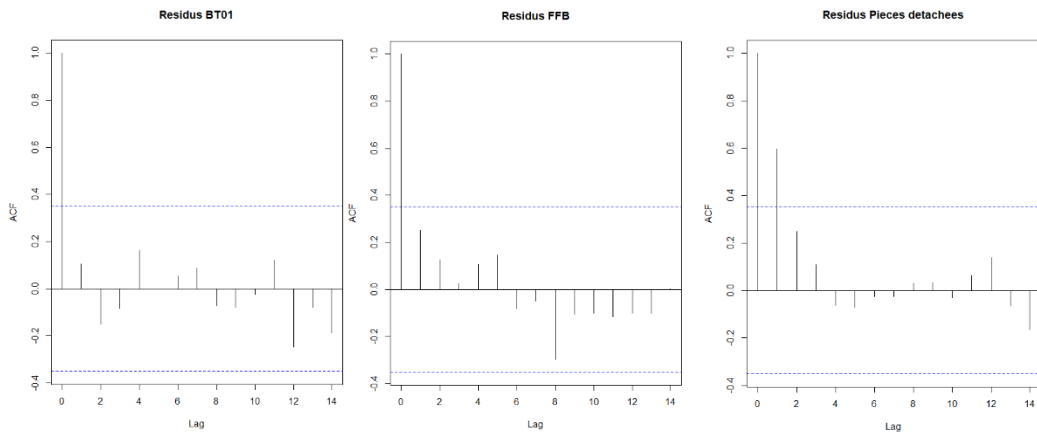
$$E(C_i(t)) = K'_i + \phi_i E(CPI_{GSE}(t))$$

$$b_i = \frac{K'_i + \phi_i CPI_{GSE}(t) + \sigma_i \epsilon_t - K'_i - \phi_i E(CPI_{GSE}(t))}{1 + (K'_i + \phi_i E(CPI_{GSE}(t)))}$$

$$b_i = \frac{\phi_i (CPI_{GSE}(t) - E(CPI_{GSE}(t))) + \sigma_i \epsilon_t}{1 + (K'_i + \phi_i E(CPI_{GSE}(t)))}$$

$$= \frac{\phi'_i (CPI_{GSE}(t) - E(CPI_{GSE}(t))) + \sigma_i \epsilon_t}{1 + K'_i}$$

$$K_i = K'_i + \phi_i E(CPI_{GSE}(t))$$



Tests de normalité :

Shapiro-Wilk normality test

data: residuals(model_bt01_taux_methode_2_Moy)
W = 0.93742, p-value = 0.07003

Shapiro-Wilk normality test

data: residuals(model_ffb_taux_methode_2_Moy)
W = 0.97601, p-value = 0.6953

Les résidus des deux variables sont normalement distribués.

Tests d'homoscédasticité :

Non-constant Variance Score Test

Variance formula: ~ fitted.values

Chisquare = 3.644742, Df = 1, p = 0.056247

Non-constant Variance Score Test

Variance formula: ~ fitted.values

Chisquare = 1.793113, Df = 1, p = 0.18055

Le test appliqué ci-dessus est celui de Breush-Pagan qui suppose que les données sont homoscédastiques si la p-value est strictement supérieure à 5%. De ce fait, toutes nos observations sont homoscédastiques.

Résultats techniques de la LoB FIRE :

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 RS	Quantile 1/200 Alt. AR	Ecart RS vs B&H	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs RS
CR	-321,42	-322,45	-322,30	0,32%	0,27%	-0,05%
GAN	-184,59	-185,19	-186,03	0,32%	0,78%	0,45%
GMA	-378,86	-380,99	-381,38	0,56%	0,67%	0,10%
GROUPE	-830,78	-831,65	-836,71	0,10%	0,71%	0,61%

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 Alt. B&H	Ecart alt vs B&H			
CR	-321,42	-322,46	0,32%			
GAN	-184,59	-186,38	0,97%			
GMA	-378,86	-381,30	0,64%			
GROUPE	-830,78	-837,20	0,77%			

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 Vasicek	Quantile 1/200 Alt. Vasicek	Ecart RS vs Vasicek	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs Vasicek
CR	-321,42	-321,10	-323,09	-0,10%	0,52%	0,62%
GAN	-184,59	-184,55	-187,06	-0,02%	1,33%	1,36%
GMA	-378,86	-380,60	-381,17	0,46%	0,61%	0,15%
GROUPE	-830,78	-830,76	-836,00	0,00%	0,63%	0,63%

6.2. Modèle de relation affine entre l'inflation économique centrée et spécifique

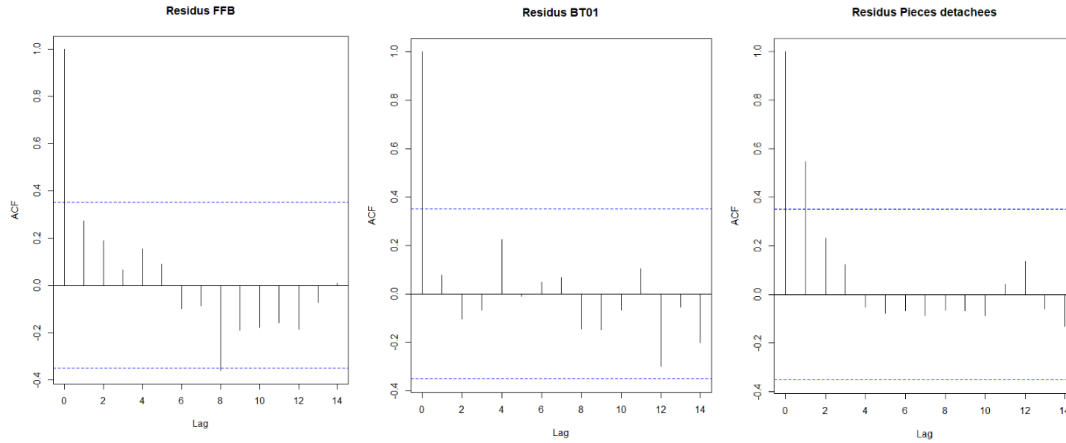
Puisque le GSE du modèle autorégressif génère des scénarios stationnaires, il nous est alors possible de passer d'un modèle sans recentrage à un modèle avec recentrage afin de retrouver la formule de l'inflation spécifique actuelle.

$$C_i(t) = \beta_i + \phi_i E[CPI_{GSE}(t)] + \phi_i CPI_{GSE}(t) - \phi_i E[CPI_{GSE}(t)] + \sigma_i \epsilon_t$$

$$C_i(t) = K_i + \phi_i [CPI_{GSE}(t) - E[CPI_{GSE}(t)]] + \sigma_i \epsilon_t$$

Où :

$$K_i = \beta_i + \phi_i E[CPI_{GSE}(t)] = C^{ste}$$



Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 RS	Quantile 1/200 Alt. AR	Ecart RS vs B&H	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs RS
CR	-321,42	-322,45	-323,10	0,32%	0,52%	0,20%
GAN	-184,59	-185,19	-186,98	0,32%	1,29%	0,97%
GMA	-378,86	-380,99	-383,33	0,56%	1,18%	0,61%
GROUPE	-830,78	-831,65	-835,67	0,10%	0,59%	0,48%

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 Vasicek	Quantile 1/200 Alt. Vasicek	Ecart RS vs Vasicek	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs Vasicek
CR	-321,42	-321,10	-324,74	-0,10%	1,03%	1,13%
GAN	-184,59	-184,55	-187,63	-0,02%	1,64%	1,67%
GMA	-378,86	-380,60	-382,98	0,46%	1,09%	0,62%
GROUPE	-830,78	-830,76	-835,24	0,00%	0,54%	0,54%

Analyse de l'inflation			
LOB FIRE: RT en M€			
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 Alt. B&H	Ecart alt vs B&H
CR	-321,42	-323,16	0,54%
GAN	-184,59	-186,31	0,93%
GMA	-378,86	-380,01	0,30%
GROUPE	-830,78	-836,97	0,75%

6.3. Le modèle autorégressif d'ordre deux AR(2)

Un modèle autorégressif, de manière générale, est un modèle où la variable prédite dépend de son propre historique. Dans notre cas, compte tenu de notre choix d'ordre de modélisation, elle dépend de ses deux dernières années. Cependant, pour tenir compte de la stationnarité des observations, nous ne prédirons pas le taux spécifique directement, mais plutôt sa variation temporelle. En complément de cela, nous intégrerons une dépendance à l'inflation économique pour assurer une cohérence de calibration. Ce modèle se présente donc de la manière suivante :

$$X_i(t) = \alpha_i Y_i(t) + \phi_i X_i(t-1) + \sigma_i \epsilon_t$$

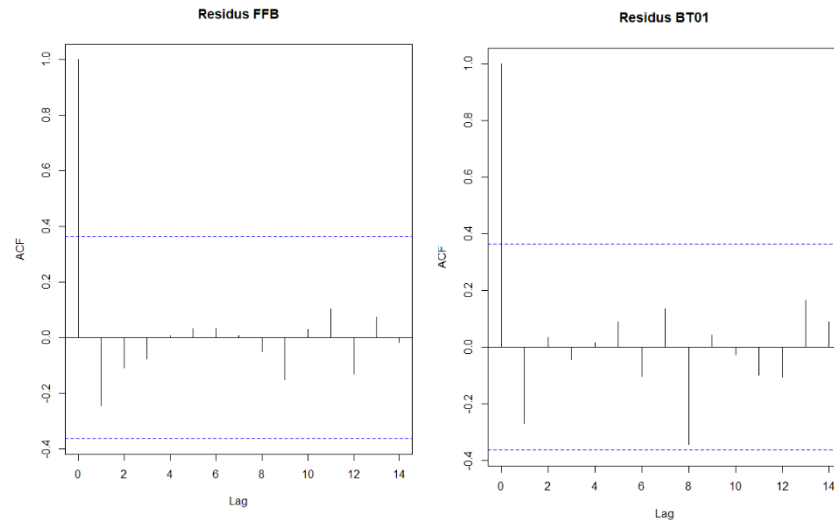
Où:

- $X_i(t) = \Delta C_i(t) - \Delta C_i(t-1)$ avec $\Delta I_{spec_i}(t)$ le taux annuel d'inflation spécifique en t
- $Y_i(t) = \Delta CPI_{GSE}(t) - \Delta CPI_{GSE}(t-1)$ avec $\Delta CPI_{GSE}(t)$ le taux annuel d'inflation économique en t
- $(\epsilon_t)_{t \geq 0}$ des bruits blancs $\mathcal{N}(0,1)$ i.i.d.

Il y a une différence entre I_{spec} et C_i , le premier correspond aux données historiques d'inflation d'un secteur d'activité de l'assureur par contre le second est lié au même secteur mais générer avec la formule en relation avec l'inflation économique centrée.

La sur-inflation se présente comme ceci :

$$b_i = \frac{\Delta C_i(t) - E(\Delta C_i(t))}{1 + E(\Delta C_i(t))}$$



Tests de normalité des résidus :

Shapiro-Wilk normality test

```
data: residuals(model_bt01)
W = 0.94429, p-value = 0.1299
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data: residuals(model_ffb)
W = 0.9613, p-value = 0.3537
```

Les tests de normalités des résidus de BT01 et FFB, ci-dessus, sont satisfaits, ainsi que ceux d'homoscédasticité.

Tests d'homoscédasticité :

```
Non-constant Variance Score Test
Variance formula: ~ fitted.values
Chisquare = 0.194229, Df = 1, p = 0.65942
```

```
Non-constant Variance Score Test
Variance formula: ~ fitted.values
Chisquare = 0.289406, Df = 1, p = 0.5906
```


Résultats techniques de la LoB FIRE :

Analyse de l'inflation							Analyse de l'inflation			
LOB FIRE: RT en M€							LOB FIRE: RT en M€			
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 RS	Quantile 1/200 Alt. AR	Ecart RS vs B&H	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs RS		Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 Alt. B&H	Ecart alt vs B&H
CR	-321,42	-322,45	-321,49	0,32%	0,02%	-0,30%	CR	-321,42	-321,11	-0,10%
GAN	-184,59	-185,19	-185,25	0,32%	0,36%	0,03%	GAN	-184,59	-184,98	0,21%
GMA	-378,86	-380,99	-381,86	0,56%	0,79%	0,23%	GMA	-378,86	-379,94	0,29%
GROUPE	-830,78	-831,65	-835,23	0,10%	0,54%	0,43%	GROUPE	-830,78	-833,05	0,27%

Analyse de l'inflation						
LOB FIRE: RT en M€						
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 Vasicek	Quantile 1/200 Alt. Vasicek	Ecart RS vs Vasicek	Ecart alt vs B&H	Ecart alt vs Vasicek
CR	-321,42	-321,10	-321,89	-0,10%	0,14%	0,24%
GAN	-184,59	-184,55	-185,17	-0,02%	0,31%	0,34%
GMA	-378,86	-380,60	-381,29	0,46%	0,64%	0,18%
GROUPE	-830,78	-830,76	-833,60	0,00%	0,34%	0,34%

Avantages et inconvénients du modèle

Avantages

- Cette classe de modèles permet une modélisation plus fine et plus fidèle à la réalité des inflations spécifiques. En particulier, elle permet de capturer la saisonnalité observée des taux d'inflation spécifique qui se traduit par une corrélation de l'inflation avec son niveau en année précédente.
- C'est un modèle qui permet de modéliser plus finement et de façon précise l'inflation spécifique. Il prend en compte la saisonnalité des taux observés par les dépendances avec les années passées (selon l'ordre de modélisation).
- C'est un modèle qui s'ajuste à différents types de données, en s'adaptant aux tendances.
- Il ne prend pas trop des paramètres et est facilement interprétable. Il fournit des prédictions fiables pour les séries temporelles.
- C'est un modèle qui se combine facilement à d'autres modèles de séries temporelles afin d'avoir une meilleure précision du modèle.

Inconvénients

- C'est un modèle sensible aux valeurs aberrantes, ce qui peut biaiser les résultats.
- En cas des séries instables temporellement, le modèle autorégressif perd en efficacité car ce dernier modélise uniquement les dépendances à l'historique des observations.
- Il trouve des limites faces à des structures des données complexes.
- Le modèle introduit une dépendance temporelle, ce qui rend son implémentation plus délicate car elle suscite une réadaptation de la formule de la sur inflation avec un dynamisme de gestion des retards.

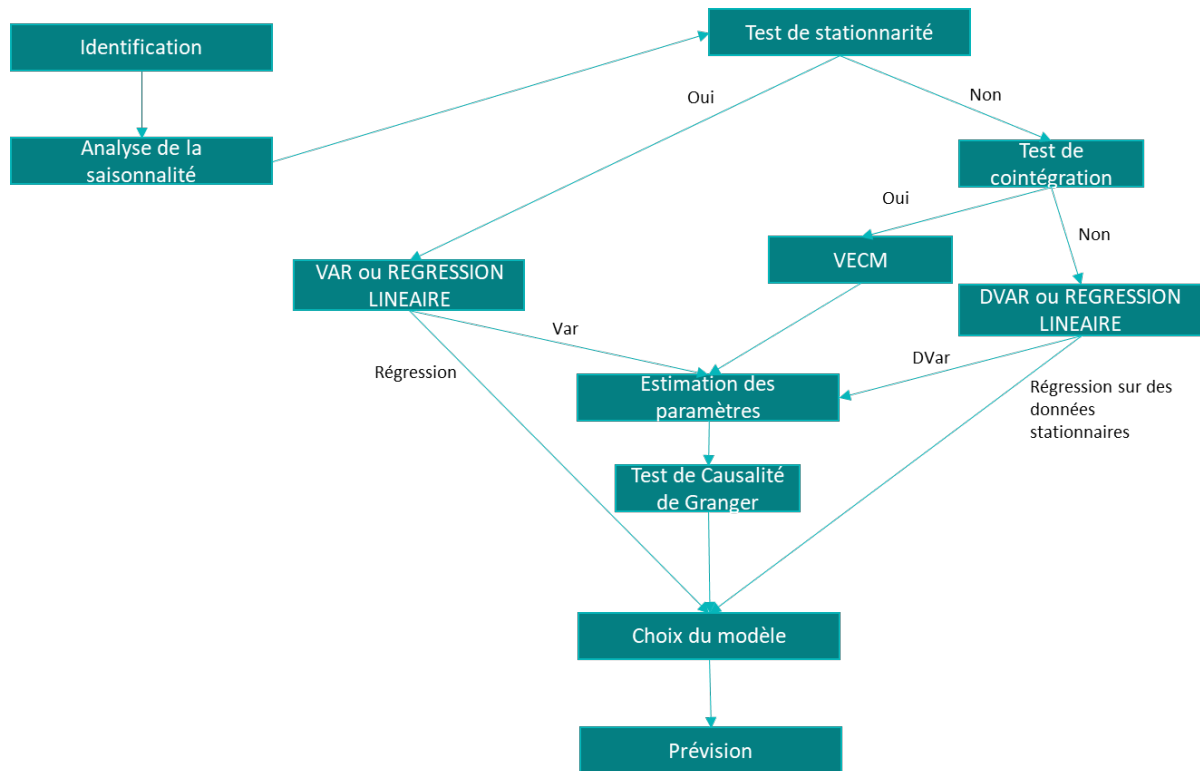
6.4. Le modèle vectoriel autorégressif (VAR)

Le modèle VAR vient en complément au modèle autorégressif puisqu'en vision économique, aucune variable ne peut s'auto-prédire parfaitement.

Nous avons opté de tenir compte des effets de retard sur la transmission d'un choc subit par un indice à un autre indice. Il s'agit du modèle VAR (Vectoriel autorégressif).

Il permet d'analyser les liens entre les séries temporelles où les dépendances d'une variable ne se limitent pas à ses propres données historiques mais font également intervenir les passés des autres variables pour pouvoir rechercher des relations de causalité entre l'inflation spécifique et l'inflation économique. Ce qui évalue l'influence mutuelles des différents indices d'inflations, afin d'implémenter un calibrage efficace.

- La procédure à suivre dans la mise en œuvre de ce modèle se résume dans le tableau ci-dessous :



Le modèle VAR(p) se définit alors de la manière suivante :

Soient X_t et Y_t deux séries chronologiques modélisées par un modèle autorégressif de dimension p .

Z_t est un processus VAR(p) modélisant X_t et Y_t si et seulement si :

$$\begin{cases} Y_{t+1} = f(Y_t, X_t) \\ X_{t+1} = f(X_t, Y_t) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} Y_{t+1} = \mu_1 + \alpha_{1,1}Y_t + \dots + \alpha_{1,p}X_{t-p} + \sigma_{1,t}\varepsilon_{1,t} \\ X_{t+1} = \mu_2 + \alpha_{2,1}X_t + \dots + \alpha_{2,p}Y_{t-p} + \sigma_{2,t}\varepsilon_{2,t} \end{cases}$$

Alors,

$$Z_t = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,p} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y_t & X_t \\ \vdots & \vdots \\ X_{t-p} & Y_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{1,t} \\ \sigma_{2,t} \end{pmatrix} \times [\varepsilon_{1,t} \quad \varepsilon_{2,t}]$$

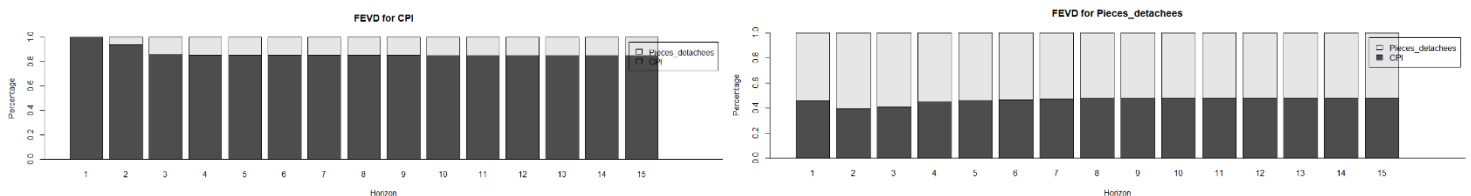
Causalité selon Granger

En plus de la comparaison évolutive de nos observations, décrite par leurs niveaux de corrélation, il nous est impossible de déterminer si un événement particulier a un impact commun sur l'ensemble des variables modélisées. C'est cette analyse qui permettra de mettre en lumière les liens existants entre les variables et donc d'améliorer la capacité prédictive du modèle avec des variables supplémentaires.

La méthode pour y parvenir a été développée par Clive Granger, un économiste britannique. Elle consiste à comparer les modèles de prévision en intégrant les valeurs passées de la variable dépendante à celles de la variable explicative. Cette dernière est ensuite comparée à une méthode autorégressive qui ne prend en compte que l'historique propre de la variable à prédire.

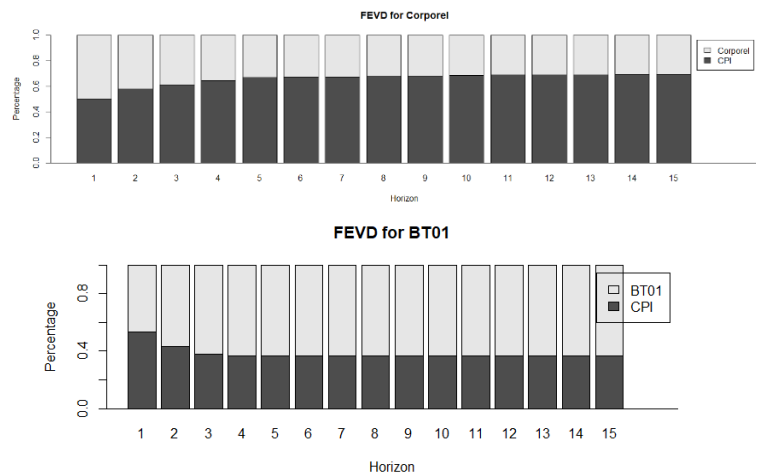
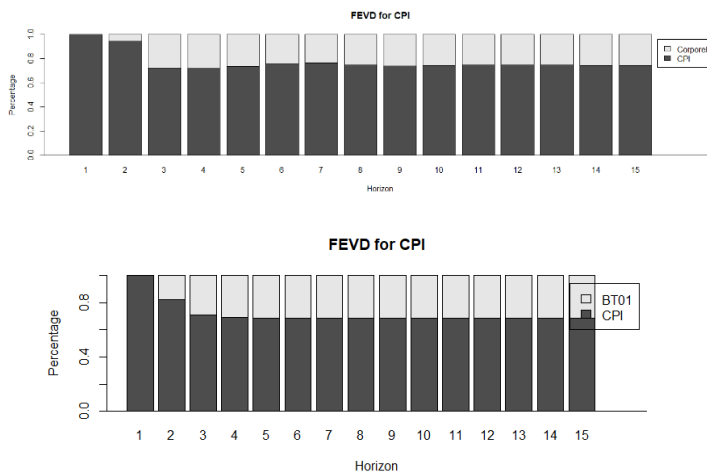
Dans le cas où la méthode qui tient compte de l'historique de toutes les variables offre une meilleure prédiction qu'un modèle où la variable est alimentée uniquement par son passé, la variable supplémentaire a une influence significative (causale) sur la variable dépendante.

Voici quelques liens de causalité issus de nos données de modélisation. Illustrés par la décomposition des variances de leurs erreurs de prévision, nous pouvons observer les échelles auxquelles les indices spécifiques contribuent à la prédiction de l'indice économique et vice versa :

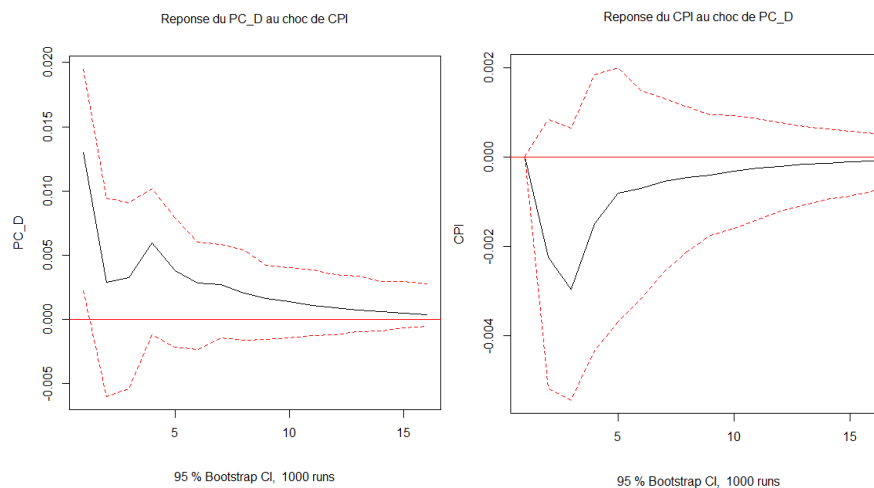


Le graphique en haut à gauche décrit l'influence des pièces détachées dans la prédiction de l'inflation économique et à droite, on inverse le phénomène.

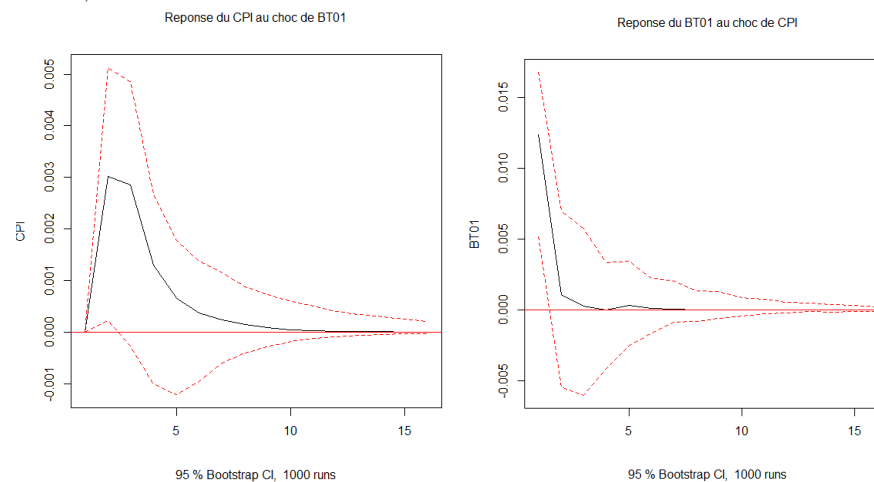
Nous remarquons que l'indice IPC est alimenté en priorité par son historique le plus récent (l'année pour notre cas) et ensuite subit faiblement les variations des prix des pièces détachées. Cela peut s'expliquer par le fait que les pièces de rechange ne sont pas des composants majeurs du panier d'un ménage. En revanche, sur le graphique de droite, nous voyant bien que la variation de l'indice économique impacte significativement les prix des pièces de rechange.



L'indice corporel est modélisé sous une combinaison des divers secteurs d'activités et donc il fait appel à divers composants influents au sein de l'indice économique, d'où un apport plus important à l'IPC par rapport à l'indice des pièces détachées, mais cet indice n'a pas été actualisé depuis 2015. Il se pourrait que cette dépendance soit moins pertinente. Par ailleurs, l'indice IPC de présente en variable explicative majeur dans la composition des indices spécifiques, comme le traduit le graphique de droite.



Le graphique ci-dessus, à gauche, montre qu'un choc de l'inflation économique influence directement les prix des pièces détachées mais le contraire, comme on le voit à droite, n'est pas forcément vrai,



Contrairement aux pièces détachées, les chocs du BT01 impactent l'IPC. Nous pouvons le constater sur le graphique de haut à gauche. Les deux bornes de l'intervalle de confiance se trouvent au-dessus de zéro. Et donc, les deux indices s'influencent mutuellement. Ce qui n'est pas le cas avec l'indice FFB qui subit simplement les variations de l'IPC.



Les tableaux ci-dessus montre que le modèle VAR satisfait les hypothèses de régression pour les composants de la construction.

Les modèles retenus sont les suivants :

- $Pieces_{detachees} = CPI(t-1) + Pieces_{detachees}(t-1) + CPI(t-2) + Pieces_{detachees}(t-2) + CPI(t-3) + Pieces_{detachees}(t-3) + trend$
- $BT01 = CPI(t-1) + BT01(t-1) + trend$
- $FFB = CPI(t-1) + FFB(t-1) + CPI.l2 + FFB(t-2) + CPI(t-3) + FFB(t-3) + CPI(t-4) + FFB(t-4)$

Avantages et inconvénients du modèle

Avantages

- C'est un modèle qui modélise les relations entre les variables de manière simultanée dans le but de mettre en évidence la façon une variable affecte une autre.
- Il ne suscite pas des restrictions comme c'est le cas avec certains modèles économétriques tels que les modèles de régression linéaire et à équations simultanées.

- C'est l'un des modèles les plus utilisés dans les prévisions économétriques, dans l'analyse des dynamiques des taux, des transactions et du chômage de telle sorte à déterminer les relations de causalité entre variable afin de mieux prévoir leurs évolutions futures en visualisant les variables qui influent significativement sur les autres.
- Il s'adapte aux différents types de relations qui puissent exister entre variables (linéaire ou non linéaire).

Inconvénients

- C'est un modèle multivarié prenant en compte plusieurs paramètres rendant ainsi difficile l'interprétation des résultats.
- Le modèle est sensible aux variations saisonnières des données d'où la nécessité travailler avec des données stationnaires
- Les résultats du modèle VAR sont plus pertinents face à un grand volume des données et peuvent créer des biais face à des données à faible historique.

6.5. Résultats de la mise en place de ces modèles :

Analyse de l'inflation économique			
LOB MTPL: RT en M€			
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 DVAR	Ecart
CR	-166,44	-166,57	0,08%
GAN	-80,16	-79,42	-0,93%
GMA	-154,17	-151,61	-1,66%
GROUPE	-415,94	-412,33	-0,87%

Analyse de l'inflation économique			
LOB FIRE: RT en M€			
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 DVAR	Ecart
CR	-321,42	-320,49	-0,29%
GAN	-184,59	-185,03	0,24%
GMA	-378,86	-381,21	0,62%
GROUPE	-830,78	-834,01	0,39%

Le modèle VAR réduit les résultats techniques car les indices des pièces détachées et corporels n'ont pas une forte influence avec l'indice économique. L'indice corporel n'a pas été actualisé depuis 2015 et donc n'explique pas les observations économiques. En revanche, bien que l'indice des pièces détachées est actualisé tous les ans, sa prise en compte dans le modèle relève d'une calibration par jugement d'expert sur un ensemble des variation des prix de composants automobiles. Il y a donc une transformation de ce dernier, ce qui peut expliquer la baisse observée sur les résultats.

Partie IV : Validation des modèles alternatifs

Chapitre VII: Backtesting et tests de sensibilités

7.1. Backtests

En terme de backtesting, nous avons comparé les moyennes des scénarios annuels générés à l'aide des différents modèles testés, avec les taux d'inflation réellement observés dans l'économie dans la même année.

Cette comparaison consiste à confronter les prévisions ou les modélisations de l'évolution de l'inflation à ce qui s'est effectivement produit dans la réalité. Cette démarche vise à évaluer la précision des prévisions et des modèles en les comparant aux observations réelles et à déterminer dans quelle mesure ils ont réussi à anticiper les mouvements de l'inflation.

Afin de réaliser ce backtest, nous nous sommes limité aux scénarios d'inflation de l'année 2022 puisque c'est l'indice annuel le plus récent, tenant compte des fortes variations d'inflation, observées dans l'économie.

A titre de rappel, nous générons stochastiquement dans nos scénarios, 5000 observations annuelles des taux d'inflation économique, projetées de façon déterministe sur 30 années. Ces taux sont par la suite centrés, puis nous y rajoutons un drift correspondant à la moyenne de l'inflation spécifique utilisée lors de la mise en as-if, de sorte à la garder toujours constante. Et pour finir, nous rajoutons un brut blanc de volatilité correspondante à celle issue de la régression linéaire entre le taux économique Insee et le taux spécifique.

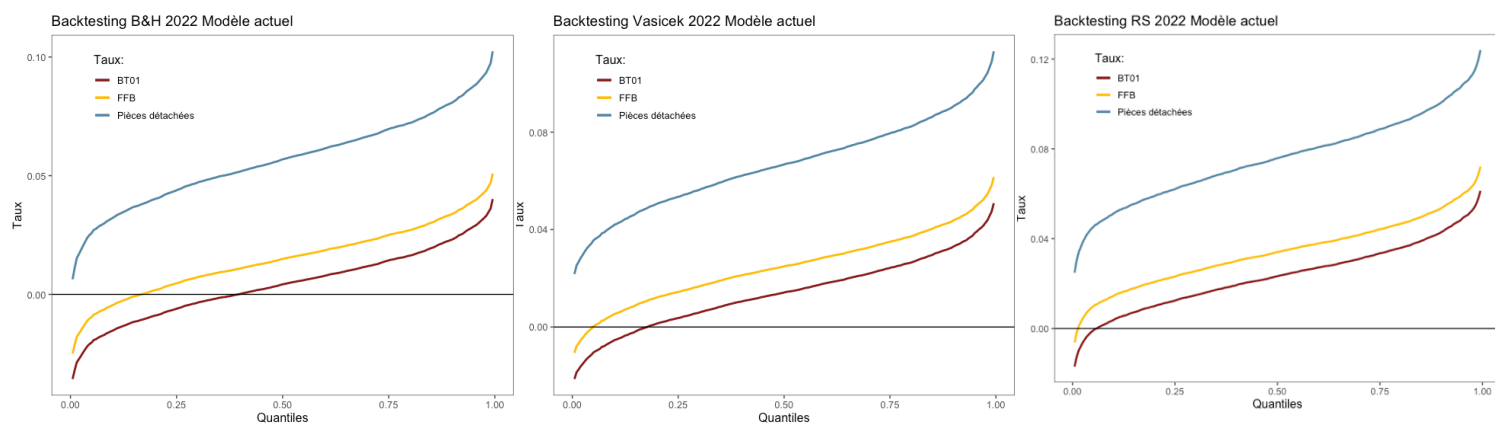
De ce fait, pour effectuer le backtest, nous allons procéder 2 500 fois à une simulation des bruits blancs standard que nous allons appliquer au fur et à mesure à chacun des 5 000 simulations économiques, avec la méthode de calibrage de l'inflation spécifique décrite précédemment et ensuite, nous calculerons les moyennes de chacun de ses 2500 matrices des 5000 scénarios.

Nous évaluerons ensuite les variations des écarts entre ces moyennes et l'inflation réelle. Un écart positif signifiant alors une inflation modélisée au-dessus de l'inflation observée.

Une fois cela fait, nous allons, par la suite, observer les proportions des variables dans chaque matrices des scénarios simulés, qui sont inférieures à l'inflation réelle.

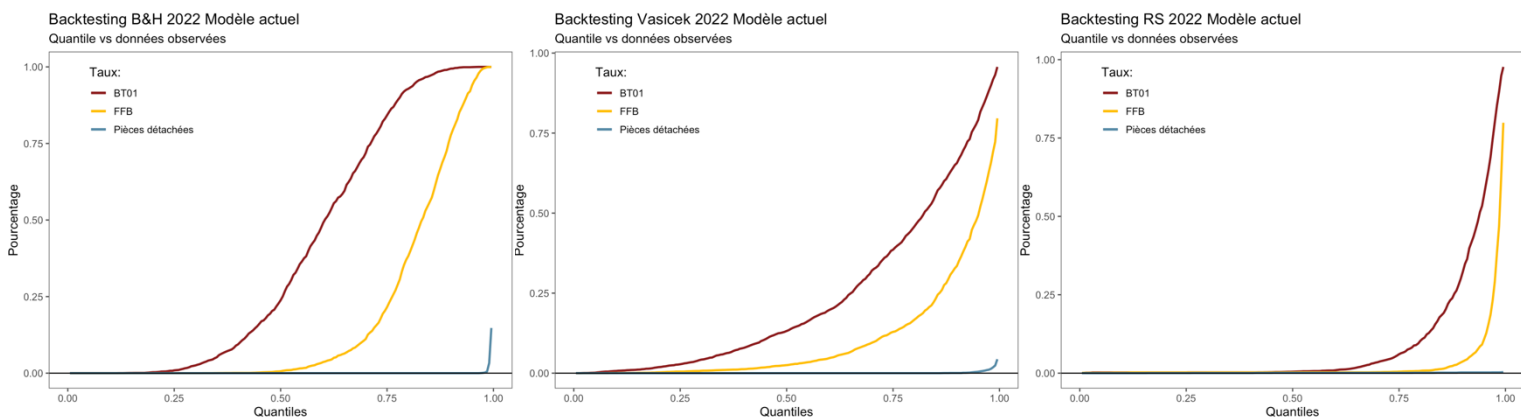
Graphiquement, cela se présente comme ceci :

- Graphique d'écarts moyennes scénarios par année et observations réelles
- Graphique des proportions des scénarios annuels inférieurs aux observations réelles



Les premiers graphiques s'interprètent sur la base des proportions d'observation sur chaque côté de l'axe des abscisses. A proportions équivalentes, les scénarios de l'inflation simulée en 2022, notre année de référence, prédisent parfaitement les scénarios futurs, c'est-à-dire que leurs moyennes sont égales à l'inflation réelle. Par contre, avoir une grande partie de la courbe au-dessus (respectivement en dessous de l'axe d'ordonnée nul $y=0$), traduirait une surestimation de l'inflation (respectivement une sous-estimation).

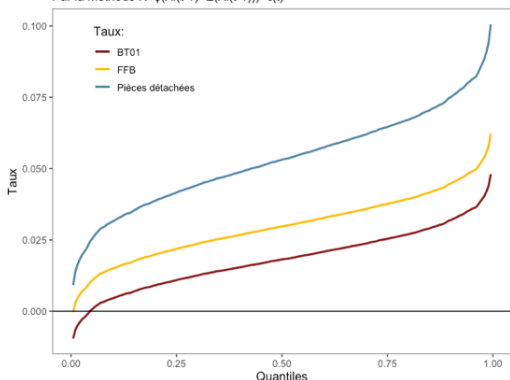
Nous remarquons une surestimation générale des différentes inflations spécifique de chacun des modèles ci-dessus, prenant en compte le calibrage de l'inflation spécifique actuellement utilisé par Groupama. Cependant, le modèle de B&H, s'approche un peu plus de l'équilibre au niveau du taux BT01.



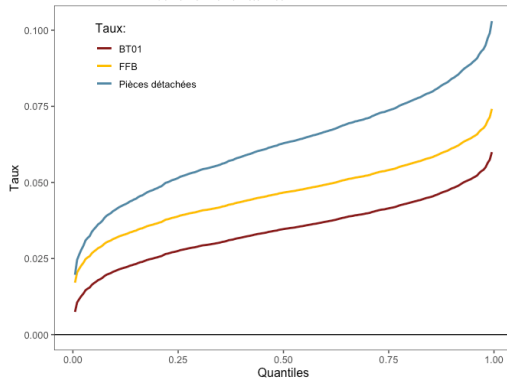
Les constats observés au niveaux des premiers tableaux se confirment sur ceux-ci. Nous remarquons que les scénarios de BT01 issues du modèle de B&H sont inférieurs à l'observation réelle à partir du quantile 25%, ce qui déplace la moyenne un peu plus vers la droite par rapport aux autres indice. Les pièces détachées, sont dans la quasi-totalité des scénarios, supérieurs à l'observation réelle, d'où une très grande surestimation de l'inflation.

Les constats sont les mêmes également pour les modèles Vasicek et autorégressif à changements des régimes, l'inflation y est surestimée.

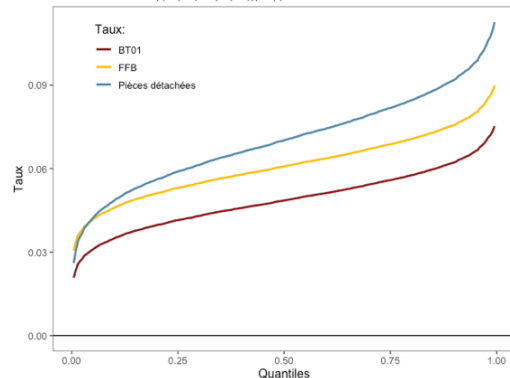
Backtesting B&H 2022
Par la méthode $K + \phi(X_i(t-1) + E(X_i(t-1))) + \epsilon(t)$



Backtesting Vasicek 2022
Par la méthode $K + \phi(X_i(t-1) + E(X_i(t-1))) + \epsilon(t)$

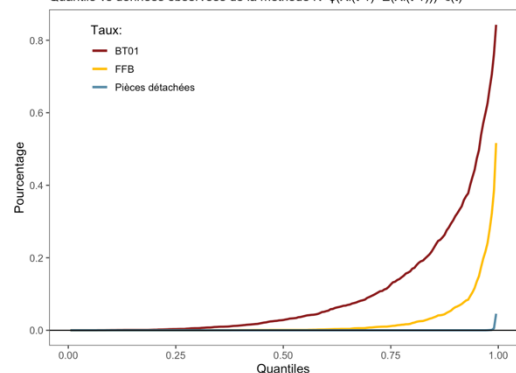


Backtesting RS 2022
Par la méthode $K + \phi(X_i(t-1) + E(X_i(t-1))) + \epsilon(t)$

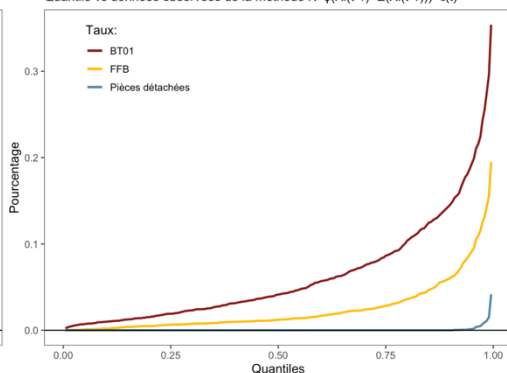


Comme, le modèle actuel, ce modèle alternatif à pour effet de surestimer l'inflation spécifique. L'une des raison à cette variation à la hausse, comme pour le modèle actuel, est la valeur de K (moyenne utilisée lors de la mise en as-if) qui est suffisamment prudente.

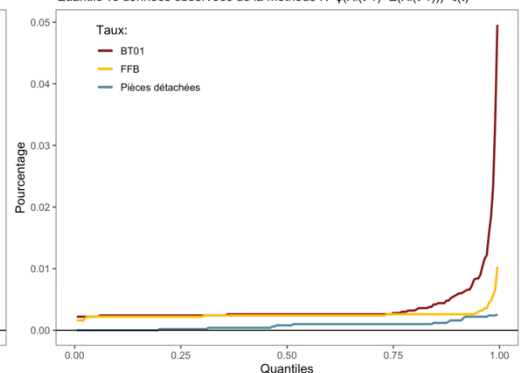
Backtesting B&H 2022
Quantile vs données observées de la méthode $K + \phi(X_i(t-1) + E(X_i(t-1))) + \epsilon(t)$



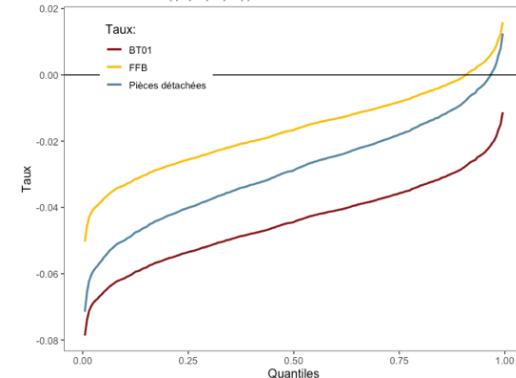
Backtesting Vasicek 2022
Quantile vs données observées de la méthode $K + \phi(X_i(t-1) + E(X_i(t-1))) + \epsilon(t)$



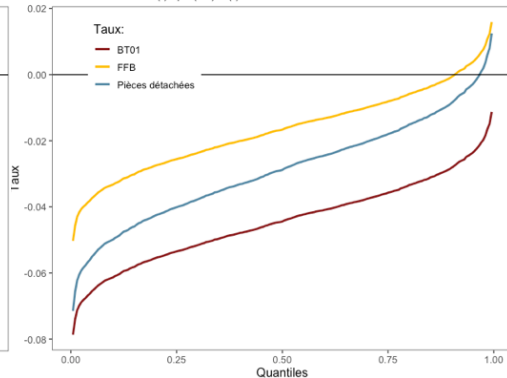
Backtesting RS 2022
Quantile vs données observées de la méthode $K + \phi(X_i(t-1) + E(X_i(t-1))) + \epsilon(t)$



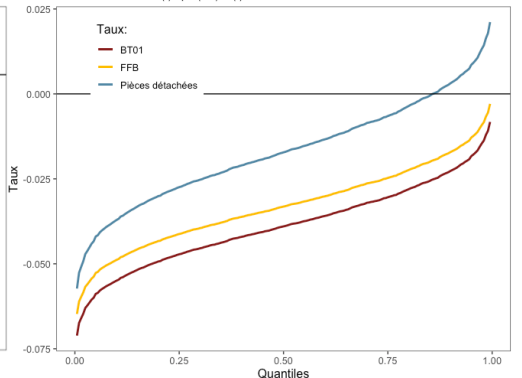
Backtesting B&H 2022
Par la méthode $\alpha Y_i(t) + \phi(X_i(t-1)) + \epsilon(t)$



Backtesting Vasicek 2022
Par la méthode $\alpha Y_i(t) + \phi(X_i(t-1)) + \epsilon(t)$

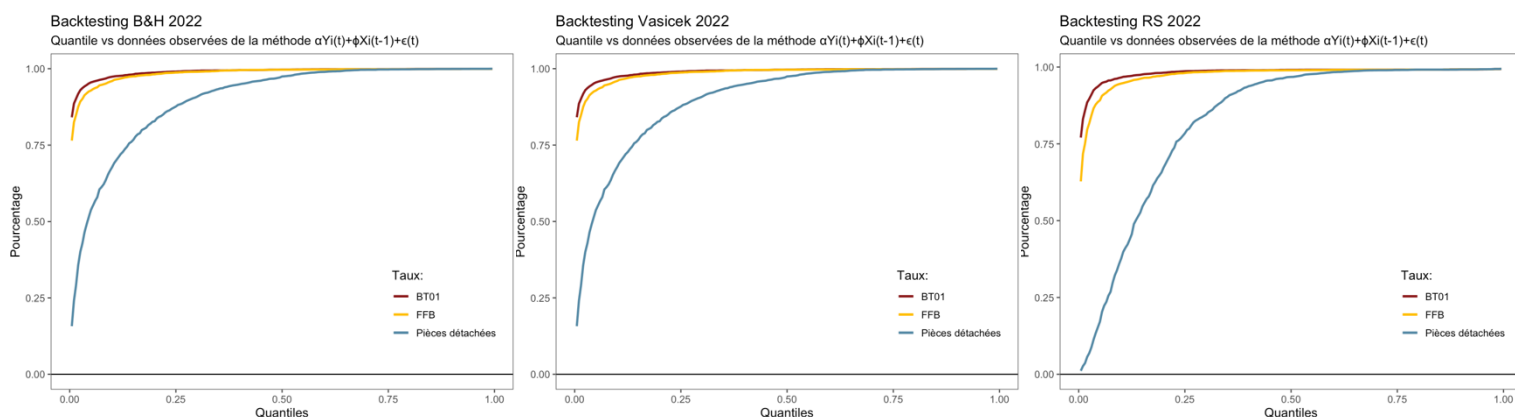


Backtesting RS: Ecart entre indice taux observé et simulé 2022
Par la méthode $\alpha Y_i(t) + \phi(X_i(t-1)) + \epsilon(t)$

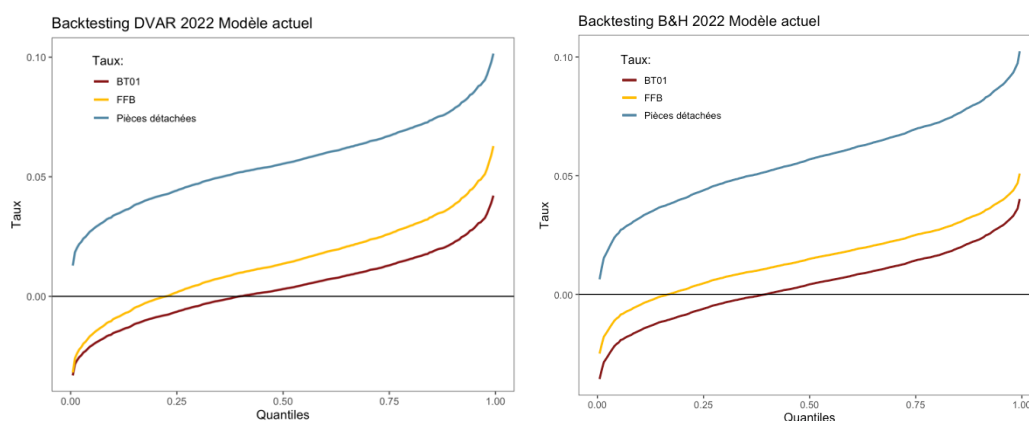


Contrairement aux autres modèles testés, le calibrage de l'inflation spécifique par celui-ci, la sous-estime quel que soit le modèle de modélisation de l'inflation économique. Il est donc clair que ce

modèle est moins prudent, voir même plus risqué en cas de forte hausse d'inflation dans l'économie.



Sur les graphiques ci-dessus, la quasi-totalité des scénarios sont inférieurs à la valeur observée.



Le modèle vectoriel autorégressif présente des comportement assez similaires au modèle de B&H, en terme des scénarios d'inflation spécifique générés, avec une légère surestimation au niveau du modèle VAR.

Le backtesting valide l'ensemble des modèles testés qui se sont avérés suffisamment prudent face aux variations à la hausse de l'inflation. Cependant, le modèle autorégressif à deux facteurs nous paraît plutôt risqué, puisqu'il sous-estime l'inflation, avec des scénarios inférieures aux données observées.

Ces résultats de backtest sont uniquement valable pour l'année de modélisation en cours et sont susceptibles de varier en fonction de la trajectoire qu'empruntera l'inflation dans le futur.

7.2. Tests de sensibilités

Deux tests sont envisagés :

- Inflation économique + x% (par exemple CPI + 1%) : il s'agit d'une translation déterministe
- Volatilité + z% : ce test n'est pas une translation, il s'agit d'introduire un choc déterministe en multipliant la volatilité par 1+z%

Inflation + x%

Les (a_i) sont traduits de x%. La charge sinistre ultime y compris inflation est $Ult = X \cdot \sum_i u_i \cdot I_i^x$ avec $I_i^x = \prod_{j=1}^i (1 + a_j + x)$.

$$Ult = X \cdot \sum_i u_i \cdot I_i^x = \left(X \cdot \sum_j u_j \cdot E(I_j) \right) \cdot \sum_i \left(\frac{u_i \cdot E(I_i)}{\sum_j u_j \cdot E(I_j)} \right) \cdot \frac{I_i^x}{E(I_i)} = S \cdot \sum_i p_i \cdot \frac{I_i^x}{E(I_i)}$$

Ainsi, la transformation à opérer est la suivante :

$$1 + b_1^x = \frac{I_1^x}{E(I_1)} \Rightarrow b_1^x = \frac{1 + a_1 + x}{1 + E(a_1)} - 1 = \frac{a_1 - E(a_1) + x}{1 + E(a_1)} = b_1 + \frac{x}{1 + E(a_1)}$$

$$1 + b_i^x = \frac{I_i^x}{I_{i-1}^x} \cdot \frac{E(I_{i-1})}{E(I_i)} \approx \frac{1 + a_i + x}{1 + E(a_i)} \Rightarrow b_i^x = b_i + \frac{x}{1 + E(a_i)}$$

Avec $b_i = \frac{a_i - E(a_i) + \sigma \cdot \varepsilon}{1 + K}$ et $K = E(a_i)$,

$$b_1^x = \frac{a_1 - E(a_1) + \sigma \cdot \varepsilon}{1 + K} + \frac{x}{1 + K}$$

Pour le test de sensibilité CPI + x% déterministe, il suffit de traduire les indices annuels de volatilités par le facteur $\frac{x}{1 + E(a_i)}$.

Volatilité + z%

Pour ce test, les facteurs de volatilité $b_i = \frac{a_i - E(a_i)}{1 + E(a_i)}$ sont multipliés par 1+z.

Dans un cadre d'incorporation de l'inflation spécifique, ce test devient, par le calibrage de la loi de S et appliquant la cadence de paiement (p_i) y compris inflation future moyenne K, avec un taux d'inflation annuelle de :

$$b_i = \frac{a_i - E(a_i) + \sigma \cdot \varepsilon}{1 + K}$$

Les tests seront donc :

- Inflation + x% :

$$b_i^x = b_i + \frac{x}{1 + K}$$

Analyse de l'inflation économique			
LOB FIRE: RT en M€			
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 Sensi+25%	Ecart
Business unit 1	-321,42	-321,97	0,17%
Business unit 2	-184,59	-184,76	0,09%
Business unit 3	-378,86	-380,49	0,43%
Groupe	-830,78	-830,62	-0,02%

Analyse de l'inflation économique			
LOB MTPL: RT en M€			
	Quantile 1/200 B&H	Quantile 1/200 Sensi +25%	Ecart
Business unit 1	-166,44	-175,23	5,28%
Business unit 2	-80,16	-83,34	3,97%
Business unit 3	-154,17	-174,23	13,01%
Groupe	-415,94	-449,13	7,98%

Analyse de l'inflation économique			
LOB FIRE: RT en M€			
	Quantile 1/200 AR	Quantile 1/200 Sensi+25%	Ecart
Business unit 1	-321,42	-321,81	0,12%
Business unit 2	-184,59	-184,89	0,16%
Business unit 3	-378,86	-378,90	0,01%
Groupe	-830,78	-832,36	0,19%

Analyse de l'inflation économique			
LOB MTPL: RT en M€			
	Quantile 1/200 AR	Quantile 1/200 Sensi +25%	Ecart
Business unit 1	-166,44	-176,21	5,87%
Business unit 2	-80,16	-83,69	4,40%
Business unit 3	-154,17	-169,54	9,97%
Groupe	-415,94	-448,55	7,84%

Analyse de l'inflation économique			
LOB FIRE: RT en M€			
	Quantile 1/200 Vasicek	Quantile 1/200 Sensi+25%	Ecart
Business unit 1	-321,42	-322,29	0,27%
Business unit 2	-184,59	-184,82	0,12%
Business unit 3	-378,86	-378,78	-0,02%
Groupe	-830,78	-830,70	-0,01%

Analyse de l'inflation économique			
LOB MTPL: RT en M€			
	Quantile 1/200 Vasicek	Quantile 1/200 Sensi +25%	Ecart
Business unit 1	-166,44	-176,28	5,91%
Business unit 2	-80,16	-83,63	4,33%
Business unit 3	-154,17	-178,30	15,65%
Groupe	-415,94	-455,16	9,43%

En terme de sensibilité, l'inflation économique, le modèle de base, stochastique est plus sensible, pour la LoB Fire, au niveau du Business Unit 3 qui comporte plus des sinistres graves.

Conclusion

Le but principal de cette étude était de remettre en question le calibrage et la modélisation de l'inflation économique et sectorielle dans les modèles internes de souscription non-vie de Groupama.

Les recherches effectuées ont d'abord permis de proposer des modèles alternatifs pour l'inflation économique, basés sur l'évolution de l'indice des prix à la consommation (IPC). Le premier modèle proposé est celui de Vasicek, qui est simple à calibrer et à paramétrer, mais présente des limites, notamment une convergence rapide vers la moyenne. Le deuxième modèle, "Autorégressif à deux régimes", prend en compte deux régimes d'inflation élevée et faible, ce qui reflète bien l'évolution historique de l'inflation. Pour ces deux modèles, nous avons également intégré une cible d'inflation pour refléter la politique monétaire des banques centrales (dans notre cas, 2% de la BCE).

En ce qui concerne les résultats de l'utilisation de ces modèles alternatifs dans le modèle interne de Groupama, les impacts sont modérés et renforcent l'utilisation du modèle actuel de l'inflation économique de Groupama (modèle de Barrie et Hibbert) : Inflation déduite des taux nominaux et des taux réels simulés à l'aide du Générateur de scénarios économiques (GSE). Cette inflation est dite implicite c'est-à-dire une inflation anticipée avec une vision pleinement marché, pouvant ainsi créer un décalage avec l'inflation réellement observée.

La deuxième partie des recherches a porté sur le défi de la modélisation de l'inflation sectorielle. Par secteur, nous faisons allusion aux différentes branches auxquelles l'activité d'assurance non-vie de Groupama s'exerce et l'évolution des prix de ces branches est à des rythmes qui leur sont propres. C'est pourquoi, dans la prise en compte de l'inflation dans la sinistralité, un apport complémentaire de l'inflation sectorielle s'ajoute à l'inflation économique par une volatilité calibrée par régression linéaire entre les indices sectoriels et économique. Groupama avait une liste fermée de modèles relationnels entre l'indice de l'inflation spécifique (Santé : ONDAM, Bâtiment : BT01 et FFB, Automobile : Pièces détachées, Corporel : Dommages corporels...). Ces derniers avaient quelques limites, notamment sur la stationnarité des données. Le non-respect de ce critère expose à une régression fallacieuse pouvant faire apparaître des relations non existantes entre les variables, à cause de variation des propriétés statistiques telles que la moyenne et la variance, dans le temps. Une seconde limite a été observée au niveau des hypothèses de régression linéaire qui n'étaient pas, pour la plupart, respectées.

Alors, pour résoudre ce problème, nous avons proposé quelques modèles alternatifs de calibrage de la volatilité de l'inflation spécifique, puisque la prise en compte de l'inflation dans le modèle interne se décompose entre moyenne et volatilité. Parmi ces modèles, nous avons testé : Un modèle de relation affine entre l'inflation spécifique et l'inflation économique : Ce modèle se base sur celui actuellement utilisé par Groupama en prenant, en revanche, en input des données stationnaires. Il en suit un deuxième modèle basé sur le premier avec un recentrage de l'inflation économique. Ce recentrage permet de respecter la vision Best Estimate d'avoir une moyenne d'inflation spécifique passée égale à celle de l'inflation future. Le deuxième modèle testé était un

autorégressif d'ordre 2. L'ordre a été déterminé en fonction de l'AIC maximal, il sera donc amené à varier en fonction de l'évolution des taux. Avec un tel modèle, il y avait un apport des variables supplémentaires venait ajouter une variable de décalage des précédentes, dans le but de corriger l'autocorrélation des résidus. En fin de compte, nous avons testé un un modèle VAR (vectoriel autorégressif) qui prend en compte les retards liés à la transmission de choc entre deux indices, en l'occurrence l'indice économique et les différents indices spécifiques. Cependant, ce dernier modèle présente une certaine limite car le nombre de paramètres n'est pas stable dans le temps et est très sensible aux variations des taux modélisés, bien que le choix de ce dernier se base sur des critères de pénalité tels que l'AIC, le Schwartz ou le BIC.

Les résultats de ces travaux ont permis de mettre en évidence les lacunes de la modélisation actuelle et seront réutilisés dans les futurs changements de modèle de Groupama pour l'inflation spécifique afin de la rendre plus pertinente.

En outre, ces travaux démontrent une bonne maîtrise de la modélisation de l'inflation dans le modèle interne de Groupama. Ils complètent les outils de validation et fournissent des pistes pour l'amélioration continue du modèle interne de Groupama.

Annexes

Définition de la loi des fréquences de la sinistralité

- La loi binomiale négative est une loi de comptage discrète qui décrit une expérience constituant à effectuer une série des tirages aléatoires indépendants avec la probabilité p d'avoir un succès et une probabilité $q = 1 - p$ d'avoir un échec. L'expérience se déroule jusqu'à l'obtention d'un nombre n des succès. Avant l'obtention des n succès, la variable aléatoire des nombres d'échec réalisés suit la loi binomiale négative de paramètres n , les nombres des succès attendus et p , la probabilité d'avoir un succès.

Par généralisation, les paramètres seront r et p qu'on estimera à l'aide de la méthode des moments et tels que :

- $r \in R_+^*$
- $0 < p < 1$

De densité :

$$f(k, n, p) = \binom{k+r-1}{k} \times p^r \times q^k$$

- La loi de Pareto est une loi appartenant au domaine d'attractivité de Fréchet et fait partie des lois dites à queue lourde. Elle est généralement utilisée pour modéliser les queues des distributions. Elle admet deux paramètres x_{min} δ , estimés par maximum de vraisemblance, avec une caractéristique de la distribution qui se présente comme suit :
-

$$\mathbb{P}(X > x) = \left(\frac{x}{x_{min}}\right)^{-\delta}, \quad \forall x \geq x_{min}$$

De densité :

$$f(x, x_{min}, \delta) = \frac{(\delta \times x_{min})^\delta}{x^{(\delta+1)}}$$

Etant donné que les sinistres graves sont majorés par les sinistres CAT, nous ajouterons un nouveau seuil x_{max} la densité devient :

$$f(x, x_{min}, \delta) = \frac{\delta x_{min}^\delta x^{-\delta-1}}{1 - \left(\frac{x_{min}}{x_{max}}\right)^\delta} \quad \forall x \in [x_{min}, x_{max}]$$

Démonstration du modèle de Barrie et Hibbert

Modèle de Black Karasinski (Modèle des taux nominaux) :

L'équation de diffusion du modèle de Black-Karasinski à deux facteurs, avec un drift est :

$$\begin{cases} d \log(n(t) + \delta) = \alpha_1(\log m(t) - \log(n(t) + \delta)) + \sigma_1 dZ_t^1 \\ d \log m(t) = \alpha_2(\mu(t) - \log m(t)) + \sigma_2 dZ_t^2 \end{cases}$$

Tel que :

$n(t)$: Taux nominal

α_1 et α_2 : Vitesses de retour à la moyenne

$m(t)$: Processus de moyenne long-terme

$\mu(t)$: Moyenne asymptotique (déterministe)

δ : Coefficient de déplacement ou shift

σ_1 et σ_2 : Volatilités

$(Z_t^1)_{t \geq 0}$ et $(Z_t^2)_{t \geq 0}$: Mouvements Browniens corrélés selon $d\langle Z^1, Z^2 \rangle_t = \rho_{12} dt$.

Posons $X_t = \log(n(t) + \delta)$ et $Y_t = \log m(t)$. En appliquant la formule d'Itô à $e^{\alpha_1 t} X_t$ et $e^{\alpha_2 t} Y_t$, on obtient :

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 e^{-\alpha_1 t} + \alpha_1 \int_0^t e^{-\alpha_1(t-s)} Y_s ds + \sigma_1 \int_0^t e^{-\alpha_1(t-s)} dZ_s^1 Y_t \\ Y_t &= Y_0 e^{-\alpha_2 t} + \alpha_2 \int_0^t e^{-\alpha_2(t-s)} \mu(s) ds + \sigma_2 \int_0^t e^{-\alpha_2(t-s)} dZ_s^2 \end{aligned}$$

En remplaçant Y_s par son expression dans la formule de X_t et en appliquant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 e^{-\alpha_1 t} + \frac{\alpha_1 Y_0}{\alpha_1 - \alpha_2} (e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \int_0^t \mu(s) (e^{\alpha_2(s-t)} - e^{\alpha_1(s-t)}) ds \\ &+ \frac{\alpha_1 \sigma_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \int_0^t (e^{\alpha_2(s-t)} - e^{\alpha_1(s-t)}) dZ_s^2 + \sigma_1 \int_0^t e^{-\alpha_1(t-s)} dZ_s^1 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$x(t) = \frac{\alpha_1^2 \sigma_2^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \left(\frac{1 - e^{-2\alpha_2 t}}{2\alpha_2} + \frac{1 - e^{-2\alpha_1 t}}{2\alpha_1} - 2 \frac{(1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t})}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)$$

$$y(t) = \frac{\sigma_1^2 (1 - e^{-2\alpha_1 t})}{2\alpha_1}$$

$$z(t) = \frac{2\alpha_1 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}}{\alpha_1 - \alpha_2} \left(\frac{1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}}{\alpha_1 + \alpha_2} - \frac{1 - e^{-2\alpha_1 t}}{2\alpha_1} \right)$$

On pose :

$$m_1 = X_0 e^{-\alpha_1 t} + \frac{\alpha_1 Y_0}{\alpha_1 - \alpha_2} (e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \int_0^t \mu(s) (e^{\alpha_2(s-t)} - e^{\alpha_1(s-t)}) ds$$

$$\sigma_1^2 = x(t) + y(t) + z(t)$$

Alors,

$$X_t \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$$

Modèle de Hull & White (Modèle de taux réels) :

Le modèle de Hull & White s'écrit :

$$dr(t) = \kappa(\theta(t) - r(t)) + \sigma dW_t$$

Avec :

$r(t)$: Taux réel

κ : Vitesse de retour à la moyenne

$\theta(t)$: Moyenne long-terme (déterministe)

σ : Volatilité

$(W_t)_{t \geq 0}$: Mouvement Brownien tel que $d\langle W, Z^1 \rangle_t = \rho_1 dt$ et $d\langle W, Z^2 \rangle_t = \rho_2 dt$.

De manière analogue au modèle de Black-Karasinski, on obtient :

$$r(t) = r(0)e^{-\kappa t} + \kappa \int_0^t \theta(s)e^{-\kappa(t-s)} ds + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s.$$

On en déduit que :

$$r(t) + r(t - \Delta t) = r(0)e^{-\kappa t}(1 + e^{\kappa \Delta t}) + \kappa \int_0^t \theta(s)(e^{-\kappa(t-s)} + e^{-\kappa(t-\Delta t-s)} \mathbf{1}_{\{s \leq t-\Delta t\}}) ds + \sigma \int_0^t (e^{-\kappa(t-s)} + e^{-\kappa(t-\Delta t-s)} \mathbf{1}_{\{s \leq t-\Delta t\}}) dW_s$$

Tels que :

$$m_2 = r(0)e^{-\kappa t}(1 + e^{\kappa \Delta t}) + \kappa \int_0^t \theta(s)(e^{-\kappa(t-s)} + e^{-\kappa(t-\Delta t-s)} \mathbf{1}_{\{s \leq t-\Delta t\}}) ds$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (2 + 2e^{-\kappa \Delta t} - e^{-2\kappa t} - e^{-2\kappa(t-\Delta t)} - 2e^{\kappa(\Delta t-2t)})$$

Donc,

$$r(t) + r(t - \Delta t) \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$$

Modèle Autorégressif à changement des régimes

Dynamique de projection :

Soit M la matrice de transition inflationniste modélisée par une chaîne de Markov homogène (X_t) :

$$M = \begin{pmatrix} p_{1,1} & 1 - p_{1,1} \\ 1 - p_{2,2} & p_{2,2} \end{pmatrix}$$

Pour p_1 et p_2 , les probabilités d'être dans un état ou l'autre.

Soit une inflation I_t calibrée avec un modèle autorégressif et un paramètre de retour vers la moyenne α :

$$I_{t+1} = \begin{cases} \mu_1 + \alpha(I_t - \mu_1) + \sigma_1 \epsilon_{t+1} & \text{si } X_{t+1} = 1 \\ \mu_2 + \alpha(I_t - \mu_2) + \sigma_2 \epsilon_{t+1} & \text{si } X_{t+1} = 2 \end{cases}$$

Tel que :

$$I_{t+1} = \mu_{X_{t+1}} + \alpha(I_t - \mu_{X_{t+1}}) + \sigma_{X_{t+1}} \epsilon_{t+1}$$

La diffusion des taux pour $t > 1$ étant déterministe, cela reviendrait à calculer une espérance de chacune des années futures conditionnellement aux taux simulés à la première années (stochastique) et à l'état décrit par la chaîne de Markov.

$$\mathbb{E}[I_n \mid I_1 = i_1, X_1 = x_1] = \sum_{(x_2, \dots, x_n) \in \{1,2\}^{n-1}} E[I_n \mathbf{1}_{\{X_2=x_2, \dots, X_n=x_n\}} \mid I_1 = i_1, X_1 = x_1]$$

Soit un événement $\{X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}$ tel que $(x_2, \dots, x_n) \in \{1: \text{Premier état de la matrice } M, 2: \text{Second état de la matrice } M\}^{n-1}$

I_n se réécrit en fonction de I_1 de la manière suivante :

$$I_n = \mu_{x_n} + \alpha^{n-1}(I_1 - \mu_{x_2}) + \sum_{i=1}^{n-2} \alpha^i (\mu_{x_{n-i}} - \mu_{x_{n-i+1}}) + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha^i \sigma_{n-i} \epsilon_{n-i}$$

En regroupant les μ_{x_j} , nous avons :

$$I_n = \sum_{i=2}^n \alpha^{n-i} (1 - \alpha) \mu_{x_i} + \alpha^{n-1} I_1 + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha^i \sigma_{n-i} \epsilon_{n-i}$$

$$\epsilon_2, \dots, \epsilon_n \in \mathcal{N}(0,1)$$

Alors,

$$E[I_k \mid I_1 = i_1, X_1 = x_1]$$

$$= \sum_{(x_2, \dots, x_n) \in \{1,2\}^{n-1}} E[(\sum_{i=2}^n \alpha^{n-i} (1 - \alpha) \mu_{x_i} + \alpha^{n-1} I_1 + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha^i \sigma_{n-i} \epsilon_{n-i}) \mathbf{1}_{\{X_2=x_2, \dots, X_n=x_n\}} \mid I_1 = i_1, X_1 = x_1]$$

Puisque $\epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ sont indépendants de la chaîne de Markov (X_t) , cela revient à dire :

$$E[\sum_{i=0}^{n-2} \alpha^i \sigma_{k-i} \epsilon_{n-i} \mathbf{1}_{\{X_2=x_2, \dots, X_n=x_n\}} \mid I_1 = i_1, X_1 = x_1] = 0$$

Et donc :

$$E[I_n \mid I_1 = i_1, X_1 = x_1]$$

$$= \sum_{(x_2, \dots, x_n) \in \{1,2\}^{n-1}} (\sum_{i=2}^n \alpha^{n-i} (1 - \alpha) \mu_{x_i} + \alpha^{n-1} I_1) \underbrace{P(X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n \mid X_1 = x_1)}_{M(x_1, x_2) \times \dots \times M(x_{n-1}, x_n)}$$

$$= \sum_{(x_2, \dots, x_n) \in \{1,2\}^{n-1}} \left(\sum_{i=2}^n \alpha^{n-i} (1 - \alpha) \mu_{x_i} \times \underbrace{P(X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n \mid X_1 = x_1)}_{M(x_1, x_2) \times \dots \times M(x_{n-1}, x_n)} + \alpha^{n-1} I_1 \underbrace{P(X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n \mid X_1 = x_1)}_{M(x_1, x_2) \times \dots \times M(x_{n-1}, x_n)} \right)$$

$$\prod_{j=1}^{n-1} P(x_j, x_{j+1}) = \underbrace{P(X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n \mid X_1 = x_1)}_{M(x_1, x_2) \times \dots \times M(x_{n-1}, x_n)}$$

$$= \sum_{(x_2, \dots, x_n) \in \{1,2\}^{n-1}} (\sum_{i=2}^n \alpha^{n-i} (1 - \alpha) \mu_{x_i} \times \prod_{j=1}^{n-1} M(x_j, x_{j+1}) + \alpha^{n-1} I_1 \prod_{j=1}^{n-1} M(x_j, x_{j+1}))$$

$$= \sum_{i=2}^n \alpha^{n-i} (1 - \alpha) \sum_{(x_2, \dots, x_n) \in \{1,2\}^{n-1}} \mu_{x_i} \prod_{j=1}^{n-1} M(x_j, x_{j+1}) + \alpha^{n-1} I_1 \sum_{(x_2, \dots, x_n) \in \{1,2\}^{n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} M(x_j, x_{j+1})$$

Avec $M(x_j, x_{j+1})$: Elément (x_j, x_{j+1}) de la matrice de transition M

Cependant:

$$\begin{aligned}
& \sum_{(x_2, \dots, x_n) \in \{1,2\}^{n-1}} \mu_{x_i} \prod_{j=1}^{n-1} M(x_j, x_{j+1}) \\
&= \sum_{(x_2, \dots, x_i) \in \{1,2\}^{i-1}} \mu_{x_i} \prod_{j=1}^{i-1} M(x_j, x_{j+1}) \underbrace{\sum_{(x_{i+1}, \dots, x_n) \in \{1,2\}^{n-i}} \prod_{j=i}^{n-1} M(x_j, x_{j+1})}_{=1} \\
&= \sum_{(x_2, \dots, x_i) \in \{1,2\}^{i-1}} \mu_{x_i} \prod_{j=1}^{i-1} M(x_j, x_{j+1}) \\
&= (M^{i-1} \mu)(x_1)
\end{aligned}$$

Avec

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

Finalement, cette espérance conditionnelle s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}
E[I_n \mid I_1 = i_1, X_1 = x_1] &= \sum_{i=2}^n \alpha^{n-i} (1 - \alpha) \left(M^{i-1} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \right) (x_1) + \alpha^{n-1} i_1 \\
&= E[I_n \mid I_1 = i_1, X_1 = x_1] = \sum_{i=2}^n \alpha^{n-i} (1 - \alpha) (M^{i-1} \mu)(x_1) + \alpha^{n-1} i_1
\end{aligned}$$

Modèles alternatifs de calibrage d'inflation spécifique

Quelques applications mathématiques:

Le modèle de calibrage de la volatilité de l'inflation spécifique se présente comme ceci :

$$C_i(t) = \mu_i + \phi_i CPI(t) + \sigma_i \epsilon_t$$

En effet on a :

$$E(C_i(t)) = \mu_i + \phi_i E(CPI(t))$$

$$b_i = \frac{C_i(t) - E(C_i(t))}{1 + E(C_i(t))}$$

Modèle de relation affine entre l'inflation économique centrée et spécifique :

$$b_i = \frac{\mu_i + \phi_i CPI(t) + \sigma_i \epsilon_t - \mu_i - \phi_i E(CPI(t))}{1 + (\mu_i + \phi_i E(CPI(t)))}$$

$$b_i = \frac{\phi_i (CPI(t) - E(CPI(t))) + \sigma_i \epsilon_t}{1 + (\mu_i + \phi_i E(CPI(t)))}$$

$$K_i = \mu_i + \phi_i E(CPI(t))$$

Dans ce cas nous pouvons trouver facilement la formule de la sur-inflation :

$$\begin{aligned}
& E(C_i(t)) = K_i \\
b_i &= \frac{\phi_i (CPI(t) - E(CPI(t))) + \sigma_i \epsilon_t}{1 + K_i}
\end{aligned}$$

Le modèle autorégressif d'ordre deux AR(2) :

Dont l'application mathématique pourra s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Delta C_i(t) &= \alpha_i Y_i(t) + \phi_i X_i(t-1) + \Delta C_i(t-1) + \epsilon(t) \\ \Delta C_i(t) &= \alpha_i Y_i(t) + \phi_i (\Delta C_i(t-1) - \Delta C_i(t-2)) + \Delta C_i(t-1) + \epsilon(t) \\ \Delta I_i(t) &= \alpha_i Y_i(t) - \phi_i \Delta C_i(t-2) + (\phi_i + 1) \Delta C_i(t-1) + \epsilon(t) \\ \Delta C_i(t) &= \alpha_i (\Delta CPI(t) - \Delta CPI(t-1)) - \phi_i \Delta C_i(t-2) + (\phi_i + 1) \Delta C_i(t-1) + \epsilon(t)\end{aligned}$$

Impliquant alors :

$$E(\Delta I_i(t)) = \alpha_i (E(\Delta CPI(t)) - E(\Delta CPI(t-1))) - \phi_i E(\Delta C_i(t-2)) + (\phi_i + 1) E(\Delta C_i(t-1))$$

$$\begin{aligned}\Delta C_i(t) - E(\Delta C_i(t)) &= \\ \alpha_i (\Delta CPI(t) - E(\Delta CPI(t))) - \alpha_i (\Delta CPI(t-1) - E(\Delta CPI(t-1))) & \\ - \phi_i (\Delta C_i(t-2) - E(\Delta C_i(t-2))) + (\phi_i + 1) (\Delta C_i(t-1) - E(\Delta C_i(t-1))) & \\ + \epsilon(t) &\end{aligned}$$

La formule de volatilité de l'inflation spécifique se présentera comme suit :

$$b_i = \frac{\Delta C_i(t) - E(\Delta C_i(t))}{1 + E(\Delta C_i(t))}$$

$$b_i = \frac{\alpha_i (\Delta CPI(t) - E(\Delta CPI(t))) - \alpha_i (\Delta CPI(t-1) - E(\Delta CPI(t-1))) - \phi_i (\Delta C_i(t-2) - E(\Delta C_i(t-2))) + (\phi_i + 1) (\Delta C_i(t-1) - E(\Delta C_i(t-1))) + \epsilon(t)}{1 + \alpha_i (E(\Delta CPI(t)) - E(\Delta CPI(t-1))) - \phi_i E(\Delta C_i(t-2)) + (\phi_i + 1) E(\Delta C_i(t-1))}$$

Bibliographies

- [1] Les hausses de salaires négociés pour 2022 – Billet n°269 Banque de France
- [2] Camille Cornand & Paul Hubert. 2022. Information Frictions Across Various Types of Inflation Expectations, Banque de France
- [3] BCE.2022. Bulletin économique n°4/2022, Banque Centrale Européenne
- [4] François Villeroy de Galhau. 2022. L'inflation et la politique monétaire dans le monde post Covid-19, Banque de France
- [5] Pierre Krämer et Aguibou Barry. 2017. La modélisation des frais sous Solvabilité 2. Mémoire d'actuariat, Centre d'études actuarielles
- [6] Anasse Youssfi. 2017. Couverture du Risque Responsabilité Civile Corporels Automobile avec les récentes évolutions réglementaires. Mémoire d'actuariat, CNAM
- [7] Valéry Caussarieu. 2018. Estimation et couverture du risque de revalorisation des rentes automobiles par l'inflation. Mémoire d'actuariat, Institut du Risk Management
- [8] Alexis Fauth. 2014. Modèle de taux surface de volatilité et introduction au risque de crédit
- [9] Ihab GUIRGUIS, Christophe DUTANG Introduction à l'assurance construction : Analyse de la sinistralité, tarification, provisionnement.
- [10] Paul JAEL. 2019. Ombres et lumières de l'économie politique
- [11] Fisher Black et Piotr Karasinski. 1991. Bond and option pricing when short rates are lognormal
- [12] John HULL and Alan WHITE. 2001. The general Hull-White Model and supercalibration
- [13] Institut des actuaires. 2018. Documents d'orientation, Les générateurs de scénarios économiques
- [14] Erwan GAUTIER et Hervé Le BIHAN. 2028. Shocks vs Menu Costs : Patterns of Price Rigidity in an Estimated Multi-Sector Menu-Cost Model
- [15] Maria José LUENGO-PRADO, Nikhil RAO, and Viacheslav SHEREMIROV. 2017. Sectoral Inflation and the Phillips Curve: What Has Changed since the Great Recession?
- [16] Stéphane GOUTTE.2014. Conditional Markov regime switching model applied to economic modelling
- [17] Yan LIU. 2013. Discretization of the Markov Regime Switching AR(1) Process
- [18] Minxian YANG. 2000. Some properties of vector autoregressive processes with Markov-switching coefficients