

**Mémoire présenté pour la validation de la Formation
« Certificat d'Expertise Actuarielle »
de l'Institut du Risk Management
et l'admission à l'Institut des actuaires
le**

Par : Alison Tonin

Titre : Réduction du nombre de simulations risque-neutre dans
un modèle ALM

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1an 2 ans)
Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut des
actuaires :*

Nordine Choukar

Youssef Dembélé

Faris Rouchati

*Membres présents du jury de l'Institut du Risk
Management :*

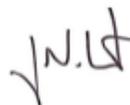
Secrétariat :

Bibliothèque :

Entreprise : MILLIMAN SAS

Nom : NEBOUT Jérôme

Signature et Cachet :


MILLIMAN SAS
14, Avenue de la Grande Armée
75017 PARIS
Tél : +33 1 42 99 15 60
SIREN : 501 606 534

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : ARROUY Pierre-Edouard

Signature :



Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise en
ligne sur un site de diffusion de documents
actuariels**

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise



Signature(s) du candidat(s)



Résumé

La gestion des actifs et des passifs constitue un enjeu majeur pour les compagnies d'assurance, nécessitant une modélisation avancée à travers les modèles *ALM* (*Asset Liability Management*). La Directive Solvabilité 2 précise que l'évaluation de ces engagements doit se faire en calculant la meilleure estimation des flux futurs, en tenant compte des garanties financières et des options incluses dans les contrats d'assurance, modélisées à l'aide de trajectoires stochastiques.

Dans ce contexte, l'importance du Générateur de Scénarios Économiques (GSE) est soulignée, permettant de prendre en compte les flux asymétriques résultant des mécanismes de participation aux bénéfices et des garanties financières. Toutefois, la nécessité de réduire le nombre de simulations dans le modèle *ALM* est un sujet actuel, notamment pour les activités d'assurance vie où les interactions entre l'actif et le passif sont complexes. Sur le marché, plusieurs méthodes de réduction de temps de calcul ont été explorées, en particulier celles basées sur la granularité des passifs ou la réduction du nombre de scénarios économiques.

Dans le cadre de ce mémoire, différentes méthodes de réduction de simulations ont été développées et testées se basant sur les méthodes proposées par l'*EIOPA* dans le cadre de son groupe *PHRSS* et des recherches de Y. Chueh sur la mesure de « significativité ». Indépendamment des méthodes retenues, les résultats montrent que l'utilisation d'un générateur de nombres aléatoires hybride permet d'améliorer la précision des estimations.

La méthode de cross-validation s'est révélée robuste dans divers environnements économiques et adaptée à un large éventail de portefeuilles d'assurance vie.

En conclusion, cette approche offre une approximation précise de la *VIF* en utilisant un nombre réduit de scénarios, tout en garantissant la fiabilité des résultats dans des conditions variées.

Mots clés : *ALM*, *VIF*, *TVOG*, réduction de simulations, générateur de scénarios économiques, générateur de nombres aléatoires.

Abstract

Asset and Liability Management is a major challenge for insurance companies, requiring advanced modelling using Asset Liability Management (ALM) models. The Solvency 2 Directive specifies that the estimation of the liabilities must take into account financial options and guarantees included in insurance contracts, modelled using stochastic trajectories.

In this context, the importance of the Economic Scenario Generator (ESG) is emphasised, enabling asymmetric cash-flows resulting from profit-sharing mechanisms and financial guarantees to be taken into account. However, the need to reduce the number of simulations in the ALM model is a current issue, particularly for life insurance business where the interactions between assets and liabilities are complex. On the market, several methods of reducing run time have been explored, in particular those based on the granularity of liabilities or the reduction in the number of economic scenarios.

In this report, various simulation reduction methods have been developed and tested, based on the methods proposed by the EIOPA group PHRSS and the research of Y. Chueh on the measure of « significance ». Regardless of the methods used, the results show that the use of a hybrid random number generator improves the precision of the estimates.

The cross-validation method proved to be robust in various economic environments and suitable for a large variety of life insurance portfolios.

In conclusion, this approach offers an accurate approximation of the VIF using a reduced number of scenarios, while guaranteeing the accuracy of the results under a variety of conditions.

Keywords : ALM, VIF, TVOG, reduction of simulations, economic scenario generator, random number generator.

Introduction

Les entreprises d'assurance font face à de nombreux enjeux en termes de modélisation. En particulier, pour des besoins réglementaires émanant de la Directive Solvabilité 2 les sociétés d'assurance vie doivent être en mesure d'estimer précisément la valeur de leurs bilans à fin d'année (ou de trimestre) mais également à tout instant sur demande de leur direction ou du régulateur. Elles doivent également être en mesure de justifier chacun des paramètres choisis au sein du modèle, ainsi que les résultats obtenus ; elles peuvent pour cela avoir recours à des calculs de sensibilités.

En effet, l'évaluation d'un bilan d'un assureur commercialisant des produits d'assurance-vie est particulièrement complexe car l'assureur doit être en mesure de prendre en compte toutes les interactions entre l'actif et le passif, en estimant également les options et garanties des contrats souscrits. Pour ce faire, les assureurs effectuent des valorisations stochastiques (également appelée « approche Monte-Carlo ») consistant à effectuer des milliers de projections correspondant aux différents états du monde probables des facteurs financiers impactant simultanément la valeur de l'actif et du passif. Cette évaluation dite « stochastique » implique un temps de calcul particulièrement long car elle nécessite d'évaluer l'intégralité du bilan (prenant en compte les spécificités de tous les contrats en portefeuille à une granularité plus ou moins fine) le long d'un grand nombre de trajectoires. Comme précisé ci-dessus, ce calcul doit être effectué régulièrement (annuellement ou trimestriellement) notamment pour produire le ratio de solvabilité, mais également ponctuellement pour d'autres besoins : sensibilité, modèle interne, ORSA, IFRS17 etc... Ce temps de calcul élevé peut être un frein à la mise en place de certaines analyses au sein des entreprises. Les travaux réalisés dans le cadre de ce mémoire apportent une solution à ce problème ; en proposant diverses méthodes de réduction de temps de calcul dans le cadre des modèles actif-passif.

La première partie de ce mémoire développe les différentes possibilités de réduction de temps de calcul. Elles peuvent concerner le degré d'agrégation des contrats comme la réduction du nombre de simulations. En particulier 6 méthodes de réduction de temps de calcul ont été analysées en 2011 par la *Society of Actuaries* sur un échantillon de 12 entreprises d'assurance aux États-Unis. Certaines d'entre elles portaient sur l'agrégation des données en entrée du modèle *ALM*, et d'autres sur les simulations en sortie du GSE. Cette analyse de marché a permis d'identifier des méthodes améliorant la rapidité des calculs sur des méthodes portant sur les données d'entrée du modèle de gestion actif-passif mais pas sur les simulations du Générateur de Scénarios Économiques (GSE).

La deuxième partie de ce mémoire portera sur l'analyse des scénarios publiés par l'*EIOPA* dans le cadre de son groupe de travail *PHRSS*. En effet, l'*EIOPA* a publié 3 méthodes de réduction de simulations et deux ajustements afin d'évaluer le montant de *TVOG* au sein des entreprises n'ayant pas recours à un GSE. Début 2023, l'*EIOPA* a publié des scénarios dans le cadre d'une première demande d'information qui seront analysés sur un portefeuille représentatif du marché français.

Ce mémoire va s'inspirer d'études déjà menées afin de proposer une méthode robuste intégrant diverses innovations ayant pour objectif de réduire le nombre de simulations de manière notable tout en conservant les propriétés de martingalité et de *market consistency* essentielles aux scénarios risque-neutre et en conservant une précision de calcul des indicateurs *ALM* (*VIF*, *BE*, écart de convergence) satisfaisante. L'outil développé dans le cadre de ce mémoire est appliqué au marché français, sur les environnements économiques de fin 2021 et de fin 2022. Il utilise en entrée des jeux de scénarios économiques risque-neutre incluant 3 000 simulations obtenues à partir du GSE appelé Milliman ESG constituant une référence de place sur le marché français.

En particulier, les 3 méthodes proposées par l'*EIOPA* dans le cadre de son groupe de travail *PHRSS* seront analysées ; de même que les méthodes proposées par Y. Chueh dans son article [6]

Après avoir analysé ces différentes méthodes, la dernière partie se focalisera sur les méthodes les plus efficaces de sorte à améliorer leur robustesse. En particulier nous détaillerons une procédure innovante d'objectivation des paramètres des approches de réduction du nombre de simulations reposant sur la mise en oeuvre d'une approche de cross-validation. Les différentes méthodes sélectionnées feront l'objet de nombreuses sensibilités : à l'environnement économique, au modèle de taux, à l'algorithme de nombre aléatoire etc... L'objectif est d'obtenir une méthode stable et précise permettant d'être adaptable au plus grand nombre de clients.

Table des matières

1	Contexte et étude de l'existant	18
1.1	Grandeurs d'intérêt	18
1.1.1	<i>Value In Force (VIF)</i>	19
1.1.2	<i>Best Estimate ou BE</i>	19
1.1.3	Le Générateur de Scénarios Economiques (GSE)	19
1.1.4	Taux sans risque	21
1.1.5	Risque-neutralité	21
1.1.6	Notion de « <i>market consistency</i> »	22
1.1.7	Modèle <i>ALM</i>	22
1.2	Directive Solvabilité 2	22
1.2.1	Importance du GSE dans la prise en compte des garanties financières	23
1.2.2	Nécessité de la réduction du nombre de simulations	23
1.3	Revue de littérature sur les méthodes de réduction de temps de calcul	25
1.3.1	Algorithme de réduction du nombre de simulations appliqué aux modèles de taux	25
1.3.2	Le <i>Scénario Picker Tool</i> proposé par la SOA	26
1.3.3	Model Efficiency Study Results	27
1.3.4	Méthodes retenues dans le cadre de ce mémoire	38
1.4	Introduction à <i>PHRSS</i>	38
2	Méthodologie Prudent Harmonized Reduced Set of Scenarios (<i>PHRSS</i>)	39
2.1	Étapes de l'étude	40
2.2	Présentation de la méthodologie définie par l' <i>EIOPA</i>	41
2.2.1	Étapes communes aux 3 méthodologies présentées	41
2.2.2	Présentation des 3 méthodes développées par l' <i>EIOPA</i>	42
2.3	Implémentation dans un modèle <i>ALM</i> représentatif du marché français	50
2.3.1	Bilan au 31/12/2021	50
2.3.2	Portefeuille d'actifs représentatif du marché français	51
2.3.3	Passif représentatif du marché français	51
2.4	Analyse des résultats <i>PHRSS</i>	52
2.4.1	Cohérence aux données de marché	54
3	Sélection de méthodes pertinentes	58
3.1	Trajetoires initiales émanant du GSE Milliman	58
3.1.1	Choix du générateur de nombres aléatoires	59
3.2	Ajustements appliqués aux scénarios	62

3.2.1	<i>WMC</i>	62
3.2.2	<i>MMA</i>	62
3.2.3	<i>Rescaling</i>	62
3.2.4	Résultats obtenus en fonction de l'ordre d'application des ajustements	63
3.3	Techniques de sélection de trajectoires implémentées	64
3.3.1	Méthode A : Sélection de méthodes aléatoires	64
3.3.2	Méthode B : Écart au portefeuille de référence	67
3.3.3	Méthode C : Facteur d'actualisation basé sur la méthodologie de Y. Chueh et de la SOA	68
3.4	Analyse des résultats obtenus sur les 3 méthodes	70
3.5	Univers en hausse des taux, estimation à fin 2022	71
3.6	Sensibilité au modèle de taux	74
3.7	Cross-validation	76
3.7.1	Analyse des corrélations	79
3.7.2	Sélection du nombre optimal de simulation à l'aide de la cross-validation	81
3.8	Prise en compte de l'asymétrie de la <i>VIF</i>	85
3.9	Effizienz énergétique liée à la réduction du nombre de simulations	85
3.9.1	Temps de calcul du GSE	86
3.9.2	Temps de calcul du modèle ALM	86
3.10	Conclusion	89

Note de synthèse

Contexte et problématique

La gestion des actifs et des passifs est au cœur de l'activité des compagnies d'assurance, nécessitant une modélisation poussée effectuée à l'aide de modèles *ALM* (*Asset Liability Management*). Ces modèles permettent de projeter les actifs détenus par la compagnie en face de ses passifs, tels que les engagements envers les assurés jusqu'à extinction des contrats.

La Directive Solvabilité 2 précise que l'évaluation de ces engagements s'effectue à l'aide du calcul de la meilleure estimation des flux futurs, conformément à des normes strictes encadrant les provisions techniques prudentielles. Cette meilleure estimation doit tenir compte des garanties financières et des options incluses dans les contrats d'assurance qui sont modélisées à l'aide de trajectoires dites « stochastiques ».

Dans ce contexte, l'importance du Générateur de Scénarios Economiques (GSE) est mise en avant, car celui-ci permet de prendre en compte les flux asymétriques résultant des mécanismes de participation aux bénéfices et des garanties financières présents dans les contrats d'assurance vie. Ce générateur permet de projeter aléatoirement les flux des différents actifs, le long de nombreuses trajectoires stochastiques, nécessaires pour évaluer l'asymétrie du partage de la richesse entre assureur et assuré.

La nécessité de réduire le nombre de simulations dans le modèle *ALM* est un sujet d'actualité, notamment dans le domaine de l'assurance vie où les interactions entre l'actif et le passif des assureurs sont complexes. Le lancement du modèle *ALM* sur des milliers de trajectoires peut s'avérer coûteux en termes de temps, de ressources serveur et d'énergie. Ainsi, les assureurs recherchent actuellement des outils leur permettant d'obtenir des résultats proches de ceux générés par le GSE, mais en un temps réduit.

Plusieurs solutions peuvent constituer des alternatives prometteuses, offrant la possibilité de réduire significativement le temps de calcul.

Solutions envisagées sur le marché

La revue de littérature sur les méthodes de réduction de temps de calcul propose principalement deux stratégies pour diminuer le temps de calcul :

- Agir sur la granularité des passifs en entrée du modèle *ALM* (autrement dit agréger les contrats similaires entre eux)
- Réduire le nombre de simulations présentes dans les tables de scénarios économiques en entrée du modèle *ALM*

Six méthodes reposant sur l'une ou l'autre de ces stratégies ont été testées aux Etats-Unis à travers une étude nommée « Model Efficiency Study Results » regroupant 12 participants. Bien que les méthodes portées sur la granularité en entrée du modèle et particulièrement sur les « model points » aient permis d'obtenir des résultats satisfaisants, aucune méthode de réduction de simulations n'a permis d'obtenir de tels résultats lors de cette étude. C'est la raison pour laquelle ce mémoire apporte une nouvelle vision sur la réduction de temps de calcul tout en explorant cette fois-ci le marché français et ses spécificités.

Concernant les méthodes de réduction de simulations, les recherches qui sont les plus avancées à ce stade sont celles d'Yvonne C. M. Chueh, notamment à travers son article [6] propose trois méthodes de réduction du nombre de simulations dont l'une d'entre elle basée sur la significativité des scénarios sera étudiée dans ce mémoire et appelée « Méthode C » dans la suite.

Analyses des scénarios proposés par l'*EIOPA*

En 2022, l'*EIOPA* a mis en place un groupe de travail nommé « *Prudent Harmonized Reduced Set of Scenarios* » ou *PHRSS* visant à évaluer la *TVOG* (Valeur Temps des Options et Garanties) pour les compagnies d'assurance n'utilisant pas d'évaluation stochastique. Ces compagnies ne disposant pas de GSE, l'*EIOPA* prévoit de fournir périodiquement des tables de scénarios économiques intégrant un nombre très limité de trajectoires (9) afin d'estimer leur *TVOG*. Ces scénarios sont ensuite implémentés dans le modèle *ALM* des compagnies concernées pour projeter le bilan de manière stochastique. Trois méthodes ont été proposées pour sélectionner quelques trajectoires au sein d'un échantillon plus large : la sélection aléatoire de quelques trajectoires stochastiques au sein de l'échantillon complet, l'identification de quelques trajectoires correspondant à des quantiles au sein de l'échantillon complet, et l'utilisation de quantiles basés sur le plus proche voisin (voir sous-section 2.2.2). Les 6 jeux de 9 scénarios proposés par l'*EIOPA* sont résumés dans le tableau suivant :

TABLE 1 – Liste des scénarios publiés par l’*EIOPA*

Lot de scénario	Méthode de sélection des scénarios	Spécificités
Lot de scénario n°1	Méthode 1	Graine n°1
Lot de scénario n°2	Méthode 1	Graine n°2
Lot de scénario n°3	Méthode 2	Liste de quantiles A
Lot de scénario n°4	Méthode 2	Liste de quantiles B
Lot de scénario n°5	Méthode 3	Graine n°1
Lot de scénario n°6	Méthode 3	Graine n°2

Le calibrage du GSE utilisé par l’*EIOPA* pour générer un grand nombre de trajectoires économiques est basé sur les chocs de la formule standard pour des raisons de stabilité méthodologique et de coûts. Afin de déterminer la pertinence des méthodologies, l’*EIOPA* a publié six sets de scénarios à fin 2021 basés sur ces trois méthodes et deux ajustements des scénarios appelés *MMA* (voir sous-section 3.2.2) et *WMC* (cf. sous-section 3.2.2) pour qu’elles soient testées et comparées par des acteurs possédant un GSE. Dans le cadre de ce mémoire ces six jeux de 9 scénarios ont été analysés sur un modèle *ALM* représentatif du marché français à fin 2021. Les résultats obtenus sur l’écart de convergence¹ et la *TVOG* sont en faveur de la méthode 1 (lots 1 et 2) ne permettant pas de conclure sur la méthode 3 qui reste intéressante, malgré son manque d’efficacité sur 9 scénarios uniquement (voir tableau ci-dessous).

TABLE 2 – Résultats PHRSS

Lot étudié	Lot 1	Lot 2	Lot 3	Lot 4	Lot 5	Lot 6
Fuite de modèle	-0,33%	0,42%	1,29%	2,34%	0,59%	-1,02%
% de la <i>TVOG</i> estimée	114%	109%	141%	129%	119%	129%

A noter que la cible de *TVOG* que nous souhaitons approcher est celle en sortie du GSE Milliman reposant sur 3 000 simulations. En dehors des méthodes en elles-même il existe deux biais majeurs dans notre comparaison : les données de calibrage (données de marché dépendant de la date de valorisation pour le GSE Milliman contre des données indépendantes de la date de valorisation estimées de sorte à retrouver les chocs de la Formule Standard pour *PHRSS*) et la structure de corrélation qui n’est modélisée que dans le GSE Milliman ; les différents facteurs de risques étant considérés indépendants dans les scénarios proposés par l’*EIOPA*.

1. La fuite de modèle ou écart de convergence est calculé comme : Valeur de marché initiale - BE - VIF

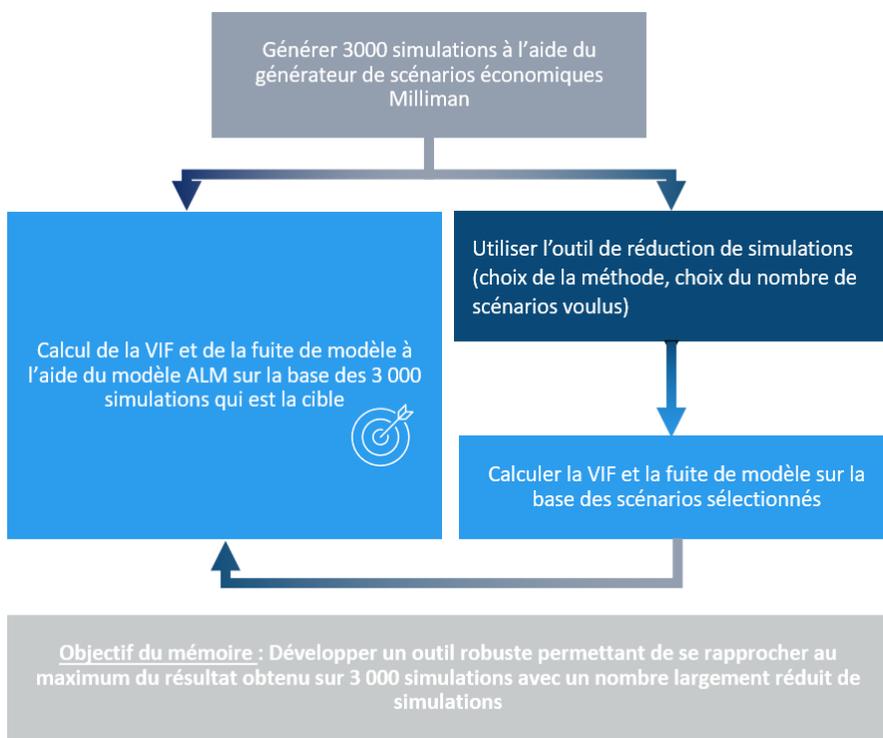
Sélections de méthodes pertinentes

Dans cette partie les méthodes les plus pertinentes parmi celles étudiées dans les deux chapitres précédents ont été développées, afin de construire une méthode robuste permettant d'estimer la *VIF* (la *Value-In-Force*) avec précision tout en limitant l'écart de convergence et respectant les bonnes pratiques sur les GSE énoncées par l'ACPR, en particulier, le respect des propriétés de martingalité et de *market-consistency*. Trois méthodes ont été retenues :

- Méthode A : Sélection de trajectoires aléatoires (inspirée de la méthode 1 développée par l'*EIOPA*)
- Méthode B : Utilisation de la valeur de marché du portefeuille de l'assureur (inspirée de la méthode 3 développée par l'*EIOPA*)
- Méthode C : Mesure de « significativité » permettant de sélectionner les scénarios les plus significatifs

L'outil développé dans cette partie intervient donc en entrée du modèle *ALM*, le but étant d'obtenir des résultats les plus proches avec un nombre réduit de simulations de ceux obtenus avec les 3 000 simulations de l'ESG Milliman (voir schéma ci-dessous)

FIGURE 0.0.1 – Approche proposée pour réduire le temps de calcul



Afin de vérifier que l'outil développé est suffisamment robuste, plusieurs tests ont été effectués :

Influence du GSE de référence sous-jacent

Influence du choix du *RNG* sur les trajectoires en sortie du GSE

Il a été montré que la qualité du générateur de nombres aléatoires (*RNG*) et de la graine choisie avait un impact significatif sur les tests de validation, la fuite de modèle et les sorties du modèle *ALM*. En particulier, un *RNG* hybride a été testé, ce générateur de nombres aléatoires possède deux caractéristiques : il remplit l'espace de manière uniforme et converge particulièrement rapidement comparé aux autres *RNG*.

Une comparaison entre le *RNG* hybride et le *RNG* Mersenne-Twister a été effectuée sur les trois méthodes retenues (A, B et C chacune sans aucun ajustement) révélant que la méthode A, qui consiste à sélectionner aléatoirement des scénarios parmi les 3 000 simulations, est plus efficace avec un *RNG* hybride. La méthode B, basée sur la sélection de quantiles sur la base d'un indice portefeuille reconstruit à partir des trajectoires du GSE, produit des résultats satisfaisants avec un *RNG* Mersenne-Twister, mais est encore plus précise avec un *RNG* hybride. La méthode C, basée sur la méthodologie la mesure de « significativité » des scénarios, offre une bonne homogénéité des scénarios sélectionnés et s'avère également plus précise avec un *RNG* hybride (voir tableau ci-dessous).

TABLE 3 – Résultats du modèle *ALM* sur les 3 méthodes développées ci-dessus avec un *RNG* Mersenne-Twister sur 200 simulations à fin 2021

Métrique	Méthode A	Méthode B	Méthode C
Fuite de modèle	-0,86%	0,05%	0,46%
% TVOG estimée	91%	135%	99%
% VIF estimée	136%	-40%	104%
% <i>RMSRE</i> (test de martingalité)	4,99%	9,46%	4,30%
% <i>RMSRE</i> (test de <i>market consistency</i>)	6,04%	6,27%	4,88%

Il est à noter que la métrique de *RMSRE* correspond à l'erreur quadratique moyenne sur les tests de martingalité d'une part et de *market consistency* d'autre part. Cette métrique permet d'adresser la qualité des trajectoires du GSE quant au respect des propriétés fondamentale de martingalité et de *market-consistency*.

TABLE 4 – Résultats du modèle *ALM* sur les 3 méthodes développées ci-dessus avec un *RNG* hybride sur 200 simulations à fin 2021

Métrique	Méthode A	Méthode B	Méthode C
Fuite de modèle	0,02%	-0,28%	0,11%
% TVOG estimée	102%	99%	100%
% VIF estimée	115%	91%	99%
% <i>RMSRE</i> (test martingale)	3,08%	3,54%	5,58%
% <i>RMSRE</i> (test de <i>market consistency</i>)	3,61%	6,03%	5,74%

En conclusion, l'utilisation d'un *RNG* hybride semble être la meilleure option pour toutes les méthodes, offrant des résultats plus précis et réduisant la fuite de modèle ainsi que les erreurs de martingalité et de *market consistency*. La sélection du nombre de simulations et les ajustements appliqués aux méthodes jouent également un rôle crucial dans la précision des résultats.

Deux autres sensibilités ont été effectuées sur l'univers de taux et sur le modèle de taux.

Influence de l'univers économique sur les résultats obtenus avec l'outil de réduction de simulation

Une analyse a été effectuée sur l'évolution de l'environnement financier jusqu'à fin 2022, par rapport à la situation à fin 2021. Les conditions de marché ont considérablement changé, avec une hausse significative des taux et une baisse des performances des actions. Par exemple, l'OAT 10 ans a enregistré une hausse de 2,92%, tandis que l'indice *Euro Stoxx 50* a chuté d'environ 12% au cours de l'année 2022. Cet environnement a été appliqué à la méthode A. Les résultats obtenus montrent des ordres de grandeur de précision d'estimation des indicateurs *ALM* similaires à ceux de fin 2021, malgré l'écart important dans les valeurs de *VIF* et de *TVOG* entre les deux périodes, ce qui confirme la robustesse de celle-ci, même dans des conditions de marché changeantes.

Influence du modèle de taux sur les résultats obtenus avec l'outil de réduction de simulation

Une sensibilité au changement du modèle de taux utilisé dans le GSE a été réalisée. Cette sensibilité est évaluée en comparant les résultats obtenus avec deux modèles de taux différents. Les deux modèles ainsi comparés sont : le modèle de taux initial, appelé DDLMM, et un autre modèle couramment utilisé sur le marché, le G2++.

Les résultats montrent que le changement du modèle de taux initial (DDLMM) pour le modèle G2++ a un impact légèrement positif sur la *VIF*, mais cet écart est négligeable à fin 2021 sur les 3 000 simulations.

Cependant, lorsqu'on réduit le nombre de simulations à 200 après l'application des ajustements (*MMA*, *WMC* et *rescaling*) avec les méthodes A et C, les résultats avec le modèle G2++ montrent une

sur-estimation de la VIF par rapport au modèle initial. Cela suggère que la méthode proposée est sensible au modèle de taux utilisé - ce qui est prévisible, étant donné son influence significative sur la dynamique des produits de taux - qui constituent une grande partie du portefeuille modélisé.

En conclusion, le choix du modèle de taux peut avoir un impact sur les résultats du modèle, et il est essentiel de tenir compte de cette sensibilité lors de l'application de la méthode.

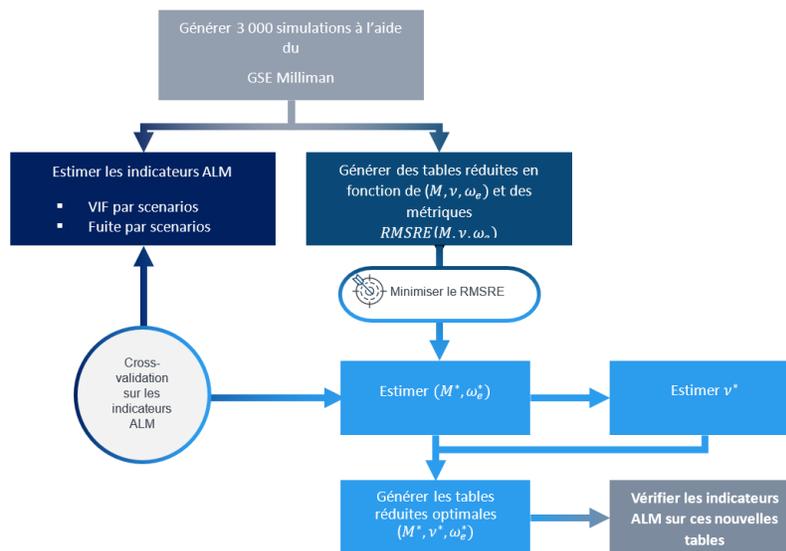
Optimisation des trajectoires sélectionnées à l'aide d'une cross-validation des paramètres de l'outil de réduction de simulations

Enfin, la section sur la cross-validation permet d'approfondir l'étude des différentes méthodes de réduction de simulations, en se concentrant sur l'optimisation des paramètres, à savoir le paramètre du nombre réduit de simulations et le paramètre d'entropie de l'algorithme WMC conduisant aux meilleurs résultats possibles. Pour déterminer les paramètres optimaux, trois principales métriques sont définies :

1. Métrique sur la VIF : Cette mesure évalue la proximité entre la VIF estimée par notre algorithme de réduction de simulations (VIF estimée) et celle obtenue par un calcul stochastique basé sur 3 000 simulations avec du GSE Milliman (VIF cible) du modèle ALM .
2. Métrique sur la fuite de modèle (ou écart de convergence) : Cette métrique vérifie que l'écart de convergence reste limité, ce qui revient indirectement à estimer conjointement la VIF et le BE (*Best Estimate*).
3. Métrique $RMSRE$ (*Root Mean Square Relative Error*) : Cette métrique vérifie que les tests de *market consistency* et de martingalité restent satisfaisants sur les simulations réduites.

Pour cela plusieurs étapes ont été mis en oeuvre : la génération de scénarios stochastiques, l'estimation des métriques sur ces scénarios, la création de lots de réduction de scénarios pondérés, l'optimisation des paramètres, et la vérification des résultats (voir schéma ci-dessous).

FIGURE 0.0.2 – Étapes de la cross-validation



1. Pour un nombre de simulation fixé variant de x à y , et pour chaque métrique, l'estimation du paramètre d'entropie qui optimise la métrique en question (voici l'exemple avec la *VIF* et le *RMSRE*).
2. Puis, à l'aide d'une analyse des corrélations des rangs, la mise en avant d'un lien fort entre le paramètre d'entropie optimal au sens de la métrique *VIF* et le paramètre d'entropie optimal au sens de la métrique *RMSRE*. Cette étude montre qu'il est donc possible d'améliorer l'estimation de la *VIF* en optimisant le paramètre d'entropie de sorte à minimiser la *RMSRE*. Comme la *RMSRE* est une mesure la qualité des scénarios du GSE et est indépendante du modèle *ALM*, cette approche permet de se baser sur un critère objectif commun à tous les assureurs et non biaisé par le modèle *ALM*.
3. Ainsi, la méthodologie de cross-validation utilisée dans ce mémoire reste pertinente pour n'importe quel assureur.
4. Enfin, l'approche de cross-validation est mise en place afin de déterminer un nombre réduit de scénarios qui implique des estimations suffisamment précises.

La sélection du nombre optimal de simulations est effectuée en utilisant la méthode A pour un nombre de simulations limité à 40, et la méthode C pour un nombre plus élevé de simulations. Des seuils sont définis pour garantir des performances satisfaisantes en termes de *VIF* et de fuite de modèle, conformément aux bonnes pratiques établies par l'ACPR. On obtient les résultats présentés dans le tableau ci-dessous permettant de conclure que pour 127 simulations les résultats sont satisfaisants au regard des métriques retenues.

TABLE 5 – Résultats *ALM* de la cross-validation à fin 2021

Nombre de simulations	Entropie	<i>RMSRE</i>	Métrique sur la <i>VIF</i>	Fuite de modèle	TVOG
63	0,4	4,43%	15,1%	0,38%	2,33%
127	0,16	3,10%	0,25%	0,34%	0,04%
255	2,5	2,06%	0,33%	0,16%	0,05%

Un exercice de back-test est également effectué pour valider la robustesse de la méthode dans des environnements économiques différents. Les résultats montrent que la méthode de cross-validation est robuste dans le temps, et adaptable à divers environnements économiques et acteurs sur le marché.

En conclusion, ce mémoire démontre que l'utilisation de cette approche de réduction de simulations permet d'obtenir une approximation suffisamment précise de la *VIF*, en utilisant un peu plus d'une centaine de scénarios. En effet, la méthodologie proposée permet de s'adapter à un large éventail de portefeuille d'assurance vie en optimisant les paramètres définis à l'aide d'une cross-validation à partir du critère GSE de *RMSRE*, indépendant des résultats du modèle *ALM* et commun à tous les assureurs.

Executive summary

Context and issues

Asset and liability management is at the center of an insurance company's business, requiring advanced modelling using Asset Liability Management (ALM) models. These models make it possible to project the assets held by the company in relation with its liabilities, such as policyholder commitments.

The Solvency 2 Directive specifies that the valuation of these commitments is based on the calculation of the best estimate of future cash flows, in accordance with the strict standards for prudential technical provisions. This best estimate must take account of financial guarantees and options included in insurance contracts, which are modelled using « stochastic trajectories ».

In this context, the importance of the Economic Scenario Generator (ESG) is highlighted, as it allows asymmetric flows resulting from profit-sharing mechanisms and financial guarantees in life insurance contracts to be taken into account. This generator can be used to randomly project the cash-flows of different assets along numerous stochastic trajectories, which are needed to assess the asymmetry in wealth sharing between insurer and policyholder.

The need to reduce the number of simulations in the ALM model is a current issue, particularly in the domain of life insurance where the interactions between insurers' assets and liabilities are complex. Running the model on thousands of trajectories can be time-consuming and costly in terms of server resources and energy. Insurers are therefore currently looking for tools that will enable them to obtain results close to those generated by the GSE, whilst reducing the time required.

There are a number of solutions that could be considered as promising alternatives, offering the possibility of significantly reducing computing time.

Solutions considered on the market

The literature review on simulation reduction methods proposes two main strategies for reducing computation time :

- Reducing the granularity of liabilities entering the model ALM (in other words, aggregating similar contracts)
- Reducing the number of simulations in the economic scenario tables entering the model

Six methods based on one or other of these strategies were tested in the United States in a study called « Model Efficiency Study Results » involving 12 participants. Although the methods focusing on model input granularity produced satisfactory results, no simulation reduction method produced such results in this study. For this reason, this report proposes a new approach to reducing computing time, this time exploring the French market and its specific characteristics.

Concerning simulation reduction methods, the most advanced research at this stage is that of Yvonne C. M. Chueh, in particular through her article [6] proposes three methods for reducing the number of simulations, one of which based on the significance of the scenarios will be investigated in this report and subsequently referred to as the « Method C ».

Analyses of the scenarios proposed by EIOPA

In 2022, EIOPA created a working group called Prudent Harmonized Reduced Set of Scenarios or PHRSS to evaluate the TVOG (Time Value of Options and Guarantees) for insurance companies that do not use stochastic valuation. As these companies do not dispose of a GSE, the EIOPA plans to periodically provide economic scenario tables integrating a very limited number of trajectories (9) in order to estimate their TVOG. These scenarios are then implemented in the ALM model of the companies concerned to project the balance sheet stochastically. Three methods have been proposed for selecting a few trajectories within a larger sample : random selection of a few stochastic trajectories within the full sample, identification of a few trajectories corresponding to quantiles, and the use of quantiles based on the nearest neighbour (see subsection 2.2.2). The 6 sets of 9 scenarios proposed by EIOPA are summarised in the following table :

TABLE 6 – Scenarios published by EIOPA

Scenario set	Method for selecting scenarios	Specificity
Scenario set 1	Method 1	Seed 1
Scenario set 2	Method 1	Seed 2
Scenario set 3	Method 2	Percentile list A
Scenario set 4	Method 2	Percentile list B
Scenario set 5	Method 3	Seed 1
Scenario set 6	Method 3	Seed 2

The GSE calibration used by the EIOPA to generate a large number of economic trajectories is based on standard formula shocks for reasons of methodological stability and cost. In order to determine the appropriateness of the methodologies, the EIOPA published six sets of scenarios at the end of 2021 based on these three methods and two adjustments called MMA (see sub-section 3.2.2) and WMC (sub-section 3.2.1) so that they could be tested and compared by stakeholders with a GSE. In the context of this report, these six sets of 9 scenarios have been analysed on a model that is representative of the French

market at the end of 2021. The results obtained on the convergence gap² and the TVOG are in favour of method 1 (set 1 and 2) and do not allow us to conclude on method 3 which remains interesting, despite its inefficiency on 9 scenarios only (see table below).

TABLE 7 – PHRSS results

Set	Set 1	Set 2	Set 3	Set 4	Set 5	Set 6
Leakage	-0,33%	0,42%	1,29%	2,34%	0,59%	-1,02%
% of the TVOG estimated	114%	109%	141%	129%	119%	129%

Please note that the target of TVOG that we wish to approach is the one resulting from the GSE Milliman based on 3,000 simulations. In addition to the methods themselves, there are two major biases in our comparison : the calibration data (market data dependent on the valuation date for the GSE Milliman versus data independent of the valuation date estimated in such a way as to reproduce the shocks of the Standard Formula for PHRSS) and the correlation structure which is only modelled in the GSE Milliman ; the different risk factors are considered independent in the scenarios proposed by EIOPA.

Selection of relevant methods

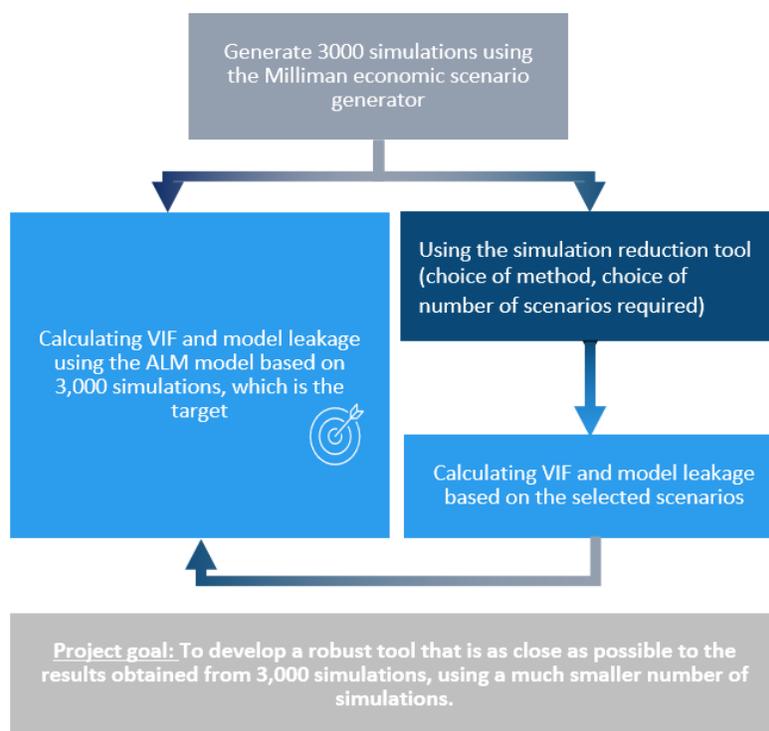
In this section, the most relevant methods among those studied in the two previous chapters have been investigated, in order to establish a robust method for estimating the VIF accurately while minimising the convergence gap and respecting the good practices on GSEs stipulated by the ACPR, in particular, respect for the martingality and market-consistency properties. Three methods were selected :

- Method A : Selection of random trajectories (inspired by method 1 developed by EIOPA)
- Method B : Using the market value of the insurer’s portfolio (inspired by method 3 developed by EIOPA)
- Method C : « Significance » measure used to select the most significant scenarios

The tool developed in this section is used as an input to the ALM model, the objective being to obtain results as close as possible, with a reduced number of simulations, to those obtained with the 3,000 simulations of the Milliman GSS (see diagram below).

2. The model leakage or convergence gap is calculated as : Initial market value - BE - VIF

FIGURE 0.0.3 – Proposed approach to reduce calculation time



To check that the tool developed is reasonably robust, a number of sensitivities were carried out :

Influence of underlying reference GSE

Influence of the choice of RNG on GSE trajectories

It was demonstrated that the quality of the random number generator (RNG) and the seed chosen had a significant impact on the validation tests, the model leakage and the outputs of the ALM model. In particular, a hybrid random number generator was tested. This random number generator has two characteristics : it fills the space uniformly and converges particularly quickly compared with other random number generators.

A comparison between the hybrid RNG and the Mersenne-Twister RNG was carried out. Mersenne-Twister was performed on the three methods retained (A, B and C, each without any adjustment), showing that method A, which consists of randomly selecting scenarios from the 3,000 simulations, is more effective with a hybrid RNG. Method B, based on the selection of quantiles on the basis of a portfolio index reconstructed from the GSE trajectories, produces satisfactory results with a Mersenne-Twister RNG, but is even more accurate with a hybrid RNG. Method C, based on the methodology of measuring the « significance » of scenarios, provides good homogeneity of the scenarios selected and also appears to be more accurate with a hybrid RNG (see table below).

TABLE 8 – ALM and RMSRES outputs based on a Milliman ESG set in Mersenne, 200 simulations, end of year 2021

Metric	Method A	Method B	Method C
Leakage	-0,86%	0,05%	0,46%
% TVOG estimated	91%	135%	99%
% VIF estimated	136%	-40%	104%
% <i>RMSRE</i> (Martingale test)	4,99%	9,46%	4,30%
% <i>RMSRE</i> (Market-consistency test)	6,04%	6,27%	4,88%

It has to be noted that the RMSRE metric corresponds to the root mean square error on the martingality test on the one hand and on the market consistency test on the other hand. This metric makes it possible to consider the quality of the GSE trajectories in terms of compliance with the fundamental properties of martingality and market-consistency.

TABLE 9 – ALM and RMSRES outputs based on a Milliman ESG set in hybrid, 200 simulations, end of year 2021

Metric	Method A	Method B	Method C
Leakage	0,02%	-0,28%	0,11%
% TVOG estimated	102%	99%	100%
% VIF estimated	115%	91%	99%
% <i>RMSRE</i> (Martingale test)	3,08%	3,54%	5,58%
% <i>RMSRE</i> (Market-consistency test)	3,61%	6,03%	5,74%

In conclusion, the use of a hybrid RNG seems to be the best option for all methods, delivering the more accurate results and reducing model leakage as well as martingality and market consistency errors. The selection of the number of simulations and the adjustments applied to the methods also play a crucial role in the accuracy of the results.

Two other sensitivities were carried out on the rates universe and the rates model.

Influence of the economic environment on the results obtained with the simulation reduction tool

An analysis has been carried out of the financial environment up to the end of 2022, compared with the situation at the end of 2021. Market conditions have changed significantly, with a substantial rise in interest rates and a fall in the performance of equities. For example, the 10-year OAT increased by 2.92%, while the Euro Stoxx 50 index fell by around 12% over the course of 2022. This environment was applied to the A method. The results obtained show similar orders of magnitude of accuracy in estimating the ALM indicators to those at the end of 2021, despite the significant difference in the values of VIF and TVOG between the two periods, which confirms the robustness of this method, even in changing market conditions.

Influence of the rates model on the results obtained with the simulation reduction tool

Sensitivity to the rate model used in the GSE was carried out. This sensitivity is evaluated by comparing the results obtained with two different rate models. The two models compared are : the initial rate model DDLMM, and another model frequently used on the market, the G2++.

The results show that switching from the initial rate model (DDLMM) to the G2++ model has a slightly positive impact on the VIF, but this difference is negligible at the end of 2021 over the 3,000 simulations.

However, when the number of simulations is reduced to 200 after applying the adjustments (MMA, WMC and rescaling) with methods A and C, the results with the G2++ model show an overestimation of the VIF compared with the initial model. This suggests that the proposed method is sensitive to the interest rate model used - which is to be expected, given its significant influence on the dynamics of interest rate products - which constitute a large part of the modelled portfolio.

In conclusion, the choice of interest rate model may have an impact on the results of the model, and it is essential to take this sensitivity into account when applying the method.

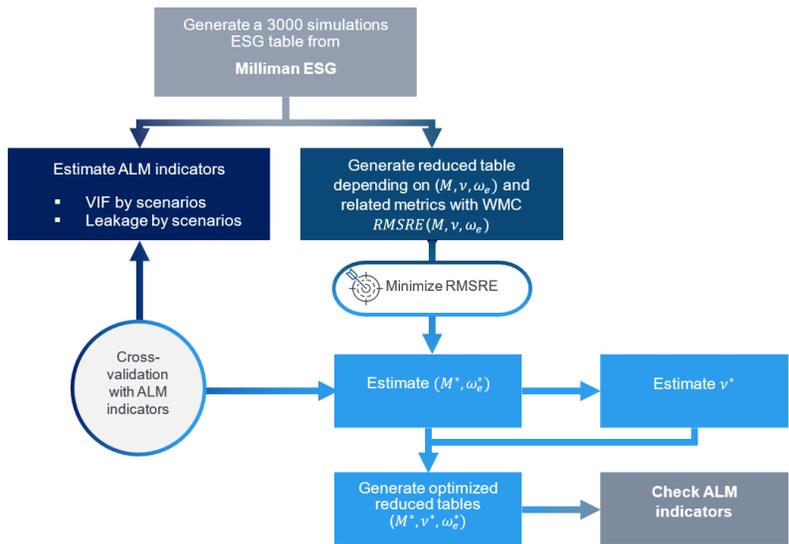
Optimisation of selected trajectories using cross-validation on tool parameters

Finally, the section on cross-validation explores in greater depth the different methods for reducing simulations, focusing on the optimisation of parameters, specifically the parameter for the reduced number of simulations and the entropy parameter of the algorithm WMC leading to the best possible results. To determine the optimal parameters, three main metrics are defined :

1. Metric on the VIF : This metric evaluates the nearness between the VIF estimated by our simulation reduction algorithm (estimated VIF) and that obtained by a stochastic calculation based on 3,000 simulations with Milliman EGS (target VIF) of the ALM model.
2. Metric on leakage (or convergence) : This metric checks that the convergence remains limited, which indirectly corresponds to jointly estimating the VIF and the BE (Best Estimate).
3. Metric RMSRE (Root Mean Square Relative Error) : This metric verifies that the market consistency and martingality tests remain satisfactory on reduced simulations.

To achieve this, several steps were implemented : the generation of stochastic scenarios, the estimation of metrics on these scenarios, the creation of weighted scenario reduction sets, the optimisation of parameters, and the verification of results (see diagram below).

FIGURE 0.0.4 – Cross-validation steps



1. For a fixed number of simulations varying from x to y, and for each metric, estimation of the entropy parameter which optimises the metric in question (here is the example with the VIF and the RMSRE).
2. Then, with the help of an analysis of rank correlations, the highlighting of a strong link between the optimal entropy parameter in the sense of the metric VIF and the optimal entropy parameter in the sense of the metric RMSRE. This study indicates that it is therefore possible to improve the estimation of the VIF by optimising the entropy parameter so as to minimise the RMSRE. As the RMSRE is a measure of the quality of the ESG scenarios and is independent of the ALM model, this approach makes it possible to use an objective criterion common to all insurers and unbiased by the ALM model.
3. Thus, the cross-validation methodology used in this report remains relevant for any insurer.
4. Finally, the cross-validation approach is implemented in order to determine a reduced number of scenarios which imply sufficiently precise estimates.

The optimal number of simulations is selected using method A for a number of simulations limited to 40, and method C for a higher number of simulations. Thresholds are defined to guarantee satisfactory performance in terms of VIF and model leakage, in accordance with the best practices established by the ACPR. The results presented in the table below allow us to conclude that for 127 simulations the results are satisfactory with regard to the metrics selected.

TABLE 10 – Results of cross-validation at the end of 2021

Number of simulations	Entropy	<i>RMSRE</i>	VIF metric	Leakage	TVOG
63	0,4	4,43%	15,1%	0,38%	2,33%
127	0,16	3,10%	0,25%	0,34%	0,04%
255	2,5	2,06%	0,33%	0,16%	0,05%

A back-testing exercise was also carried out to validate the robustness of the method in different economic environments. The results show that the cross-validation method is robust and adaptable to different economic environments and insurers.

In conclusion, this report demonstrates that the use of this simulation reduction approach makes it possible to obtain a sufficiently accurate approximation of the VIF, using just over a hundred scenarios. In fact, the proposed methodology makes it possible to adapt to a wide range of life insurance portfolios by optimising the parameters defined using a cross-validation based on the GSE criterion of RMSRE, which is independent of the results of the ALM model and common to all insurers.

Remerciements

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers Milliman Paris, qui a mis à ma disposition tous les outils nécessaires à la réalisation de ce mémoire.

Je tiens tout particulièrement à remercier mon tuteur, Pierre-Edouard Arrouy, pour son engagement, sa patience et sa bienveillance tout au long de l'encadrement de ce travail. Je lui suis reconnaissante pour les connaissances précieuses qu'il m'a transmises et le temps qu'il a généreusement consacré à ce projet.

Je voudrais également adresser mes remerciements à l'équipe de recherche et développement, en particulier à Alexandre Boumezoued, pour leur soutien tout au long de ce projet. Un grand merci également à Mohammed Bennouna et Jérémy Baudet pour leurs collaborations précieuses.

Enfin, je suis reconnaissante envers l'équipe Vie pour leur soutien quotidien et les relectures attentives de mon mémoire.

En conclusion, je tiens à remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

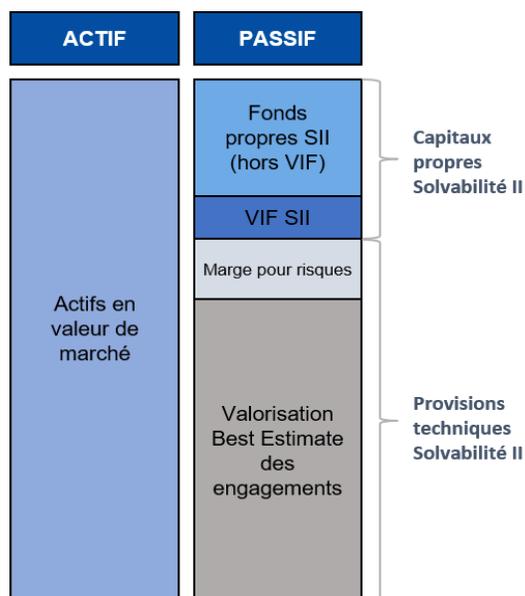
Chapitre 1

Contexte et étude de l'existant

1.1 Grandeurs d'intérêt

Dans le cadre d'un bilan Solvabilité 2, nous nous intéressons particulièrement à la valeur économique des passifs en sortie du modèle *ALM*¹. Celle-ci se partage entre la part qui revient à l'assureur (la *Value-In-Force* ou *VIF*) et celle qui revient aux assurés (le *Best Estimate* ou *BE*). Nos impacts seront principalement effectués sur la *VIF* qui est la grandeur d'intérêt pour les assureurs. Les différents postes du bilan sous Solvabilité 2 sont présentés ci-dessous :

FIGURE 1.1.1 – Bilan économique Solvabilité 2



1. Asset and Liability Management : correspond à la gestion conjointe de l'actif et du passif.

1.1.1 *Value In Force (VIF)*

La *VIF* correspond à valeur actuelle des montants futurs probables (en sortie du modèle *ALM*) distribuables à l'actionnaire. La *Value In Force* désigne le montant total des polices d'assurance en portefeuille (aussi appelé « stock ») sur l'ensemble des scénarios économiques.

Le calcul de la *VIF* repose sur la projection des profits futurs à partir du stock en déroulant ce portefeuille jusqu'à extinction des engagements (communément appelé *run-off*). La *VIF* est une mesure de rentabilité réelle de l'activité particulièrement intéressante pour les actionnaires, car elle correspond à la marge réelle (déduction faite des impôts) diminuée des coûts nécessaires à l'exercice de l'activité d'assurance.

1.1.2 *Best Estimate ou BE*

Le *Best Estimate* (ou meilleure estimation) est utilisé pour évaluer les engagements financiers futurs d'une compagnie d'assurance envers ses assurés. Il représente une estimation prudente et réaliste des flux de trésorerie attendus, des risques et des obligations liées aux polices d'assurance détenues. L'estimation la plus probable est basée sur la moyenne des sorties du modèle *ALM*. Cette grandeur permet d'évaluer si la compagnie dispose des ressources financières suffisantes pour honorer ses engagements envers les assurés, tout en respectant les exigences réglementaires.

Le calcul du *Best Estimate* est alors :

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{t>=0} D(0,t) * F_t\right).$$

Avec :

- \mathbb{Q} la probabilité risque-neutre
- t la période de projection jusqu'à extinction des contrats
- $D(0,t)$ le déflateur ou facteur d'actualisation au taux sans risque au temps t
- F_t les flux au temps t

1.1.3 Le Générateur de Scénarios Economiques (GSE)

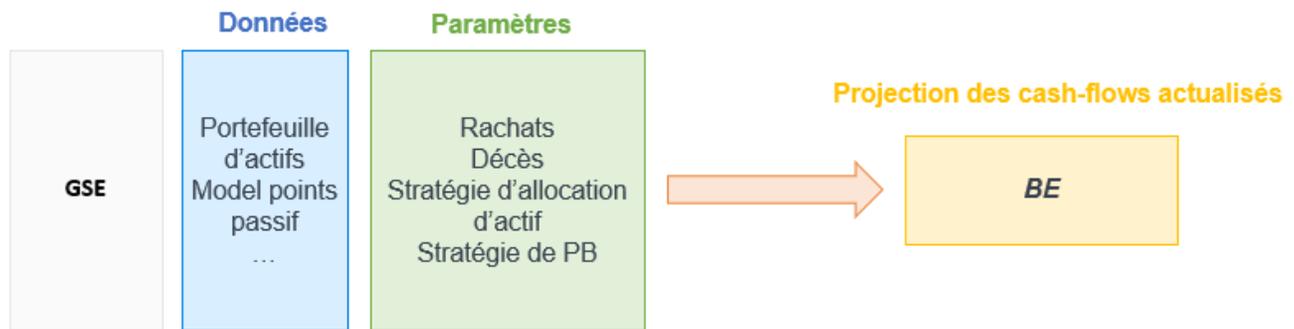
Rôle et fonctionnement du GSE

Le générateur de scénarios économiques est un outil essentiel utilisé par les assureurs permettant de modéliser et de simuler différentes situations économiques futures nécessaires à l'alimentation du modèle *ALM*. La modélisation de ces univers économiques peut s'effectuer sous deux probabilités : monde-réel ou risque-neutre. Dans ce mémoire, seule la probabilité risque-neutre est étudiée, en effet le GSE appelé « risque-neutre » est celui utilisé pour les activités d'assurance vie permettant d'estimer le *BE* et la *VIF*. Les données nécessaires au calibrage du générateur de scénarios économiques sont les suivantes :

1. la courbe de taux sans risque *EIOPA* (voir détail dans le paragraphe suivant)
2. des prix d'actifs ou leur volatilité implicite

Le GSE repose sur des équations différentielles stochastiques afin de modéliser l'évolution de diverses variables économiques dans le temps sur une multitude d'univers économiques. Il permet ainsi de projeter n trajectoires économiques (généralement entre 1 000 et 5 000 sur le marché français) incluant des trajectoires de taux, d'actions, d'immobilier, parfois de crédit, d'inflation etc. . . qui sont communément corrélées entre elles à l'aide d'une matrice de corrélation. Le GSE est utilisé pour la valorisation qui s'appuie sur la probabilité « risque-neutre ». Il prend en entrée le prix des actifs (*caps*, *floor* ou *swaptions* pour les taux et *call* ou *put* pour les actions) utilisés pour estimer les paramètres des dynamiques des produits financiers ; cette étape est appelée « calibrage du GSE ». Ensuite, l'étape appelée « simulation du GSE » consiste à projeter ces actifs sur 1 000 à 5 000 scénarios sur un horizon allant généralement jusqu'à 40 à 60 ans. Les trajectoires calculées par le GSE sont ensuite injectées dans le modèle de projection actif-passif (voir schéma ci-dessous).

FIGURE 1.1.2 – Schéma simplifié du modèle de *BE*



Conclusions générales de la revue transversale de l'ACPR sur les GSE risque-neutre

Une large revue des GSE risque-neutre a été effectuée par l'ACPR en 2020 sur 15 organismes du marché français².

Il en ressort que quelques organismes utilisent un GSE développé en interne. Toutefois, la plupart des acteurs utilisent un GSE développé par un prestataire externe³. La revue transversale des GSE a également permis de constater que 20% de ces acteurs utilisent des modèles de taux courts bien que l'ACPR précise que quel que soit le modèle de taux utilisé celui-ci doit être en mesure de générer des taux négatifs.

Par ailleurs, l'ACPR rappelle que la fuite de modèle calculée comme ci-dessous doit être allouée de manière prudente. C'est-à-dire en diminution des fonds propres lorsqu'elle est négative et intégrée au *BE* dans le cas contraire.

$$Fuite = VM(activ) - BE - VIF.$$

2. Générateur de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques

3. Dans la revue ACPR de décembre 2020 sur les générateurs de scénarios économiques, 80% des 15 organismes étudiés utilisaient un GSE développé par un prestataire externe.

Enfin, les approches de réduction du nombre de simulations discutées dans le cadre de ce mémoire seront développées en portant une attention particulière à respecter les bonnes pratiques énoncées par l'ACPR ; notamment sur les tests de martingalité et de *market consistency*⁴.

Les notions nécessaires à la compréhension du GSE sont décrites ci-dessous :

1.1.4 Taux sans risque

La courbe de taux sans risque est publiée par l'*EIOPA* mensuellement⁵, ces taux sont construits à partir de la courbe de taux swap à laquelle sont appliqués :

1. **L'ajustement pour risque de crédit** (*Credit Risk Adjustment* ou *CRA*) permettant de neutraliser l'effet du risque de crédit inclus dans les swaps IBOR. A titre informatif, le *CRA* associé à la courbe Euro est de -10bps.
2. **L'ajustement pour volatilité** (*Volatility Adjustment* ou *VA*) qui correspond à la prime de liquidité, elle augmente à mesure que les *spreads* obligataires s'écartent. Au 31/12/2021 le *VA* vaut 3bps et 19bps au 31/12/2022
3. **L'UFR** : La courbe est prolongée au delà de la dernière donnée liquide disponible du taux swap, appelée *Last Liquid Point (LLP)* afin de converger vers l'*Ultimate Forward Rate (UFR)*. Pour la courbe euros, le *LLP* est fixé à 20 ans. Par ailleurs l'*UFR* du 31/12/2021 est 3,6% contre 3,45% au 31/12/2022.

Dans le cadre d'une évaluation risque-neutre, les modèles de taux sont calibrés de sorte à démarrer les projections à partir de la courbe de taux sans risque publiée par l'*EIOPA*, et les flux de trésorerie sont également actualisés au taux sans risque à l'aide de la variable nommée « déflateur ».

1.1.5 Risque-neutralité

La probabilité risque-neutre est un outil mathématique dont l'existence découle de l'absence d'opportunité d'arbitrage et dont l'unicité est assurée par la complétude des marchés, c'est-à-dire que toute variable aléatoire mesurable peut être répliquée par une stratégie autofinancante. La probabilité risque-neutre est l'unique probabilité telle que le prix des actifs actualisés sous celle-ci forme un processus martingale qui rapporte le taux sans risque. Autrement dit, sous la probabilité risque-neutre le rendement infinitésimal des actifs est régi par le taux court sans risque. On peut également la définir comme étant la probabilité qui rend martingale le processus de prix actualisé⁶.

4. Tests sur lesquels nous reviendrons plus loin en détails.

5. [Risk-free interest rate term structures, EIOPA](#)

6. A noter que lorsqu'il existe une probabilité risque-neutre, alors il y a absence d'opportunités d'arbitrages (AOA), c'est-à-dire qu'il n'existe aucune opportunité d'arbitrage sur ce marché.

1.1.6 Notion de « *market consistency* »

Une valorisation est dite « *market consistent* » si celle-ci est cohérente avec les données des marchés financiers⁷.

Les critères de *market-consistency* pour les différentes variables financières d'entrée du GSE sont les suivants :

1. **Courbe de taux sans risque :**

La projection des taux doit être cohérente avec la courbe de zéro-coupons sans risque fournie par l'*EIOPA*, c'est-à-dire le prix des obligations sans risque ainsi que les swaptions échangées sur le marché.

2. **Indice action :**

Les rendements de l'indice action doivent être cohérents avec les options (*call/put*) échangées sur le marché.

3. **Indice immobilier :**

Il faut généralement faire appel à des jugements d'experts pour estimer la volatilité du marché immobilier, car ce dernier n'est pas suffisamment liquide pour disposer de prix d'options.

1.1.7 Modèle *ALM*

Un modèle *ALM* (*Asset Liability Management*) est un outil stratégique et financier essentiel utilisé par les compagnies d'assurance pour gérer efficacement les risques financiers. Ce modèle repose sur une approche visant à suivre les actifs détenus par la compagnie en face des passifs, c'est-à-dire les obligations envers les assurés (comme les polices d'assurance vie souscrites). Le modèle *ALM* permet ainsi de prendre des décisions éclairées en matière d'allocation d'actifs, de sélection de produits d'assurance et de tarification des polices etc...

1.2 Directive Solvabilité 2

Les assureurs sont soumis à une inversion du cycle de production : ils reçoivent des primes avant de faire face à leurs engagements. Afin de quantifier leurs engagements, ces derniers procèdent au calcul de la meilleure estimation des flux futurs (*Best Estimate*).

Le calcul des provisions techniques prudentielles est encadré par l'article R351-2 du Code des Assurances « *La valeur des provisions techniques prudentielles est égale à la somme de la meilleure estimation et de la marge de risque (...) La meilleure estimation correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs compte tenu de la valeur temporelle de l'argent estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente, soit la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs.* » L'article R351-10 du code des assurances prévoit que ce calcul doit tenir compte de la valeur des garanties financières et de toutes options incluses dans leurs contrats.

7. Article 76 §3 de la Directive : « Le calcul des provisions techniques utilise, en étant cohérent avec elles, les informations fournies par les marchés financiers et les données généralement disponibles sur les risques de souscription (cohérence avec le marché). »

1.2.1 Importance du GSE dans la prise en compte des garanties financières

Par ailleurs, les contrats d'assurance vie présentent un mécanisme de participation aux bénéfices des options et garanties financières qui induisent des flux asymétriques entre l'assureur et l'assuré. En France les contrats d'épargne en euros offrent une garantie en capital avec diverses options (rachat, arbitrage, conversion en rente etc...) une participation aux bénéfices et un taux minimum garanti (TMG). L'assuré pouvant racheter son contrat à tout instant et bénéficiant d'un TMG, il existe bien une asymétrie dans le partage du résultat entre l'assureur et l'assuré en faveur de ce dernier. En outre, réglementairement l'assureur reverse au minimum 85% de son bénéfice financier mais supporte 100% des pertes, induisant ainsi une optionalité supplémentaire.

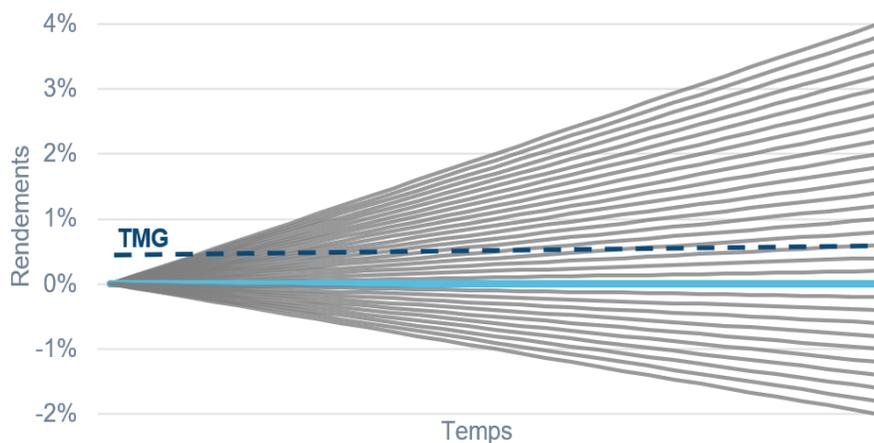
Le Générateur de Scénarios Économiques (GSE) permet de prendre en compte ces flux asymétriques en simulant aléatoirement les flux des différents actifs (taux, actions, immobilier, inflation, *spread* de crédit etc...) sur un nombre de trajectoires n fini.

A noter que l'écart entre la valorisation en vision stochastique par rapport à la vision déterministe est noté *TVOG* pour (*Time Value of Options and Guarantees*) c'est-à-dire la valeur temps des options et garanties. Cela correspond au montant des options et garanties qui n'est pas pris en compte dans le cadre d'une valorisation déterministe.

1.2.2 Nécessité de la réduction du nombre de simulations

Dans les activités d'assurance vie, il existe des interactions entre l'actif et le passif des assureurs provenant des options et garanties présentes dans les contrats d'épargne. Les clauses de participation aux bénéfices (PB) donnent droit à l'assuré à un pourcentage minimal des produits financiers résultants de l'évolution de la valeur de l'actif détenu par l'assureur. En effet, comme détaillé dans le schéma ci-dessous, la valorisation stochastique est nécessaire afin de prendre en compte le phénomène d'asymétrie de partage de la richesse entre assureur et assuré.

FIGURE 1.2.1 – Asymétrie des gains et pertes des assureurs



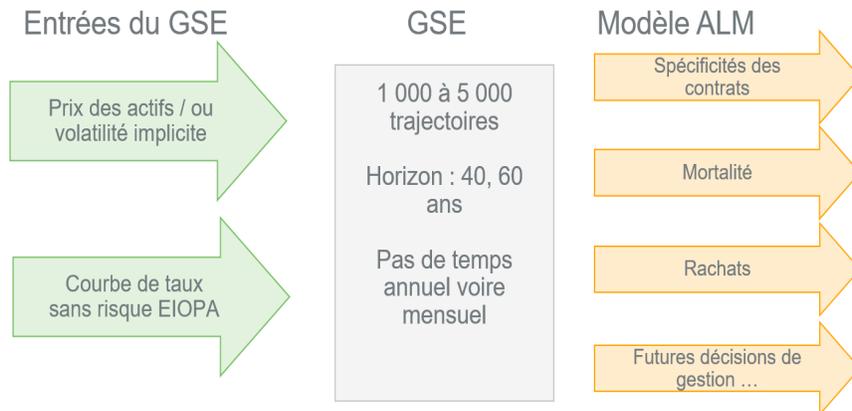
Cependant, lancer le modèle *ALM* sur ces milliers de trajectoires est relativement coûteux en temps, en serveurs et en consommation d'énergie. Or, les assureurs n'évaluent pas leurs provisions techniques uniquement dans le cadre de leurs calculs réglementaires mais aussi pour procéder à des sensibilités dans le cadre de leurs processus ORSA et IFRS 17 ou encore pour leur modèle interne etc... Il existe donc un réel besoin de disposer d'un outil leur permettant d'obtenir des résultats proches de ceux générés à l'aide du GSE intégrant l'ensemble des trajectoires utilisées pour les calculs réglementaires, mais en un temps réduit.

Dans un calcul « classique » (c'est-à-dire sans réduction du nombre de simulations), une fois les trajectoires générées par le GSE, celles-ci sont donc lues au sein du modèle *ALM* qui projette des *Cash-Flows* et permet d'obtenir une distribution de flux de *BE*. Le *BE* retenu correspond à la moyenne des flux de *BE* en sortie du modèle *ALM* comme suit (en notant *N* le nombre de simulations) :

$$BE = \sum_{i=1}^N \frac{Best\ Estimate_i}{N}.$$

Chaque simulation a donc le même poids ($\frac{1}{N}$) quelle que soit sa trajectoire. Ainsi pour un calcul de *BE* réglementaire, chaque étape du processus détaillé ci-dessous doit être effectuée :

FIGURE 1.2.2 – Processus de calcul du BE



Ce processus peut être particulièrement coûteux en temps de calcul et en manipulations opérationnelles au sein d'un organisme d'assurance.

L'intérêt d'une solution de repondération (ou *reweighting*) est de :

1. Réduire significativement le nombre de scénarios risque-neutre en conservant les propriétés de martingalité et de *market consistency*
2. Pouvoir manipuler des tables de scénarios économiques réduites sans avoir à utiliser celles du GSE « complet »
3. Donc obtenir un gain de temps considérable

Parallèlement aux besoins des organismes valorisant leur *BE* en stochastique, l'*EIOPA* a ouvert un groupe de travail appelé *PHRSS* (*Prudent Harmonized Reduced Set of Scenarios*) visant ceux qui utilisent un calcul déterministe pour leurs engagements, qui sera le sujet de la seconde partie de ce mémoire.

1.3 Revue de littérature sur les méthodes de réduction de temps de calcul

La partie suivante présente les principales stratégies mises en place pour réduire le temps de calcul présentes sur le marché. En particulier, les techniques développées par Yvonne C. M. Chueh et l'application de celles-ci par la *SOA* à travers le *Scénario Picker Tool* ainsi qu'une étude de marché de différentes méthodes effectuée aux Etats-Unis.

1.3.1 Algorithme de réduction du nombre de simulations appliqué aux modèles de taux

L'article *Efficient stochastic modeling for large and consolidated insurance business : interest rate sampling algorithms*, d'Yvonne C. M. Chueh (voir [6]) part du constat que le nombre de polices détenues par les assureurs est devenu conséquent, et que les caractéristiques des contrats se multiplient ce qui rend les modèles *ALM* de plus en plus complexes, et donc consommateurs en temps de calcul. L'auteur propose donc plusieurs méthodes de réduction du nombre de simulations afin de pallier ce problème. L'objectif est d'utiliser un échantillon représentatif de la distribution induite par un ensemble de scénarios économiques en particulier dans les queues de distribution. Plusieurs métriques sont utilisées afin de quantifier la qualité de la réduction :

1. Comparaison graphique de la distribution initiale
2. Analyse des statistiques principales (minimum, maximum, moyenne, médiane, quantiles...)
3. Test de Kolmogorov-Smirnov⁸

Trois méthodes ont été retenues par Y. Chueh :

1. La distance euclidienne modifiée

Cette méthode consiste à choisir de manière aléatoire un scénario « pivot » et de sélectionner le scénario qui s'en éloigne le plus devenant ensuite le nouveau « pivot » etc...

2. La distance relative à la valeur actuelle des flux de trésorerie

Méthode similaire à la première basée sur un autre calcul de la distance

3. La significativité des scénarios

Seuls les scénarios jugés les plus significatifs parmi l'échantillon initial sont retenus

8. Test d'hypothèse permettant ici de déterminer si deux échantillons suivent la même loi

Les formules développées permettent notamment de sur-pondérer les premières années de projection car ce sont celles qui constituent la majorité du portefeuille détenu.

Voir plus de détails dans la partie 3 de ce mémoire, sous-paragraphe [3.3.3](#).

1.3.2 Le *Scenario Picker Tool* proposé par la SOA

La Society of Actuaries (SOA) fournit aux assureurs une méthodologie de réduction de simulations à l'aide d'un outil appelé « [Scenario Picker Tool](#) ». Cet outil permet de sélectionner des sous-ensembles de 50, 200, 500 et 1 000 scénarios sur la base de 10 000 scénarios initiaux générés à pas mensuel. Cet outil réduit le nombre de simulations à l'aide de la méthodologie développée par Y. Chueh (voir détails dans le paragraphe ci-dessus) et plus précisément sur celle reposant sur une mesure de significativité à l'aide de la formule suivante :

$$s = \sqrt{\sum_{t=1}^T \left[\prod_{m=0}^{t-1} \left(1 + \frac{i_m}{2} \right)^{-\frac{2}{12}} \right]^2} = \sqrt{\sum_{t=1}^T \left[\prod_{m=0}^{t-1} \left(1 + \frac{i_m}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} \right]}.$$

Le *Scenario Picker Tool* calcule la mesure de significativité sur chaque scénario identifiant les n scénarios les plus « significatifs » parmi les 10 000 scénarios initiaux.

A noter que cet outil utilise uniquement la significativité sur la variable de taux, et est calibré sur le taux court 1 an et le taux long 20 ans. Bien que le facteur de risque « taux » soit une variable cruciale pour évaluer un portefeuille d'assurance-vie, l'objectif de ce mémoire est d'appliquer une méthode de réduction de simulations plus large incluant également l'indice action et immobilier.

L'article suivant permet d'avoir une vision des différentes méthodes de réduction de temps de calcul utilisées sur la marché de l'assurance, en particulier aux États-Unis. Pour des enjeux opérationnels, les impacts quantitatifs présentés dans la suite de ce mémoire portent sur le marché français.

Plus précisément, les enjeux auxquels sont confrontés les assureurs aux États-Unis sont les suivants : l'évaluation des options et garanties proposées nécessitent des outils de plus en plus sophistiqués ce qui implique un temps de calcul conséquent, des exigences importantes de la part des régulateurs, une demande accrue de calculs de sensibilité par les organes de direction.

C'est pour tenter de pallier ces contraintes que l'étude de marché présentées ci-dessous a été effectuée ; la réduction du temps de calcul peut porter soit sur la réduction du nombre de *model points* soit sur les scénarios du GSE.

L'étude de marché repose sur des produits commercialisés sur le marché américain par exemple :

- *VA* : *Variable Annuities*, contrats d'assurance vie à revenu garanti
- *GMAB* : *Guarantee Minimum Accumulation Benefit*, garantie de revenus minimums
- *GMDB* : *Guarantee Minimum Death Benefit*, garantie de capital minimum en cas de décès
- *Indexed Universal Life*, produit d'assurance comportant une protection d'assurance vie, une option de rachat et une prestation au décès. Le produit ne comporte pas d'option de rachat s'il est précisé qu'il est « *NLG* » pour *No Lapse Guarantee*.
- *EIA* : *Equity Indexed Annuity*, produit versant des annuités indexées sur les marchés boursiers offrant généralement une garantie sur les pertes importantes et un minimum de rendement.

Par ailleurs, les métriques utilisées sur le marché des États-Unis diffèrent de celles présentées dans Solvabilité 2. En effet la *National Association of Insurance Commissioners (NAIC)* ne se base pas sur un quantile unique, mais sur une notion de capital nécessaire en fonction des risques auxquels la société est soumise appelé *Risk-Based Capital (RBC)*. Les principales métriques présentées dans l'article reposent sur la notion de *Conditional Tail Expectation (CTE)*. Par exemple, après avoir classé les montants de *VIF* du plus grand au plus petit, le *CTE70* correspond à la moyenne des 30% pire montants de *VIF*.

Bien que les marchés américains et français diffèrent sur de nombreux points, les problématiques concernant la réduction du temps de calcul liée à la complexité de modélisation des options et garanties sur les contrats d'assurance-vie se rejoignent ; de même les acteurs français ont exprimé un réel besoin de réduction du temps de calcul sur les sensibilités effectuées.

L'étude de marché présentée ci-dessous nous permet d'explorer différentes pistes d'amélioration du temps de calcul. Certaines d'entre elles seront développées dans la suite de ce mémoire. En particulier celles portant sur la réduction de simulations en sortie du GSE risque-neutre.

1.3.3 Model Efficiency Study Results

L'article « *Model Efficiency Study Results* » de 2011 (voir [5]) est une étude des méthodes de réduction de *model points*⁹ ou de scénarios ; elle repose sur 12 participants¹⁰.

L'étude compare 6 techniques, en moyenne deux d'entre elles ont été testées par chaque participant. Les 6 techniques testées sont les suivantes :

1. **Récupération des pires simulations**
2. **Scénarios représentatifs** (sélectionner un échantillon de scénarios représentatifs d'un calcul classique)
3. **Échantillonnage pondéré** (récupérer les scénarios qui impactent le plus le résultat auxquels on applique des poids)
4. **Curve fitting** (trouver une distribution par exemple de *VIF* qui s'approche le plus de celle obtenue avec l'intégralité des simulations)
5. **Modélisation par cluster** (récupération des polices dont les caractéristiques sont proches pour générer un échantillon réduit de polices qui a une *VIF* cohérente)
6. **Reproduction des passifs** (utilisation d'optimisation permettant de déterminer un échantillon de polices ayant des caractéristiques suffisamment hétérogènes et représentatives pour l'estimation de la *VIF*)

Le résumé des 6 méthodes est présenté ci-dessous :

9. La gestion des *model points* n'a pas été évoquée dans le cadre de ce mémoire. Le modèle utilisé dans la suite de ce mémoire est un modèle de *flexing* ainsi il fait recours à des *model points* (ce qui correspond à une agrégation de contrats aux caractéristiques similaires) mais notre étude ne remet pas en cause cet aspect du modèle *ALM*.

10. Allstate Financial, Ameriprise Financial, Assurity, Aviva USA, Commonwealth, Horace Mann, ING, Lincoln, MetLife, Milliman, Nationwide et Sunlife.

TABLE 1.1 – Résumé des 6 méthodes

Méthode	Effort de mise en place	Réduction du temps de calcul	Limite
Approche GSE : Récupération des pires simulations	Faible	Faible	Utile sur les queues de distribution
Approche GSE : Scénarios représentatifs	Moyen	Moyen	Cible la moyenne et sensible au choix des scénarios
Approche GSE : Échantillonnage pondéré	Moyen	Moyen	Utile pour les options en dehors de la monnaie
Approximation par une loi : <i>Curve fitting</i>	Fort	Inconnu	Utile pour les queues de distribution
Approche <i>model points</i> : Modélisation par cluster	Fort	Fort	Le biais est une limite pour toutes les méthodes de réduction
Approche <i>model points</i> : Reproduction des passifs	Fort	Fort	Le biais est une limite pour toutes les méthodes de réduction

1. Récupération des pires simulations

Cette méthode consiste à faire des calculs par exemple sur les 300 pires simulations (correspondant aux *VIF* les plus faibles), parmi les 1 000 simulations initiales.

Les 5 étapes de cette méthode sont développées ci-dessous :

1. Sélectionner aléatoirement 5% des polices du portefeuille
2. Lancer les 1 000 simulations sur ces polices
3. Classer les résultats et identifier les 400 pires simulations
4. Lancer toutes les polices sur ces 400 simulations
5. Classer les résultats et calculer la CTE70¹¹ sur les 300 pires simulations parmi les 400

11. Correspond à la moyenne des simulations sur les 30% pires scénarios

Cette méthode permet de réduire le temps de calcul d'environ 55%¹²(voir tableau ci-dessous) :

TABLE 1.2 – Temps de calcul hypothétique

	Nombre de polices	Nombre de scénarios	Temps de calcul
Central	50 000	1 000	5,8 jours
Réduction n°1	2 500	1 000	0,3 jour
Réduction n°2	50 000	400	2,3 jours

Cette méthode présente plusieurs avantages : elle est facile à comprendre, à auditer et à mettre en oeuvre (les assureurs participants à cette étude ont estimé que la mise en place de cette méthode nécessitait 10 heures de travail supplémentaires). Cependant, cette méthode est limitée aux métriques portant sur la queue de distribution : ici le CTE70 a été utilisé mais il n'est pas possible d'utiliser ces résultats pour approximer d'autres parties de la distribution (par exemple la moyenne).

2. Scénarios représentatifs

Cette méthode consiste à sélectionner un sous-ensemble de scénarios qui sont représentatifs de la base complète de scénarios. Quatre techniques sont développées :

1. Distance euclidienne modifiée

Chaque scénario est représenté en dimension n , il s'agit ensuite de trouver un sous-ensemble de scénarios qui sont écartés les uns des autres. Afin de donner un plus gros impacts aux trajectoires de taux sur les premières années de projections, un mécanisme de poids est mis en place. Ainsi, la formule de la distance euclidienne entre un scénario A et B est la suivante :

$$\sqrt{\sum_1^n (i_{A,t} - i_{B,t})^2 \times PV01_{A,t}}$$

avec PV la « Present Value » ou Valeur actuelle probable des flux de passif.

2. Distance relative de la valeur actuelle

Au lieu d'utiliser la valeur du taux d'intérêt, la formule suivante analyse l'écart avec la valeur actuelle probable d'un dollar (noté « PV01 ») chaque année avec une pondération plus importante sur les premières années de projection. La formule retenue est :

12. Correspond à la réduction moyenne entre 1 et 2 par rapport au central

$$\frac{0,3\text{jours} + 2,3\text{jours}}{5,8\text{jours}} - 1$$

$$\sqrt{\sum_1^n (PV01_{A,t} - PV01_{B,t})^2}.$$

3. Méthode « significative »

Cette méthode repose sur la valeur actuelle d'un dollar sur un scénario et cherche à savoir si celui-ci est « significatif ». La significativité du scénario est calculé comme suit :

$$\sqrt{\sum (PV01_t)^2}.$$

Les scénarios sont ensuite rangés du moins au plus significatifs.

4. Méthode de *clustering*

L'algorithme regroupe les scénarios similaires en récupérant le centre de chaque *cluster* basé sur la méthode 1 de distance euclidienne modifiée.

Les résultats obtenus sont les suivants¹³ :

TABLE 1.3 – Résultats obtenus sur les 3 méthodes

Métrique	Produit	Méthode testée	Erreur	Réduction
Moyenne	Indexed UL, NLG	Significativité	0,9%	58%
CTE70	VA	Clustering	1,1%	79%
Moyenne	Indexed UL	Significativité	1,3%	58%
Moyenne	EIA	Significativité	2,0%	58%
Moyenne	VA	Significativité	2,4%	91%
Moyenne	VA	Significativité	3,3%	85%
Moyenne	VA	Significativité	5,3%	93%
CTE70	VA	Clustering	10,7%	79%
CTE70	VA	1, 2 et 3	11,8%	73%

13. L'erreur correspond au pourcentage en valeur absolu de la différence entre le calcul « classique » et celui avec un nombre réduit de simulations

Un participant a également testé les trois techniques sur la CTE70 et CTE95 et obtient les résultats suivants :

TABLE 1.4 – Résultats obtenus par les différents participants

Méthode testée	Erreur
Distance euclidienne modifiée	19,2%
Distance relative à la valeur actuelle	5,6%
Significativité	3,2%

A noter que la méthode de scénarios significatifs est celle produisant l'intervalle d'erreur le plus faible, facile à appréhender, nécessitant moins de 10 heures de travail. Cependant, ces méthodes semblent peu efficaces dans les queues de distribution, et fonction du nombre de simulations initiales.

Les participants à cette étude concluent que la technique permet d'approcher correctement la moyenne (par exemple la *VIF* ou *BE*) mais pas les grandeurs en queue de distribution des flux. Par ailleurs, le niveau de réduction n'est pas lié à l'erreur ce qui semble contre-intuitif.

3. Échantillonnage pondéré

Cette méthode d'échantillonnage permet de sélectionner au sein des simulations celles qui sont les plus contributives au résultat final. Pour ce faire, les scénarios sont classés du pire au meilleur sur la variable de taux d'intérêt, puis ceux dans les queues de distribution sont majoritairement tirés (le schéma ci-dessous présente un exemple de l'approche d'échantillonnage à partir de 21 scénarios économiques).

FIGURE 1.3.1 – Processus d'échantillonnage

Scenario	Poids initiaux	Poids finaux
1		4,8%
2	14,3%	4,8%
3		4,8%
4		
5	14,3%	14,3%
6		
7		
8	14,3%	14,3%
9		
10		
11	14,3%	14,3%
12		
13		
14	14,3%	
15		
16		
17	14,3%	42,9%
18		
19		
20	14,3%	
21		
Total	100%	100%

Dans la colonne de poids initiaux, les 21 trajectoires sont regroupées par 3 ce qui constitue 7 groupes. Dans chaque groupe, seule la trajectoire du milieu est retenue avec un poids de $\frac{1}{7}$ qui vaut 14,3%, les trajectoires du dessus et du dessous ne sont pas retenues dans le calcul.

Afin d'obtenir les poids finaux, trois nouveaux groupes sont constitués :

- le premier est constitué des simulations du premier groupe de 3 simulations. La pondération du premier groupe reste de 14,3% mais cette fois-ci les 3 simulations sont retenues elles pèsent donc chacune un tiers de 14,3% soit : 4,8%,
- le deuxième reste inchangé : dans chaque sous-groupe de 3 simulations, seule la simulation du milieu est utilisée avec un pondération de 14,3%

- le dernier groupe est formé d'un unique bloc avec un poids de 42,9% pour la simulation du milieu permettant ainsi de retomber sur 100%.

Bien que les acteurs ayant testé cette méthode n'aient pas constaté une amélioration significative du temps de calcul, celle-ci peut en revanche rendre les calculs plus précis avec un nombre de simulations plus faible.

Dans le cadre de l'étude, trois configurations de la méthodologie d'échantillonnage ont été testées :

- les 20% trajectoires les plus basses représentent 50% de l'échantillon, de même pour les 80% les plus hautes
- 10%-20%-70% représentent 40%-40%-20%
- 30%-70% représentent 50%-50%

Les deux assureurs ayant testé cette technique présentent les caractéristiques suivantes :

TABLE 1.5 – Caractéristiques des assureurs

Entreprise	Produits en portefeuille	Métrique calculée	Nombre de polices	Scénarios utilisés
A	VA/GMIB/GMDB	Moyenne	14 000	1 000 RN (taux et 6 indices)
B	VA/GMIB/GMDB	Plusieurs CETs	10 000	1 000 RN (taux AAA et action)

A noter que les calculs effectués par l'entreprise A sont ceux qui nous intéressent le plus dans le cadre de ce mémoire, car le but ici est d'approcher la moyenne (à travers la *VIF* et/ou le *BE*) et non les quantiles extrêmes.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

TABLE 1.6 – Résultats obtenus sur les 2 entreprises

Pondération retenue	Erreur sur A	Erreur sur B
20-80 vers 50-50	4,8%	4,6%
10-20-70 vers 40-40-20	6,7%	7,7%
30-70 vers 50-50	3,2%	3,8%
Non pondéré	3,5%	0,8%
Aléatoire	non effectué	4,7%

Il en ressort que le passage de 30-70 à 50-50 est celui qui amène à la plus faible erreur.

4. Curve fitting

Les sorties d'un modèle de projection reposant sur un nombre élevé de scénarios peuvent être représentées par une distribution continue. La méthode de *curve fitting* est déclinée en 3 étapes :

1. Après avoir trouvé la loi de distribution théorique qui se rapproche au mieux de la distribution empirique, en déduire les paramètres μ et σ
2. Déterminer X tel que $P(x < X) = 0,7$ en référence au CTE70
3. Calculer la CTE70 comme : $CTE70 = \int_{0,7}^1 x \cdot f(x)$ qui peut être approché comme $\sum_{0,7}^1 x \cdot f(x)$

La précision de la méthode repose sur une bonne adéquation entre la loi sélectionnée et les sorties du modèle.

Pour ce faire 3 étapes sont nécessaires :

1. Sélectionner la loi ou une combinaison de lois appropriées
2. Définir une fonction cible appropriée ainsi que les contraintes d'optimisation
3. Utilisation d'un algorithme d'optimisation afin d'ajuster la distribution aux données

Parmi les distributions testées par les participants, seule la log-logistique donne des résultats exploitables (voir graphique et tableau ci-dessous) :

FIGURE 1.3.2 – Distribution qui s'adapte le mieux aux données de la société

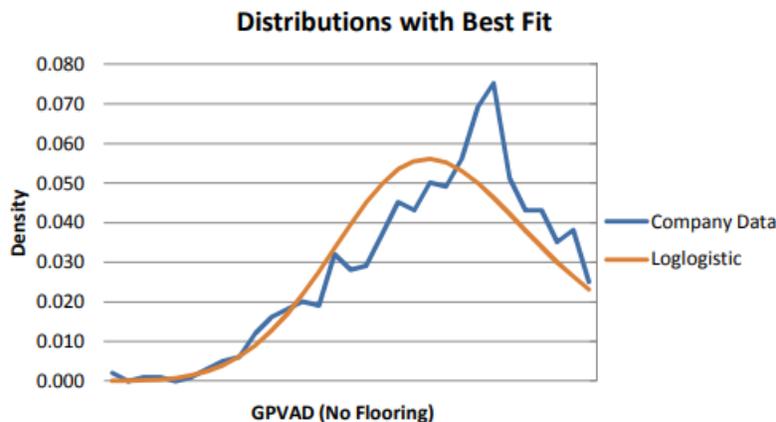


TABLE 1.7 – Résultats obtenus sur divers niveaux de CTE

	CTE70	CTE95
Avec les données de la société	\$19,9M	\$26,7M
Avec une fonction log-logistique	\$25,9M	\$29,6M
Différence	30%	11%

5. Modélisation par *clustering*

Cette technique permet de regrouper les contrats ayant des caractéristiques communes, créant ainsi un « *cluster* ». Cette étude repose sur l'utilisation d'un algorithme KNN (k-nearest neighbor) avec k=1 et basé sur la distance euclidienne. L'algorithme est itératif et regroupe les polices jusqu'à un niveau de compression préalablement défini.

L'analyse de la méthode a été effectuée par 5 participants ¹⁴ :

TABLE 1.8 – Environnement de test de la méthode de *clustering*

Entreprise	Produits	Métrique	Nombre de polices	Scénarios
A	VA/GMIB	Divers CTEs	200 000	12 600 (taux et 6 indices)
B	VA/GMxB	Divers CTEs	500 000	1 000 (taux C3P1 et 6 indices)
C	FIA, DA, Indexed UL	Moyenne	600 000	1 000 RN (taux AAA et indice action)
D	VA/GMDN	CTE90	100 000	1 000 (taux AAA et 5 indices)
E	VA/GMxB	CTE90	600 000	1 000 (taux AAA et 8 indices)

Les résultats par entreprise sur la méthode de *clustering* sont les suivants :

14. Le C3P1 fait référence au groupe de travail de la NAIC : « *Life Risk-Based Capital Working Group (LRBCWG)* » faisant référence à des calculs de capital requis. En particulier, le calcul du C3P1 vise à estimer le quantile 95% du risque de taux.

TABLE 1.9 – Résultats obtenus à l’aide de la méthode de *clustering*

Entreprise	Produits	Métrique	Erreur	Compression
A	VA	Divers CTEs	0,5%	99,9%
B	NLG	Moyenne	1,0%	96,5%
C	FIA	Moyenne	1,1%	99,4%
D	VA	Divers CTEs	2,3%	95,9%
E	VA	CTE90	4,0%	94,7%
F	VA	CTE90	4,3%	86,8%
G	DA	Moyenne	23,8%	99,4%

L’erreur constatée après compression reste relativement faible excepté sur l’entreprise G ¹⁵. Afin de déterminer le lien entre l’erreur et le niveau de compression, des tests supplémentaires ont été effectués.

TABLE 1.10 – Résultats pour différents niveaux de compression

Compression	Erreur
70%	1,2%
75%	1,1%
80%	1,2%
85%	1,7%
90%	4,5%
95%	4,7%
98%	8,7%
99%	14,1%

Cette méthode engendre des erreurs limitées par rapport au fort niveau de compression qu’elle permet. Cependant, elle est moins précise sur les métriques dans les queues de distribution. Bien que la technique soit longue à mettre en place initialement, le processus opérationnel est ensuite assez léger. En revanche la compression n’est pas stable dans le temps car elle dépend du portefeuille à date.

15. La valeur actuelle moyenne des profits est proche de 0 ce qui entraîne un pourcentage d’erreur très élevé

6. Réplication des passifs

Le but est de réduire le nombre de polices en sélectionnant un sous-ensemble proche des caractéristiques du stock de contrats.

Ce problème d'optimisation nécessite deux composantes :

1. Une fonction à optimiser
2. Un nombre de contraintes

Dans un calcul classique, le poids attribué à chaque simulation est de $\frac{1}{n}$, ici un nombre non négligeable de polices se voit attribuer un poids nul alors que les autres polices ont un poids plus élevé initialement. Afin de résoudre cette problématique, il faut mettre en place un algorithme d'optimisation qui minimise le nombre de polices auxquelles un poids supérieur à 0 sera affecté à l'aide de la contrainte suivante :

$$\sum_{i=1}^n \text{Valeur comptable}_i \times W_i = \sum_{i=1}^n \text{Valeur comptable}_i \times \frac{1}{n}.$$

où

n est le nombre de polices en portefeuille

W_i est le poids associé à chaque police

Les participants à l'étude sont les suivants :

TABLE 1.11 – Environnement de test de la méthode de réplication du passif

Entreprise	Produits	Métrique	Nombre de polices	Scénarios
A	VA/GMDB	Divers CTEs	3 500	SOP : 1 000, autre : 1 000 AAA
B	VA/GMxB	Divers CTEs	900 000	1 000 (taux AAA et 5 indices)
C	Produits d'assurance vie sensibles aux taux	Moyenne	40 000	200 scénarios réglementaires

Les résultats obtenus sont les suivants :

TABLE 1.12 – Résultats obtenus sur la méthode de réplication du passif

Entreprise	Produits	Métrique	Erreur	Compression
A	VA	CTE70	0,8%	97%
A	VA	Moyenne	0,9%	96%
A	VA	CTE90	1,0%	97%
B	VA	CTE70	5,1%	97%
B	VA	CTE90	5,1%	97%
C	ISL	CTE90	8,6%	99%

Les erreurs observées sur cette méthode sont relativement faibles avec des ratios de compression très élevés de 96 à 99%. Bien que la mise en place de cette méthode reste chronophage elle demande peu d'efforts pour être maintenue en interne. A noter : l'entreprise C utilisait déjà un moyenne de compression, l'erreur est donc calculée sur cette base déjà compressée.

1.3.4 Méthodes retenues dans le cadre de ce mémoire

Bien que de nombreuses pistes de réduction du temps de calcul soient présentées dans la première partie de ce mémoire, seules certaines d'entre elles ont été développées par la suite. En effet, la problématique de réduction du temps de calcul est abordée en parties 2 et 3 à travers la sélection d'un nombre réduit de simulations en sortie du GSE risque-neutre. De plus, l'objectif est d'obtenir un montant moyen correspondant à la *VIF* ou au *BE* avec un nombre réduit de simulations le plus proche possible du montant obtenu avec les 3 000 simulations initiales. Ainsi, la méthode présentée par Y. Chueh reprise dans le *Scenario Picker Tool* et dans l'article « *Model Efficiency Study Results* » est analysée dans la suite de ce mémoire . En particulier la troisième méthode portant sur les scénarios significatifs a été adaptée dans les parties suivantes.

1.4 Introduction à *PHRSS*

Parallèlement à la nécessité pour les acteurs ayant un GSE de réduire le nombre de scénarios pour des calculs annexes aux productions réglementaires, l'*EIOPA* souhaite être en mesure de déterminer si certains organismes en Europe sous-estiment le prix des options et garanties en appliquant un calcul uniquement déterministe. L'*EIOPA* a donc décidé de développer une méthodologie appelée *PHRSS* qui est présentée dans la section suivante.

Chapitre 2

Méthodologie Prudent Harmonized Reduced Set of Scenarios (*PHRSS*)

Dans le cadre de la revue de Solvabilité en 2020, l'*EIOPA* a introduit une nouvelle méthodologie pour les entreprises n'utilisant pas d'évaluation stochastique¹. En effet, l'*EIOPA* cherche à évaluer le montant de *TVOG* qui ne serait pas pris en compte par les organismes d'assurance évaluant leur *BE* à l'aide d'une trajectoire déterministe. Ces sociétés n'ayant pas développé de *GSE*, l'*EIOPA* prévoit de fournir périodiquement des tables de scénarios économiques permettant d'estimer le montant de *TVOG*.

L'*EIOPA* propose d'autoriser néanmoins l'évaluation déterministe prudente, pour les contrats avec options et garantie si les 4 conditions suivantes sont remplies :

1. L'entreprise a un profil de risque² faible
2. La *TVOG* mesurée à l'aide des scénarios *PHRSS* est inférieure à 5% du SCR
3. L'entreprise ajoute à son *BE* un supplément de 5% du SCR ou un supplément calculé à l'aide des scénarios *PHRSS* reflétant son profil de risque
4. Ce supplément est constant tout au long du processus de calcul du SCR³

Dans le cas contraire, le recours à un *GSE* pourra être exigé par le régulateur.

Pour évaluer la matérialité de la *TVOG* le groupe de travail *PHRSS* doit :

1. Fournir périodiquement un jeu de scénarios
2. Faire implémenter ces 10 trajectoires dans le modèle *ALM* des organismes concernés afin d'obtenir des trajectoires pseudo-stochastiques

1. [PHRSS- First information request](#)

2. L'entreprise remplit les critères de l'*EIOPA* (LRU) pour être considérée « à faible risque ».

3. Cf. § 8.3« Proportionality in pillar 1 », Opinion on the 2020 Review of Solvency II, 17 décembre 2020

L'*EIOPA* prévoit d'effectuer cette étude pour début 2024 présentant deux étapes développées dans la partie qui suit.

2.1 Étapes de l'étude

Dans le cadre de son groupe de travail appelé *PHRSS*, l'*EIOPA* prévoit deux demandes d'information auprès de l'industrie.

- La première demande vise à évaluer l'impact sur les provisions techniques d'utiliser les scénarios *PHRSS* par rapport à un calcul à l'aide de l'intégralité des scénarios en sortie du *GSE*. Elle s'adresse aux entreprises effectuant un calcul stochastique.
Cette étape vise à affiner le calibrage des scénarios *PHRSS*.
- La seconde demande concernera les entreprises effectuant un calcul déterministe faisant donc partie du champs d'application de *PHRSS*.

La première demande d'information est attendue pour le 14 avril 2023, les résultats sont basés sur un arrêté à fin 2021 pour des engagements libellés en euros. L'*EIOPA* a publié 6 lots de 9 scénarios économiques risque-neutre à pas annuel et mensuel sur 120 ans.

Les fichiers publiés présentent 4 valeurs économiques :

1. un déflateur
2. les prix de zéros-coupons pour les échéances 1 à 40 ans
3. un indice action
4. un indice immobilier

A noter : Le risque de crédit est exclu de l'étude

De plus l'*EIOPA* fournit une approche pour déduire des trajectoires de prix zéro-coupon réels et d'indice inflation à partir des grandeurs susmentionnées. Les prix du taux zéro-coupon forward réels sont supposés déterministes et évoluent selon la trajectoire *forward* suivante :

$$P_r(t, M) = \frac{P_r(0, t + M)}{P_r(0, t)}.$$

avec : $P_r(t, m)$ le prix du zéro-coupon en date de référence de maturité m .

Afin de déduire à chaque pas de temps l'inflation à l'aide du prix du zéro-coupon, l'*EIOPA* précise la formule suivante pour le montant d'inflation en date t :

$$I(t) = \frac{P_r(0, t)}{\text{Déflateur}(t)} * I(0).$$

avec $I(0)$ la valeur de l'indice inflation à la date de référence.

2.2 Présentation de la méthodologie définie par l'*EIOPA*

2.2.1 Étapes communes aux 3 méthodologies présentées

Celle-ci comporte 3 étapes :

1. Générer plusieurs milliers de scénarios risque-neutre
2. Sélectionner 9 trajectoires
3. Ajuster ces 9 scénarios afin de conserver les propriétés de martingalité et de *market consistency*

Étape 1 : Générer les scénarios initiaux

Lors de cette étape, l'*EIOPA* génère plusieurs milliers de simulations à l'aide de modèles de diffusion stochastiques.

Les milliers de simulations stochastiques « initiales » s'appuient sur les équations différentielles stochastiques suivantes :

Pour la modélisation des taux :

La dynamique du taux de maturité m à la date t est donnée par :

$$\tilde{r}(t, m) = r^f(t, m) + \sigma_{IR} \sum_{k=1}^t \times \varepsilon_k^{IR}.$$

avec : $r^f(0, t, m)$ le taux forward vu à $t=0$ d'expiration t pour une maturité m .

Avec une volatilité sur les taux à 0,39% correspondant au terme σ_{IR} et ε_k^{IR} le mouvement brownien associé.

Pour la modélisation des actions :

Le prix de l'indice action en date t suit :

$$S^{EQ}(t) = S^{EQ}(t-1) * \frac{1}{P(t-1, 1)} \times \exp^{-0,5\sigma_{EQ}^2 + \sigma_{EQ} \times \varepsilon_t^{EQ}}.$$

Avec : $P(t, m)$ le prix zéro-coupon vu en date t de maturité m .

La volatilité action vaut 19% correspondant au terme σ_{EQ}

Pour la modélisation de l'immobilier :

$$S^{RE}(t) = S^{RE}(t-1) \times \frac{1}{P(t-1, 1)} \times \exp^{-0,5\sigma_{RE}^2 + \sigma_{RE} \times \varepsilon_t^{RE}}.$$

Avec une volatilité immobilière à 11%.

Avec :

$$\varepsilon_k^{IR} \sim \mathbb{N}(0, 1), \varepsilon_k^{EQ} \sim \mathbb{N}(0, 1), \varepsilon_k^{RE} \sim \mathbb{N}(0, 1).$$

Les 3 processus sont simulés indépendamment ; en d'autres termes il n'existe pas de corrélation entre les différents indices projetés dans la méthode proposée par l'*EIOPA*.

NB : dans le cadre de ce mémoire, les dividendes actions ont été choisis fixes à 2,8% correspondant au niveau moyen mesuré sur l'historique. Les dividendes immobilier sont fixés à 4,5% représentant la moyenne du marché à date de valorisation.

2.2.2 Présentation des 3 méthodes développées par l'*EIOPA*

Trois méthodes sont présentées par l'*EIOPA* dans cette première phase de consultation publique publiées le 31 janvier 2023. Ces trois méthodes de sélection de scénarios sont développées ci-dessous :

Méthode 1 : Utilisation de trajectoires stochastiques

Cette méthode consiste à sélectionner 9 trajectoires au hasard parmi les milliers qui ont été générées. Par construction cette méthode est très sensible au choix de la graine ce qui la rend instable (voir tableau 2.5). En effet, l'écart significatif constaté sur la *VIF* entre le lot 1 et 2 est uniquement lié au choix de la graine.

Les graphiques ci-dessous présentent les trajectoires sélectionnées sur les lots 1 puis 2 ainsi que les tests de martingalité.

FIGURE 2.2.1 – Récapitulatif des scénarios du lot 1

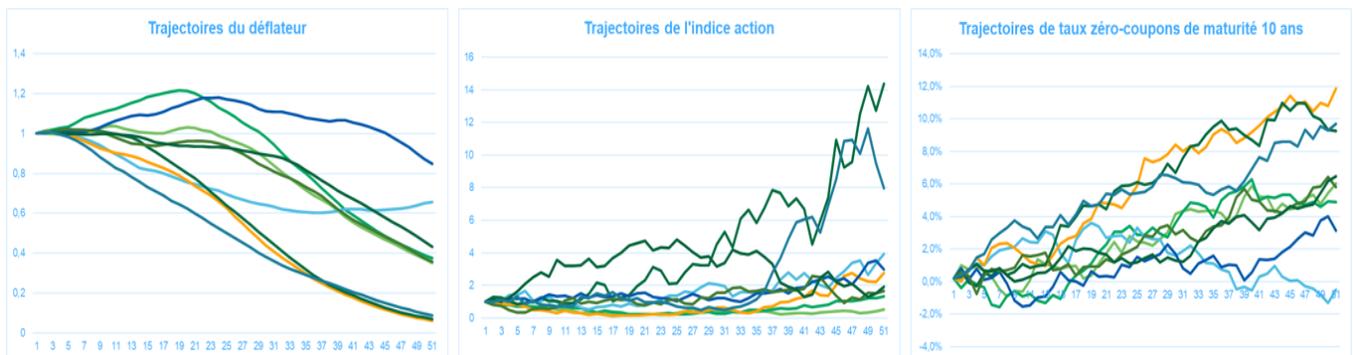
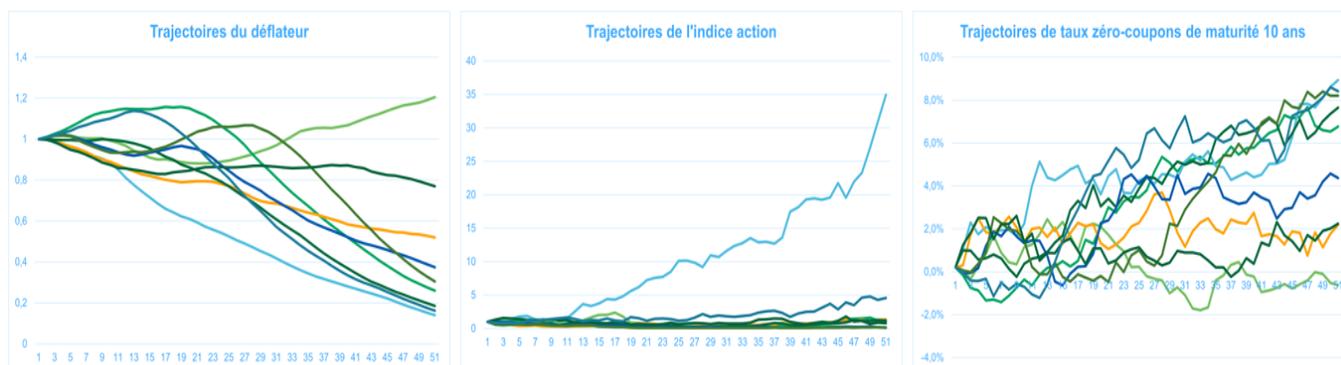


FIGURE 2.2.2 – Récapitulatif des scénarios du lot 2



Les trajectoires ont été sélectionnées aléatoirement parmi les milliers de trajectoires initiales; elles ont donc une allure similaire à ces dernières mais ne sont pas identiques entre les 2 lots car la graine diffère.

Méthode 2 : Utilisation des quantiles

Cette deuxième méthode consiste à générer un grand nombre de scénarios, puis en déduire un certain nombre de quantiles (9 dans la version publiée par l'*EIOPA*) et ce, à chaque pas de projection et pour chaque facteur de risque. A noter, deux listes de quantiles ont été testées par l'*EIOPA*, cependant celles-ci n'ont pas été rendues publiques.

Les tests de martingalité sont présentés ci-dessous :

FIGURE 2.2.3 – Récapitulatif des scénarios du lot 3

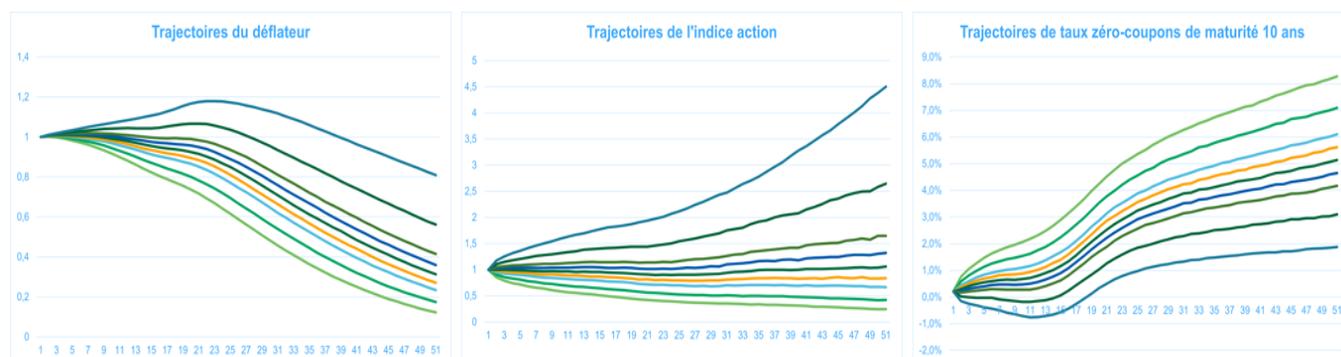
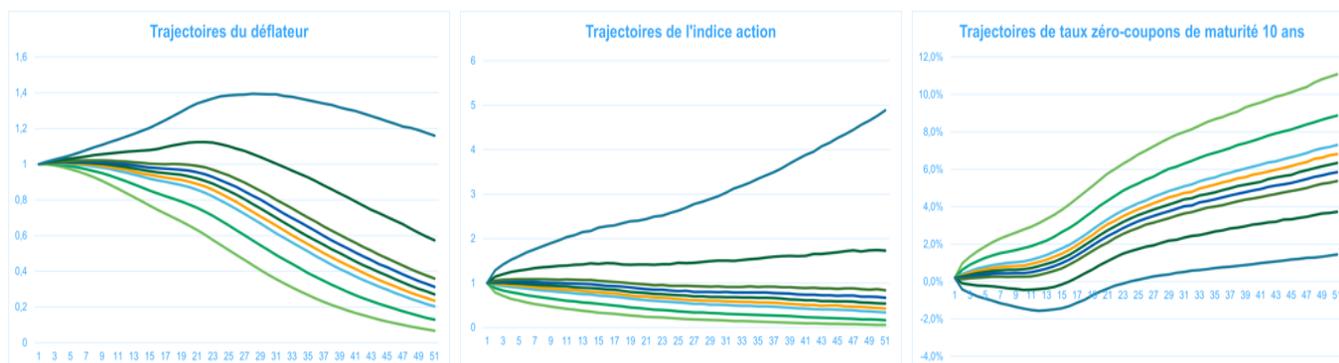


FIGURE 2.2.4 – Récapitulatif des scénarios du lot 4



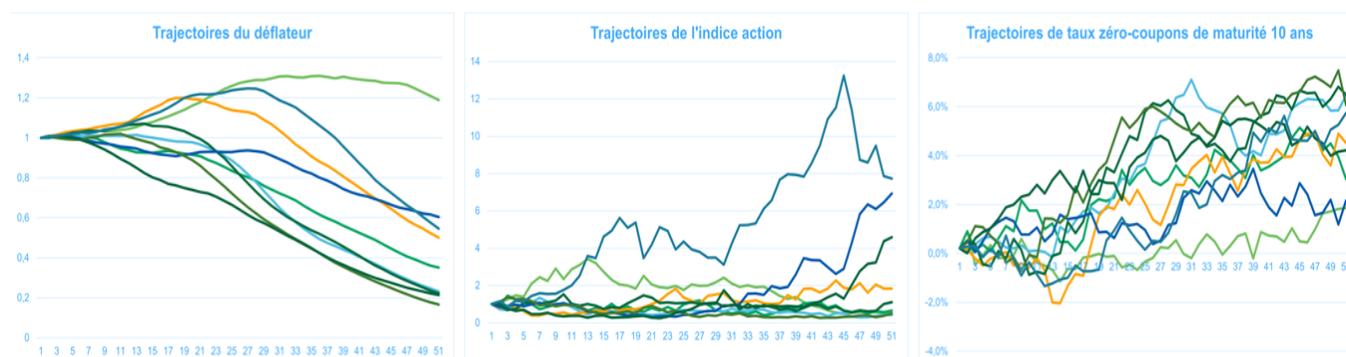
Les trajectoires sont très « lisses » car elles correspondent à la valeur d’un quantile à chaque pas de projection. Cette méthode présente l’inconvénient majeur de négliger la volatilité implicite des scénarios. A noter que cet aspect est corrigé dans la méthode suivante.

Méthode 3 : Utilisation de quantiles à l’aide du plus proche voisin

Cette méthode consiste à évaluer le prix du portefeuille moyen *EIOPA*⁴ dans chaque simulation ; ce portefeuille moyen contient un pourcentage d’obligations dont la durée est supposée la moyenne du portefeuille, un pourcentage d’action et le reste imputé à de l’immobilier. Les prix de ce portefeuille sont ensuite classés du plus petit au plus grand, puis d’en déduire des quantiles sur les simulations initiales. Pour pallier les limites de la méthode 2, un scénario moyen est calculé. Ensuite, parmi toutes les trajectoires simulées initialement celles qui se rapprochent le plus pour chaque quantiles sélectionnés de ce scénario moyen sont retenues.

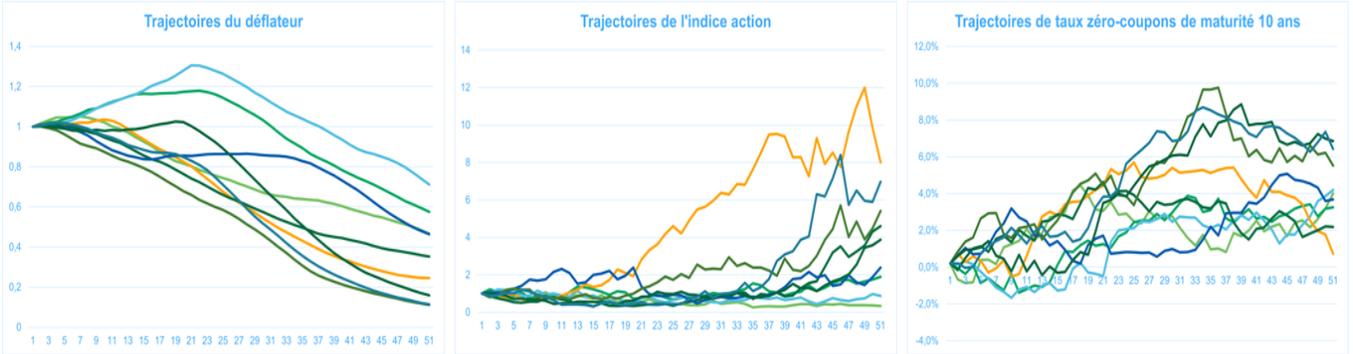
Les tests de martingalité de la méthode 3 sont présentés ci-dessous :

FIGURE 2.2.5 – Récapitulatif des scénarios du lot 5



4. Bien que cela ne soit pas précisé, il a été supposé que le portefeuille d’actifs de référence était celui également utilisé par l’*EIOPA* pour déterminer le montant de *VA* publié mensuellement.

FIGURE 2.2.6 – Récapitulatif des scénarios du lot 6



Étape 2 : Ajustement des scénarios

Une fois les scénarios générés, il faut s'assurer avant de les intégrer au modèle *ALM* qu'ils respectent bien les propriétés de martingalité et de *market consistency*. Pour ce faire, deux ajustements sont effectués :

1. *Moment Matching Adjustment*

Le *Moment Matching Adjustment (MMA)* est une méthode qui adapte les trajectoires afin qu'elles soient martingales. En effet, par construction les tests de martingalité obtenus sur les scénarios réduits sont dégradés par rapport à la cible sur les 3 000 trajectoires initiales.

Pour illustrer cet ajustement prenons l'exemple de la modélisation du prix d'une action noté $S(t)$ actualisée par un facteur d'actualisation noté $D(t)$, le test de martingalité sur le prix de cet actif avec les poids estimé est noté :

$$\widehat{m}_t^S = \sum_{i=1}^v p_i D^i(t) S^i(t).$$

L'ajustement appelé *MMA* consiste à modifier le prix de l'action comme suit :

$$S_{MMA}^i(t) = S^i(t) \frac{S(0)}{\widehat{m}_t^S}.$$

Ce qui nous permet d'avoir un test de martingalité juste à tout instant, qu'on peut écrire comme :

$$\widehat{m}_t^{S_{MMA}} = \sum_{i=1}^v p_i D^i(t) S_{MMA}^i(t) = S(0).$$

L'avantage majeur de cette méthode est de garantir la martingalité des scénarios indépendamment de l'ampleur de la réduction. Cependant, en poursuivant cet objectif, les trajectoires peuvent être fortement modifiées. C'est la raison pour laquelle cet ajustement est plutôt déconseillé pour la production des résultats Solvabilité 2. En cas d'application de cette méthode il est recommandé de transmettre une justification détaillée des ajustements effectués à l'ACPR ⁵.

5. Générateurs de scénarios économiques: points d'attention et bonnes pratiques

2. (Re) pondération ou *WMC*

Le *WMC* ou « repondération » permet d’attribuer des poids optimaux aux simulations sélectionnées. Pour déterminer ces poids, il faut résoudre le problème suivant :

- (a) Minimiser les écarts de martingalité et de *market consistency* entre les trajectoires repondérées et les résultats obtenus sur les 3 000 simulations
- (b) Être capable de mesurer la distorsion des poids obtenus par rapport à l’uniforme à l’aide d’une fonction d’entropie.

La description du problème d’optimisation est décrite dans le tableau ci-dessous :

TABLE 2.1 – Résumé du problème d’optimisation

Notation	Description
N	Nombre d’instruments financiers
$(C_1), (C_2), \dots, (C_N)$	Prix des instruments financiers (sous contrainte de martingalité et de <i>market consistency</i>)
ν	Nombre réduit de scénarios économiques
$(g_{1j}), (g_{2j}), \dots, (g_{\nu j})$	Pour un instrument j , les <i>cash-flows</i> associés pour chaque scénario
$p = (p_1, p_2, \dots, p_\nu)$	Poids attribués à chaque scénario
$\chi_w^2(p) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 < i < N \\ 1 < j < \nu}} (p_i g_{ij} - C_i)^2$	Fonction de minimisation des contraintes de martingalité et de <i>market consistency</i>
$D(p) = \sum_{i=1}^{\nu} p_i \log\left(\frac{p_i}{u_i}\right) = \log(\nu) + \sum_{i=1}^{\nu} p_i \log(p_i)$	Fonction d’entropie de Kullback-Leibler à minimiser, mesurant l’écart à l’uniforme à l’aide de poids notés $\frac{1}{n}$

La fonction de minimisation des poids revient donc à :

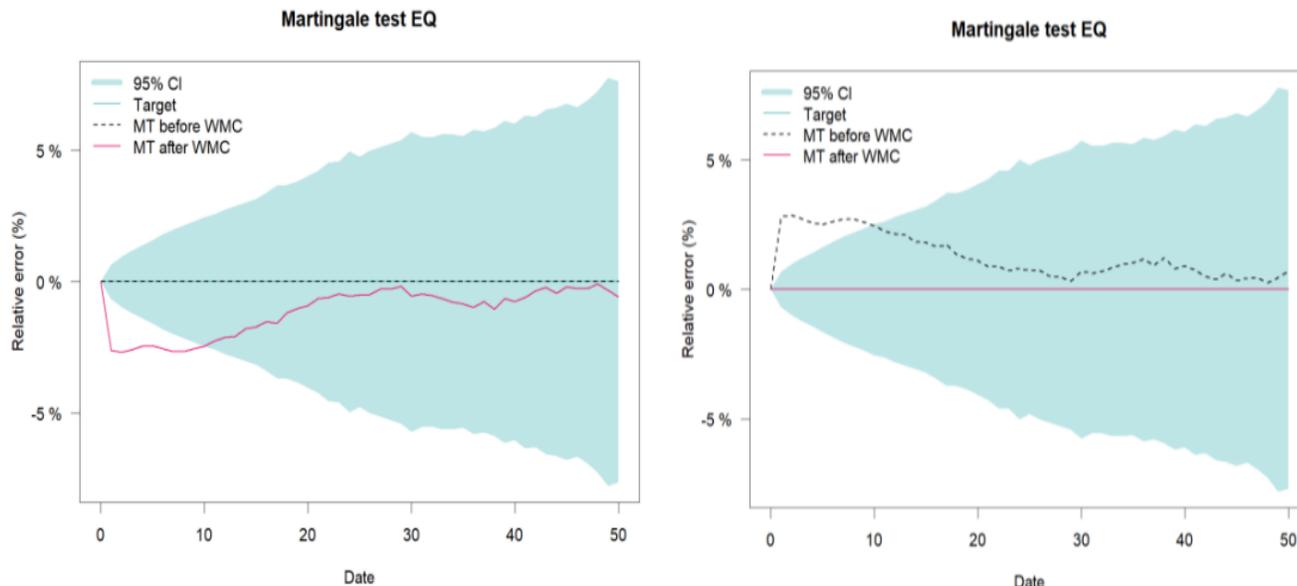
$$\min_p \{w_{mc} \times \chi_w^2(p) + w_e \times D(p | u)\}.$$

Avec

- w_{mc} l’importance attribuée aux contraintes de martingalité et de *market consistency*
- w_e l’importance donnée à la fonction d’entropie

Par ailleurs, l’ordre dans lequel sont appliqués ces deux ajustements n’est pas neutre. Le graphique de gauche ci-dessous présente le test de martingalité sur les actions lorsque le *MMA* est effectué avant le *WMC*, et dans l’autre sens dans le graphique de droite.

FIGURE 2.2.7 – Impact de l'ordre de l'application des ajustements sur le test de martingalité des actions



Ces graphiques permettent de conclure que l'ordre d'application de ces ajustements a un impact significatif sur les tests de martingalité puis que par construction lorsque le *MMA* est appliqué après le *WMC* cela permet d'obtenir des tests parfaits.

A noter : les trajectoires *PHRSS* sont ajustées d'abord par le *WMC* puis par le *MMA*.

Présentation des trajectoires publiées par l'*EIOPA*

A l'aide de ces méthodes, l'*EIOPA* a proposé 6 jeux de 9 scénarios résumés dans le tableau suivant :

TABLE 2.2 – Liste des scénarios publiés par l'*EIOPA*

Lot de scénario	Méthode de sélection des scénarios	Spécificités
Lot de scénario n°1	Méthode 1	Graine n°1
Lot de scénario n°2	Méthode 1	Graine n°2
Lot de scénario n°3	Méthode 2	Liste de quantiles A
Lot de scénario n°4	Méthode 2	Liste de quantiles B
Lot de scénario n°5	Méthode 3	Graine n°1
Lot de scénario n°6	Méthode 3	Graine n°2

NB : les deux ajustements développés dans le paragraphe 2.2.2 « Ajustement des scénarios » (*MMA* et pondération ou *WMC*) ont été appliqués à tous ces scénarios.

Les fichiers partagés par l'*EIOPA* comportent également la pondération entre les différentes trajectoires, les poids attribués sont présentés dans le tableau suivant :

TABLE 2.3 – Poids publiés par l’*EIOPA* à appliquer aux scénarios *PHRSS*

Numéro du scénario	Lot 1	Lot 2	Lot 3	Lot 4	Lot 5	Lot 6
1	10,384%	5,047%	25,155%	24,785%	9,502%	6,887%
2	15,813%	21,119%	11,421%	11,858%	7,291%	12,389%
3	12,839%	14,211%	7,879%	9,798%	9,349%	10,544%
4	7,509%	9,143%	7,935%	6,791%	4,145%	12,275%
5	6,355%	7,736%	8,952%	7,253%	6,134%	7,785%
6	8,894%	11,014%	5,783%	6,169%	7,025%	20,207%
7	15,179%	10,625%	4,915%	6,897%	20,231%	11,671%
8	8,451%	10,354%	7,207%	11,977%	30,280%	9,965%
9	14,577%	10,750%	20,753%	14,473%	6,044%	8,276%

Par ailleurs, le calibrage du modèle peut être effectué soit en utilisant des données de marché soit à l’aide d’hypothèses monde réel basées sur les chocs de la formule standard. Les deux approches ont été étudiées par l’*EIOPA*

— **Utilisation de données de marché**

Cette solution est peu envisageable pour l’*EIOPA* car cela impliquerait des coûts supplémentaires.

— **Utilisation de données monde réelles basées sur les chocs formule standard**

Cette méthode consiste à récupérer les volatilités implicites des chocs de la formule standard.

L’*EIOPA* a choisi de retenir un calibrage basé sur la formule standard pour éviter des coûts supplémentaires, liés à un fournisseur de données de marché, et pour obtenir une méthodologie stable dans le temps. Ainsi les volatilités retenues sont issues des chocs de la formule standard (voir détail ci-dessous).

— **Estimation du paramètre de volatilité du modèle de taux**

L’*EIOPA* a choisi un choc absolu de 1% (remplaçant ici le choc bicentenaire) volontairement prudent par rapport aux chocs constatés à fin 2021.

La volatilité est donc calculée en résolvant l’équation :

$$q_{99,5\%}(\sigma_{IR} * \varepsilon^{IR}) = 1\%.$$

Le paramètre de volatilité obtenu est :

$$\sigma_{IR} = 0,39\%.$$

— Estimation du paramètre de volatilité du action

Étant donné que le choc sur les actions de type 1 de la Formule Standard vaut 39%, la volatilité est donc calculée en résolvant l'équation :

$$e^{-0.5\sigma_{EQ}^2 + \sigma_{EQ} \cdot 40,5\% \cdot N(0;1)} = 1 - 39\%.$$

La volatilité implicite action déduite est :

$$\sigma_{EQ} = 19\%.$$

— Estimation du paramètre de volatilité du modèle immobilier

Étant donné que le choc sur l'immobilier de la Formule Standard vaut 25%, la volatilité est donc calculée en résolvant l'équation :

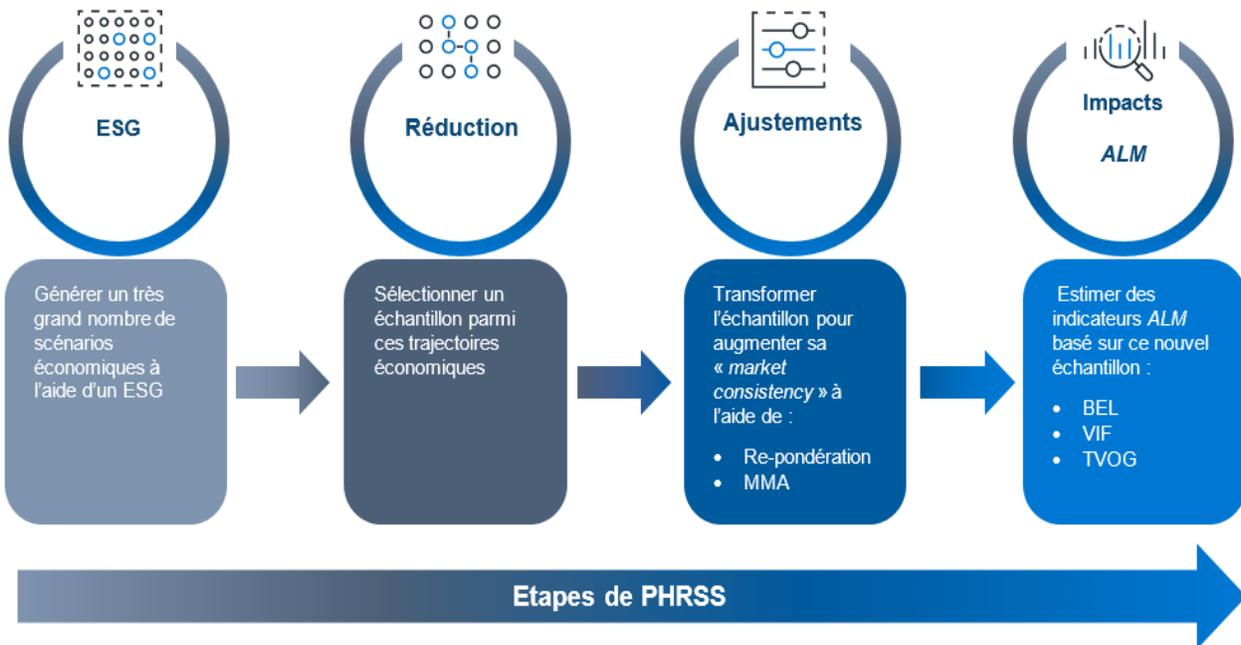
$$e^{-0.5\sigma_{RE}^2 + \sigma_{RE} \cdot 40,5\% \cdot N(0;1)} = 1 - 25\%.$$

La volatilité implicite action déduite est :

$$\sigma_{RE} = 11\%.$$

En résumé, les étapes des méthodes proposées par l'*EIOPA* sont les suivantes :

FIGURE 2.2.8 – Présentation des étapes de *PHRSS*



2.3 Implémentation dans un modèle *ALM* représentatif du marché français

La première étape de ce mémoire consiste à tester les trajectoires fournies par l'*EIOPA* sur un portefeuille représentatif du marché français au 31/12/2021, date à laquelle les scénarios *PHRSS* ont été publiés par l'*EIOPA*. La première demande d'information ne concerne que la partie du portefeuille libellée en euros. Seuls les taux, les indices action et immobilier font partie des scénarios publiés, ainsi nous avons retenu une version simplifiée de modèle *ALM*.

Le portefeuille fictif retenu pour cette étude est une agrégation des actifs et passifs représentatifs du marché français à l'aide des données publiées par France Assureurs, l'ACPR, les rapports annuels des assureurs et de certains jugements d'experts liés aux retours d'expérience des missions de conseil.

Le portefeuille retenu constitue une entité **fictive** regroupant les principales caractéristiques des compagnies d'assurance exerçant sur le marché français mais **ne représente pas une moyenne du marché**. Le modèle retenu est « standard » ; il ne prend pas en compte l'ensemble des spécificités des diverses entreprises d'assurance du marché.

2.3.1 Bilan au 31/12/2021

Les comptes sociaux 31/12/2021 sont présentés ci-dessous :

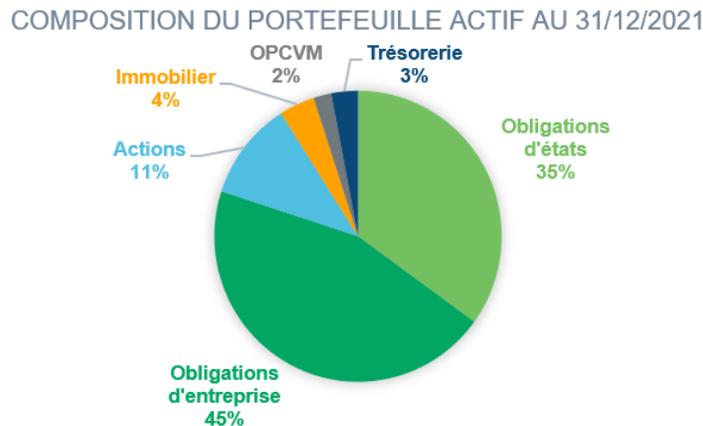
FIGURE 2.3.1 – Comptes sociaux au 31/12/2021

ACTIF	PASSIF
Actifs en face des fonds propres 99 Md€	Fonds propres 99 Md€
Autres actifs 2 020Md€	Réserve de capitalisation 21Md€
	PT contrats en Euros 1 421Md€
	PPE 70Md€
	PM des contrats UC 506 Md€

2.3.2 Portefeuille d'actifs représentatif du marché français

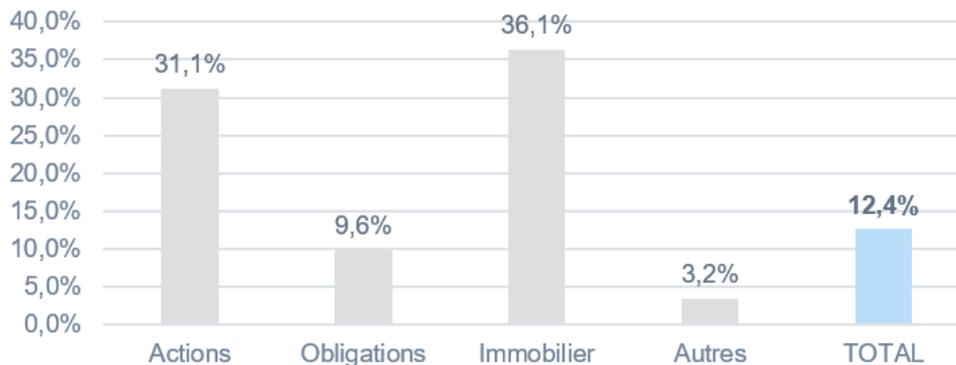
La composition du portefeuille à l'actif retenu pour cette étude est présenté ci-dessous, il correspond à l'agrégation des données issues de France Assureurs, et des états détaillés des placements publiés par les organismes d'assurance.

FIGURE 2.3.2 – Composition du portefeuille à l'actif au 31/12/2021



Le niveau de plus-values latentes par classe d'actifs (en % de la VNC) au 31/12/2021 est le suivant :

FIGURE 2.3.3 – Niveau de plus-values latentes par classe d'actifs au 31/12/2021



2.3.3 Passif représentatif du marché français

Le modèle *ALM* utilisé comprend un portefeuille de produits d'assurance-vie présentant des taux minimum garantis (TMG) divers. La répartition des TMG en fonction des provisions mathématiques est présentée dans le tableau ci-dessous :

TABLE 2.4 – Taux minimum garantis modélisés au 31/12/2021

TMG	en % de la PM
TMG < 2%	55%
2% ≤ TMG ≤ 3%	0,5%
3% ≤ TMG	44,5%

La courbe de taux sans risque utilisée est celle sans *VA*, afin de correspondre à l'étude *PHRSS*; soit la courbe publiée par l'*EIOPA* pour le 31/12/2021⁶. A noter qu'à fin 2021 cette hypothèse a peu d'impact car le *VA* valait 3 bps. La durée du passif est de 10,5 ans et celle de l'actif obligataire de 7 ans.

Dans le modèle utilisé, des décès, rachats totaux, partiels et arbitrages sont modélisés; les frais sont en coûts unitaires inflatés. Il existe des mécanismes de PRE, réserve de capitalisation etc... Par ailleurs, la loi de rachats conjoncturels implémentée dans le modèle est comprise entre l'ONC Min et l'ONC Max⁷.

Le modèle utilisé est sous forme de « flexing », c'est-à-dire que la projection du passif seul est réalisée en amont puis les flux sont « flexés » pour être intégrés au modèle actif-passif.

Concernant l'algorithme mis en place dans le modèle ALM :

- La stratégie d'achats et de ventes des actions, celle-ci est effectuée en valeur de marché avec un corridor.
- La stratégie de participation aux bénéfices (PB) quant à elle, consiste à viser un taux cible tout en utilisant si besoin de la provision pour participation aux bénéfices (PPB) et des plus-values latentes (PVL) sur des actifs de catégorie R343-10 du Code des Assurances dans une certaine limite prévue dans l'algorithme de PB.

2.4 Analyse des résultats PHRSS

La première étape de ce mémoire consiste à tester les méthodologies proposées par l'*EIOPA* sur notre portefeuille représentatif du marché français, afin d'orienter la sélection de méthodes pertinentes en troisième partie. La première étape consiste donc à injecter les tables publiées par l'*EIOPA* dans l'outil *ALM* représentatif du marché français.

Les tables publiées par l'*EIOPA* contiennent des zéros-coupons, un indice action et immobilier à fin 2021, le modèle *ALM* a donc été adapté en conséquence.

6. Publication RFR *EIOPA*

7. La forme de la loi implémentée dans le modèle est celle présentée dans les [Orientations Nationales Complémentaires 2013](#)

Les résultats obtenus à fin 2021 sont les suivants :

TABLE 2.5 – Résultats PHRSS

Lot étudié	Lot 1	Lot 2	Lot 3	Lot 4	Lot 5	Lot 6
Écart de convergence ⁸	-0,33%	0,42%	1,29%	2,34%	0,59%	-1,02%
% de la <i>TVOG</i> estimée	114%	109%	141%	129%	119%	129%

A fin 2021, la méthode qui estime le mieux la *TVOG* est la méthode 1 correspondant à la sélection aléatoire de trajectoires, et aux lots 1 et 2 car l'écart de convergence reste limité.

Cependant, bien que la méthode 3 ne soit pas très précise sur 9 simulations, elle sera étudiée dans la suite de ce mémoire (voir partie 3 « Sélection de méthodes pertinentes ») car celle-ci peut s'avérer pertinente sur un nombre plus élevé de scénarios.

En conclusion, les scénarios *PHRSS* ont tendance à surestimer la *VIF*, ce qui peut s'expliquer par le fait que les scénarios *PHRSS* sous-estiment la volatilité des *swaptions* par rapport au GSE de référence (pour rappel, les scénarios économiques sont basés sur des modèles de marché calibrés sur des données de marché).

En effet, l'*EIOPA* souligne dans la note méthodologique de la demande d'informations *PHRSS* : qu'« Étant donné que *PHRSS* est destiné à fournir une évaluation de la matérialité de la *TVOG*, l'évaluation pourrait ne pas correspondre parfaitement aux critères d'une évaluation économique complète du bilan ». En particulier, la méthode 1 produit une fuite plus faible que les autres approches et une meilleure estimation du *TVOG*.

Par ailleurs, le lot 2 fournit les estimations les plus proches des indicateurs *ALM* ; cela est dû aux volatilités des *swaptions* qui sont relativement proches des volatilités de marché observées le 31 décembre 2021. Cependant, ces volatilités sont les plus éloignées de la volatilité cible des *swaptions* utilisée par l'*EIOPA* pour calibrer le modèle de taux d'intérêt *PHRSS*.

Par conséquent, les bons résultats obtenus pour ce lot de scénarios mettent en évidence l'importance d'utiliser des données de marché pour calibrer le GSE de référence afin de reproduire plus étroitement les résultats *ALM* obtenus avec le GSE de référence. Les lots 3 et 4, correspondant à la méthode 2, produisent les pires résultats en termes de *VIF* (395% pour le lot 3 et 299% pour le lot 4), causés par une sous-estimation supplémentaire des volatilités des actions et de l'immobilier. Par conséquent, la méthode 2 ne sera pas développée dans la suite de ce mémoire. La méthode 3 conduit à des distorsions significatives de la *VIF* et de la *TVOG*. Néanmoins, elle fournit des résultats acceptables de martingalité et de cohérence par rapport au marché.

Par la suite, des techniques de réduction similaires à la méthode 3 seront développées sur notre GSE de référence et en utilisant des cibles de volatilité de marché.

Il est à noter que l'objectif de l'*EIOPA* est d'obtenir une estimation prudente de la *TVOG* chez des organismes ne possédant pas de GSE pour le moment, et de présenter une méthode simple et stable dans le temps. Ainsi les méthodes qui ont été publiées dans le cadre du groupe de travail *PHRSS* représentent une bonne base d'étude pour le reste de ce mémoire. En effet, le but de ce dernier est d'obtenir une évaluation la plus précise de la *VIF*, en réduisant le nombre de scénarios, mais sans avoir de contraintes de mise à disposition de données financières, car celles-ci sont déjà disponibles dans le GSE Milliman présenté dans le chapitre suivant.

En ayant conscience que l'objectif de ce mémoire est différent de celui du groupe *PHRSS*, voici les limites constatées sur la méthode proposée par l'*EIOPA* qui ont été « améliorées » dans la suite de ce mémoire.

2.4.1 Cohérence aux données de marché

Calibrage des volatilités

Les volatilités implicites basées sur la formule standard sont éloignées de celles constatées sur les marchés à fin 2021 (voir graphiques et tableau ci-dessous).

FIGURE 2.4.1 – Comparaison des volatilités implicites actions de marché avec celles utilisées par l'*EIOPA* au 31/12/2021

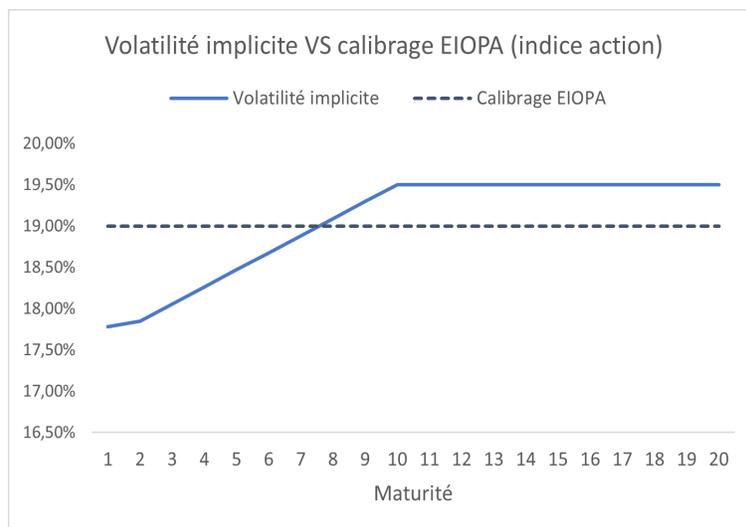
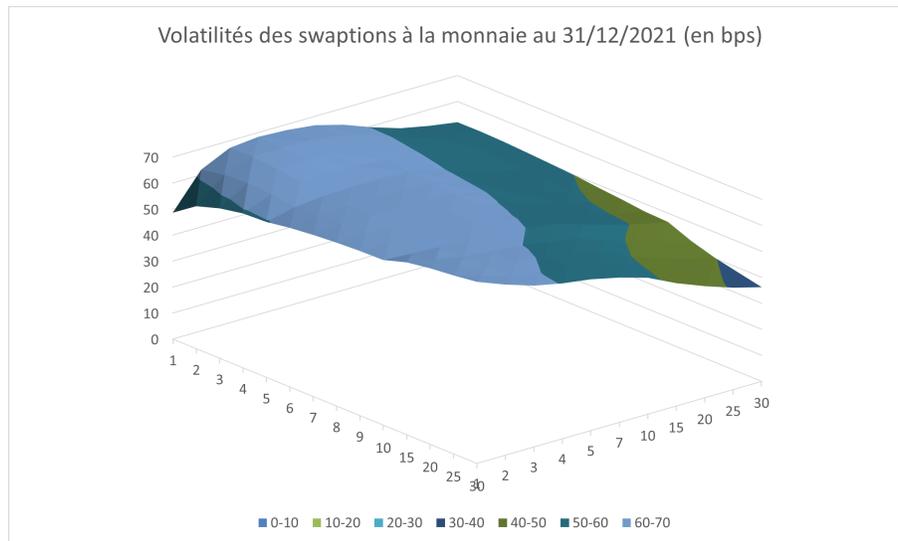


FIGURE 2.4.2 – Comparaison des volatilités implicites des *swaptions* à la monnaie avec celles utilisées par l'*EIOPA* au 31/12/2021 (39bps)



On observe les écarts de volatilité en particulier entre les données de marché à fin 2021 comparées aux volatilités retenues par l'*EIOPA*.

En effet, les volatilités retenues par l'*EIOPA* sont inférieures à celles observées sur le marché en particulier à partir de 10 ans sur les taux comme les actions. Ainsi, n'ayant pas de contrainte sur la disponibilité des données de marché dans le cadre de ce mémoire, nous tenterons d'améliorer la précision à l'aide d'un calibrage sur une nappe de volatilité.

Le tableau suivant présente le recalibrage des volatilités des *swaptions* effectué sur les scénarios *PHRSS* à l'aide d'une technique de Monte Carlo et les compare aux volatilités de marché des *swaptions* à la monnaie (*ATM*) au 31 décembre 2021 utilisées pour calibrer le GSE de référence.

TABLE 2.6 – Erreurs absolues entre les volatilités Monte Carlo et celle constatés sur le marché

Volatilité Monte Carlo contre marché	Lot 1	Lot 2	Lot 3	Lot 4	Lot 5	Lot 6
Maturité/Tenor	[1 ;30]	[1 ;30]	[1 ;30]	[1 ;30]	[1 ;30]	[1 ;30]
[1 ; 7]	-0,19%	0,10%	-0,26%	-0,14%	-0,31%	-0,16%
[10 ; 30]	-0,17%	-0,08%	-0,15%	-0,03%	-0,08%	-0,10%

Ce tableau illustre les différences absolues moyennes entre les volatilités de Monte Carlo et les volatilités de marché au 31 décembre 2021. Pour faciliter l'analyse, les moyennes ont été réparties en deux zones : les *swaptions* de maturités à court terme (entre un et sept ans) et les *swaptions* de maturités à long terme (supérieures à dix ans). Les résultats démontrent que les volatilités de Monte Carlo des scénarios

PHRSS sous-estiment les volatilités de marché utilisées dans le GSE de référence d'environ 20 points de base (bps). La différence est assez sensible à la graine utilisée. En effet, pour la méthode 1, un changement de graine crée une variation de +29 bps entre le lot 1 et le lot 2.

Le recalibrage des volatilités implicites des actions et de l'immobilier estimées à l'aide d'une technique de Monte Carlo sur les scénarios *PHRSS* est fait comme suit. Pour les Méthodes 1 et 3 (en se concentrant sur les lots 1 et 5), les résultats sont proches compte tenu du nombre limité de simulations. Nous obtenons, respectivement, une volatilité moyenne de 19,42 % et 17,62% pour les actions (cf. tableau ci-dessous). A noter que les résultats sont également proches des volatilités implicites de marché *ATM* du 12 décembre 2021 utilisées dans le GSE de référence. De plus, les résultats restent relativement stables indépendamment de la graine de générateur aléatoire utilisée (Lots 2 et 6).

Cependant, la Méthode 2 (Lots 3 et 4) conduit à des volatilités des actions largement sous-estimées par rapport aux volatilités cibles. En effet, les trajectoires sont lisses, comme spécifié par l'*EIOPA* dans la note méthodologique *PHRSS* : « Les scénarios sont une augmentation ou une diminution continue de la valeur [...] Il n'y a donc pas de « volatilité interne » dans un scénario donné. »

TABLE 2.7 – Estimation de la volatilité action

Métrique	Marché	Lot 1	Lot 2	Lot 3	Lot 4	Lot 5	Lot 6
Volatilité action estimée	19,04%	19,42%	18,22%	3,27%	4,56%	17,62%	18,22%

La structure de corrélation

Un autre biais observé entre les trajectoires initiales de *PHRSS* et celles du GSE Milliman vient de la structure de corrélation entre les mouvements browniens intervenant dans les dynamiques des modèles. En effet, ceux-ci sont générés indépendamment dans *PHRSS* alors qu'ils sont corrélés dans le GSE Milliman.

Le paragraphe suivant explique succinctement la méthode utilisée dans le GSE Milliman pour créer la matrice de corrélation entre les différents browniens.

La méthodologie d'estimation de la matrice de corrélation s'appuie sur trois étapes :

1. Dans un premier temps, des corrélations cibles sont estimées entre des facteurs de risque observables (variations de taux, log-rendements actions, log-rendements immobiliers. . .). Cette étape repose sur l'étude des séries historiques, en utilisant la formule suivante :

$$\rho^{\text{Estimée}} = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} (X(t_i) - \bar{X})(Y(t_i) - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N-1} (X(t_i) - \bar{X})^2} \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N-1} (Y(t_i) - \bar{Y})^2}}$$

Avec :

- (a) X : l'historique des incréments de taux
- (b) Y : l'historique des log-rendements de l'indice action ou immobilier de l'indice qu'on cherche à corréler

On calcule X les incréments de taux à l'aide de la formule suivante :

$$X(t_i) = R(t_{i+1}, T_1) - R(t_i, T_1).$$

Avec : $R(t_i, T_1)_{i=1\dots N'}$ l'historique de N taux de duration T_1

Et on calcule Y les log-incréments de l'indice qu'on cherche à corrélérer grâce aux valeurs de l'indice action, notées $(S_{t_i})_{i=1,\dots,N'}$ à l'aide de la formule suivante :

$$Y(t_i) = \log\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right).$$

2. Ensuite, une expression analytique des corrélations entre les facteurs de risque observables en fonction des corrélations entre les mouvements browniens et des paramètres des modèles retenus est établie.
3. Enfin, les paramètres de corrélation entre les mouvements browniens sont estimés de sorte à reproduire les cibles de l'étape 1 avec les expressions de l'étape 2.

Une fois les corrélations calculées entre chaque indice, une matrice de corrélation est construite sur la base de la valeur de ρ qui est calculé comme $\rho = \rho^{estimée} / B(T)$ avec $B(T)$ le mouvement brownien.

Chapitre 3

Sélection de méthodes pertinentes

L'objectif de cette partie est d'implémenter les méthodes les plus pertinentes parmi celles présentées dans les deux chapitres précédents. Puis, d'autres variantes seront développées dans le but de construire une méthode robuste permettant d'estimer la *VIF* le plus précisément possible tout en gardant un écart de convergence limité et suivant les bonnes pratiques énoncées par l'ACPR.

3.1 Trajectoires initiales émanant du GSE Milliman

Le GSE Milliman est un générateur de scénarios économiques développé par Milliman France et précédemment appelé « CHESS ». Ce GSE est en mesure de projeter un large éventail d'équations différentielles stochastiques. Dans le cadre de notre étude et par enjeux de comparaison avec les scénarios *PHRSS* nous avons retenus les modèles suivants :

- **Pour les taux nominaux** : un Displaced Diffusion Libor Market Model (DDLMM) dont la dynamique est la suivante :

$$dL_i(t) = \mu_i(L(t), t) (L_i(t) + \alpha_i) dt + \sigma_i(t) (L_i(t) + \alpha_i) dW_i(t).$$

Avec :

- $L_i(t)$ le taux forward au temps t , d'expiration T et de maturité T_{i+1} , où $(T_i)_{i \geq 0}$ défini une suite de date croissantes
- $W_i(t)$ un mouvement brownien standard sous la probabilité risque-neutre
- **Pour les actions** : un modèle de Black-Scholes à volatilité déterministe dépendant du temps, diffusé comme suit sous la probabilité risque-neutre :

$$dS_t = S_t (r_t dt + \sigma_t dW_t^S).$$

Avec :

- S_t le prix de l'actif au temps t
- r_t le taux court sans risque défini à partir du modèle de taux nominaux DDLMM
- W_t^S est un mouvement brownien sous la probabilité risque-neutre
- σ_t la volatilité du prix de l'actif sous-jacent $S(t)$

avec des dividendes stochastiques suivant la dynamique du modèle de Cox-Ingersoll-Ross

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t.$$

- **Pour l'immobilier** : La dynamique de l'indice immobilier est similaire à celle de l'indice action présentée plus haut, à la différence que le processus σ_t est constant.

Par ailleurs, il est à noter que le GSE Milliman permet de produire 3 000 simulations respectant les bonnes pratiques énoncées dans la notice de l'ACPR¹. Enfin, les tests de martingalité et de *market consistency* sont en adéquation avec ces bonnes pratiques. Cela permet de garantir que les données en sorties sont des points de comparaison robustes pour la suite de nos analyses.

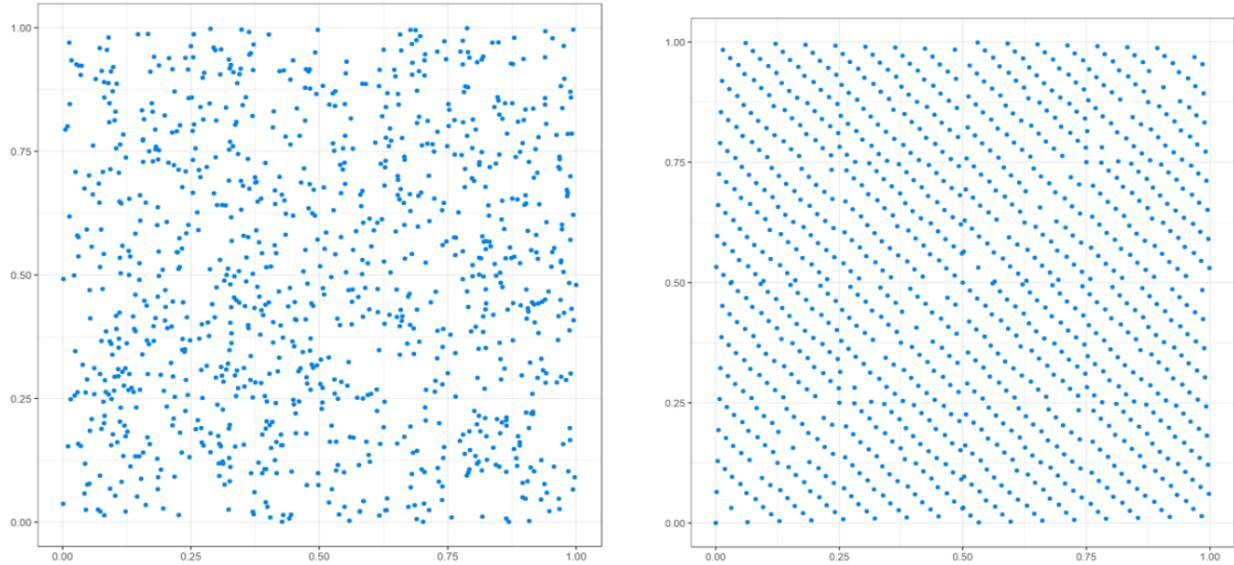
3.1.1 Choix du générateur de nombres aléatoires

La qualité du générateur de nombres aléatoires (*RNG*) et de la graine choisie peut significativement impacter les tests de validation, la fuite de modèle, et plus généralement les sorties du modèle *ALM*. Dans le cadre de ce mémoire, les calculs sont basés sur un générateur de nombres aléatoires appelé « *RNG* hybride ». Il se repose sur les séquences quasi-aléatoires de Sobol dites à « discrèpence faible ». En d'autres termes, il est construit pour obtenir une vitesse de convergence plus rapide que le théorème central limite. Ces catégories de *RNG* présentent l'avantage de répartir l'espace de manière plus uniforme que les autres *RNG* dits « standards ». C'est un avantage qui est particulièrement intéressant dans le cadre de ce mémoire, car sélectionnant un nombre très réduit de scénarios, nous souhaitons que ceux retenus soient bien répartis dans l'espace et indépendants. Cependant, les séquences Sobol traditionnelles peuvent présenter des défis, notamment en ce qui concerne les taux de convergence potentiels plus faibles lorsqu'elles sont utilisées dans des problèmes de dimension plus élevée. Pour atténuer ces limitations, les scénarios du GSE Milliman utilisent une approche de générateur de nombres aléatoires hybride dérivée du générateur de nombres aléatoires Sobol.

Les graphiques suivants permettent de comparer d'une part le *RNG* appelé « Mersenne-Twister » et Sobol d'autre part.

1. Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques

FIGURE 3.1.1 – Comparaison des *RNG* Mersenne Twister (à gauche) et Sobol (à droite)



Il en ressort que le *RNG* Sobol présenté dans le graphique de droite permet en effet de mieux couvrir l'espace.

Le *RNG* hybride quant à lui, est développé à l'aide de deux premières étapes :

1. Constitution d'un échantillon à faible discrèpence

Dans un premier temps, un échantillon déterministe à faible discrèpence est créée à l'aide des séquences de Sobol permettant ainsi de remplir l'espace de manière uniforme.

2. Perturbation par randomisation

La séquence obtenue est ensuite perturbée à l'aide d'un processus de randomisation. Cela permet d'améliorer la divergence de la séquence tout en garantissant une répartition uniforme dans l'espace.

Nous comparons ci-dessous, la performance du *RNG* hybride avec celle du *RNG* pseudo-aléatoire Mersenne-Twister classiquement utilisé dans les GSE de place, à l'aide de l'indicateur *RMSRE* :

$$RMSRE = \sqrt{\frac{1}{|\mathcal{T}|} \sum_{i \in \mathcal{T}} \left(\frac{\hat{E}_i - E_i}{E_i} \right)^2}.$$

Avec \mathcal{T} l'échantillon pour tous les tests martingales et de *market consistency* \hat{E}_i la valeur estimée E_i la valeur qu'on cherche à estimer.

La comparaison entre les *RNG* de hybride et Mersenne-Twister est présentée sur les deux graphiques suivants, la comparaison est effectuée d'une part sur l'indicateur *RMSRE*, et d'autre part sur l'écart de convergence.

FIGURE 3.1.2 – Comparaison du *RNG* hybride et Mersenne-Twister sur l'écart de convergence

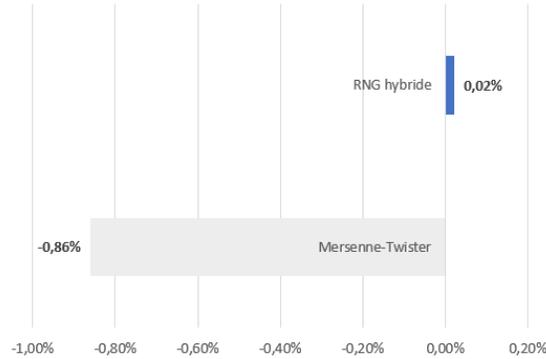
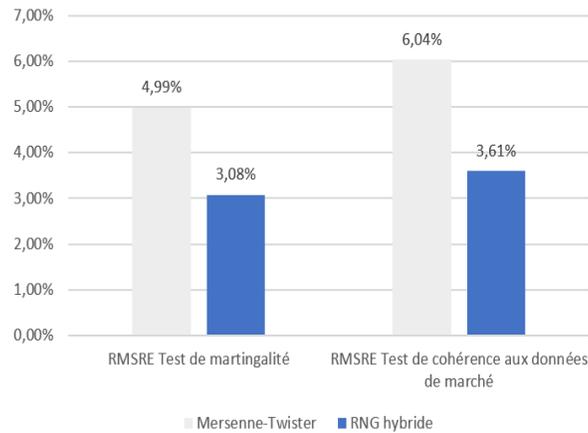


FIGURE 3.1.3 – Comparaison du *RNG* hybride et Mersenne-Twister sur les métriques de *RMSRE*



Ces deux métriques permettent de conforter notre choix d'utiliser le *RNG* hybride car il permet de réduire considérablement la fuite de modèle et les erreurs de martingalité et de *market consistency* (voir [4])

L'outil développé dans le cadre de ce mémoire permet à l'utilisateur de sélectionner un nombre de n scénarios parmi les 3 000 scénarios en sortie du GSE qu'il souhaite retenir ; une nouvelle table est alors créée avec les n scénarios retenus.

Au plus de l'utilisation du *RNG* hybride, trois ajustements ont été appliqués aux scénarios :

1. *WMC (Weighted Monte Carlo)*
2. *MMA (Moment Matching Adjustment)*
3. *Rescaling*

En effet, lorsque le nombre de trajectoires est réduit, il peut être nécessaire d'effectuer des ajustements car en réduisant fortement le nombre de simulations, les propriétés de martingalité et de *market*

consistency peuvent être largement dégradées et entraîner des conséquences dans la stabilité du modèle *ALM* notamment sur la fuite de modèle. Ces ajustements sont détaillés dans les sections qui suivent.

3.2 Ajustements appliqués aux scénarios

3.2.1 WMC

Le *WMC* ou « reponderation » est un ajustement des simulations sélectionnées attribuant un poids à chacune de celles-ci. Cet ajustement est développée en partie 2

3.2.2 MMA

Comme introduit en partie 1, le *Moment Matching Adjustment* est une méthode qui adapte les trajectoires afin qu'elles soient martingales.

3.2.3 Rescaling

Parallèlement, un nouvel ajustement est introduit par rapport aux méthodes présentées dans *PHRSS* nommé « *rescaling* ». Il permet d'ajuster les niveaux de volatilités des actifs assimilés à des actions. Cet ajustement est intéressant à appliquer à la suite des deux précédents car il permet de limiter la distorsion des volatilités. En supposant que l'indice de référence actualisé suive une distribution log-normale sous la probabilité risque-neutre :

$$S_{\text{ref}}(t) = D(t)S(0) \exp\left(-\frac{\sigma_{\text{reference}}^2(t)}{2} + \sigma_{\text{reference}}(t)W_t\right).$$

avec :

- $D(t)$ le déflateur
- $\sigma_{\text{reference}}$ la volatilité initiale

On cherche à trouver un facteur de *rescaling* permettant de s'approcher d'une nouvelle volatilité cible sans trop distordre la volatilité initiale. Ce facteur est calculé comme :

$$\lambda(t) = \frac{\sigma_{\text{target}}(t)}{\sigma_{\text{reference}}(t)}.$$

Une fois ce facteur de *rescaling* calculé on re-simule l'indice comme suit :

$$S_{\text{adjust}}^i(t) = S_{\text{ref}}^i(0) \frac{\exp\left(\left(LR_{\text{ref}}^i(t) - \overline{LR_{\text{ref}}}(t)\right) \times \lambda(t) + \overline{LR_{\text{ref}}}(t) \times \lambda^2(t)\right)}{D_{\text{ref}}^i(t)}.$$

avec :

- $\overline{LR_{\text{ref}}}(t) = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v LR_{\text{ref}}^i(t)$, l'estimateur de l'espérance de LR_{ref}
- $LR_{\text{ref}}^i(t) = \ln\left(\frac{s_{\text{ref}}^i(t)}{s_{\text{ref}}^i(0)} \times D_{\text{ref}}^i(t)\right)$, la valeur en simulation i

3.2.4 Résultats obtenus en fonction de l'ordre d'application des ajustements

Les impacts *ALM* portent sur 200 simulations sélectionnées à l'aide de la méthode A au 31/12/2021 afin d'être comparables avec ceux de *PHRSS*. Le modèle a été lancé à fin 2021 sur un portefeuille représentatif du marché français. Le tableau ci-dessous présente l'impact sur les métriques *ALM* des différents ajustements en fonction de leur ordre d'application :

TABLE 3.1 – Résultats du modèle *ALM* sur la méthode A en fonction de l'ordre d'application des ajustements

Métrique	Sans ajustement	Avec MMA	Avec WMC	Avec WMC puis MMA	Avec rescaling, WMC puis MMA
Écart de convergence	0,02%	-0,17%	0,11%	-0,05%	-0,34%
% de la <i>TVOG</i> estimée	102%	101%	101%	101%	102%
% de la <i>VIF</i> estimée	115%	109%	104%	107%	110%
<i>RMSRE</i> (test de martingalité)	3,08%	0%	2,41%	0%	0%
<i>RMSRE</i> (test de market consistency)	3,61%	3,20%	5,65%	5,67%	5,03%

Le pourcentage de *VIF* estimée correspond au ratio de la *VIF* estimée (sur un nombre réduit de scénarios) sur la *VIF* cible calculée sur les 3 000 scénarios en sortie du GSE Milliman. De même pour le pourcentage de *TVOG* estimée.

Ce tableau permet de conclure que les résultats restent acceptables sans ajustements, mais que l'application du *MMA* réduit considérablement le *RMSRE* sur les tests de martingalité les amenant à 0 par construction. L'application unique de repondération (ou *WMC*) permet de mieux approcher la cible de *VIF* tout en gardant un écart de convergence acceptable.

En revanche, la combinaison de l'application du *MMA* et du *WMC* s'éloigne de la cible de *VIF* par rapport à une simple repondération. En effet, l'application du *MMA* améliore certes les tests de martingalité mais peut amener à la distordre les trajectoires du GSE, d'autant plus que le nombre de simulations est réduit, et ainsi avoir un impact sur les sorties du modèle *ALM*. L'application du *rescaling* n'a quant à elle que peu d'impact sur les résultats présentés ci-dessus, en partie car le nombre de simulations reste relativement élevé; mais cet ajustement peut s'avérer utile avec un nombre bien plus faible de simulations mais les résultats sont peu convaincants. La suite de ce mémoire se concentre donc sur les techniques de réduction du nombre de simulations avec un ajustement *WMC* puis *MMA*.

3.3 Techniques de sélection de trajectoires implémentées

Dans cette section nous présentons les techniques de sélection de trajectoires implémentées dans le cadre de ce mémoire. Suite à l'analyse des 3 méthodes présentées par l'*EIOPA*, ainsi que l'étude de celles développées par la Y. Chueh, nous avons choisi de concentrer la suite de nos analyses sur 3 méthodes notées A, B et C :

- Méthode A : Sélection de trajectoires aléatoires (inspirée de la méthode 1 développée par l'*EIOPA*)
- Méthode B : Écart au portefeuille de référence (inspirée de la méthode 3 développée par l'*EIOPA*)
- Méthode C : Facteur d'actualisation basé sur la mesure de « significativité » développée par Y. Chueh

Pour rappel, les résultats obtenus dans cette partie seront comparés à ceux obtenus sur le même modèle *ALM* basé sur les 3 000 simulations générés par le GSE Milliman.

3.3.1 Méthode A : Sélection de méthodes aléatoires

Une première méthode (notée Méthode A) consiste à sélectionner des scénarios aléatoirement au sein des 3 000 simulations en sortie du GSE risque-neutre Milliman. Les étapes de sélection de scénarios sont les suivantes :

1. Choisir un nombre de simulations (par exemple 10)
2. Sélectionner les 10 premières simulations dans l'échantillon composé des 3 000 simulations initiales
3. Effectuer les ajustements décrits précédemment (*MMA* et *WMC*)

Ces 3 étapes sont présentées dans le schéma ci-dessous :

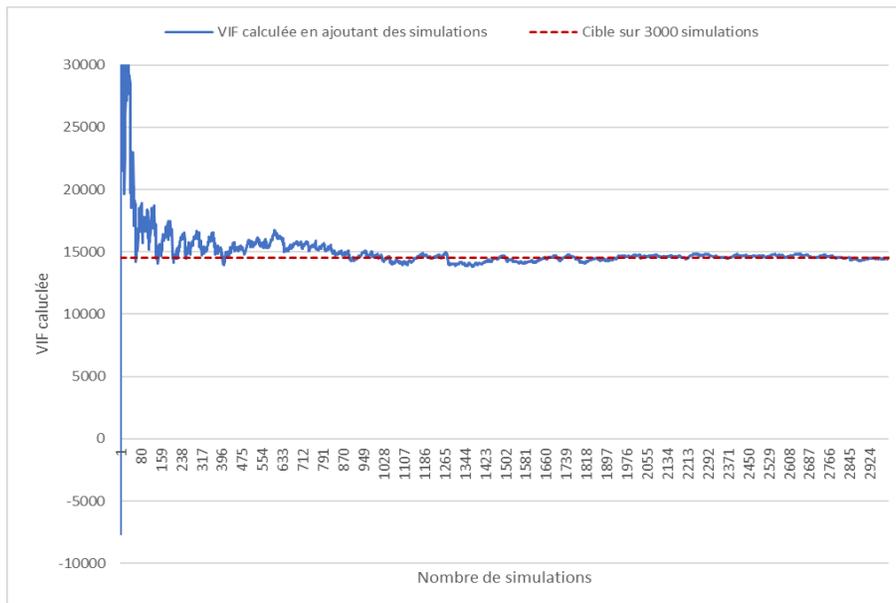
FIGURE 3.3.1 – Résumé de la méthode A

Echantillon initial		Réduction de simulations	
Scénario dans l'ESG Milliman	Poids dans l'ESG Milliman	Scénario sélectionné	Poids finaux
1	1/3000	OUI	1/5
2	1/3000	OUI	3/10
3	1/3000	OUI	0,5/10
4	1/3000	OUI	1/10
5	1/3000	OUI	3/10
6	1/3000	OUI	0,5/10
7	1/3000	OUI	1,5/10
8	1/3000	OUI	0,25/10
9	1/3000	OUI	0,75/10
10	1/3000	OUI	0,75/10
11	1/3000	OUI	0,25/10
12	1/3000	OUI	1/10
...			
2995	1/3000	NON	0
2996	1/3000	NON	0
2997	1/3000	NON	0
2998	1/3000	NON	0
2999	1/3000	NON	0
3000	1/3000	NON	0
Total	1		1

Il est à noter que bien que cette méthode puisse sembler simple, elle présente l'avantage de conserver l'aléa initialement présent dans l'échantillon initial.

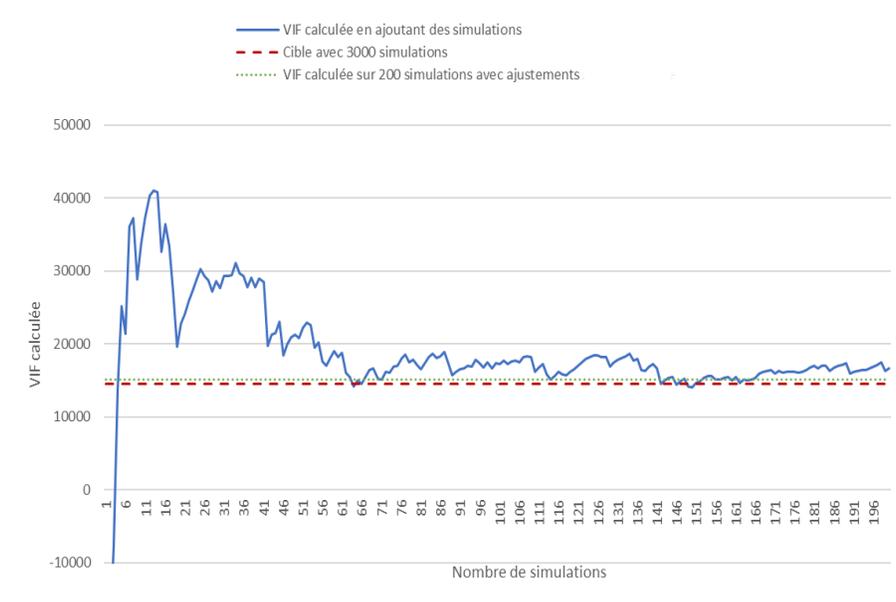
Par ailleurs, en l'absence d'ajustement, cette méthode ne présente aucun intérêt car cela revient à ajouter les trajectoires unes à unes et observer la vitesse de convergence de l'échantillon. Cela revient à étudier le graphique ci-dessous :

FIGURE 3.3.2 – Évolution du montant de VIF en ajoutant les simulations unes à unes sans ajustement



Dans ce graphique, on peut voir que la VIF se stabilise autour d'un nombre très important de scénarios (autour de 2 000) qui est l'application directe du théorème central limite. Notre but est donc d'arriver à faire converger la VIF plus rapidement grâce aux ajustements développés précédemment. Ainsi nous obtenons par exemple le graphique ci-dessous :

FIGURE 3.3.3 – Évolution du montant de VIF sur 200 simulations sans et avec les ajustements proposés (MMA et WMC) à l'aide de la méthode A



La méthode A consistant à choisir les 200 premières simulations, nous observons dans le graphique ci-dessus que le résultat obtenu après ajustements (droite verte) est meilleur que celui obtenu sans ajustement (courbe bleue). En effet, la *VIF* obtenue après ajustements est proche de celle obtenue avec 3 000 simulations (droites rouge et verte). En particulier, on observe ici que la valeur de la *VIF* n'est pas stabilisée sur 200 simulations, et reste encore très éloignée de la cible sur 3 000 simulations, ce qui met en évidence l'intérêt des méthodes et ajustements proposés dans ce mémoire.

3.3.2 Méthode B : Écart au portefeuille de référence

La deuxième méthode, notée méthode B se base sur notre portefeuille de référence (voir section 2.2.2). Elle s'inspire de la méthode 2 présentée par l'*EIOPA* dans le cadre de *PHRSS*. La sélection des trajectoires s'effectue à l'aide des étapes suivantes :

1. Construire un portefeuille d'actifs de référence et en calculer la valeur de marché pour chacune des 3 000 trajectoires du GSE à une date de projection de référence (ici 2021)
2. Choisir un nombre de simulations données (par exemple 10)
3. Couper la série de 3 000 prix de manière à obtenir 10 trajectoires uniformément réparties correspondant ici à nos 10 quantiles, typiquement 5%, 15%, ..., 95%
4. Identifier à quelles trajectoires de l'échantillon initial correspondent les quantiles obtenus à l'étape précédente
5. Sélectionner ces trajectoires et leur appliquer les ajustements précédemment décrits

FIGURE 3.3.4 – Résumé de la méthode B

Echantillon initial		Réduction de simulations		
Scénario dans l'ESG Milliman	Poids dans l'ESG Milliman	Prix du portefeuille rangé en milliards d'euros	Scénario sélectionné	Poids finaux
1	1/3000	1	OUI	0,5/10
2	1/3000	1,2	NON	0
3	1/3000	1,3	OUI	0,5/10
4	1/3000	1,5	NON	0
5	1/3000	1,8	NON	0
6	1/3000	2	OUI	0,5/10
...		
200	1/3000	2,5	NON	0
212	1/3000	2,6	OUI	1,75/10
215	1/3000	2,7	OUI	0,75/10
...		
1500	1/3000	8	OUI	1/10
1502	1/3000	8,1	OUI	3/10
1608	1/3000	8,2	NON	0
...		
2600	1/3000	15	NON	0
2603	1/3000	15,5	NON	0
...		0
2997	1/3000	20	OUI	1/10
2998	1/3000	21	OUI	0,5/10
2999	1/3000	21,2	NON	
3000	1/3000	22	OUI	0,5/10
Total	1			1

3.3.3 Méthode C : Facteur d'actualisation basé sur la méthodologie de Y. Chueh et de la SOA

Cette troisième méthode est développée dans la publication du *North America Actuarial Journal* de juillet 2022 rédigée par Yvonne Chueh (voir [6]). Elle a pour objectif d'identifier des clusters de trajectoires en fonction de leur impact sur la valeur des passifs de l'assureur. Pour cela, on approxime la valeur du portefeuille de passifs comme une fonction continue du facteur d'actualisation comme suit :

$$PV(t) = f(D(t)).$$

Avec :

1. PV pour *Present Value*, la valeur du portefeuille vue en « t »
2. f une fonction continue
3. D le facteur d'actualisation (*Discount Factor*) à la date T

A partir de cette hypothèse, Y. Chueh démontre que les trajectoires les plus proches entre elles en termes de distance entre les facteurs (ou les taux) d'actualisation impliquent des valeurs du portefeuille assez proches. Ce qui nous permet de sélectionner les trajectoires sur la base des valeurs du facteur d'actualisation car ce dernier impacte directement la valeur du portefeuille total.

Plusieurs méthodes sont développées dans cet article [6] : le « First Sampling Algorithm », le « Second Sampling Algorithm » et le « Third Sampling Algorithm ». Seule la troisième méthode a été étudiée dans le cadre de ce mémoire car c'est celle qui est la plus utilisée sur le marché.

Méthode C appelée « Third Sampling Algorithm » basée sur une méthode de scénario significatif

Cette méthode affecte le même poids à tous les scénarios mais identifie quelles sont les trajectoires « significatives ». Cette significativité est calculée en fonction du facteur d'actualisation (autrement appelé défaleur ici représenté par la variable $D(t)$) avec la formule suivante :

$$S = \sqrt{\sum_{t=1}^{30} (D(t))^2}.$$

Prenons l'exemple des 10 scénarios de taux, les scénarios jugés représentatifs sont sélectionnés à l'aide de l'algorithme suivant :

- Étape 1 : Calculer la significativité de tous les scénarios de taux à l'aide de la formule ci-dessus
- Étape 2 : Ordonner les scénarios du plus petit au plus grand S
- Étape 3 : Choisir les 10 scénarios les plus représentatifs et leur attribuer une probabilité $\frac{1}{10}$

Dans le cadre de ce mémoire, la méthode « Third Sampling Algorithm » a été développée car c'est celle qui est le plus couramment utilisée par les entreprises.

Pour résumer, cette méthode consiste à classer les trajectoires au sens d'une mesure de significativité définie à partir du facteur d'actualisation, puis de retenir les scénarios correspondant à des quantiles représentatifs.

Dans le cadre de ce mémoire, pour simplifier la formule faisant référence directement au déflateur noté D, nous avons implémenté la formule suivante :

$$d_{i,j} = \sqrt{\sum_{t=1}^H (D^i(t) - D^j(t))^2}.$$

Avec H l'horizon de projection du modèle *ALM*.

Contrairement à la méthode B, cette méthode C ne nécessite pas d'établir un portefeuille de référence

lui permettant d'être applicable à un plus grand nombre d'assureurs. Par ailleurs, cette méthode est également intéressante pour les assureurs qui auraient un portefeuille qui s'écarte largement de celui qui a été utilisé dans la cadre de ce mémoire.

3.4 Analyse des résultats obtenus sur les 3 méthodes

Les résultats obtenus sur les 3 méthodes sans aucun ajustement sont les suivants :

TABLE 3.2 – Résultats du modèle *ALM* sur les 2 méthodes développées ci-dessus avec un *RNG* Mersenne-Twister sur 200 simulations

Métrique	Méthode A	Méthode B	Méthode C
Fuite de modèle	-0,86%	0,05%	0,46%
% TVOG estimée	91%	135%	99%
% VIF estimée	136%	-40%	104%
% <i>RMSRE</i> (test de martingalité)	4,99%	9,46%	4,30%
% <i>RMSRE</i> (test de <i>market consistency</i>)	6,04%	6,27%	4,88%

TABLE 3.3 – Résultats du modèle *ALM* sur les 2 méthodes développées ci-dessus avec un *RNG* hybride sur 200 simulations

Métrique	Méthode A	Méthode B	Méthode C
Fuite de modèle	0,02%	-0,28%	0,11%
% TVOG estimée	102%	99%	100%
% VIF estimée	115%	91%	99%
% <i>RMSRE</i> (test martingale)	3,08%	3,54%	5,58%
% <i>RMSRE</i> (test de <i>market consistency</i>)	3,61%	6,03%	5,74%

Indépendamment du Générateur de Nombres Aléatoires (ou *Random Number Generator* ou *RNG*), la Méthode C fournit la meilleure convergence dans tous les cas et ne semble pas impacter par le choix du *RNG*. De plus, la Méthode B est particulièrement sensible au choix du *RNG*. Ces observations peuvent s'expliquer par la forte exposition de la Méthode B à l'erreur d'échantillonnage due au fait qu'elle est basée sur une seule date d'horizon lors de la classification de l'indice de portefeuille. En revanche, la Méthode

C utilise toute la trajectoire pour calculer la « significativité » des scénarios retenus, ce qui lui confère un degré de robustesse plus élevé.

De plus, comme illustré précédemment, les écarts dans les fuites de modèle ainsi que dans les estimations de la *VIF* et de la *TVOG* sont significativement plus élevés lorsque l'on considère le *RNG* Mersenne-Twister, ce qui justifie le choix d'un *RNG* hybride. En conséquence, dans l'analyse qui suit, le *RNG* hybride sera utilisé pour le GSE de référence.

Il est à noter que le gain de performance de la Méthode C par rapport aux Méthodes B et A semble être plus prononcé avec le *RNG* Mersenne-Twister qu'avec le *RNG* hybride. Bien que la Méthode C surpasse toujours la Méthode A avec l'utilisation d'un *RNG* hybride la différence n'est pas aussi marquée que dans le scénario Mersenne-Twister. Bien que ces résultats suggèrent une préférence claire pour la Méthode C, mais ils n'excluent pas d'autres méthodes dans des conditions différentes. Dans la suite de ce mémoire, les trajectoires initiales seront générées par le GSE Milliman basé sur un *RNG* hybride.

3.5 Univers en hausse des taux, estimation à fin 2022

L'étude initiale sur les scénarios *PHRSS* portait sur un univers 31/12/2021 présentant des taux bas, raison pour laquelle la partie 2 du mémoire reposait également sur des résultats à fin 2021. Les conditions actuelles de marché étant très différentes de celles du 31/12/2021, l'étude des méthodes de sélection de scénarios *PHRSS* a été effectuée sur un environnement anticipant les conditions de marché à fin 2022, permettant à la fois de capturer la hausse des taux, mais également la baisse des performances actions. En effet, notre estimation à fin 2022 présente une hausse très sensible du niveau des taux (+2,92% sur l'OAT 10 ans), l'indice Euro Stoxx 50 a diminué de près de 12% sur l'année 2022, le *volatility adjustment* (*VA*) est passé de +6,9% à -3%.

L'ajustement pour volatilité est passé de 3bps à 19bps en ligne avec la forte hausse des spreads (voir tableau ci-dessous).

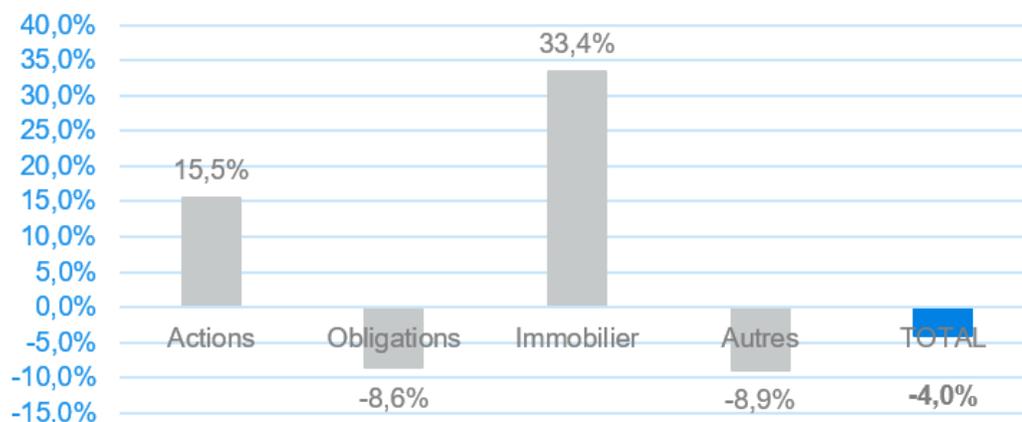
TABLE 3.4 – Conditions de marché à fin 2021 et 2022

Date	OAT 10 ans	VA	Euro Stoxx 50
31/12/2021	0,19%	+3bps	4 306
31/12/2022	3,11%	+19bps	3 794 (-12%)

L'allocation du portefeuille reste inchangée : 72% d'obligations, 11% d'actions, 7% immobilier, 10% d'autres actifs.

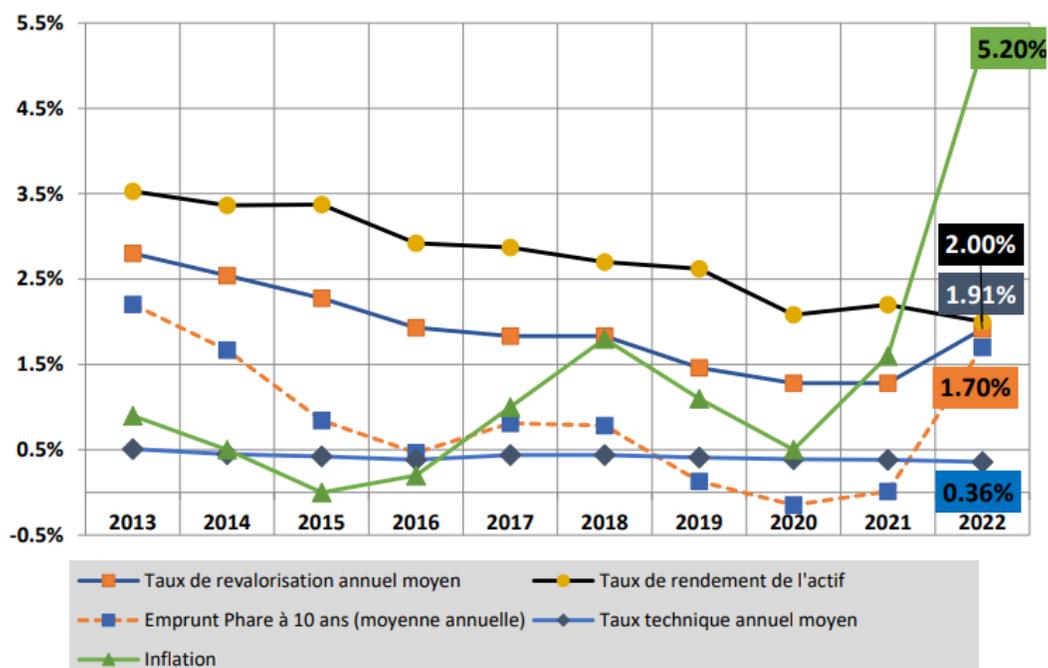
Le montant des plus-values latentes a considérablement évolué par rapport au 31/12/2021, en effet le portefeuille est désormais en situation globale de moins-values latentes (voir graphique ci-dessous).

FIGURE 3.5.1 – Plus-values latentes par classes d’actif rapporté à la VNC au 31/12/2022



Par ailleurs, dans un contexte de baisse des taux, les taux servis sur les supports euros n’avaient cessés de diminuer sur les dix dernières années. En même temps, le niveau de PPE était en constante augmentation notamment car les assureurs possédaient encore d’ « anciennes » obligations rapportant plus que le taux du marché. Cependant à partir de 2022, les assureurs subissent la concurrence à la fois du livret A, et d’un potentiel nouvel entrant détenant des obligations rémunérant les taux du marché sans être pénalisé par des obligations des dernières années à faible rendement. Ainsi, nous constatons une forte augmentation des taux servis « stimulés » par la PPE qui était disponible en stock. L’évolution du taux servi et du taux de marché est présentée dans le graphique ci-dessous :

FIGURE 3.5.2 – Taux de revalorisation des contrats en euros



Source : Revalorisation 2022 des contrats d'assurance-vie et de capitalisation– engagements à dominante épargne et retraite individuelle, Analyses et Synthèses N°149-2023

Dans le cadre de ce mémoire, la méthode A avec MMA a été testée sur un univers proche de la situation économique à fin 2022. Les résultats obtenus sont du même ordre de grandeur que sur 2021. Cette analyse est d'autant plus importante pour tester la stabilité de la méthode, car le montant de la VIF et donc de la TVOG, sont très éloignés entre l'arrêté 2021 et 2022.

TABLE 3.5 – Comparaison des résultats entre 2021 et 2022

Métrique	Méthode A avec MMA à fin 2021	Méthode A avec MMA à fin 2022
Fuite de modèle	0,02%	-0,17%
% VIF estimée	115%	101%
% TVOG estimée	102%	109%

3.6 Sensibilité au modèle de taux

Parmi les éléments auxquels le modèle est sensible plusieurs sensibilités ont déjà été testées :

1. deux générateurs de nombres aléatoires différents (Mersenne et hybride)
2. différentes méthodes de sélection de trajectoires (Méthode A,B et C)
3. deux univers économiques différents (fin 2021 et fin 2022)

Étant donnée la composition de notre portefeuille majoritairement composé de produits obligataires, un autre élément qui est à étudier est le modèle de taux utilisé dans le calibrage du GSE.

Pour rappel, le modèle de taux utilisé dans le GSE Milliman jusqu'à présent était un *DDLMM* nous avons cherché à tester un autre modèle de taux très utilisé sur le marché. Le *LMM+* a été écarté car il fait partie de la même famille de modèles que le *DDLMM*, aussi des résultats proches sont attendus. Ainsi le choix s'est porté sur une sensibilité au modèle effectué sur un G2++.

Le modèle G2++ est un modèle gaussien à deux facteurs, notamment présenté dans le livre « Interest Rate Models – Theory and Practice » (voir [8]). La dynamique du taux court repose sur deux facteurs gaussiens à l'aide de la dynamique suivante :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t).$$

Avec :

- $r(0) = 0$ l'initialisation de la valeur du taux court
- Les processus x et y qui sont définis par les équations ci-dessous :

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t).$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t).$$

Avec :

- W_1 et W_2 des mouvements browniens corrélés tels que : $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$
- r_0, a, b, σ, η des constantes positives avec a et b les coefficients de retour à la moyenne et σ et η les volatilités des deux processus
- φ une fonction déterministe entre 0 et l'horizon de projection fixé avec $\varphi(0)=1$

Par ailleurs, le modèle G2++ présente l'avantage de reposer sur des formules fermées permettant d'évaluer le prix d'une obligation zéro-coupon à chaque pas de temps.

Dans un premier temps, nous allons tester ce nouveau modèle de taux sur 3 000 simulations afin d'isoler l'impact du modèle de taux. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous :

TABLE 3.6 – Ecart constaté sur la VIF en appliquant un G2++

Métrique	Modèle G2++ vs modèle central ($DDLMM$)
% Écart sur la VIF	+0,7%

Le modèle de taux initial du GSE ($DDLMM$) a été remplacé par un modèle G2++ ce qui a eu un impact légèrement positif sur la VIF , mais l'écart est négligeable à fin 2021 sur les 3 000 simulations.

Dans un second temps, nous appliquons la réduction de simulations sur 200 trajectoires après MMA , WMC et $rescaling$ avec la méthode A et C (voir résultats dans le tableau ci-dessous) :

TABLE 3.7 – Résultats obtenus avec la méthode A sur un modèle G2++

Métrique	Méthode A sans ajustement	Méthode A avec ajustements
% VIF estimée avec un G2++	125%	128%
% VIF estimée avec un $DDLMM$	115%	107%

Les résultats obtenus avec un modèle G2++ sont moins précis que ceux que nous avons obtenus avec le modèle initial (cf. Tableau 3.3.1). En effet, la VIF est largement plus sur-estimée avec le modèle G2++

Ainsi, nous en concluons que la méthode proposée est sensible au modèle de taux utilisé ce qui est prévisible car il influence très fortement la dynamique des produits de taux représentant une grande majorité du portefeuille modélisé.

3.7 Cross-validation

Les parties précédentes ont permis d'étudier les différentes méthodes de réduction de simulations et sensibilités associées sur plusieurs critères non objectivés :

1. **Nombre de simulations** : 9 en adéquation avec les scénarios publiés par *PHRSS* puis 200 car les valeurs de *VIF* estimées commençaient à converger vers la *VIF* stochastique
2. **Paramètre de poids de la fonction d'entropie** : fixé à 0,1 pour 9 simulations et 0,001 pour 200 simulations. Ce calibrage a été effectuée à dire d'experts.

Cette partie sur la cross-validation permet d'aller plus loin, et de déterminer le triplet optimal des paramètres :

$$(M^*, v^*, \omega_e^*)$$

- M^* la méthode de sélection de trajectoires
- v^* le nombre de scénarios
- ω_e^* le paramètre de poids d'entropie

Pour déterminer les paramètres optimaux, il faut choisir des cibles basées sur les grandeurs d'intérêt. C'est ainsi que 3 métriques ont été mises en place :

1. Métrique sur la *VIF*

Cette mesure permet de vérifier que la *VIF* obtenue à l'aide de notre algorithme de réduction de simulations (notée $VIF_{estimee}$) est la plus proche possible de celle obtenue à l'aide d'un calcul stochastique basé sur 3 000 simulations à l'aide du GSE Milliman (notée *VIF* de référence comme : VIF_{ref}).

La formule retenue est la suivante :

$$\left| \frac{VIF_{Estimée}}{VIF_{Cible}} - 1 \right|$$

2. Métrique sur la fuite de modèle (ou écart de convergence)

Cette métrique permet de vérifier que l'écart de convergence reste limité ce qui revient indirectement à estimer conjointement la *VIF* et le *BE*. La formule retenue est la suivante :

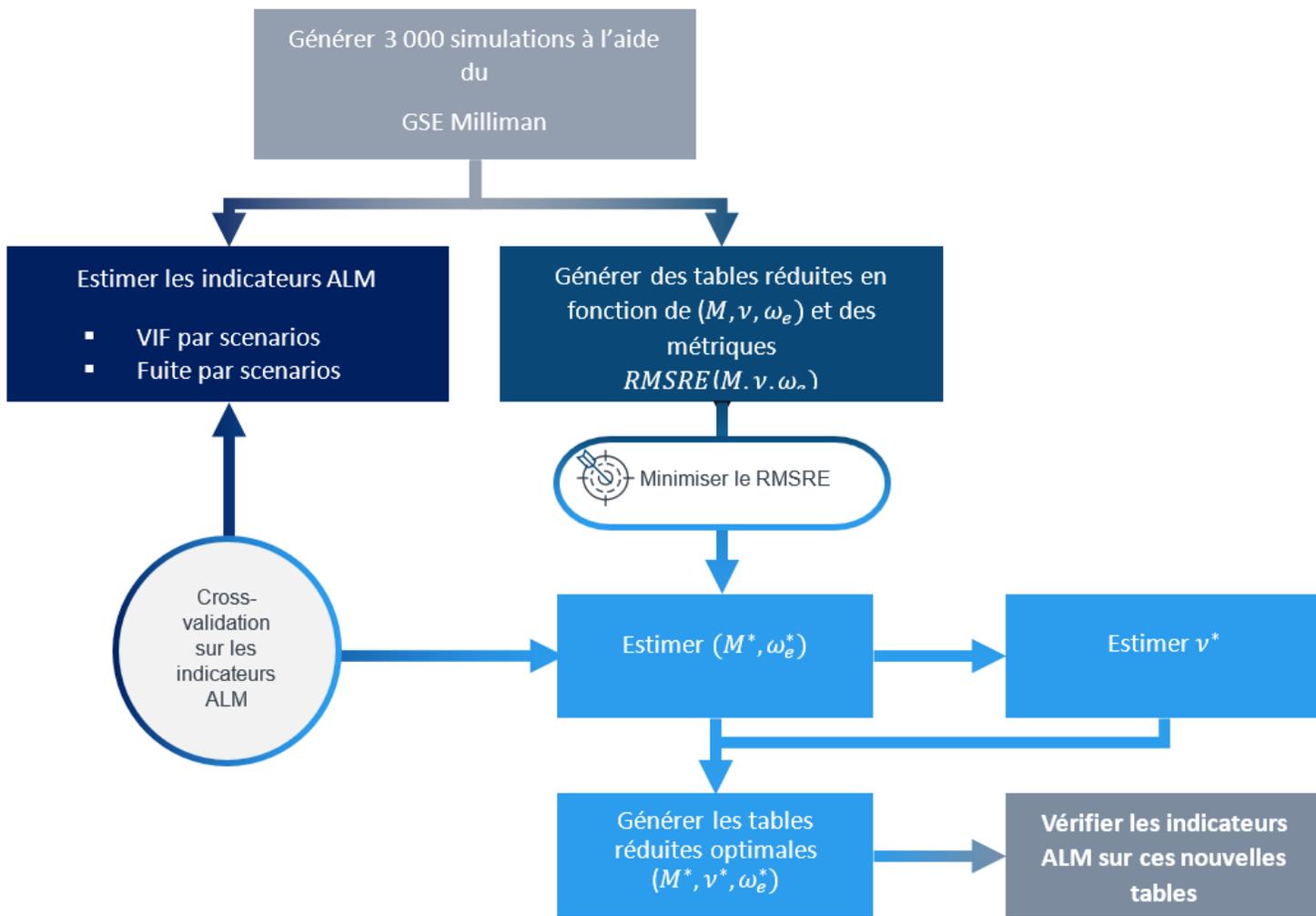
$$\left| \frac{\text{Valeur de marché initiale} - (BE_{Estimée} + VIF_{Estimée})}{BE_{Cible}} \right|$$

3. Métrique *RMSRE*

Cet indicateur permet de vérifier que les tests de *repricing* et de martingalité restent satisfaisants sur les simulations réduites.

Afin d'obtenir les paramètres optimaux, il existe 7 étapes qui sont présentées dans le schéma ci-dessous :

FIGURE 3.7.1 – Étapes de la cross-validation



Les étapes de la cross validation sont les suivantes :

- **Étape 1** : Générer des scénarios stochastiques à l'aide du GSE de place (ici nous avons considéré 3 000 scénarios de le GSE Milliman sans crédit à fin 2021, à l'aide d'un générateur de nombre d'aléatoire hybride).
- **Étape 2** : Estimer la *VIF* et le *BE* sur ces 3 000 simulations qui seront nos valeurs de référence pour la suite de nos analyses.
- **Étape 3** : Créer un lot de scénarios avec un nombre réduit de trajectoires et un vecteur de poids *WMC* associé à chacune des méthodes développées dans la section 3.3 (M^*), en faisant varier le paramètre d'entropie (ω_e^*), et le nombre de simulations (v^*). Pour chaque combinaison de ces 3 paramètres, les 3 métriques développées précédemment sont calculées.
- **Étape 4** : Minimiser les *RMSRE*, afin de déterminer la méthode (M^*) et le poids d'entropie (ω_e^*) optimaux.

- **Étape 5** : A l'aide des métriques présentées au paragraphe précédent, déterminer le nombre de simulations optimales pour les couples $(M^*; \omega_e^*)$ déterminées à l'étape 4.
- **Étape 6** : Générer des lots de scénarios avec un nombre réduit de trajectoires à l'aide du *WMC*.
- **Étape 7** : Vérifier que les lots produits en étape 6 permettent d'obtenir des métriques de *VIF*, fuite de modèle et *RMSRE* satisfaisantes.

Cette analyse est construite sur les valeurs de *VIF* et de *BE* en sortie du modèle *ALM*, sur 3 000 simulations sans aucun ajustement *MMA* ou *rescaling* (cf. sous-section 3.2). Étant donné que la cross-validation est effectuée sur les trajectoires non ajustées, les conclusions obtenues pourraient différer si de tels ajustements avaient été considérés. En pratique, la méthodologie de cross-validation décrite précédemment ne peut pas être mise en place opérationnellement en présence de ces ajustements. En effet, il serait nécessaire de faire tourner le modèle *ALM* pour chaque méthode avec chaque paramètre d'entropie, avec chaque ajustement etc...

Pour rappel, le poids d'entropie noté ω_e^* permet de moduler l'écart des poids attribués à chaque simulation par rapport à une pondération uniforme (correspondant un poids unique de $\frac{1}{n}$ pour chaque simulation). Le calcul de ce paramètre s'effectue avec une fonction d'entropie appelée Kullback-Leibler $D(p | u)$, il est utilisé dans la fonction qui détermine les poids attribués à chaque simulation.

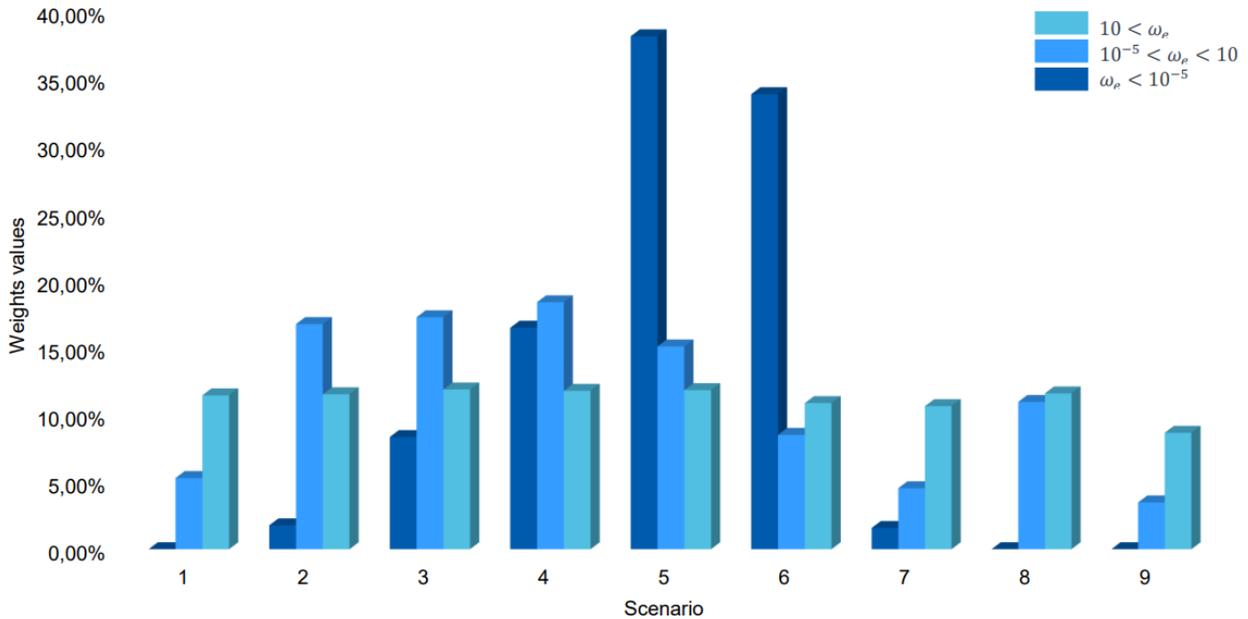
Son rôle est le suivant :

1. Une valeur élevée engendre une distorsion limitée des poids par rapport à la loi uniforme
2. Une valeur faible attribuera des poids qui s'éloignent fortement de l'uniforme

Cependant, notre objectif est de s'approcher le plus possible des valeurs obtenues dans un calcul stochastique tout en ayant une cible de scénarios réduite au maximum. Ainsi, nous souhaitons que chacune des simulations que nous avons retenus soient utilisées, or si le paramètre d'entropie est trop faible, certaines simulations seront exclues (leur poids sera proche ou égal à 0) en particulier si la réduction du nombre de simulations est trop forte (moins de 20 simulations par exemple).

Plus le nombre de simulations baisse plus il apparaît crucial de limiter au maximum l'exclusion de scénarios et il faudra donc éviter d'avoir une valeur d'entropie trop faible. Cet effet est imagé dans le graphique ci-dessous.

FIGURE 3.7.2 – Distribution des poids attribués en fonction du paramètre d'entropie

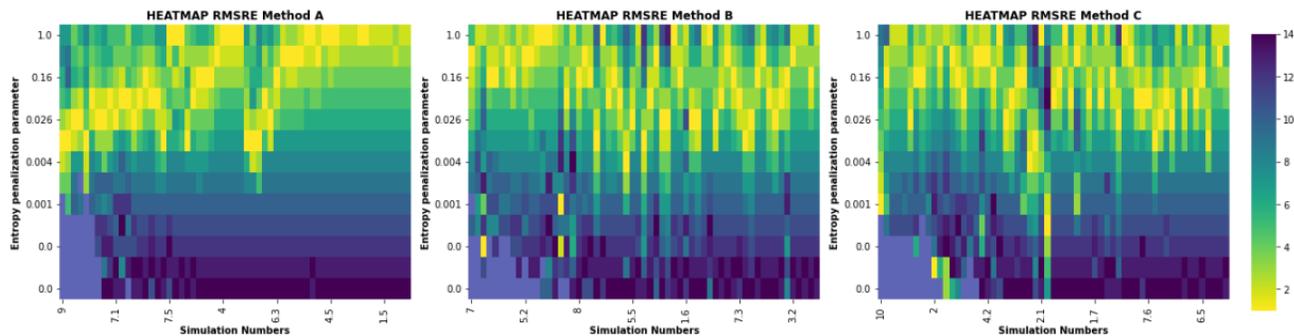


Ce graphique permet de comprendre l'impact du paramètre d'entropie sur les poids affectés à chaque simulation, en fonction du nombre de simulations. En effet, les résultats présentés ci-dessus montrent qu'un paramètre d'entropie faible peut être utilisé sur un grand nombre de simulations afin de diverger d'une équi-pondération. En revanche, sur un nombre très faible de simulations, un paramètre trop faible d'entropie ne permettra pas à l'algorithme de converger.

3.7.1 Analyse des corrélations

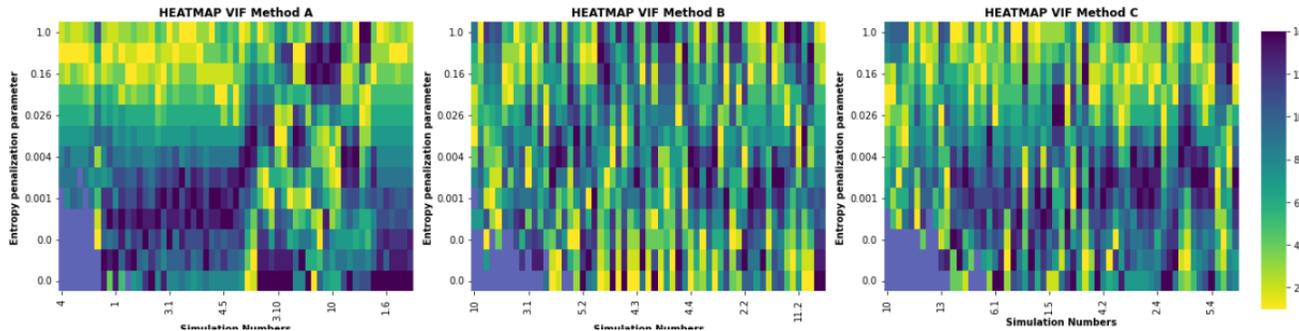
Dans cette sous-partie, nous chercherons à établir un lien entre le nombre de simulations, la métrique de *RMSRE* et la valeur du paramètre d'entropie. Les graphiques ci-dessous illustrent la valeur de la *RMSRE* en fonction du nombre de simulations et du paramètre d'entropie respectivement sur les 3 méthodes testées.

FIGURE 3.7.3 – Heatmap des valeurs de $RMSRE$ en fonction du nombre de simulations et du paramètre d'entropie



La seconde relation étudiée est celle entre la métrique de VIF en fonction du nombre de simulations et du paramètre d'entropie (voir graphique ci-dessous).

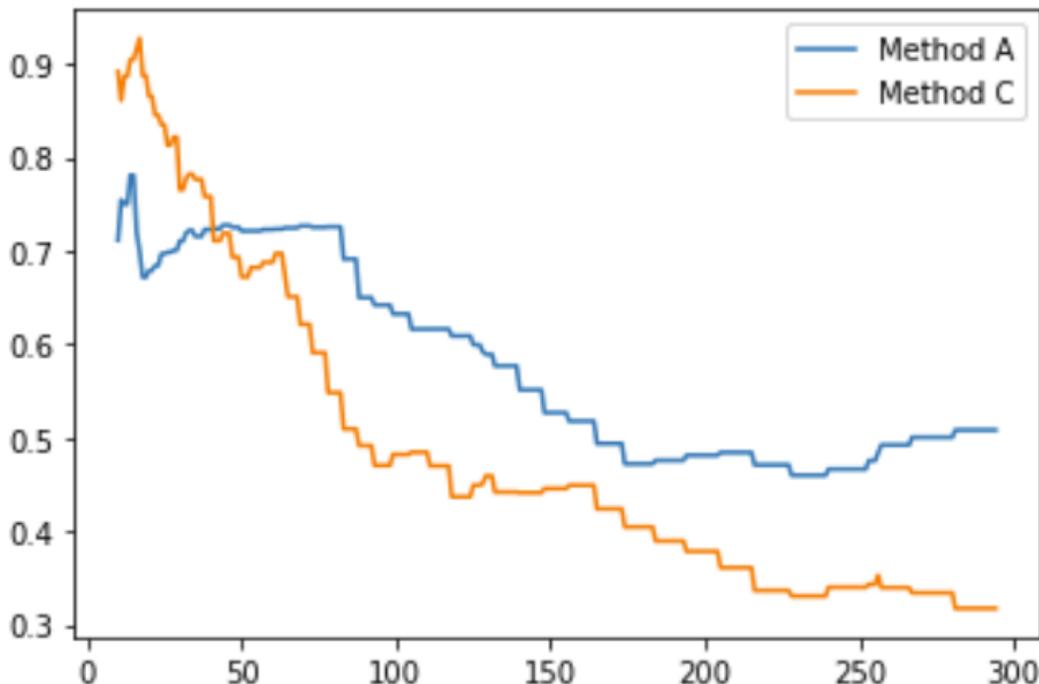
FIGURE 3.7.4 – Heatmap des valeurs de la métrique de VIF en fonction du nombre de simulations et du paramètre d'entropie



Ces analyses nous permettent d'identifier que les méthodes A et C ont des comportements similaires, en effet le coefficient de corrélation entre les rangs entre l'entropie et la VIF et l'entropie et les $RMSRE$ ordonnés sont de 51,6% pour la méthode A, respectivement 25% pour la méthode B et 42,7% pour la méthode C. Le graphique ci-dessous est donc focalisé sur les méthodes A et C, traçant le coefficient de corrélation² en fonction du nombre de simulations.

2. Le coefficient de corrélation est calculé selon la méthode des corrélations de Pearson sur les VIF et $RMSRE$ ordonnées tel que : $\rho = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$ avec X les rangs des paramètres d'entropie en fonction de la VIF et Y les rangs des paramètres d'entropie en fonction de la métrique $RMSRE$

FIGURE 3.7.5 – Corrélation entre les métriques de *VIF* et *RMSRE* pour les méthodes A et C en fonction du nombre de simulations



Un lien entre *VIF* et *RMSRE* est identifié, et il semble se dégager un pivot autour de 40 simulations où le coefficient de corrélation est plus élevé en méthode A qu’avec la méthode C. Cependant, la diminution de la corrélation lorsque le nombre de simulations augmente peut s’expliquer par l’amélioration des métriques *RMSRE* et *VIF*, quel que soit le paramètre de poids d’entropie. Ainsi, il devient plus probable que le classement de la meilleur *RMSRE* ne corresponde pas à celui de la meilleure *VIF*, ce qui explique également les motifs « chaotiques » des « heatmaps ».

3.7.2 Sélection du nombre optimal de simulation à l’aide de la cross-validation

Cette sous-partie vise à trouver le paramètre d’entropie optimal pour une méthode et un nombre de simulations donné, en utilisant le lien établi entre les métriques de *RMSRE* et de *VIF*. L’algorithme suivant est proposé :

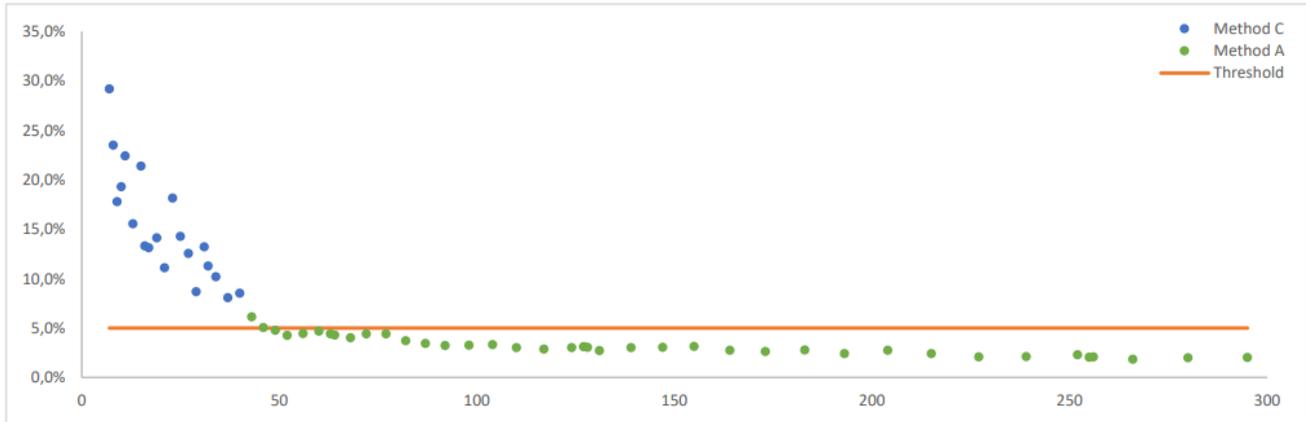
- **Étape 1** : Appliquer le *WMC* pour plusieurs valeurs d’entropie
- **Étape 2** : Estimer la *RMSRE* résultante pour chaque paramètre d’entropie
- **Étape 3** : Déterminer le paramètre d’entropie qui minimise le *RMSRE*
- **Étape 4** : Faire tourner un modèle *ALM* afin de vérifier les résultats obtenus

Le graphique 3.7.5 préconise d’utiliser la méthode C pour un nombre de simulations limité à 40, et la méthode A pour un nombre plus élevé de simulations. La *RMSRE* est ensuite tracée en fonction du nombre de simulations en se basant sur cette hypothèse. Le graphique ci-dessous permet de déterminer un nombre optimal de simulations pour un paramètre d’entropie optimal.

A fin 2021, en cherchant à avoir une métrique de *RMSRE* inférieure à 5%, seules les projections supérieures

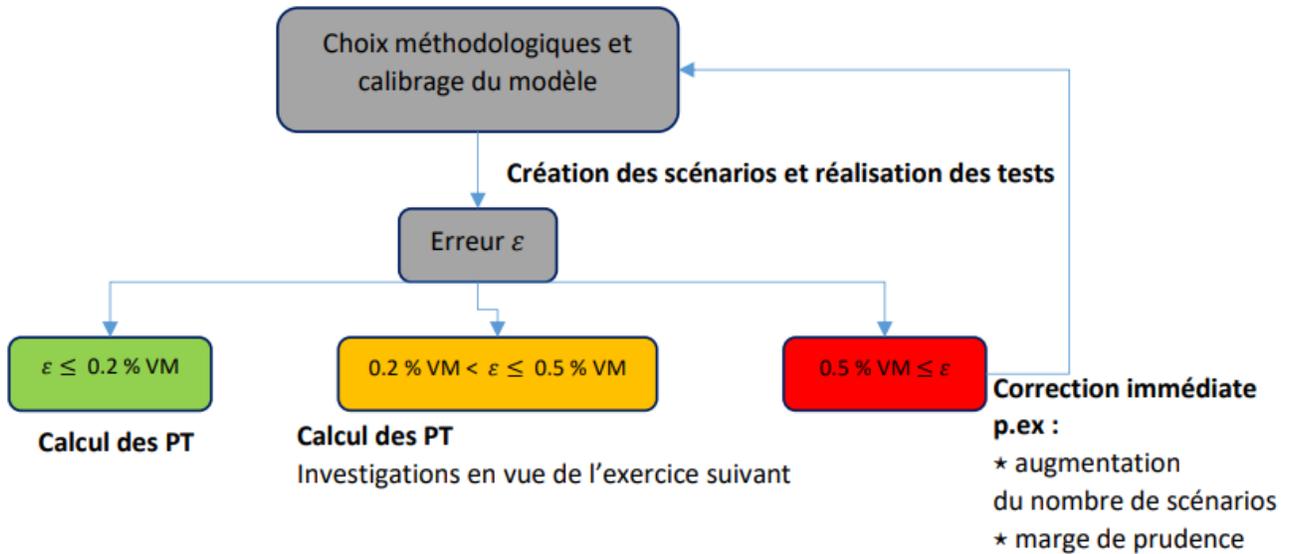
à 50 simulations sont retenues. En d'autres termes, **afin de garder des propriétés de martingalité et de *market consistency* satisfaisantes, une réduction du nombre de simulations en dessous de 50 n'est pas envisageable.**

FIGURE 3.7.6 – Évolution du *RMSRE* en fonction du nombre de simulations pour un paramètre d'entropie maximal



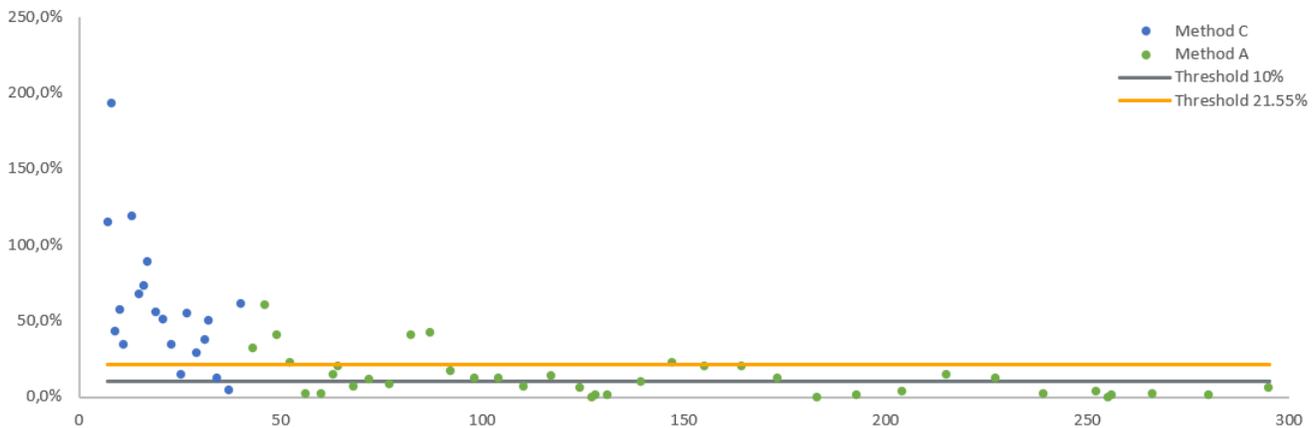
Parallèlement à l'importance de satisfaire les tests de martingalité et de *market consistency*, il est important de conserver une bonne approximation de la *VIF* et de fuite de modèle. Dans l'étape suivante, des seuils respectant les bonnes pratiques publiées par l'ACPR ont été repris. Dans sa note sur les [Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques](#) l'ACPR détaille la marche à suivre concernant l'ampleur de l'erreur de modèle, et précise qu' « À titre indicatif, une incertitude à 95% inférieure à 0,2% du *BE* correspond à une pratique de marché généralement observée dont il est souhaitable de ne pas s'éloigner ».

FIGURE 3.7.7 – Bonnes pratiques sur l’erreur relative de modèle, cf. notice ACPR relative aux GSE



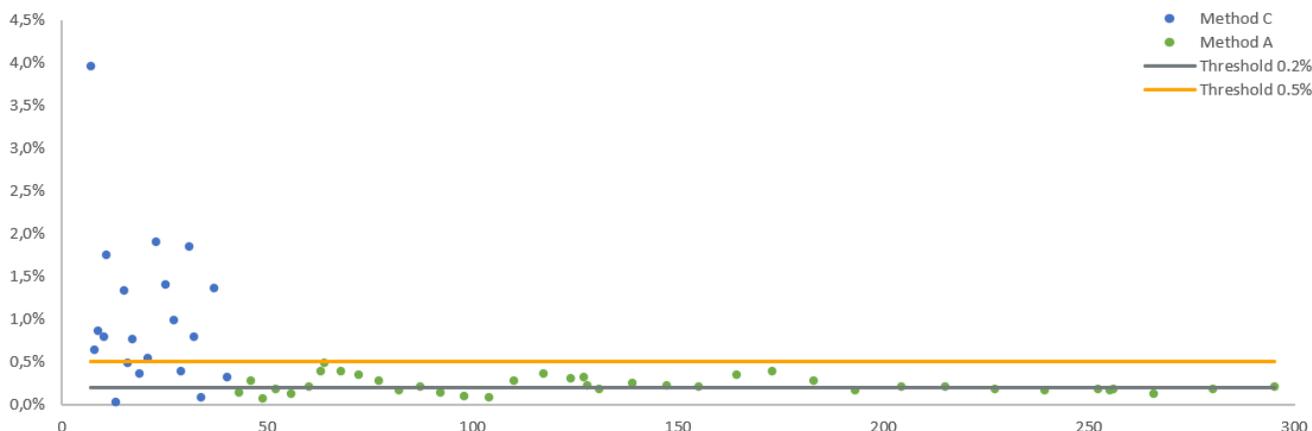
Sur notre entité nommée représentatif du marché français, un seuil à 0,2% appliqué à la valeur de marché correspondrait sur le modèle utilisé à un impact sur la *VIF* de 21,55% un seuil plus prudent de 10% est également testé et présenté dans le graphique ci-dessous :

FIGURE 3.7.8 – Métrique de *VIF* en fonction du nombre de simulations pour le paramètre d’entropie optimal



Les seuils de 0,2 et 0,5% de fuite de modèle en fonction du nombre de simulations pour le paramètre d’entropie optimal sont également mis en exergue dans le graphique ci-dessous :

FIGURE 3.7.9 – Fuite de modèle en fonction du nombre de simulations pour le paramètre d'entropie optimal



L'analyse des métriques de *VIF* et de fuite de modèle s'améliorent également pour un nombre de simulations supérieur à 50 mais il reste à déterminer à partir de combien de simulations ces métriques ont suffisamment convergées pour qu'augmenter le nombre de simulation ne soit plus intéressant et ainsi établir un nombre raisonnable de simulations pouvant être utilisé pour les études *ALM*.

Pour répondre à cette question, nous allons utiliser la méthode A car nous avons conclu plus haut qu'elle est la plus pertinente pour un nombre de simulations supérieur à 40. La méthode A de sélection des trajectoires est principalement pilotée par le choix du *RNG* hybride. Le nombre optimal de simulations pour un générateur de nombre aléatoire Sobol utilisé par le *RNG* hybride (voir sous section 3.1.1) est équadistribué sous la forme de $2^n - 1$. Les trajectoires contenant 7,15,31,63,127 et 255 simulations sont alors sélectionnées pour appliquer notre algorithme de cross-validation. En recoupant toutes les informations dont nous disposons jusqu'à présent, nous établissons les candidats potentiels 63, 127 et 255 simulations avec la méthode A afin de les intégrer dans le modèle *ALM*.

A fin 2021, les résultats obtenus sont les suivants :

TABLE 3.8 – Résultats *ALM* de la cross-validation à fin 2021

Nombre de simulations	Entropie	<i>RMSRE</i>	Métrique sur la <i>VIF</i>	Fuite de modèle	<i>TVOG</i>
63	0,4	4,43%	15,1%	0,38%	2,33%
127	0,16	3,10%	0,25%	0,34%	0,04%
255	2,5	2,06%	0,33%	0,16%	0,05%

Le tableau ci-dessus permettent de conclure que nous pouvons obtenir des résultats satisfaisants et robustes sur 127 simulations, ce qui constitue une réduction très significative comparé aux 3 000 simulations de départ.

Par ailleurs, un exercice de back-test a également été réalisé en testant nos résultats sur un univers économique très différent : l'arrêté 2022 présentant une hausse des taux, de l'inflation et une très forte baisse des PMVL sur les actifs « risqués ».

Les résultats présentés dans le tableau ci-dessous restent très satisfaisants ce qui permet de conclure que la méthode de cross-validation est robuste dans le temps et adaptable à différents environnements économiques et acteurs sur le marché.

TABLE 3.9 – Résultats *ALM* de la cross-validation à fin 2022

Nombre de simulations	Entropie	<i>RMSRE</i>	Métrique sur la <i>VIF</i>	Fuite de modèle	<i>TVOG</i>
63	2,5	4,99%	3,13%	0,21%	5,63%
127	0,026	3,54%	3,14%	0,55%	5,65%
255	2,5	1,96%	0,35%	0,08%	0,64%

3.8 Prise en compte de l'asymétrie de la *VIF*

La méthode de sélection des quantiles fait partie des limites de notre analyse, en particulier car ceux-ci ne prennent pas en compte l'asymétrie de la *VIF*. La méthode basée sur les quantiles repose sur une sélection de trajectoires qui découpe l'échantillon en $\frac{1}{\text{nombre de quantiles}}$. Avec ce découpage on choisit des trajectoires tous les n pas de temps sans prendre en compte les spécificités de la *VIF*. En effet, les trajectoires de *VIF* négatives sont bien plus négatives que les positives. On observe en 2021 une moyenne d'environ 7 milliards, alors que la médiane est de 38 milliards. Le maximum atteint 124 milliards contre -660 pour le minimum. Ainsi sélectionner une trajectoire associée à une *VIF* négative (l'avant dernière par rapport à la dernière) peut avoir un très gros impact sur la moyenne alors que ce n'est pas le cas pour les *VIF* positives (la première par rapport à la deuxième). Pour pallier ce problème, il faudrait sélectionner plus de quantiles dans la partie négative que positive, car elle pèse plus dans la moyenne de la *VIF*, par exemple avec une technique de stratification (voir [Variance Reduction Techniques for Estimating Value-at-Risk](#)). Cependant, ces techniques n'ont pas été développées dans ce mémoire mais pourraient constituer une extension.

3.9 Efficience énergétique liée à la réduction du nombre de simulations

Comme énoncé en introduction du mémoire, la réduction du nombre de simulations répond à plusieurs objectifs : facilité opérationnelle à faire des sensibilités, implémentations dans IFRS17, les modèles internes etc... Mais son rôle est également de réduire la consommation de serveurs de calculs permettant à la fois de réduire les coûts engagés par les sociétés, mais également l'empreinte carbone du milieu assurantiel. Deux aspects sont ici à analyser : d'une part la production des trajectoires économiques (c'est-à-dire le GSE) et le calcul des agrégats vie issus des trajectoires réduites (le modèle *ALM*).

3.9.1 Temps de calcul du GSE

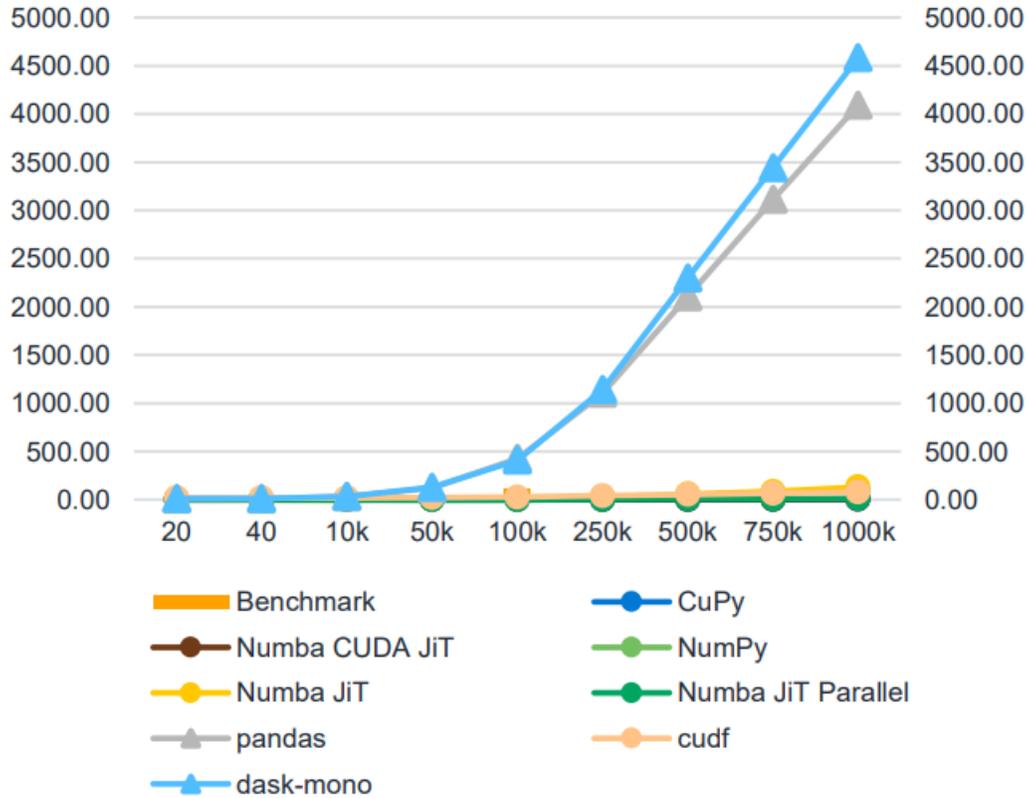
Dans le cadre de ce mémoire, le GSE qui a été utilisé est celui vendu par Milliman appelé « Milliman ESG ». Tout d'abord celui-ci a été particulièrement optimisé et parallélisé par les équipes Milliman ESG permettant de réaliser le calibrage, la simulation et la validation d'un jeu de scénarios économiques et les sorties en moins d'une minute. Par ailleurs, notre méthodologie nécessite de se baser sur une base de 3 000 simulations ainsi ce temps pour générer la table est incompressible. Étant donné le temps de calcul particulièrement faible du GSE, il n'est pas nécessaire de s'efforcer à le réduire.

3.9.2 Temps de calcul du modèle ALM

Pour estimer les impacts de la réduction de scénarios au sein de ce mémoire les impacts ont été réalisés sous PROPHET basé sur un modèle représentatif du marché français. Le modèle a été développé pour obtenir rapidement des résultats qui sont nécessaires à notre analyse à savoir : le calcul de la *VIF*, le *BE* et la valeur de marché nécessite environ 5 minutes de temps de calcul sur 3 000 simulations. À noter que notre analyse porte sur un modèle sans crédit qui accélère le temps de calcul de 1 minute après optimisation. Ce temps de calcul peut sembler dérisoire mais il peut s'avérer problématique dans le cas du lancement de nombreuses simulations. En particulier lorsqu'on a besoin d'obtenir les résultats du modèle *ALM* pour relancer le modèle (ce qui peut souvent être le cas en assurance vie car les impacts se compensent parfois), ainsi il n'est pas possible de lancer les calculs au même moment. Par ailleurs, la manipulation de tables de milliers de simulations est lourde opérationnellement, il existe donc un vrai gain à manipuler des tables moins volumineuses. Enfin, le langage utilisé impacte également largement le temps de calcul et l'empreinte carbone.

Plusieurs axes sont à étudier, tout d'abord le nombre de *model points*. Notre modèle *ALM* est basé sur 32 000 *model points*. Le graphique ci-dessous (voir [11]) montre l'impact de ce choix dans la performance du modèle, en particulier le langage de programmation et le choix des packages utilisés sont des variables importantes. Certains langages de programmations/packages sont en mesure de traiter un très grand nombre de *model points* sans pour autant augmenter le temps de calcul.

FIGURE 3.9.1 – Comparaison du temps en secondes en fonction du nombre de model points

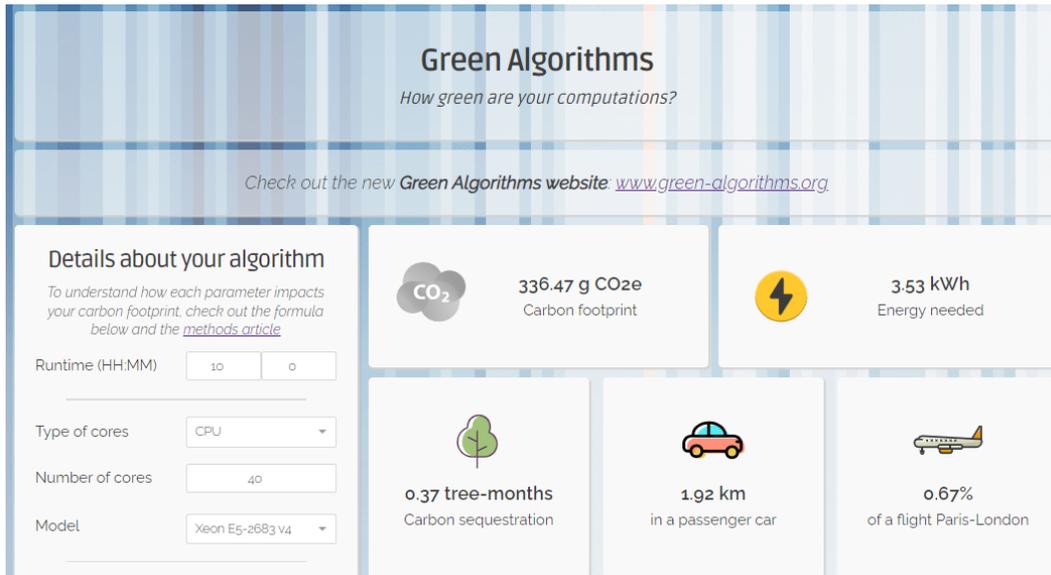


A noter que la réduction du nombre de *model points* est un autre axe d'analyse pour la réduction du temps de calcul (cf. Chapitre 1, Section 1.3.3 concernant l'étude de marché sur l'efficacité des modèles *ALM*).

Enfin, il existe pour le moment assez peu d'études en mesure de quantifier le réel impact des calculs quotidiens des organismes d'assurance sur leur empreinte carbone. Pour tenter d'estimer quel pourrait être l'impact de la réduction de simulations sur l'empreinte carbone d'une société, l'outil développé dans l'article *Green algorithms : quantifying the carbon footprint of computation*. *Advanced science* (voir [10]) a été utilisé.

Considérons que la société peut effectuer ses calculs de sensibilités sur environ 200 simulations, plutôt que 3 000, le temps gagné à l'année sur une entité peut être estimé à une dizaine d'heures de calcul, ce qui représente 337 g CO₂e ou 3,53 kWh, cela revient à presque trois quarts d'un vol Paris-Londres.

FIGURE 3.9.2 – Estimation de l'impact environnemental de la réduction du nombre de simulations



3.10 Conclusion

Ce mémoire avait pour objectif de développer un outil permettant de réduire le nombre de simulations dans un GSE risque-neutre.

Dans un premier temps, les enjeux auxquels font face les assureurs au quotidien ont été rappelés mettant en avant un réel besoin de réduire le temps de calcul en France comme aux Etats-Unis.

Les différentes notions nécessaires à la compréhension de ce mémoire ont été développées en passant par le cadre réglementaire, les orientations du régulateur français, les variables clés, les propriétés mathématiques à respecter, et les outils utilisés.

La première partie de ce mémoire s'est également attardée sur les différentes méthodes qui ont été développées sur le marché afin de réduire le temps de calcul tant pour des enjeux économiques d'écologiques. Plusieurs études ont été présentées, en particulier sur le marché américain, car il n'existe que peu de recherches publiées sur le sujet sur le marché français. Deux axes ont été développés pour réduire le temps de calcul : réduire la quantité de données en entrée du modèle *ALM* en regroupant intelligemment les contrats en portefeuille, ou réduire le nombre de simulations en sortie du Générateur de Scénarios Economiques. Ce mémoire s'est concentré sur des méthodes de réductions de simulations. En particulier, la méthode de « significativité » développée par Y. Chueh afin de réduire le nombre de simulations a permis d'orienter le développement de notre outil présenté en dernière partie du mémoire.

La seconde partie a permis de se familiariser avec différentes méthodes de réduction de simulations et d'ajustements des simulations à l'aide des scénarios fournis par l'*EIOPA* dans le cadre de son groupe de travail *PHRSS*. Un modèle *ALM* représentatif du marché français a été mis en place sur 3 facteurs de risques : taux, action et immobilier, permettant d'appréhender l'impact des ces méthodes sur le marché français. L'analyse de ces scénarios a permis d'orienter nos recherches en vue de méthodes les plus performantes possibles qui ont été développées en dernière partie.

La dernière partie de ce mémoire présente trois méthodes de réduction de simulations permettant d'avoir un niveau suffisamment précis d'estimation de la *VIF*, dans un scénario de avec un nombre réduit de simulations comparé à un calcul classique (ici 3 000 simulations). Les deux premières méthodes sont inspirées par celles proposées par l'*EIOPA*, la troisième par Y. Chueh. Les différentes sensibilités effectués au sein de cette partie ont permis d'identifier les forces et les faiblesses des différentes méthodes étudiées.

Enfin, la dernière sous-partie portant sur la cross-validation a permis d'identifier les paramètres optimaux des différentes méthodes pour réduire au maximum le nombre de simulations, tout en gardant un niveau de précision satisfaisant.

Bibliographie

- [1] American academy of actuaries society of actuaries (may 2022). academy interest rate generator : Frequently asked questions (faq). <https://www.soa.org/4a29df/globalassets/assets/files/static-pages/research/2022-academy-interest-rate-generator-faq.pdf>.
- [2] Esg milliamn. <https://www.milliman.com/en/products/economic-scenario-generator>.
- [3] Buff R. Friedman C. Grandechamp N. Kruk L. Newman J Avellaneda, M. Weighted monte carlo : A new technique for calibrating asset-pricing models. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 4(01), 91-119, 2001.
- [4] Hervé Andrès Pierre-Edouard Arrouy Paul Bonnefoy Alexandre Boumezoued. A new hybrid random number generator for more accurate valuation of insurance liabilities. <https://www.milliman.com/en/insight/hybrid-rng-for-accurate-valuation-of-insurance-liabilities>.
- [5] MAAA Ernst Bruce B. Rosner FSA and Young LLP. Model efficiency study results. *Society of Actuaries*, 2011.
- [6] Yvonne Chueh. Efficient stochastic modeling for large and consolidated insurance business : Interest rate sampling algorithms. 2022.
- [7] Board of Supervisors EIOPA. Opinion on the 2020 review of solvency ii. <https://www.eiopa.europa.eu/system/files/2020-12/eiopa-bos-20-749-opinion-2020-review-solvency-ii.pdf>.
- [8] Damiano Brigo et Fabio Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer, 2006.
- [9] P. Jäckel. *Monte Carlo Methods in Finance (Vol. 5)*. John Wiley Sons, 2002.
- [10] J. Inouye M. Lannelongue, L.Grealey. Green algorithms : quantifying the carbon footprint of computation. *Advanced science*, 8(12),2100707., 2021.
- [11] Karol Maciejewski Mehdi Echchelh Dominik Sznajder. Builind a high-performance in-house life projection and alm model : Architecture and implementation considerations in python. <https://www.milliman.com/en/insight/building-in-house-projection-alm-model-python>.
- [12] Pierre-Edouard Arrouy Jérémy Beaudet Mohammed Bennouna Steven François Alison Tonin. Reducing the number of scenarios used for stochastic alm valuation. <https://fr.milliman.com/-/media/milliman/pdfs/2023-articles/9-5-23,educing-the-number-of-scenarios20230905.ashx>.

Table des figures

0.0.1	Approche proposée pour réduire le temps de calcul	4
0.0.2	Étapes de la cross-validation	7
0.0.3	Proposed approach to reduce calculation time	12
0.0.4	Cross-validation steps	15
1.1.1	Bilan économique Solvabilité 2	18
1.1.2	Schéma simplifié du modèle de <i>BE</i>	20
1.2.1	Asymétrie des gains et pertes des assureurs	23
1.2.2	Processus de calcul du <i>BE</i>	24
1.3.1	Processus d'échantillonnage	32
1.3.2	Distribution qui s'adapte le mieux aux données de la société	34
2.2.1	Récapitulatif des scénarios du lot 1	42
2.2.2	Récapitulatif des scénarios du lot 2	43
2.2.3	Récapitulatif des scénarios du lot 3	43
2.2.4	Récapitulatif des scénarios du lot 4	44
2.2.5	Récapitulatif des scénarios du lot 5	44
2.2.6	Récapitulatif des scénarios du lot 6	45
2.2.7	Impact de l'ordre de l'application des ajustements sur le test de martingalité des actions	47
2.2.8	Présentation des étapes de <i>PHRSS</i>	49
2.3.1	Comptes sociaux au 31/12/2021	50
2.3.2	Composition du portefeuille à l'actif au 31/12/2021	51
2.3.3	Niveau de plus-values latentes par classe d'actifs au 31/12/2021	51
2.4.1	Comparaison des volatilités implicites actions de marché avec celles utilisées par l' <i>EIOPA</i> au 31/12/2021	54
2.4.2	Comparaison des volatilités implicites des <i>swaptions</i> à la monnaie avec celles utilisées par l' <i>EIOPA</i> au 31/12/2021 (39bps)	55
3.1.1	Comparaison des <i>RNG</i> Mersenne Twister (à gauche) et Sobol (à droite)	60
3.1.2	Comparaison du <i>RNG</i> hybride et Mersenne-Twister sur l'écart de convergence	61
3.1.3	Comparaison du <i>RNG</i> hybride et Mersenne-Twister sur les métriques de <i>RMSRE</i>	61
3.3.1	Résumé de la méthode A	65
3.3.2	Évolution du montant de <i>VIF</i> en ajoutant les simulations unes à unes sans ajustement	66
3.3.3	Évolution du montant de <i>VIF</i> sur 200 simulations sans et avec les ajustements proposés (<i>MMA</i> et <i>WMC</i>) à l'aide de la méthode A	66

3.3.4 Résumé de la méthode B	68
3.5.1 Plus-values latentes par classes d’actif rapporté à la VNC au 31/12/2022	72
3.5.2 Taux de revalorisation des contrats en euros	73
3.7.1 Étapes de la cross-validation	77
3.7.2 Distribution des poids attribués en fonction du paramètre d’entropie	79
3.7.3 Heatmap des valeurs de <i>RMSRE</i> en fonction du nombre de simulations et du paramètre d’entropie	80
3.7.4 Heatmap des valeurs de la métrique de VIF en fonction du nombre de simulations et du paramètre d’entropie	80
3.7.5 Corrélation entre les métriques de <i>VIF</i> et <i>RMSRE</i> pour les méthodes A et C en fonction du nombre de simulations	81
3.7.6 Évolution du <i>RMSRE</i> en fonction du nombre de simulations pour un paramètre d’entropie maximal	82
3.7.7 Bonnes pratiques sur l’erreur relative de modèle, cf. notice ACPR relative aux GSE	83
3.7.8 Métrique de <i>VIF</i> en fonction du nombre de simulations pour le paramètre d’entropie optimal	83
3.7.9 Fuite de modèle en fonction du nombre de simulations pour le paramètre d’entropie optimal	84
3.9.1 Comparaison du temps en secondes en fonction du nombre de model points	87
3.9.2 Estimation de l’impact environnemental de la réduction du nombre de simulations	88

Liste des tableaux

1	Liste des scénarios publiés par l' <i>EIOPA</i>	3
2	Résultats PHRSS	3
3	Résultats du modèle <i>ALM</i> sur les 3 méthodes développées ci-dessus avec un <i>RNG</i> Mersenne-Twister sur 200 simulations à fin 2021	5
4	Résultats du modèle <i>ALM</i> sur les 3 méthodes développées ci-dessus avec un <i>RNG</i> hybride sur 200 simulations à fin 2021	6
5	Résultats <i>ALM</i> de la cross-validation à fin 2021	8
6	Scenarios published by EIOPA	10
7	PHRSS results	11
8	ALM and RMSRES outputs based on a Milliman ESG set in Mersenne, 200 simulations, end of year 2021	13
9	ALM and RMSRES outputs based on a Milliman ESG set in hybrid, 200 simulations, end of year 2021	13
10	Results of cross-validation at the end of 2021	16
1.1	Résumé des 6 méthodes	28
1.2	Temps de calcul hypothétique	29
1.3	Résultats obtenus sur les 3 méthodes	30
1.4	Résultats obtenus par les différents participants	31
1.5	Caractéristiques des assureurs	33
1.6	Résultats obtenus sur les 2 entreprises	33
1.7	Résultats obtenus sur divers niveaux de CTE	34
1.8	Environnement de test de la méthode de <i>clustering</i>	35
1.9	Résultats obtenus à l'aide de la méthode de <i>clustering</i>	36
1.10	Résultats pour différents niveaux de compression	36
1.11	Environnement de test de la méthode de réplification du passif	37
1.12	Résultats obtenus sur la méthode de réplification du passif	38
2.1	Résumé du problème d'optimisation	46
2.2	Liste des scénarios publiés par l' <i>EIOPA</i>	47
2.3	Poids publiés par l' <i>EIOPA</i> à appliquer aux scénarios <i>PHRSS</i>	48
2.4	Taux minimum garantis modélisés au 31/12/2021	52
2.5	Résultats PHRSS	53
2.6	Erreurs absolues entre les volatilités Monte Carlo et celle constatés sur le marché	55

2.7	Estimation de la volatilité action	56
3.1	Résultats du modèle <i>ALM</i> sur la méthode A en fonction de l'ordre d'application des ajustements	63
3.2	Résultats du modèle <i>ALM</i> sur les 2 méthodes développées ci-dessus avec un <i>RNG</i> Mersenne-Twister sur 200 simulations	70
3.3	Résultats du modèle <i>ALM</i> sur les 2 méthodes développées ci-dessus avec un <i>RNG</i> hybride sur 200 simulations	70
3.4	Conditions de marché à fin 2021 et 2022	71
3.5	Comparaison des résultats entre 2021 et 2022	73
3.6	Ecart constaté sur la <i>VIF</i> en appliquant un <i>G2++</i>	75
3.7	Résultats obtenus avec la méthode A sur un modèle <i>G2++</i>	75
3.8	Résultats <i>ALM</i> de la cross-validation à fin 2021	84
3.9	Résultats <i>ALM</i> de la cross-validation à fin 2022	85