

**Mémoire présenté devant le CNAM pour l'obtention du Master  
Droit Economie Gestion, mention Actuariat  
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

**le 11 mai 2022**

Par : Youssef LAHRARTI

Titre: La couverture du risque de marché dans l'environnement Solvabilité II :  
application à un portefeuille de contrat d'épargne

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

Président du Jury :

M. Nathanaël ABECERA

signatures



Entreprise :

Nom :

Membres présents du jury de  
l'Institut des Actuaires :

M. Steve BAUMANN

Mme Candice ELMALEH

pro. Abecera.  
1/0 Abecera.

Nom :

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Membres présents du jury du  
Cnam :

M. Olivier DESMETTRE

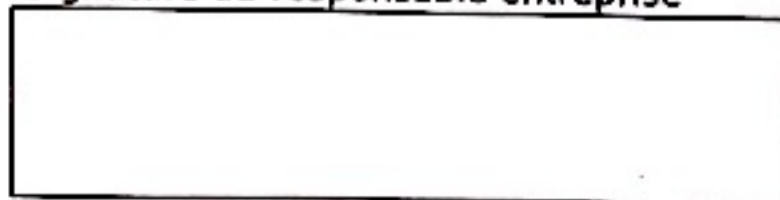
M. David FAURE

M. François WEISS

1/0 Abecera.

**Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de diffusion  
de documents actuariels (après  
expiration de l'éventuel délai de  
confidentialité)**

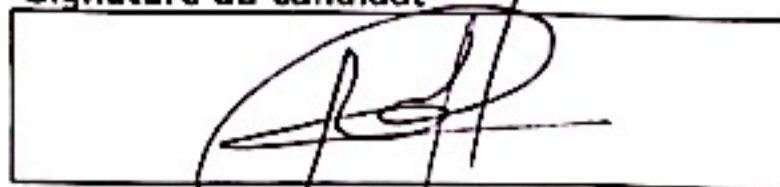
Signature du responsable entreprise



Secrétariat :

Bibliothèque :

Signature du candidat



## Résumé :

La directive cadre (2009/138/CE) de la nouvelle réforme Solvabilité II a été adoptée le 5 mai 2009 et définit les bases des nouvelles exigences réglementaires. Cette directive impose aux compagnies d'assurance d'immobiliser un montant minimal de fonds propres en fonction des types d'actifs et de passifs à son bilan. Ce montant minimal, ou SCR (*Solvency capital requirement*) est calculé de manière à limiter la probabilité de ruine de l'assureur à 0,5%, c'est-à-dire à une seule occurrence tous les 200 ans.

La réforme introduit une nouvelle approche des risques, tous les risques auxquels les assureurs sont exposés doivent être pris en compte dans le calcul de l'exigence en capital. Ainsi le SCR est d'autant plus important que le risque extrême est élevé. C'est pourquoi la question de la couverture des risques se pose.

Le risque de marché a été identifié comme une source de risque très importante, ce qui a encore été souligné par la crise financière de 2008. En effet, contrairement à ce que pourrait penser un acteur extérieur, le risque assurance n'est que le deuxième risque le plus important pour la majorité des compagnies d'assurance vie.

Les mécanismes de couverture offrent une protection contre les risques financiers (taux, actions, spread, change...) tout en permettant à la compagnie d'assurance de conserver sa position sous-jacente. Ceci peut être motivé par une difficulté à céder la position ou encore une volonté de réduire le SCR ponctuellement.

Dans ce mémoire, nous proposons d'étudier l'impact de la mise en place des stratégies de couverture par instruments dérivés sur la réduction du SCR.

**Mots clés :** Solvency II, LTGA, valorisation, capital requis, provision Best Estimate, SCR marché, scénarios économiques, simulation stochastique, stratégies de couverture, atténuation des risques financiers.

**Abstract:**

The Solvency II Directive (2009/138/CE) was adopted on May 5, 2009, it provides the new regulatory requirements. The directive requires insurance companies to hold a minimum amount of own funds according to the types of assets and liabilities on its balance sheet. This minimum amount, or SCR (Solvency capital requirement) is calculated to limit the probability of failure of the insurer to 0.5%, ie, once occurrence every 200 years.

The reform introduces a new approach for risk, insurers must take into account in calculating the capital requirement all risks to which they are exposed. Thus, SCR is as important as the risk involved. That's why the issue of risk hedging arises.

Market risk has been identified as a major source of risk, which has been highlighted by the recent financial crisis. Contrary to what might be thought an outsider, risk insurance is only the second most important risk for the majority of insurance companies.

Hedging strategies provide protection against financial risks (interest rate, equity, spread, currency ...), allowing the insurer to maintain its underlying position. This can be motivated by a difficulty to sell the position or a wish to reduce the SCR punctually.

In this thesis, we propose to study the impact of the implementation of hedging strategies using derivatives products on reducing the SCR.

**Key words:** Solvency II, LTGA, valuation, capital requirement, Best Estimate, SCR market risk, economic scenario, stochastic simulation, hedging strategies, Financial Risk mitigation.

## Remerciements :

Je tiens à remercier le corps enseignant de la chaire actuariat du CNAM, et tout particulièrement Michel FROMENTEAU, pour sa disponibilité, son écoute et sa confiance.

Je remercie également pour leurs relectures de mon mémoire, leurs remarques pertinentes et leurs conseils éclairés :

- Fabrice Borel-Mathurin, PhD en mathématiques financières, est contrôleur des assurances et économiste chercheur à l'ACPR.
- Quentin Guibert, actuaire, PhD en sciences de gestion, est contrôleur des assurances et économiste chercheur à l'ACPR.
- Mustapha Aouichi, actuaire, est contrôleur des assurances à l'ACPR.
- Yassir Eladaoui, polytechnicien et diplômé de l'ENSAE, est ingénieur financier à la société générale.

Je dédie ce travail à la mémoire de mon père, décédé trop tôt, qui m'a toujours poussé et motivé dans mes études. Puisse Dieu, le tout puissant, l'accueillir dans son infinie miséricorde !

Je remercie enfin toutes les personnes qui m'ont encouragé et soutenu tout au long de mon travail.

## Table des matières

Résumé :.....	0
Abstract : .....	1
Remerciements : .....	2
Introduction générale :.....	5
I. Le contexte réglementaire : .....	7
1. La réforme Solvabilité II :.....	7
1.1 Objectif : .....	7
1.2 Nouvelle approche de valorisation .....	8
1.3 Le processus de consultation : .....	9
1.4 La structure en 3 piliers : .....	11
1.5 Calendrier de la réforme Solvabilité II :.....	13
II. Le SCR dans le modèle standard :.....	13
1. Les provisions techniques .....	13
1.1 Le Best Estimate .....	13
1.2 La Marge de risque .....	14
2. Le Minimum Capital Requirement (MCR) .....	14
3. Le Solvency Capital Requirement (SCR) .....	14
3.1 Structure générale du SCR.....	15
3.2 Le Basic Solvency Capital Requirement (BSCR) .....	16
3.3 Principe de calcul de l'exigence de capital : .....	16
3.4 Focus sur le risque de marché:.....	17
III. Instruments dérivés et couverture des risques d'assurance : .....	24
1. <i>Stratégies de couverture statiques et dynamiques</i> : .....	24
1.1 Stratégies dynamiques : .....	24
1.2 Stratégies statiques : .....	24
2. <i>Stratégies de couverture dans le cadre Solvabilité II</i> : .....	25
3. <i>Instruments de couverture</i> : .....	26
3.1 Couverture du risque de taux :.....	26
3.2 Couverture du risque actions : .....	28
3.3 Couverture du risque de change : .....	29

3.4	Couverture contre le risque de crédit : .....	31
IV.	Application à un portefeuille de contrats d'épargne en euros: .....	34
1.	<i>Introduction</i> : .....	34
2.	<i>Modélisation du passif d'un contrat d'assurance vie</i> : .....	35
3.	<i>Modélisation de l'actif</i> : .....	46
4.	<i>Interaction Actif-Passif et Calcul du SCR marché</i> : .....	58
V.	<i>Mise en place de la couverture et impact sur le SCR marché</i> : .....	81
1.	Mise en place de la Couverture : .....	81
2.	Calcul du SCR marché avec couverture : .....	85
3.	Evaluation du gain économique : .....	91
	Conclusion générale : .....	94
	Annexes .....	95
	Bibliographie : .....	107
	Ouvrages : .....	107
	Publications : .....	107
	Mémoires d'actuariat : .....	108
	Sites internet : .....	108
	Tables des illustrations .....	109

## Introduction générale :

La réglementation du secteur des assurances est en pleine mutation. La nouvelle réforme européenne Solvabilité II est entrée en vigueur le 1<sup>er</sup> janvier 2016. Cette réglementation a pour objectif d'assurer la capacité des assureurs à faire face à leurs engagements vis-à-vis des assurés.

Solvabilité II introduit une nouvelle approche de valorisation des actifs et des passifs d'assurance : l'évaluation économique dite en « juste valeur ». Les actifs et les passifs doivent désormais être évalués à leur valeur de marché.

Dans le cadre de cette réforme, l'évaluation du bilan des sociétés d'assurance est prospective et nécessite d'effectuer une projection de l'activité de l'assureur. Un modèle de scénario économique doit donc être implémenté pour projeter l'évolution des actifs, le comportement des assurés et les interactions actif/passif.

Les études effectuées à travers les spécifications techniques QIS ont mis en évidence que le risque de marché est le principal module consommateur du SCR, et que ce risque est plus important que les risques propres aux activités d'assurance vie.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'impact de la mise en place des stratégies de couverture sur le SCR, le coût que représente cette mise en place, ainsi évaluer dans quelles conditions il est économiquement rentable de rentrer dans une stratégie de couverture.

Une première partie sera consacrée à la présentation du contexte réglementaire et des exigences définies dans la 5<sup>ème</sup> étude d'impact.

Une deuxième partie aura pour vocation d'explorer les différents instruments financiers pouvant servir de couverture contre le risque de marché.

Dans la troisième partie de ce mémoire, nous procédons à la modélisation stochastique d'un portefeuille de contrats d'épargne en euros, et au calcul des exigences réglementaires selon la formule standard.

La dernière partie sera consacrée à la mise en place des couvertures contre le risque de taux et actions, et à l'évaluation du gain économique engendré par ces stratégies.

## Première partie

# La nouvelle réforme réglementaire : Solvabilité II



## I. Le contexte réglementaire :

Le marché de l'assurance est un acteur majeur de l'Economie. La contribution de l'assurance au financement de l'économie a atteint près de 2000 milliards d'euros en 2013, majoritairement en direction des entreprises avec un seuil historique de 58%. En 2013, les assureurs détenaient 54% de la dette domestique de l'État français, ce qui permet de sécuriser une grande partie du financement de la dette souveraine.

L'assurance est caractérisée par un cycle de production inversé, les assureurs fixent le prix de leurs produits avant de connaître le montant de prestations futures. Ce mode de fonctionnement est source d'incertitude quant à la capacité à honorer ses engagements, Ainsi il est nécessaire de définir des règles afin de garantir la capacité des assureurs à respecter les engagements qu'ils prennent auprès de leurs clients.

La notion de solvabilité est alors définie comme la capacité à faire face aux engagements vis-à-vis des tiers.

### 1. La réforme Solvabilité II :

#### 1.1 Objectif :

Les objectifs principaux de la directive Solvabilité II sont :

- ✓ Renforcer la protection des assurés ;
- ✓ Renforcer l'intégration du marché européen ;
- ✓ Favoriser la compétitivité des assureurs européens sur le marché international ;
- ✓ Améliorer la législation.

Pour ce faire, la directive introduit une nouvelle approche de valorisation et une vision économique du bilan. L'évaluation du besoin en capital est prospective et tient compte du profil de risque spécifique de chaque assureur.

Solvabilité II prévoit également d'harmoniser les reportings demandés aux organismes d'assurance et le système de gouvernance avec les normes comptables internationales IFRS (*International Financial Reporting Standards*).

## 1.2 Nouvelle approche de valorisation

L'article 75 de la Directive Cadre définit le principe de valorisation des actifs et des passifs d'assurance. Il requiert d'utiliser une approche économique et cohérente avec les données de marché (market-consistent).

Selon cette approche fondée sur la valeur économique, les entreprises d'assurance valorisent les actifs et passifs comme suit :

- i. Les actifs doivent être valorisés au montant pour lequel ils pourraient être échangés dans le cadre d'une transaction conclue dans des conditions de concurrence normales, entre des parties informées et consentantes ;
- ii. Les passifs doivent être valorisés au montant pour lequel ils pourraient être transférés ou réglés dans le cadre d'une transaction conclue dans des conditions de concurrence normale, entre des parties informées et consentantes.

Les actifs doivent être comptabilisés à leur valeur de marché. Lorsqu'un passif est répliquable, i.e lorsque les flux du passif peuvent être répliqués parfaitement par des produits financiers, l'assureur doit comptabiliser ce passif à la valeur de marché de ces dits produits. Il s'agit de la méthode « **mark to market** ». Si le passif n'est pas répliquable, l'assureur doit alors le comptabiliser comme la somme d'un **Best Estimate** et d'une **Marge de risque**, c'est la méthode « **mark to model** ».

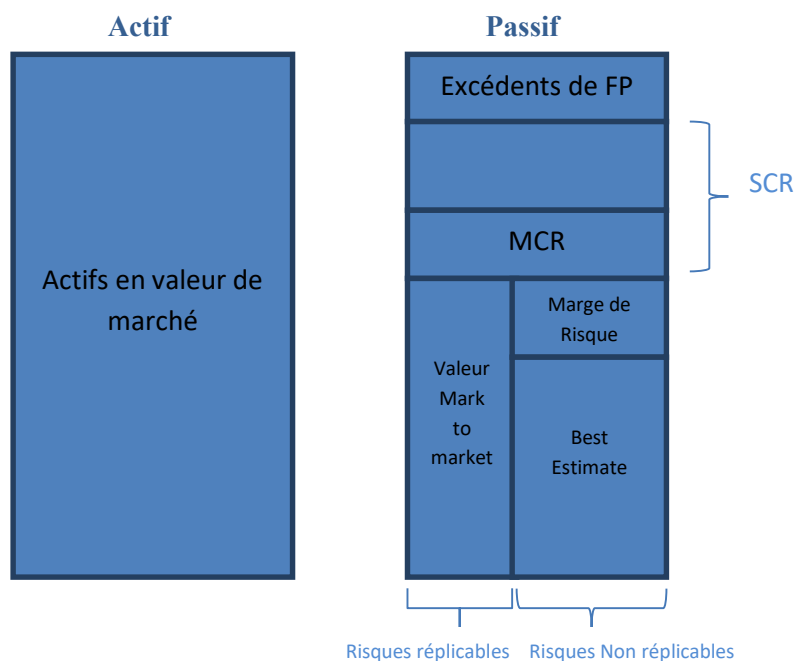


Figure 1 : Bilan économique sous Solvabilité II

### 1.3 Le processus de consultation :

#### 1.3.1 Le processus *Lamfalussy* :

C'est le processus utilisé par l'union européenne pour concevoir les réglementations du secteur de la finance, il permet d'élaborer des réformes plus adaptées à la réalité, car les textes de loi sont préparés après consultation des acteurs du marché.

Le processus *Lamfalussy* est constitué de quatre niveaux :

- Au niveau 1 : élaboration de la législation ;
- Au niveau 2 : élaboration des mesures d'exécution ;
- Au niveau 3 : coopération des régulateurs ;
- Au niveau 4 : contrôle du respect du droit.

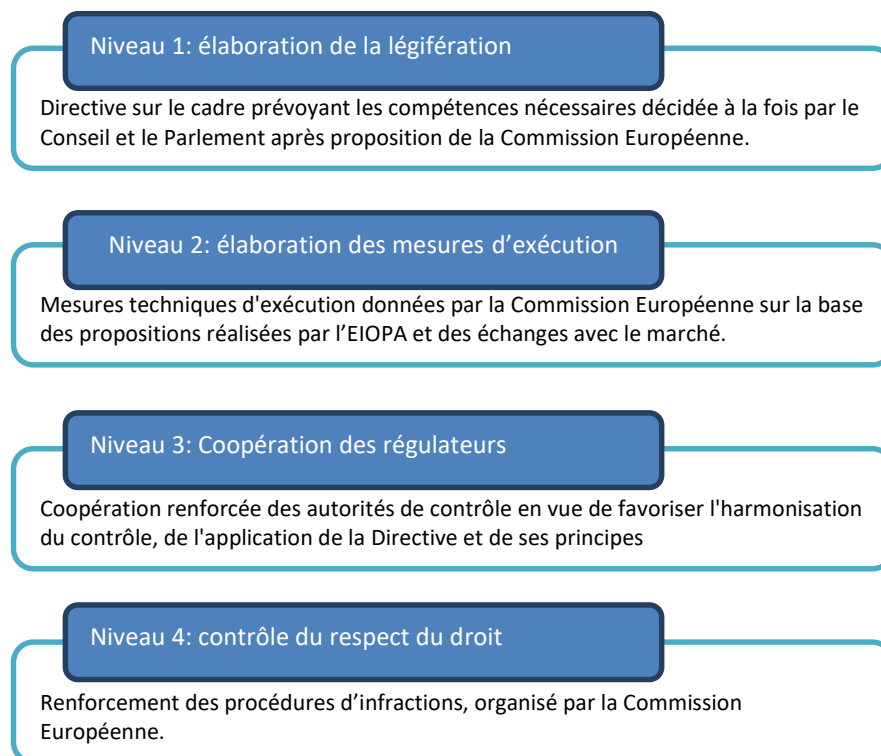


Figure 2 : Le processus *Lamfalussy*

### 1.3.2 Les acteurs de la réforme :

La Commission européenne :

La Commission européenne est l'unique acteur législatif du processus Lamfalussy. Elle rédige la directive après consultation des acteurs du marché de l'assurance. Le projet Solvabilité II est traité au sein de la Direction Générale Marché Intérieur et Services.

Les Etats membres :

Les Etats membres interviennent par le biais de deux organismes, l'EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*) et l'EIOPC (*European Insurance and Occupational Pensions Committee*).

L'EIOPA regroupe les représentants des autorités de contrôle des Etats membres. En France, l'autorité de contrôle est l'ACPR (Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution) anciennement ACAM (Autorité de Contrôle des Assurances et Mutuelles). L'EIOPA a un rôle consultatif. Elle conseille la Commission européenne dans l'élaboration des directives. Elle a préparé le marché en émettant des *Consultations Papers* (CP) sur lesquels les acteurs de l'assurance ont pu faire des retours. Suite à ces retours, l'EIOPA a émis des *Final Advices*. A partir de ces documents, la Commission européenne a ensuite lancé plusieurs études quantitatives d'impact.

L'EIOPC est le comité européen des assurances et pensions professionnelles. Il assiste la Commission européenne dans l'élaboration de la directive cadre.

Les professionnels :

Les professionnels jouent un rôle important dans l'élaboration de la réforme Solvabilité II. Ils sont amenés à répondre aux CP et à participer aux QIS. Ils guident les participants et se chargent de remonter le point de vue du marché aux institutions européennes et aux autorités de contrôle.

Voici une liste non exhaustive des acteurs de la réforme :

- le CEA (Comité Européen des Assurances) ;
- le CRO Forum (Chief Risk Officer Forum) ;
- le CFO Forum (Chief Financial Officers Forum) ;
- le GCAE (Groupe Consultatif Actuariel Européen).

En France, les intervenants principaux sont :

- la FFSA (Fédération Française des Sociétés d'Assurance) ;
- le GEMA (Groupement des Entreprises Mutuelles d'Assurance) ;
- la FNMF (Fédération Nationale de la Mutualité Française) ;
- le CTIP (Centre Technique des Institutions de Prévoyance).

## 1.4 La structure en 3 piliers :

La réforme Solvabilité II est fondée sur une structure en trois piliers.

### 1.4.1 Pilier 1 : exigences quantitatives

Le premier pilier définit les règles de valorisation des actifs et des passifs, ainsi que les exigences de capital et leur mode de calcul.

Le premier pilier prévoit deux exigences de capital :

- ✓ *MCR Minimum Capital Requirement* : représente un niveau minimum de fonds propres que les compagnies ne doivent pas franchir.  
Le MCR est calculé d'une manière simple, en fonction des primes en assurance non-vie, des provisions techniques et des capitaux sous risque en assurance vie.
- ✓ *SCR Solvency Capital Requirement* : est un indicateur basé sur l'exposition aux risques des compagnies d'assurance. Il reflète le profil de risque réel de la compagnie.  
Son calcul repose sur une formule standard ou sur l'utilisation d'un modèle interne total ou partiel propre à la compagnie d'assurance.

### 1.4.2 Pilier 2 : aspects qualitatifs et contrôle

Le pilier II a pour objectif de définir les normes qualitatives de suivi des risques d'une part et d'harmoniser les processus de contrôle et de surveillance des organismes assureurs et des superviseurs d'autre part.

Il correspond à une recherche d'efficacité quant aux mécanismes d'organisation et de contrôle interne et à l'élaboration des principes applicables en matière de gestion des risques.

Une attention particulière est apportée aux questions liées à la gouvernance d'entreprise : honorabilité et compétence des dirigeants, compétence également des instances de gouvernance, et des intervenants extérieurs. De plus, les autorités de contrôle ont un droit de regard sur la gestion de la compagnie.

En ce qui concerne le contrôle interne, l'accent est placé sur l'existence de procédures écrites ainsi que sur la fiabilité du système d'audit interne.

Dans le respect de l'ORSA (« Own Risk and Solvency Assessment »), l'assureur est tenu de définir un « Risk Appetite » (niveau de tolérance des risques), des indicateurs de pilotage et d'adopter une vision prospective en matière de gouvernance des risques.

Les superviseurs vérifieront que l'organisme établit sa politique de gestion des risques de manière fiable.

Tous les outils de supervision sont harmonisés, aussi bien les processus de contrôle des assurances et des mutuelles que les pouvoirs et les moyens d'actions conférés au superviseur.

1.4.3 Pilier 3 : information et discipline de marché

Le troisième pilier définit les informations qui doivent être publiées par les compagnies : Deux types de rapport sont à fournir :

- ✓ le SFCR (Solvency & Financial Condition Report), publié annuellement dans le but d’informer les actionnaires et les analystes de marché.
- ✓ le RTS (Reporting To Supervisor) permettant de vérifier le calcul de l’exigence en capital, publié trimestriellement à l’attention des autorités de contrôle.

Le pilier 3 prévoit la réalisation d’états voués à remplacer les états réglementaires actuels : les QRT (Quantitative Reporting Templates). Ces états ont une vocation plus actuarielle que les états réglementaires actuels qui sont essentiellement comptables.

**Synthèse des trois piliers : le « temple grec »**

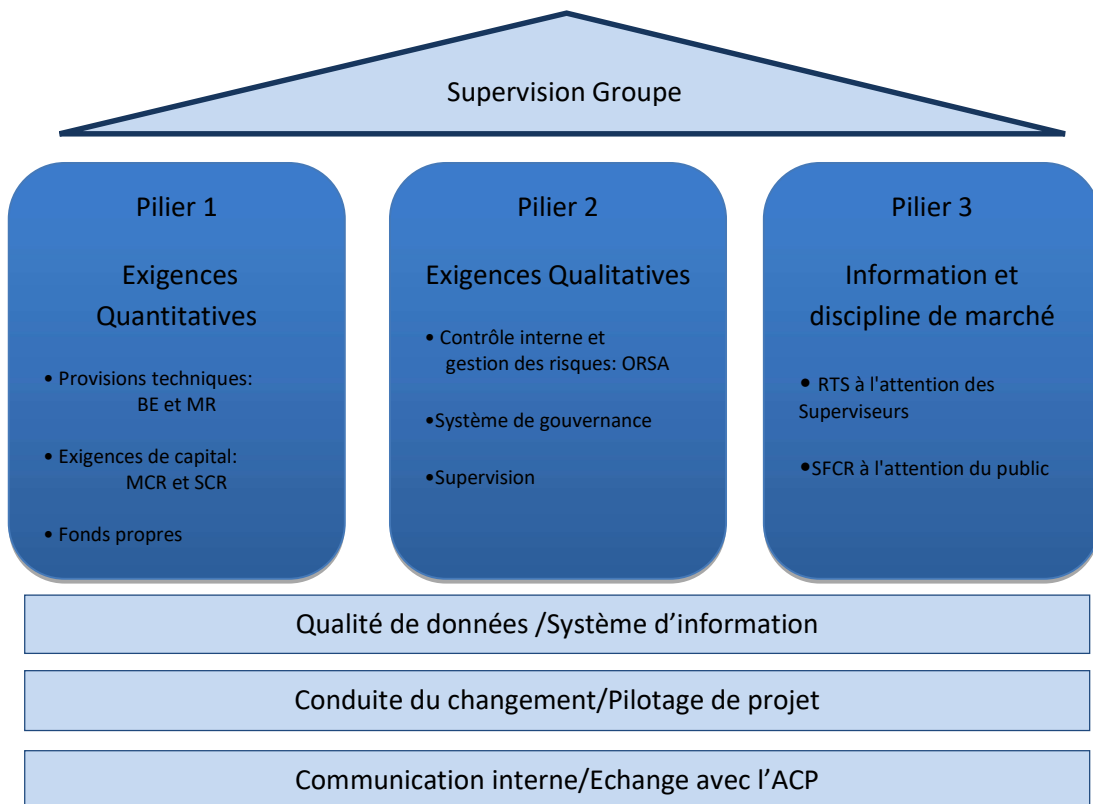


Figure 3 : Les 3 piliers de Solvabilité II

### 1.5 Calendrier de la réforme Solvabilité II :

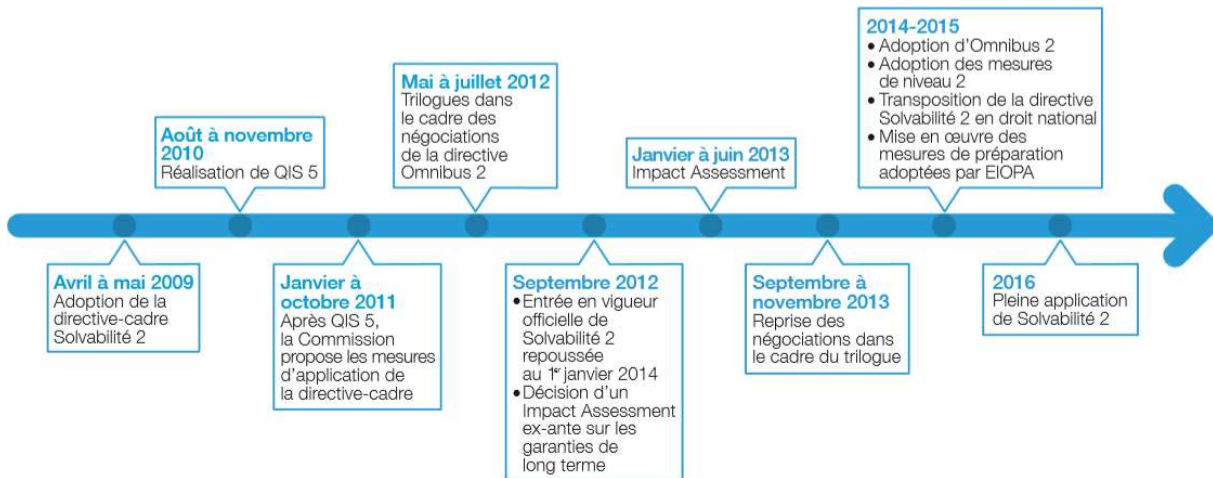


Figure 4 : Calendrier de la réforme Solvabilité II

## II. Le SCR dans le modèle standard :

### 1. Les provisions techniques

Le montant des provisions techniques doit correspondre au montant qu'un tiers exigerait pour reprendre les engagements de l'assureur (ce résultat correspond donc à une valeur de transfert).

Le calcul des provisions techniques distingue les passifs répliquables des passifs non répliquables. Un passif répliquable est comptabilisé à sa valeur de marché tandis qu'un passif non répliquable doit être estimé par le calcul d'un *Best Estimate* et d'une Marge de risque.

#### 1.1 Le Best Estimate

Le *Best Estimate* correspond au montant espéré qu'une compagnie d'assurance devrait déboursier pour régler tous ses engagements, il doit tenir compte de toutes les entrées et sorties de capital, relatives aux engagements de l'assureur et des assurés pendant toute la durée des engagements.

Le *Best Estimate* correspond donc à la valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs, jusqu'à l'extinction du portefeuille

Pour calculer le *Best Estimate*, il faut :

- ✓ Calculer les flux de prestations et de frais à chaque date de projection.
- ✓ Actualiser tous les flux à la date initiale.

$$BE = \sum_{t=1}^N \frac{Flux_t}{(1 + r_t)^t}$$

$Flux_t$  : Le flux probables l'année t.

$r_t$  : Taux sans risque de maturité t.

$N$  : L'horizon de simulation.

## 1.2 La Marge de risque

La marge de risque correspond au coût d'immobilisation des fonds propres. Elle est calculée selon la méthode du coût du capital (CoC).

$$CoCM = 6\% \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_{RU}(t)}{(1 + r_{t+1})^{t+1}}$$

- $CoCM$  est la Marge de risque calculée par la méthode du coût du capital.
- 6% correspond au taux de coût du capital.
- $SCR_{RU}(t)$  est le SCR pour l'année t de « l'entreprise de référence ».
- $r_{t+1}$  est le taux sans risque sans prime de liquidité pour la maturité t+1.

Selon les spécifications techniques du LTGA, les compagnies d'assurance peuvent appliquer des techniques d'évaluation simplifiées de la marge de risque. La méthode choisie doit être adaptée à la nature et le profil de risque de l'entreprise en question.

## 2. Le Minimum Capital Requirement (MCR)

Le MCR est le minimum de capital requis. Il correspond au niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'autorité de contrôle demande un plan de financement à court terme. Si l'entreprise ne détient pas le niveau minimum de fonds propres requis elle peut se voir retirer son agrément.

Le MCR doit être compris entre 25% et 45% du SCR et doit respecter un seuil plancher de 3 200 k€ pour les compagnies d'assurance vie.

## 3. Le Solvency Capital Requirement (SCR)

Le SCR est le capital de solvabilité requis. Il correspond au niveau de fonds propres nécessaire à une entreprise afin d'être en mesure d'absorber des pertes imprévues importantes. Le SCR doit couvrir le portefeuille en cours de l'entreprise ainsi que le portefeuille dont la souscription est attendue dans les 12 prochains mois.

Les paramètres et hypothèses entrant dans le calcul du SCR sont calibrés de manière à représenter la *Value at Risk* (VaR) à un horizon temporel d'un an avec un niveau de confiance de 99,5%. Le SCR doit couvrir une probabilité de ruine de 0,5% sur un horizon d'un an ce qui correspond à une faillite tous les 200 ans.





### 3.2 Le Basic Solvency Capital Requirement (BSCR)

Le SCR de base est calculé à partir de l'estimation de la Net Asset Value (NAV) qui sera choquée afin de tenir compte des différents risques auxquels est soumise la société d'assurance.

Le calcul du BSCR inclut désormais le capital requis pour le risque sur les actifs incorporels mais celui-ci n'est pas agrégé avec les capitaux requis pour les autres modules.

$$BSCR = \sqrt{\sum_{ij} Corr_{ij} * SCR_i * SCR_j} + SCR_{actifs incorporels}$$

Avec :

$SCR_{mkt}$  : Capital requis au titre du risque de marché

$SCR_{def}$  : Capital requis au titre du risque de contrepartie

$SCR_{life}$  : Capital requis au titre du risque de souscription vie

$SCR_{nl}$  : Capital requis au titre du risque de souscription non-vie

$SCR_{health}$  : Capital requis au titre du risque de souscription santé

$SCR_{intangibles}$  : Capital requis au titre du risque lié aux actifs incorporels

$Corr_{ij}$  : Coefficient de corrélation entre les modules de risque i et j

La matrice de corrélation entre les risques est la suivante :

Corr	Marché	Contrepartie	Souscription vie	Santé	Souscription non-vie
Marché	1				
Contrepartie	0.25	1			
Souscription vie	0.25	0.25	1		
Santé	0.25	0.25	0.25	1	
Souscription non-vie	0.25	0.5	0	0	1

### 3.3 Principe de calcul de l'exigence de capital :

L'exigence de capital  $C_R$  requis au titre d'un facteur de risque élémentaire R est calculée comme la variation du niveau des fonds propres économiques ( $\Delta NAV$ ) constatée suite à un choc instantané sur le facteur R au niveau de risque 0,5% :

$$C_R = \Delta NAV = NAV_0 - NAV_{0+} = (A_0 - BE_0) - (A_{0+} - BE_{0+})$$

Où :

- $A_0$ : valeur de marché de l'actif à la date d'évaluation ;
- $BE_0$ : Best Estimate calculé à la date d'évaluation (cas central) ;

- $A_{0+}$  : valeur de marché de l'actif après un choc instantané sur le facteur de risque R ;
- $BE_{0+}$  : *Best Estimate* calculé après choc instantané sur le facteur de risque R.

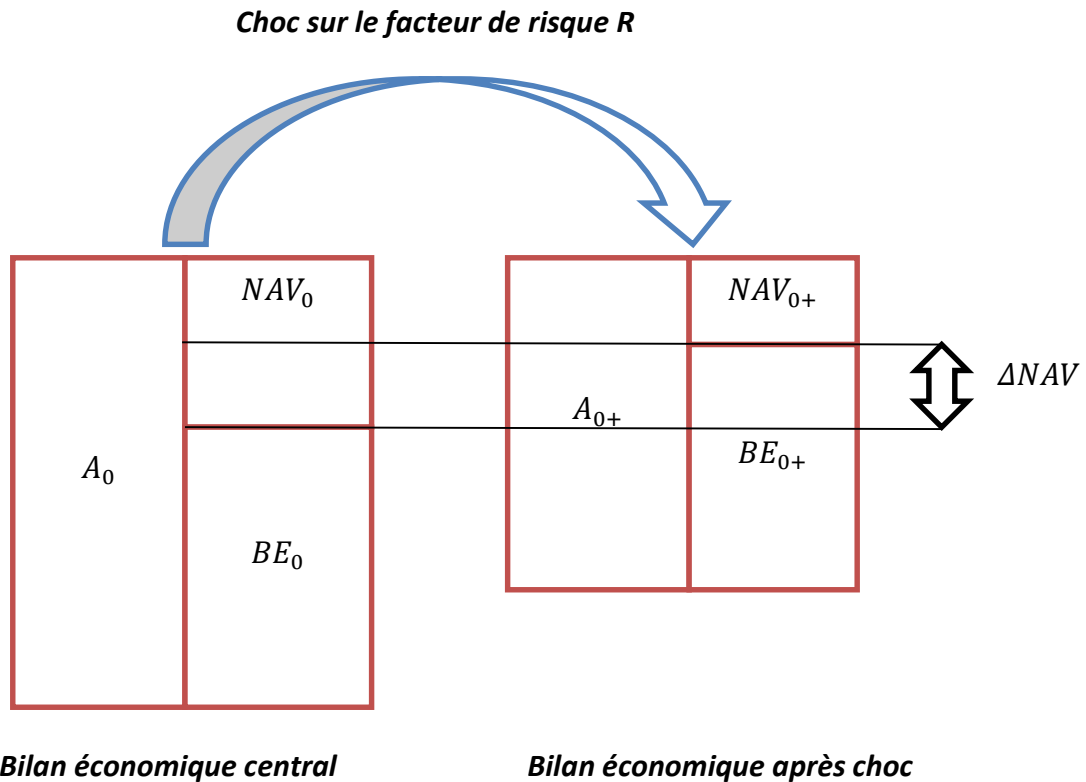


Figure 6: Principe de calcul du capital requis

### 3.4 Focus sur le risque de marché:

Le SCR marché est défini comme le maximum entre l'agrégation des sous-modules avec un choc de taux à la hausse et celle avec un choc de taux à la baisse.

$$SCR_{mkt} = \max \left( \sqrt{\sum_{ij} CorrMktUp_{r,c} * Mkt_{up,r} * Mkt_{up,c}}; \sqrt{\sum_{ij} CorrMktDown_{r,c} * Mkt_{down,r} * Mkt_{down,c}} \right)$$

LTGA définissent donc deux matrices de corrélation :

CorrMrkDown	Intérêt	Action	Immobilier	Spread	Change	Concentration	Prime cyclique	contra- cyclique
<b>Intérêt</b>	1							
<b>Action</b>	0.5	1						
<b>Immobilier</b>	0.5	0.75	1					
<b>Spread</b>	0.5	0.75	0.5	1				
<b>Change</b>	0.25	0.25	0.25	0.25	1			
<b>Concentration</b>	0	0	0	0	0	1		
<b>prime contra- cyclique</b>	0	0	0	0	0	0	1	

CorrMrkUp	Intérêt	Action	Immobilier	Spread	Change	Concentration	Prime cyclique	contra- cyclique
<b>Intérêt</b>	1							
<b>Action</b>	0	1						
<b>Immobilier</b>	0	0.75	1					
<b>Spread</b>	0	0.75	0.5	1				
<b>Change</b>	0.25	0.25	0.25	0.25	1			
<b>Concentration</b>	0	0	0	0	0	1		
<b>prime contra- cyclique</b>	0	0	0	0	0	0	1	

### 3.4.1 Le risque de taux :

Selon les spécifications techniques, un risque de taux d'intérêt existe pour tous les actifs et passifs dont la valeur d'actif net est sensible aux variations de la structure par terme des taux d'intérêt ou à la volatilité des taux.

Les actifs sensibles aux variations des taux d'intérêt sont les investissements en instruments à taux fixe, les instruments financiers (capitaux empruntés) et les dérivés de taux d'intérêt. Les passifs d'assurance sont affectés via le taux d'intérêt en tant que taux d'actualisation. Ainsi un changement du taux d'intérêt change la valeur des engagements futurs.

La charge en capital requise est obtenue par le calcul des variations de la NAV après application de deux scénarios de choc sur les taux, un scénario haussier et un scénario baissier.

$$Mkt_{int}^{up} = \Delta NAV_{up}$$

$$Mkt_{int}^{down} = \Delta NAV_{down}$$

Le scénario à appliquer aux différents éléments de l'actif et du passif modifie la structure par terme des taux en multipliant la structure par terme actuelle par  $(1+s^{up})$  respectivement  $(1+s^{down})$ . Ces deux termes sont définis dans le tableau :

Maturité t	0,25	0,5	1	2	3	4
Stress Factor Up	70,00%	70,00%	70,00%	70,00%	64,00%	59,00%
Stress Factor Down	-75,00%	-75,00%	-75,00%	-65,00%	-56,00%	-50,00%

Maturité t	5	6	7	8	9	10
Stress Factor Up	55,00%	52,00%	49,00%	47,00%	44,00%	42,00%
Stress Factor Down	-46,00%	-42,00%	-39,00%	-36,00%	-33,00%	-31,00%

Maturité t	11	12	13	14	15	16
Stress Factor Up	39,00%	37,00%	35,00%	34,00%	33,00%	31,00%
Stress Factor Down	-30,00%	-29,00%	-28,00%	-28,00%	-27,00%	-28,00%

Maturité t	17	18	19	20	90
Stress Factor Up	30,00%	29,00%	27,00%	26,00%	20,00%
Stress Factor Down	-28,00%	-28,00%	-29,00%	-29,00%	-20,00%

Figure 7: Déformations relatives à appliquer sur la courbe des taux

Pour les échéances non spécifiées ci-dessus, la valeur du choc est obtenue par interpolation linéaire.

Indépendamment des facteurs de stress ci-dessus, le changement absolu des taux d'intérêt dans le scénario à la hausse et à la baisse doit être au moins un point de pourcentage.

### 3.4.2 Le risque actions :

Les spécifications techniques du LTGA précisent que le risque actions résulte du niveau ou de la volatilité des cours du marché des actions. L'exposition à ce risque concerne tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux variations des cours des actions.

Les éléments qui contribuent majoritairement au  $SCR_{equity}$  sont donc les positions en actions et en produits dérivés. Certains passifs en assurance vie (contrats avec participation aux bénéfices) sont également visés.

Il est important de noter que ce module ne concerne que le risque systématique et exclut le risque spécifique (résultant d'une diversification insuffisante). Ce dernier est partiellement pris en compte dans le sous-module «Risque de Concentration».

Pour la détermination du capital requis au titre du sous-module action, il faut faire la distinction entre deux catégories d'actions, les actions dites « globales » et les « autres ». Pour chaque type d'actions, le capital requis est obtenu par le calcul de la variation de la NAV après l'application d'un choc spécifique.

$$Mkt_{equity} = \max(\Delta NAV_{equity\ shock}; 0)$$

Actions « globales » :

- actions cotées dans les pays de l'EEE (Espace Economique Européen) et de l'OCDE (Organisation de Coopération et de Développement Economique).
- application d'un choc de 30% comprenant un ajustement de -9%.

« Autres » actions :

- actions non cotées, actions cotées uniquement sur les marchés émergents, fonds spéculatifs et les autres investissements.
- application d'un choc de 40% comprenant un ajustement de -9%.

Les deux résultats obtenus sont ensuite agrégés avec une corrélation de 75%.

Le LTGA propose un choc de 22%, quel que ce soit le pays émetteur de l'action. Ce choc serait appliqué, de façon transitoire, aux actions acquises avant l'entrée en vigueur de la réglementation, et augmenterait progressivement pour atteindre d'ici quelques années les chocs de 39% ou 49%.

### 3.4.3 Le risque immobilier :

Le risque immobilier résulte d'une variation défavorable du niveau ou de la volatilité du cours de l'immobilier impactant les actifs et les passifs.

Dans les spécifications techniques du LTGA, la charge en capital requise est obtenue par le calcul des variations de la NAV après application d'un choc à la baisse de 25% sur la valeur de l'immobilier.

$$Mkt_{prop} = \max(\Delta NAV_{property\ shock}; 0)$$

### 3.4.4 Le risque de change :

Le risque de change est le risque de perte dû à une variation des taux de change. En cas d'inadéquation entre les devises des éléments de l'actif et du passif, l'assureur est exposé au risque de change.

Le capital requis est obtenu par la variation de la NAV après l'application d'un choc haussier de 25 % et d'un choc baissier de 25% (en prenant le maximum des deux) de toutes les autres devises face à la devise locale dans laquelle l'entreprise établit ses comptes (sauf quelques exceptions).

$$Mkt_{fx}^{up} = \max(\Delta NAV_{fxup\ shock}; 0)$$

$$Mkt_{fx}^{down} = \max(\Delta NAV_{fxdown\ shock}; 0)$$

### 3.4.5 Le risque de signature (spread):

Le risque de signature correspond à la part de risque provenant de la volatilité du spread par rapport au taux sans risque. Il traduit également en partie le risque de défaut des émetteurs de produits financiers.

L'exigence de capital est déterminée de la manière suivante :

$$Mkt_{sp} = Mkt_{sp}^{bonds} + Mkt_{sp}^{struct} + Mkt_{sp}^{cd}$$

Avec :

$Mkt_{sp}^{bonds}$  : Capital requis au titre du risque de signature sur les obligations à taux fixe.

$Mkt_{sp}^{struct}$  : Capital requis au titre du risque de signature sur les produits structurés de crédit.

$Mkt_{sp}^{cd}$  : Capital requis au titre du risque de signature sur les dérivés de crédit.

$Mkt_{sp}^{bonds}$  est l'effet attendu d'une dépréciation des obligations causée par une hausse des spreads, sur la valeur nette des actifs et est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} Mkt_{sp}^{bonds} &= \max(\Delta NAV_{spread\ shock\ on\ bonds}; 0) \\ &= \sum_i VM_i * F^{up}(rating_i) \end{aligned}$$

Où :

$VM_i$  : la valeur de marché de l'exposition au risque de crédit i.

$F^{up}(rating_i)$  : fonction qui dépend de la notation de l'exposition au risque de crédit i et qui est calibrée pour délivrer un choc compatible avec la VaR à 99,5%.

### 3.4.6 Le risque de concentration

Ce sous module traduit le risque de concentration sur un même émetteur (les sociétés d'un même groupe sont considérées comme un seul émetteur).

Le risque de concentration prend en compte les produits de taux et les actions, ainsi que les produits dérivés de ces actifs et les actifs immobiliers.

Les titres émis ou garantis par un état de l'OCDE ne sont pas à prendre en compte pour le calcul de ce risque.

Le calcul du besoin en capital pour le risque de concentration s'effectue en 4 étapes.

#### ➤ Etape 1 : Regroupement par émetteur

Les expositions au risque des actifs sont à regrouper par émetteur.

L'exposition à une contrepartie i est notée  $E_i$ .

#### ➤ Etape 2 : exposition en excès

Le risque de concentration apparaît lorsque le taux d'exposition à la contrepartie  $i$  est supérieur à un seuil fixé a priori, en fonction de la signature  $Sign_i$  de la contrepartie  $i$ . L'exposition en excès est :

$$XS_i = \max \left( \frac{E_i}{\text{Valeur de l'actif hors UC}} - SC; 0 \right)$$

Où  $XS_i$  est borné à 8% et le seuil de concentration  $SC$  est de 3% pour les émetteurs notés de AAA à A, et de 1,5% pour les autres émetteurs.

➤ **Etape 3 : Risque de concentration par émetteur**

Le risque de concentration pour l'émetteur  $i$  est :

$$Conc_i = \Delta NAV_{concentration\ shock}$$

Le choc sur le niveau de concentration pour l'émetteur  $i$  est défini par :  $XS_i * g_i$  où le paramètre  $g_i$  dépend de la notation de la contrepartie  $i$ .

➤ **Etape 4 : Calcul du risque de concentration global**

Le besoin en capital pour le risque de concentration est calculé en supposant une corrélation nulle entre les risques calculés pour chaque émetteur :

$$Mkt_{conc} = \sqrt{\sum_i (Conc_i^2)}$$

L'exigence de capital liée au risque de concentration peut être déterminée de la manière suivante :

- regroupement par contrepartie des actifs du portefeuille.
- calcul de l'exposition en excès.
- calcul du risque de concentration par contrepartie ( $XS * g$ ).
- agrégation des risques de concentration.

### 3.4.7 Le risque de pro-cyclicité :

La volatilité des fonds propres du bilan prudentiel de Solvabilité II préoccupe les assureurs qui souhaitent faire valoir leur caractère d'investisseurs à long terme.

L'étude d'impact LTGA a pour but de contrer cette problématique observée sur le paquet « branches longues » par le biais de prime contra-cyclique (CCP) qui se déclenche dans des situations de marchés stressés et qui est une composante qui se rajoute aux taux *swaps* pour former le taux d'actualisation. Cette composante additionnelle au taux d'actualisation permet d'éviter la dégradation des ratios de couverture.



## Deuxième partie

# Couverture par instruments dérivés

### III. Instruments dérivés et couverture des risques d'assurance :

Comme on l'a vu dans la première partie, la formule standard définit un niveau de fonds propres requis via un stress-test dont la sévérité dépend de la structure des risques portés par la compagnie d'assurance à l'actif et au passif.

L'actif d'une compagnie d'assurance vie a été identifié comme une source de risque très importante, ce qui a été encore souligné par la crise financière de 2008. Le capital requis au titre du risque de marché est plus important que celui requis au titre du risque de souscription.

A l'actif, la couverture contre le risque de marché (taux d'intérêt, crédit, actions, immobilier, change) présente un intérêt majeur dans des cas où l'assureur souhaite se protéger ponctuellement ou a des difficultés à céder sa position sous-jacente, ainsi une stratégie de couverture peut réduire ou annuler le SCR tout en permettant à l'assureur de conserver sa position.

#### 1. Stratégies de couverture statiques et dynamiques :

On peut distinguer deux familles de stratégies : les stratégies dynamiques et les stratégies statiques.

##### 1.1 Stratégies dynamiques :

Les stratégies dynamiques sont des stratégies qui consistent à dupliquer des options en détenant des quantités déterminées du sous-jacent et d'un actif sans risque. Ainsi la gestion dynamique offre une souplesse dans le cas où les options souhaitées (échéance ou prix d'exercice) ne sont pas disponibles sur le marché.

Un autre avantage des stratégies dynamiques est l'élimination du risque de contrepartie du vendeur de la couverture.

Le portefeuille répliqué doit être géré dynamiquement et adapté en fonction des changements de cours du sous-jacent, ce qui engendre des opérations d'achats et de ventes d'une manière fréquente, et un défi opérationnel important.

##### 1.2 Stratégies statiques :

Les stratégies statiques consistent à acheter directement les produits dérivés sans devoir réadapter la couverture au long de la période de couverture.

Un autre avantage est que, théoriquement, la stratégie peut être « parfaite ». Ce point est cependant à nuancer vu que souvent le sous-jacent du dérivé ne correspond pas toujours à l'actif détenu. En effet, pour simplifier la gestion et réduire les coûts, les compagnies identifient souvent leur portefeuille à des actifs représentatifs et achètent leurs produits de couverture sur ces actifs représentatifs.

Parmi les produits dérivés, on peut distinguer deux grandes catégories : les produits négociés de gré à gré et les produits négociés sur un marché organisé.

Les produits négociés de gré à gré, encore appelés produits OTC (« Over The Counter »), sont construits par des institutions financières, souvent de grandes banques d'investissement, dans le but de construire une couverture sur mesure et de répondre à des besoins précis de la clientèle. Cela peut se traduire par des dates d'échéance, des prix d'exercice ou des tailles de contrats inhabituels.

L'inconvénient majeur d'un marché OTC réside dans le défaut possible du vendeur de l'option. L'acheteur s'expose alors au risque de contrepartie. Les marchés organisés ont, par contre, défini des règles de fonctionnement qui rendent ce risque pratiquement nul.

Les produits négociés sur un marché organisé sont des produits standardisés. Ils ont l'avantage d'être très liquides et de minimiser le risque de contrepartie. Ce dernier point est garanti par des mécanismes de dépôt de garanties qui permettent d'assurer la bonne fin des opérations.

Cependant la standardisation a l'inconvénient d'introduire certaines contraintes, notamment sur la maturité des contrats. En effet, il se peut que les maturités proposées ne correspondent pas à 100% aux besoins des acteurs.

## *2. Stratégies de couverture dans le cadre Solvabilité II :*

Selon les spécifications techniques du LTGA (SCR.11.19) les stratégies de couverture dynamiques ne sont pas considérées comme une technique d'atténuation du risque.

Seules les stratégies statiques sont prises en compte, et Lorsqu'une technique d'atténuation du risque ne couvre qu'une partie des douze prochains mois, elle ne devrait être autorisée qu'avec le niveau de protection moyenne sur l'année prochaine (c.-à-d au prorata temporis), sauf dans le cas où un programme de roulement existe et qui respecte les conditions citées dans L'article SCR.12.18.

### **Extrait du LTGA:**

**SCR.11.17.** Where a risk mitigation technique covers just a part of the next twelve months it should only be allowed with the average protection level over the next year (i.e. prorata temporis).

**SCR.11.18.** Where a risk mitigation technique covers only a part of the next twelve months, but a rolling hedge programme exists, this should be permitted as a risk mitigation technique if the following conditions are met:

- a. There is well-documented and established process for the rolling forward of hedges;
- b. The risk that the hedge can not be rolled over due to an absence of liquidity in the market is not material (no material liquidity risk);
- c. The costs of renewing the same hedge over a one year period are reflected in the SCR calculation by reducing the level of protection of the hedge; and
- d. Any additional counterparty risk that arises from the rolling over of the hedge is reflected in the SCR.

**SCR.11.19.** Dynamic hedging should not be treated as a risk mitigation technique.

### ***3. Instruments de couverture:***

Dans ce paragraphe, nous décrivons les instruments dérivés les plus courants dans le marché, et la couverture offerte par ces produits. Nous distinguons deux types de couverture :

Le premier type de couverture, dit « couverture ferme », permet une protection « totale » contre un risque, ainsi dans le cadre de Solvabilité II, la réduction ou l'annulation du SCR change peut se faire à l'aide de swaps de change, du SCR actions en vendant des futures sur indices d'actions et du SCR taux d'intérêt en ajustant la duration de l'actif sur celle du passif en souscrivant à des swaps de taux.

Le second type de couverture, dit « couverture optionnelle », permet une protection contre un scénario défavorable au prix d'une prime versée au vendeur de l'option. Il est alors possible de réduire le SCR actions en souscrivant à des options de vente (Put) ou encore le SCR crédit avec notamment l'achat de Credit Default Swaps. Il est aussi possible de réduire le SCR taux avec l'achat d'options sur swap de taux (Swaptions) ou en achetant des options sur taux de type Cap CMS afin de se protéger contre une hausse brutale des taux qui pourrait engendrer des rachats massifs en assurance vie.

#### **3.1 Couverture du risque de taux :**

Une des principales caractéristiques des sociétés d'assurances vie est leur engagement à long terme, elles doivent structurer leur actif afin de réduire l'exposition aux variations de taux.

En cas de baisse des taux, les assureurs subissent une baisse de rentabilité (servir un taux de rendement supérieur à celui du marché).

En cas de hausse des taux, l'assuré peut avoir intérêt à demander le remboursement de son contrat pour profiter de meilleures opportunités d'investissement, ceci est sans pénalité au-delà de 8 ans.

### *3.1.1 Instruments de couverture possibles :*

#### *i. Couverture ferme :*

##### *➤ Swap de taux d'intérêt (Interest Rate Swap, IRS) :*

Un swap de taux consiste en un échange des paiements d'intérêt de deux dettes libellées dans la même monnaie, à capital identique mais à des taux d'intérêt différents. Dans le cas général, seul le différentiel d'intérêt est échangé. Les swaps de taux les plus courants échangent un taux variable contre un taux fixe.

Les compagnies d'assurance utilisent les swaps de taux d'intérêt pour ajuster la durée de l'actif à celle du passif, et d'optimiser la gestion des flux de trésorerie résultants des intérêts reçus ou payés, ce qui permet de réduire l'exposition aux variations de taux.

##### *➤ Contrat à terme sur taux d'intérêt :*

###### *FRA : Forward Rate Agreement*

Un FRA est une opération à terme d'échange de taux d'intérêt négociée sur le marché OTC (taux négocié contre taux de marché pour une date et une durée déterminée). Le vendeur verse à l'acheteur le différentiel d'intérêts entre le taux de marché et le taux négocié, appliqués au montant et à la durée de l'emprunt sous-jacent.

###### *Futures sur taux d'intérêt:*

Les contrats futures sont des engagements futurs standardisés et négociables sur des marchés organisés (ce qui les différencient des FRA).

Les contrats à terme sur taux d'intérêt permettent à son acheteur de fixer le coût de son endettement futur et de se protéger contre une hausse de taux, et au vendeur de fixer le taux de son placement futur et de se protéger contre une baisse de taux.

#### *ii. Couverture optionnelle :*

➤ *Options sur swap : Swaptions*

Les Swaptions confèrent à leur propriétaire le droit d'entrer dans un Swap dont les caractéristiques sont spécifiées d'avance. Trois dates permettent de décrire le fonctionnement d'une Swaption : la date de conclusion, la date de maturité de l'option et la date de maturité du Swap sous-jacent. S'agissant généralement d'une option européenne, la Swaption peut être exercée uniquement à la date de maturité de l'option. En cas d'exercice, les acteurs sont engagés à entrer dans un Swap qui se termine à la date de maturité du Swap.

➤ *Options sur taux : Caps, Floors & Collars*

Un Cap est une série d'options d'achat (caplets) dont le sous-jacent est un taux d'intérêt. L'achat d'un Cap permet de s'assurer un niveau maximal (le strike) pour un taux de référence, ainsi se protéger contre la hausse de taux.

Un Floor est une série d'options d'achat (floorlets) dont le sous-jacent est un taux d'intérêt. L'achat d'un Floor permet de s'assurer un niveau minimal (le strike) pour un taux de référence, ainsi se protéger contre la baisse de taux.

Un Collar (encore appelé tunnel) est une combinaison de Cap et de Floor sur un même taux de référence dont l'objectif est de réduire le coût de la couverture contre le risque de taux.

## 3.2 Couverture du risque actions :

### 3.2.1 Instruments de couverture possibles :

i. *Couverture ferme :*

➤ *Contrat à terme sur actions ou indice boursier :*

Un contrat à terme permet d'acheter ou de vendre une quantité donnée d'un actif sous-jacent (action ou indice boursier), à une date prédéterminée et à un prix fixé à l'avance.

On distingue deux types de contrat :

#### **Les Futures:**

Les contrats Futures sont des contrats standardisés négociés sur un marché organisé et centralisé.

Les paramètres (la date d'échéance, le prix, la marge, le tick....) sont les mêmes pour tous. La chambre de compensation assure la contrepartie et garantit donc l'absence de défaillance de l'une des deux parties.

### **Les Forwards:**

Les contrats forwards s'échangent sur un marché de gré à gré. Ces contrats ne sont pas standardisés contrairement au contrat Futures. Pour le Forward, la date d'échéance, le prix, la quantité sont libres et sont le résultat de la négociation entre le vendeur et l'acheteur.

Une compagnie d'assurance qui souhaite réduire l'exposition de son portefeuille d'actions à la baisse des cours pourrait vendre des futures sur actions ou sur indices.

#### *ii. Couverture optionnelle :*

##### ➤ *Options de vente : Put*

L'option de vente confère à son détenteur via le versement d'une somme d'argent (prime de l'option), le droit de vendre le sous-jacent (action ou indice boursier) à un prix d'exercice (strike) fixé à l'avance.

On distingue deux types d'options : les options européennes et les options américaines. Les premières ne peuvent être exercées qu'en fin de contrat, on parle de date d'exercice, maturité, échéance ou date d'expiration de l'option. L'option est dite américaine si son détenteur a la possibilité de l'exercer à tout moment avant son expiration.

Le recours aux options de vente permet de couvrir un portefeuille contre une chute importante des marchés actions.

### **3.3 Couverture du risque de change :**

#### *3.3.1 Instruments de couverture possibles :*

##### *i. Couverture ferme :*

##### ➤ *Change à terme (Forex Forward Contract)*

Le change à terme est un contrat d'échange de deux devises pour un montant donné, à une date de maturité et à un cours fixé. Il permet dès sa mise en place, de connaître le cours qui sera appliqué à une devise à une échéance déterminée.

Avec cette solution, une compagnie d'assurance qui détient dans son portefeuille des actifs libellés en monnaie étrangère (obligations en dollar...) connaît précisément le cours de change qui sera appliquée, ce qui lui permet de se protéger contre les situations défavorables de cours qui peuvent amputer sa marge.

➤ *Swaps de change (Forex Swap) :*

Un swap de change est un contrat de gré à gré qui consiste en une double opération de change: un change (ou « jambe ») comptant exécuté dès la mise en place du contrat, à la date spot, et un change à terme, exécuté à une date négociée. Le swap de change permet de se procurer immédiatement des devises, puis de les revendre à un cours négocié lors de la mise en place du contrat, à l'échéance du swap.

➤ *Swap de devises (Cross Currency Swap):*

Un swap de devises est un contrat de gré à gré, négocié entre deux contre parties, portant sur l'échange de flux (jambes) d'intérêts libellés et référencés dans deux devises différentes, suivant un échéancier préétabli. Le swap de devises est un instrument portant sur le moyen ou le long terme. La différence avec les swaps de change est que ces derniers sont des instruments à court terme où il n'y a pas d'échange d'intérêt.

Le swap de change offre une protection contre les variations de change à court terme et le swap de devises offre cette protection à moyen et long terme. Ainsi une compagnie d'assurance qui souhaite investir dans des actifs libellés en devise pourrait limiter son exposition aux variations de change en souscrivant selon la maturité de la créance soit un swap de change ou de devises.

ii. *Couverture optionnelle :*

➤ *Options de change :*

L'option de change est un contrat donnant à son acquéreur le droit (et non l'obligation) d'acheter ou de vendre un montant donné de devises à une date (ou pendant une période) déterminée et à un cours fixé par avance appelé prix d'exercice, moyennant le paiement d'une prime. Le droit d'acheter une quantité de devises contre une autre est un **call** (option d'achat). Le droit de vendre est un **put** (option de vente).

Il s'agit d'un contrat conditionnel et négociable qui permet de se protéger contre le risque de change, tout en préservant l'opportunité de réaliser un gain de change dans le cas d'une évolution favorable du cours de la devise concernée.



Les options de change permettent de gérer l'exposition aux risques de variations de change sur les placements et les engagements en devises étrangères.

### 3.4 Couverture contre le risque de crédit :

#### 3.4.1 Instruments de couverture possibles :

##### i. Couverture ferme :

###### ➤ Titrisation :

La titrisation permet de transformer un ensemble d'actifs (en général des créances) destinés initialement à être conservés par le prêteur jusqu'à leur terme, en des titres négociables appelés ABS (Asset Backed Securities ou actifs Adossés à des Créances). On distingue deux grands types de titrisation :

Le premier qualifié de *on-balance sheet*, consiste pour un établissement de crédit à émettre des obligations gagées sur un ensemble de créances. Ces obligations ainsi garanties sont dites *sécurisées*, elles bénéficient donc d'une double garantie (l'engagement de l'émetteur et la garantie du collatéral) et sont considérées comme pratiquement exemptes de risque de défaut. Il s'agit d'un instrument de refinancement.

Le deuxième type nommé *off-balance sheet*, un agent économique cède les créances dument notées, à un fonds nommé SPV (Special Purpose Vehicule) qui finance cet achat par l'émission d'ABS adossés sur le pool de de créances. Il s'agit d'un instrument de transfert du risque de crédit.

###### ➤ Dérivés de crédit : CDS & CDO :

Un CDS (Crédit Default Swap) est un contrat de gré à gré par lequel un vendeur de protection s'engage, contre le paiement d'une prime périodique, en cas d'événement de crédit affectant la solvabilité d'une entité de référence, à dédommager l'acheteur. L'acheteur de protection vend donc le risque de crédit au vendeur de protection.

Il existe aussi des CDS multi-support (basket CDS) dont le sous-jacent est un panier de crédit, la compensation peut être déclenchée chaque fois qu'un événement de crédit affecte un des éléments du panier.

Les CDO (collateralized debt obligation) sont des structures créées sur mesure par les banques à destination d'investisseurs et font partie des produits de gré à gré. Les CDO-cash

sont des ABS structurés qui se distinguent des CDO synthétiques qui ne relèvent pas de la titrisation mais plutôt d'un montage structuré de CDS.

ii. *Couverture optionnelle :*

➤ *Option sur CDS :*

Une option sur CDS confère le droit d'acheter ou de vendre un CDS déterminé (référence, durée et  $\text{spread} = s_0$ ), à une date  $T$  déterminée. Un call (put) sur CDS sera donc exercé en  $T$  si, à cette date, un CDS de memes caractéristiques se traite sur la base d'un  $\text{spread } s_T$  supérieur (inférieur) à  $s_0$ .

Il existe aussi des options sur paniers de CDS.

Troisième partie

Modélisation stochastique d'un  
portefeuille de contrats d'épargne  
en euros

## IV. Application à un portefeuille de contrats d'épargne en euros:

### 1. Introduction :

Un contrat d'assurance-vie est un contrat par lequel l'assureur s'engage, en contrepartie du paiement par le souscripteur d'une ou plusieurs primes ou cotisations, à verser un capital ou une rente à un bénéficiaire en cas de survenance d'un événement lié à la vie de l'assuré.

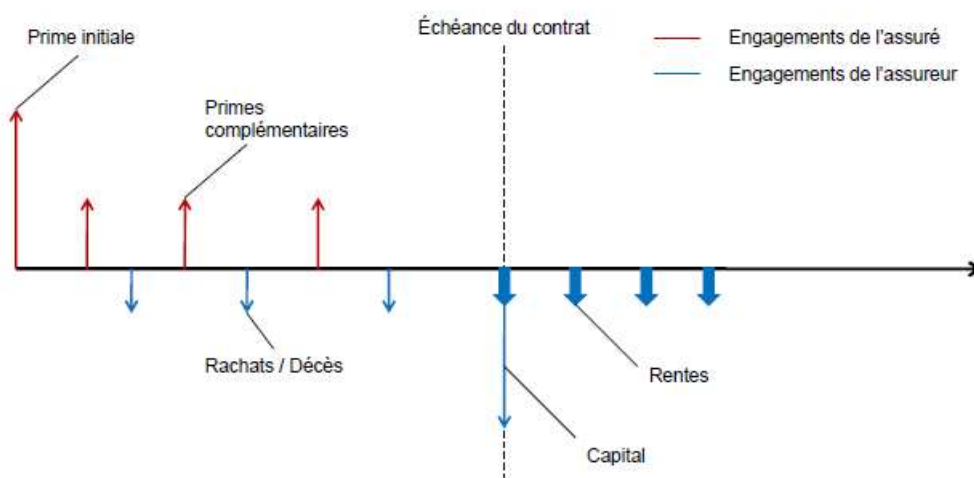


Figure 8 : Flux afférents au contrat

On distingue essentiellement deux types de garantie :

- La garantie en cas de vie : versement d'un capital ou d'une rente au bénéficiaire (le plus souvent l'assuré lui-même) si l'assuré est en vie à la fin du contrat.
- La garantie en cas de décès : versement d'un capital ou d'une rente au bénéficiaire en cas de décès de l'assuré.

La plupart des contrats d'assurance vie distribués par les assureurs sont des contrats de type capital différé avec contre assurance en cas de décès.

On distingue plusieurs types de contrat :

- les contrats en euros.
- les contrats en unités de compte
- les contrats multi-supports.

**Les contrats en euros :**

Les contrats en euros sont des contrats sécuritaires dont la garantie est exprimée en euros. Ces contrats sont les moins risqués pour les assurés. La garantie est un engagement de taux de rendement, c'est la notion de taux minimum garanti. Les placements sont gérés par l'assureur et sont majoritairement composés de titres sans risque (obligations...). Mais pour espérer un meilleur rendement du fonds Euro et pouvoir servir un meilleur taux, l'assureur incorpore d'autres types de titres, plus risqués, en faible quantité.

**Les contrats en unités de compte :**

Les contrats en unités de compte sont des contrats dont la garantie est exprimée par référence à une ou plusieurs unités de compte. Une unité de compte est un support d'investissement. L'assureur s'engage sur un nombre d'unités de compte sans s'engager sur leur valeur. L'assureur ne supporte pas le risque financier lié à l'évolution de la valeur des UC, il est porté par l'assuré. Un contrat en UC est principalement composé d'actions et peut fournir un rendement supérieur à celui d'un fonds Euro. Une UC peut cependant fournir un rendement négatif. Ce type de support est donc plus risqué que le fonds Euro pour l'assuré mais permet également d'augmenter le rendement espéré.

**Les contrats multi-supports :**

Les contrats multi-supports sont des contrats qui permettent d'investir sur plusieurs supports en UC ou en euros. Ils permettent également à l'assuré d'arbitrer entre des supports en UC et les supports en euros. L'assuré peut soit gérer lui-même la répartition de son épargne soit lorsque le contrat le propose, choisir un profil de gestion (prudent, équilibré ou dynamique) et confier ainsi les opérations d'arbitrages à l'assureur. Le risque encouru par l'assureur repose principalement sur la partie Euro du contrat.

**2. Modélisation du passif d'un contrat d'assurance vie:****2.1 La revalorisation d'un contrat d'assurance vie épargne :****2.1.1 Les intérêts techniques :**

Ils sont le résultat d'un taux technique qui correspond au rendement financier minimum promis par l'assureur dans le contrat. L'assureur s'engage à rémunérer l'épargne de l'assuré à ce taux, quoi qu'il arrive.

Ce taux peut être établi de différentes manières. Il peut s'agir :

– d'un taux minimum garanti (TMG), dans ce cas le taux est fixe sur la durée totale du contrat.

– d'un taux minimum garanti annuellement (TMGA). Ce taux peut par exemple varier chaque année en fonction des taux servis précédemment ou bien en fonction du taux moyens des emprunts d'État (TME).

La réforme du 1er août 2010 (Article A132-3 Modifié par Arrêté du 7 juillet 2010) sur les modalités de garanties d'un taux minimum impose une limite sur le niveau de taux et sur la durée de la garantie :

- Le taux garanti est plafonné à un niveau qui dépend de l'environnement des marchés obligataires et de la rentabilité des actifs. Le taux doit alors être inférieur au minimum entre :
  - 150% du taux d'intérêt technique maximal défini aux articles A. 132-1 et A. 132-1-1 par référence à 75 % du taux moyen des emprunts d'Etat.
  - Le maximum entre 120% du taux d'intérêt technique maximal (75 % du TME) et 110% de la moyenne des taux moyens servis aux assurés lors des deux derniers exercices.
- Les taux garantis sont fixés pour une durée continue qui ne doit pas être inférieure à 6 mois et ne peut excéder 2 ans.

#### 2.1.2 La participation aux bénéfices :

Les sociétés d'assurance vie sont contraintes par la réglementation française (Article L331-3) à faire participer les assurés aux bénéfices techniques et financiers qu'elles réalisent. Des clauses contractuelles ou encore la pression de la concurrence peuvent venir renforcer ce mécanisme de redistribution des bénéfices.

##### ***Les contraintes réglementaires de la PB :***

Le Code des Assurances définit un montant minimal de participation aux bénéfices que l'assureur doit reverser à ses assurés. Ce minimum est composé de 85% du résultat financier de l'entreprise auquel est ajouté 90% du résultat technique si celui-ci est positif. Il est possible d'imputer au compte de participation aux bénéfices 100% du résultat technique si ce dernier est négatif.

Le calcul de ce minimum réglementaire est détaillé à l'article A331-4.

##### ***Les contraintes contractuelles de la PB :***

Au-delà de ce minimum réglementaire, l'assureur peut verser une participation aux bénéfices supplémentaire et l'indiquer dans le contrat : il s'agit de la participation aux bénéfices contractuelle.

L'assureur peut également verser une participation aux bénéfices discrétionnaire. Cette participation correspond aux versements faits à l'assuré en excédent des montants qui sont garantis au contrat. Le choix des montants versés et de l'échéancier est à la discrétion de l'assureur. Cette participation supplémentaire est versée pour éviter les rachats massifs de contrat si le taux servi est inférieur à celui offert par la concurrence. La participation aux bénéfices discrétionnaire s'ajoute donc aux participations réglementaire et contractuelle.

### **Mécanismes d'attribution de la PB :**

L'assureur est libre de répartir la participation aux bénéfices entre les assurés. Il n'est pas tenu de la répartir équitablement entre tous les assurés. En général, les assureurs rémunèrent davantage les nouveaux produits. Cette participation est stockée en provision pour participation aux bénéfices lorsque les produits financiers suffisent pour servir le taux cible de rémunération. L'assureur dispose alors d'un délai de 8 ans pour distribuer la participation stockée. Ce mécanisme permet à l'assureur de lisser le rendement du fonds Euro dans le temps en stockant la participation aux bénéfices en période de forte croissance financière et en la distribuant dans le cas contraire.

Depuis le 1er août 2010, la participation aux bénéfices ne peut plus dépasser un certain plafond. L'origine de cette mesure vient du fait que certains assureurs servaient des taux garantis élevés, sur de courtes durées, pour maintenir un nombre important d'affaires nouvelles. Pour pouvoir servir des taux garantis élevés aux nouveaux assurés, les compagnies puisaient dans leur PPB. En effet la participation aux bénéfices est une provision qui est calculée par produit et non contrat par contrat. Les assureurs peuvent donc choisir de servir toute la PPB uniquement à certains contrats. La PPB constituée par les anciens assurés était donc versée aux nouveaux assurés. Pour contrer cette pratique et mieux encadrer la politique des taux garantis, toujours dans le but de protéger l'assuré, l'article A132-3 stipule :

« I. Pour un exercice donné, le montant total de participations aux bénéfices garanti par l'entreprise au titre de l'article A. 132-2 devra être inférieur à un plafond calculé comme la différence, lorsqu'elle est positive, entre :

- 80 % du produit de la moyenne des taux de rendement des actifs de l'entreprise calculée pour les deux derniers exercices, par les provisions mathématiques des contrats relevant des catégories 1, 2, 3, 4, 5 et 7 mentionnées à l'article A. 344-2 au 31 décembre de l'exercice précédent ; et
- la somme des intérêts techniques attribués aux contrats mentionnés au tiret précédent lors de l'exercice précédent. »

## **2.2 Modélisation des sorties totales et partielles :**

### **2.2.1 Modélisation de la mortalité :**

La mortalité n'étant pas un élément essentiel du modèle (les sorties pour cause de décès étant minimales), il sera considéré que le taux de mortalité suit la table TH00-02 pour les hommes et TF00-02 pour les femmes. La mortalité ne sera donc pas simulée stochastiquement.

A compter du 21 décembre 2012, les assureurs appliquent une table de mortalité identique pour les hommes et pour les femmes pour la tarification. En effet, La commission européenne estime que La prise en compte du sexe de l'assuré en tant que facteur de risques dans les contrats d'assurance constitue une discrimination. Pour l'évaluation des provisions techniques, l'assureur reste libre.

### 2.2.2 Modélisation des rachats :

Le comportement de rachat des assurés dépend de plusieurs facteurs. Certains rachats ont une cause économique d'autres résultent de raisons indépendantes de la conjoncture économique et propres à chaque assuré. La modélisation des rachats est composée de deux types de rachat : les rachats structurels et les rachats conjoncturels.

#### 2.2.2.1 Les rachats structurels :

Le comportement de rachat structurel dépend principalement des caractéristiques du contrat qui peuvent influencer le rachat des assurés. Le principal facteur explicatif des rachats est la fiscalité. Les contrats d'assurance vie bénéficient en effet d'une fiscalité avantageuse à partir de 8 ans d'ancienneté. Pour prendre en compte cette composante, la fonction de rachat structurel choisie pour modéliser les rachats dépend de l'ancienneté du contrat.

Les taux de rachat observés sont cohérents avec l'évolution de la fiscalité, avec un pic de rachat à 8 ans d'ancienneté.

Ancienneté du contrat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	>11	> 20
<b>Taux de rachat structurel</b>	4,7%	4,7%	3,2%	3,2%	3,2%	3,2%	3,2%	7,1%	7,1%	7,1%	4%	3%

Figure 9 : Taux de rachat structurel en fonction de l'ancienneté du contrat

#### 2.2.2.2 Les rachats conjoncturels :

La composante conjoncturelle du comportement de rachat est liée à l'environnement économique. Les rachats conjoncturels sont couramment modélisés par une fonction



dépendant uniquement de l'écart entre le taux servi et un taux dépendant du contexte économique, appelé taux attendu.

Si le taux servi est inférieur au taux attendu, les assurés auront tendance à davantage racheter leur contrat. Inversement, si le taux servi est supérieur au taux attendu, les assurés rachèteront moins que par le passé.

*i. Modélisation des rachats conjoncturels :*

La fonction choisie pour modéliser les rachats conjoncturels est celle proposée par L'ACPR dans les Orientations Nationales Complémentaires (ONC).

Le taux attendu proposé par l'ACPR pour modéliser les rachats conjoncturels est le Taux Moyen des Emprunts d'Etat (TME).

Le taux moyen d'emprunt d'État (TME) est le rendement sur le marché secondaire des emprunts d'État à taux fixe supérieurs à 7 ans. Nous avons, comme évoqué précédemment, retenu le TME comme taux de référence dans la détermination des taux de rachats conjoncturels. Le taux de rachat conjoncturel de l'année n est fonction du taux servi et du TME l'année n - 1. Ces deux taux sont observés chaque année.

Pour simuler les TME, nous utilisons le modèle Cox-Ingersoll-Ross.

Le choix et la description du modèle CIR sera détaillé dans le paragraphe 3.2.1.

Le taux de rachats conjoncturels est défini par:

$$RC(\text{taux}_{\text{servi}}; TME) = \begin{cases} RC_{\max} & \text{si } \text{taux}_{\text{servi}} - TME < \alpha \\ RC_{\max} \frac{\text{taux}_{\text{servi}} - TME - \beta}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha < \text{taux}_{\text{servi}} - TME < \beta \\ 0 & \text{si } \beta < \text{taux}_{\text{servi}} - TME < \gamma \\ RC_{\min} \frac{\text{taux}_{\text{servi}} - TME - \gamma}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma < \text{taux}_{\text{servi}} - TME < \delta \\ RC_{\min} & \text{si } \text{taux}_{\text{servi}} - TME > \delta \end{cases}$$

Les différents paramètres peuvent s'interpréter de la façon suivante :

- $\alpha$  est le seuil en-deçà duquel les rachats conjoncturels sont constants et fixés à  $RC_{\max}$ . Ce n'est plus l'écart de taux qui explique le comportement des assurés.
- $\beta$  et  $\gamma$  sont respectivement les seuils d'indifférence à la baisse et à la hausse du taux servi. Entre ces 2 seuils, le comportement de l'assuré n'est pas modifié.
- $\delta$  est le seuil au-delà duquel la diminution du taux de rachat structurel est constante et fixée à  $RC_{\min}$ . Ce n'est plus l'écart de taux qui explique le comportement des assurés.

ii. Calibrage du modèle :

Dans les ONC des spécifications techniques, l'ACPR définit deux lois de rachat, une loi correspondant à un plafond et une loi correspondant à un plancher.

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$RC_{min}$	$RC_{max}$
<b>Plafond</b>	-4%	0	1%	4%	-4%	40%
<b>Plancher</b>	-6%	-2%	1%	2%	-6%	20%

Figure 10: Taux de rachat conjoncturel fournis par l'ACPR

Nous avons décidé de prendre pour chaque paramètre la moyenne des paramètres des deux plafonds définis dans le tableau ci-dessus.

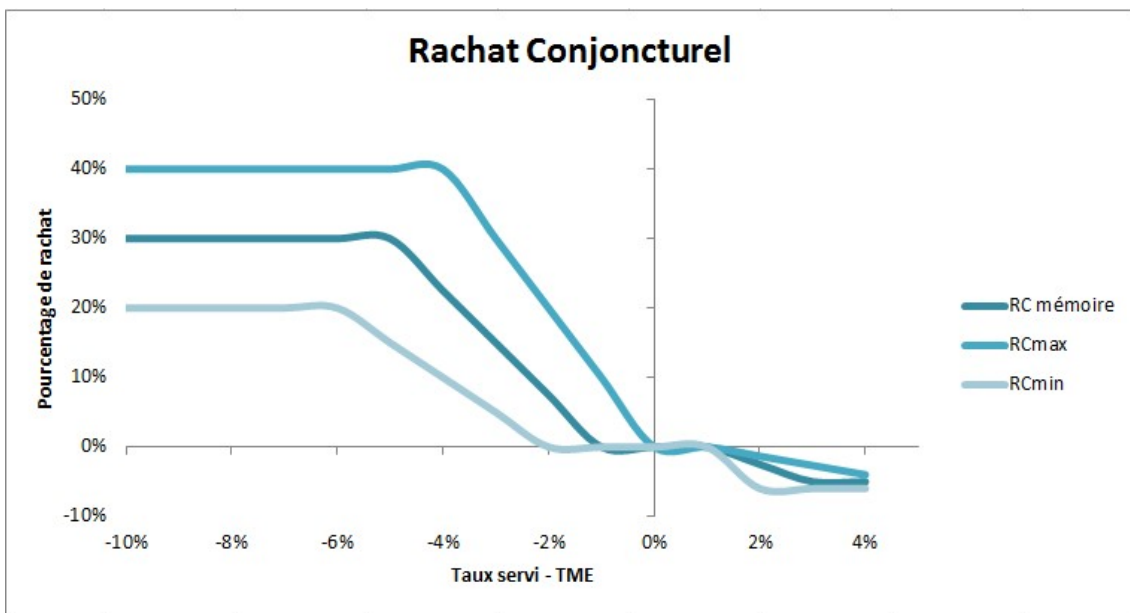


Figure 11: Graphe des taux de rachat conjoncturel

2.2.2.3 Les rachats totaux :

En additionnant les taux de rachats structurels et les taux de rachats conjoncturels, nous obtenons un taux de rachat total RT qui s'écrit ainsi :

$$RT = \min(1, \max(0, RS + RC))$$

2.3 Modélisation d'un fonds Euro :

L'assiette de rémunération client représente l'encours moyen de l'assuré sur l'année t. Elle s'écrit comme la somme de l'épargne initiale ( $PMouv$ ) et des versements de l'assuré

(constatés en début d'année) diminuée des montants de rachat et de décès qui ont lieu en milieu d'année :

$$AssietteClient_t = PMouv_t + Versements_t - \frac{Rachat_t + Deces_t}{2}$$

L'assiette de rémunération du passif se détermine de la même manière, en ajoutant le stock de PPB dont dispose l'assureur en début d'année t :

$$AssiettePassif_t = PMouv_t + Versements_t - \frac{Rachat_t + Deces_t}{2} + StockPPB_t$$

Par construction, le stock de PPB au début de l'année t est égal au stock de PPB à la fin de l'année t-1.

De la même manière, la PM au début de l'année t est équivalente à la PM à la fin de l'année t-1.

### **Valeur actuelle probable au titre des décès et des rachats**

Nous posons :

- $Epargne_{t-\frac{1}{2}}$ , l'épargne acquise en milieu d'année,
- $R_{t-1}^t$ , le taux de rachat entre t - 1 et t,
- $D_{t-1}^t$ , le taux de décès entre t - 1 et t et,
- $r_t$ , le taux servi aux assurés entre t - 1 et t.

L'épargne acquise en milieu d'année s'écrit :

$$Epargne_{t-\frac{1}{2}} = Epargne_{t-1} * (1 + r_t)^{\frac{1}{2}}$$

Où  $Epargne_{t-1}$  est l'épargne acquise en début de l'année t-1.

Les montants de rachat et de décès s'écrivent alors :

$$MontantD_t = Epargne_{t-\frac{1}{2}} * D_{t-1}^t$$

$$MontantR_t = Epargne_{t-\frac{1}{2}} * R_{t-1}^t * (1 - D_{t-1}^t)$$

### **Revalorisation de l'épargne:**

Comme nous l'avons évoqué dans la partie précédente, l'assureur doit revaloriser l'épargne de l'assuré à un taux minimal appelé taux technique. Les intérêts techniques correspondent alors au taux technique multiplié par l'assiette de rémunération client :

$$IT_t = TMG * AssietteClient_t$$

Au-delà de cette revalorisation minimale, l'assureur a une obligation de redistribution de ses bénéficiaires qui est définie contractuellement et réglementairement.

D'après la clause contractuelle, la PB correspond au montant des produits financiers restant après revalorisation minimale de l'épargne et après la prise de la marge de l'assureur. On définit alors la dotation CG (Conditions Générales) comme la rémunération contractuelle minimale au-delà des intérêts techniques :

$$DotCG_t = \text{Max}(PF_t - IT_t - \text{MargeTheorique}_t; 0)$$

Avec  $PF_t$  le montant des produits financiers acquis l'année t.

La marge théorique de l'assureur se décompose en deux parties. Elle correspond, d'une part, aux frais de gestion prélevés par l'assureur et, d'autre part, à un pourcentage des produits financiers défini contractuellement :

$$\text{MargeTheorique}_t = \text{TauxFG} * \text{AssiettePassif}_t + (1 - \text{TauxPB}) * PF_t$$

Où :

- $\text{TauxFG}$ : le taux de frais de gestion annuel
- $\text{TauxPB}$ : le taux contractuel de redistribution de la PB

Cependant, en réalité, l'assureur n'est pas toujours en mesure de prendre sa marge théorique.

La marge réelle est finalement la différence entre le montant des produits financiers et ce que doit donner l'assureur à l'assuré (les IT et la dotation CG) :

$$\text{MargeReelle}_t = PF_t - IT_t - \text{DotCG}_t$$

### **Pilotage de la participation aux bénéfices :**

Un modèle d'attribution de PB doit intégrer le taux de rendement des actifs réalisé par la société et un taux cible de revalorisation du contrat, en fonction des contraintes juridiques (réglementaires et contractuelles) et de contraintes économiques (liées aux conditions de marché et aux objectifs commerciaux) de revalorisation.

En effet, le taux de rendement financier des actifs en représentation des contrats engage la société, au moins au titre des clauses réglementaires et contractuelles d'attribution de bénéficiaires financiers.

Le taux cible de revalorisation dépend en partie du contexte commercial et des taux pratiqués par le marché. L'assuré pouvant racheter à tout moment son contrat et partir à la concurrence, l'assureur doit proposer un taux de revalorisation de l'épargne proche de celui de ses concurrents. Le taux de revalorisation cible doit suivre le taux du marché et faire en sorte de limiter les rachats. Ce taux est supposé dépendant du TME et est choisi de manière à avoir un taux de rachats conjoncturels nul (les rachats structurels ne dépendant pas du taux servi). Le taux cible dépendant du TME, il suivra les évolutions du marché. Or, il est probable que le taux servi par les concurrents suive également l'évolution du marché.

D'après la loi de rachats conjoncturels proposée par l'ACPR dans les Orientations Nationales Complémentaires (ONC), le taux de rachats conjoncturels est nul ou négatif lorsque le taux servi est supérieur à  $TME - 1\%$ .

Cette modélisation proposée dans les ONC est problématique. En effet, servir un taux inférieur au TME surtout dans un contexte économique où les taux d'intérêts sont bas, engendra systématiquement des rachats conjoncturels. Les taux servis sur le marché sont supérieurs au TME.

Dans cette étude, nous avons choisi comme taux de revalorisation cible le TME.

Il s'agit d'une modélisation simplificatrice, en réalité l'algorithme de modélisation du taux servi est plus complexe et considère d'autres références comme le taux du livret A ou l'OAT 10ans, aussi des contraintes sur la variation du taux de revalorisation. Les assureurs évitent généralement des variations trop fortes du taux de revalorisation d'une année à l'autre.

Le taux cible est donc défini comme suit :

$$TauxCible(t) = \max(0; TME(t))$$

Pour atteindre le taux cible, l'assureur se base sur les produits financiers de l'année et le stock de PPB.

Trois de cas de figure peuvent se produire :

- Les produits financiers dépassent la revalorisation cible et par conséquent on dote le surplus en PPB.
- Les produits financiers sont insuffisants pour servir la revalorisation cible mais suffisants pour servir les intérêts techniques. On puise dans la PPB, si elle existe, afin d'atteindre autant que possible la revalorisation cible.
- Les produits financiers sont insuffisants pour les intérêts techniques. On puise dans la PPB, si elle existe, afin d'atteindre au mieux les intérêts techniques puis si c'est possible la revalorisation cible.

L'assureur verse alors le taux cible si la PPB stockée jusqu'à présent le lui permet. Sinon, il verse l'ensemble de la PPB stockée pour revaloriser au maximum l'épargne des assurés et réduit sa marge financière pour atteindre le taux cible de revalorisation.

Si les produits financiers de l'année, la PPB et la marge financière ne suffisent pas, le taux de revalorisation servi est inférieur au taux cible et cela va engendrer une hausse des taux de rachat.

Lorsqu'il y a dotation de PPB, l'assureur a pour obligation de la restituer au maximum sous 8 ans. Il va donc l'incorporer à l'épargne de l'assuré au plus tard l'année  $t + 8$ . Ce stock de PPB est rémunéré chaque année au Taux CG de l'année en cours. Le stock de PPB à la fin de l'année  $t$  est donc :

$$StockPPB_t = StockPPB_{t-1} + DotationPPB_t - ReprisePPB_t$$

### **Épargne acquise:**

La Provision Mathématique est une provision nécessaire à la couverture de l'engagement qu'a l'assureur envers les souscripteurs du contrat. La détermination du montant de la PM d'un contrat nécessite de tenir compte de l'ensemble des flux qui vont impacter le contrat. La modélisation de la PM doit notamment tenir compte du chiffre d'affaires ( $Versements_t$ ) et des prestations (rachats ( $R_t$ ) et décès ( $D_t$ ) revalorisés en milieu d'année), des intérêts techniques notés  $IT_t$  dus aux assurés ainsi que de la PB qui va leur être reversée (appelée  $DotCommerciale_t$ ).

L'épargne acquise en fin d'année peut donc s'écrire:

$$PMfin_t = PMouv_t + Versements_t - R_t - D_t + IT_t + DotCommerciale_t - Prélèvements sociaux$$

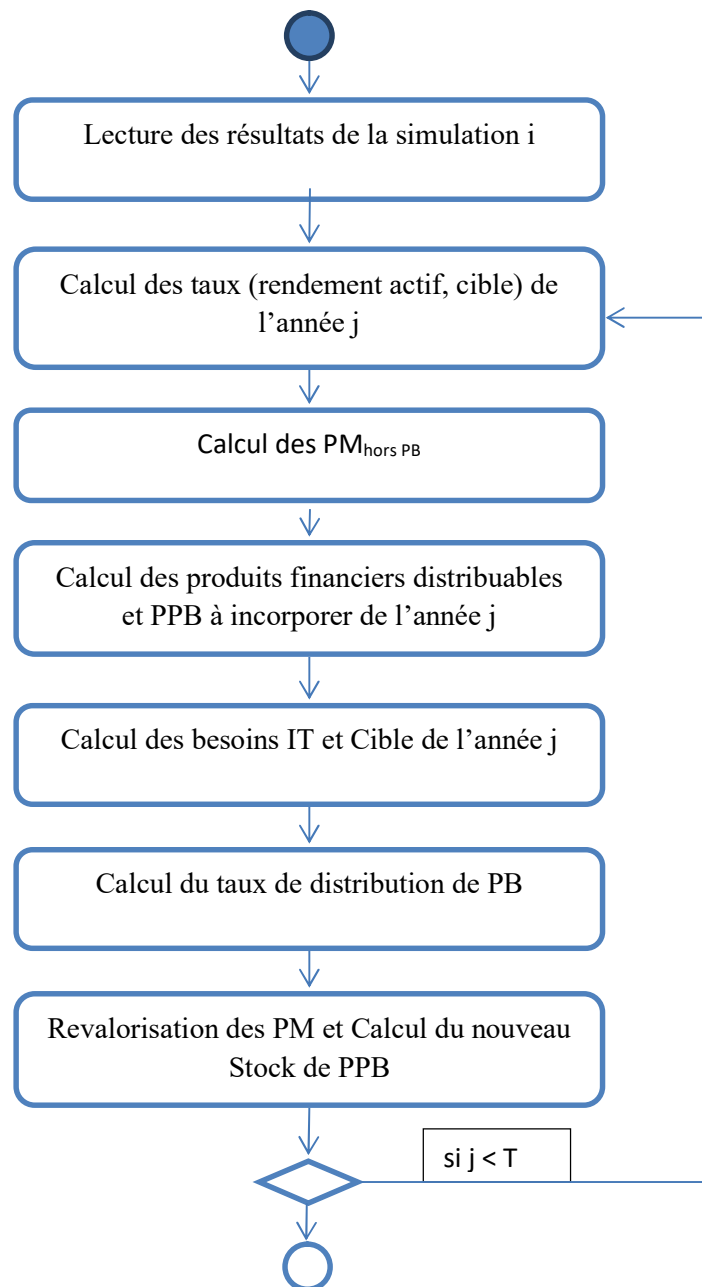


Figure 12: Schéma de revalorisation de l'épargne

### 3. Modélisation de l'actif :

Nous nous intéressons à présent à la simulation stochastique de l'évolution des actifs. L'objectif est d'obtenir des scénarii financiers qui permettront de modéliser les rendements des contrats d'assurance, et donc de déterminer le *Best Estimate* par la méthode de Monte-Carlo.

#### 3.1 Avant-propos :

##### 3.1.1 Lemme d'ITÔ :

Le lemme d'Itô est utilisé pour manipuler des équations différentielles stochastiques.

Un processus stochastique  $X(t)$  s'appelle un processus d'Itô si :

- $X(t)$  obéit entre  $t$  et  $dt$  à l'EDS :

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$$

- La variation de  $X(t)$  entre 0 et  $t$  s'écrit :

$$X(t) - X(0) = \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s)$$

Où:

$\mu$  est le drift,  $\sigma$  est la volatilité,  $W$  est un mouvement brownien.

$X(t)$  est la solution unique de l'EDS pour des conditions initiales données.

Si  $f(t, x)$  une fonction de classe  $C^{1,2}(R, R)$  alors :

$$df(.) = \frac{\partial f}{\partial t} (.) + \frac{\partial f}{\partial x} (.)\mu(t, X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (.)\sigma^2(t, X(t)) + \frac{\partial f}{\partial x} (.)\sigma(t, X(t))dW(t)$$

Sous la forme intégrale :

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) - f(0, X(0)) &= \int_0^t \left( \frac{\partial f}{\partial s} (.) + \frac{\partial f}{\partial x} (.)\mu(s, X(s)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (.)\sigma^2(s, X(s)) \right) ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} (.)\sigma(s, X(s))dW(s) \end{aligned}$$



### 3.1.2 Génération de nombres aléatoires :

Toute simulation de variable aléatoire d'une loi de probabilité repose sur la génération de variables aléatoires distribuées selon la loi uniforme sur l'intervalle  $[0,1]$ , de fonction de répartition :

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ u & \text{si } 0 < u < 1 \\ 1 & \text{si } u \geq 1 \end{cases}$$

Dans ce mémoire, on utilisera le générateur de nombres aléatoires disponible sous VBA.

### 3.1.3 Simulation de variables aléatoires gaussiennes :

La construction des processus de diffusion de taux et des cours des actions requiert de générer un terme  $\varepsilon$  correspondant à un nombre aléatoire issu d'une distribution normale standard.

Plusieurs techniques sont envisageables pour passer d'une distribution uniforme à une distribution normale :

- Méthode de rejet.
- Méthode de coordonnées polaires (Box-Muller)
- Méthode de l'inversion de la fonction de répartition.

On choisit d'utiliser la technique de transformation inverse. Cette méthode est fondée sur le résultat suivant :

Soit  $U$  une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur l'intervalle  $[0,1]$ . Alors la variable aléatoire réelle  $F^{-1}(U)$  a pour fonction de répartition  $F$ .

La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est :

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Ainsi pour simuler un n-échantillon indépendant et identiquement distribués d'une loi ayant pour fonction de répartition  $F$ , il suffit de simuler n réalisations indépendantes d'une variable de loi uniforme sur l'intervalle  $[0,1]$ , puis d'appliquer l'inverse de la fonction de répartition à chacune de ces valeurs.

La réinitialisation du générateur (instruction Randomize) entre chaque tirage permet d'assurer en théorie l'indépendance des réalisations obtenues.

L'inverse de la fonction de répartition de la loi Normale centrée et réduite n'étant pas aisément calculable, l'algorithme de Moro permet d'approcher le résultat par une méthode numérique.

**Algorithme de Moro :**

Soit  $y$  la valeur de loi uniforme générée, alors  $y = \Phi(x)$  d'après ce qui précède.

Posons  $z = y - 0,5$ .

Si  $z < 0,42$  alors  $x$  est approché par :

$$x = z \frac{\sum_{i=0}^3 a_i z^{2i}}{\sum_{j=0}^4 b_j z^{2j}}$$

Dans le cas contraire, si  $|z| > 0,42$ , alors :

$$x = \varepsilon \left( \sum_{i=0}^8 c_i T_i(t) \right) - \varepsilon \frac{c_0}{2}$$

Avec  $\varepsilon$  le signe de  $z$ , et  $t = k_1 \left\{ 2 \ln \left( -\ln \left( \frac{1}{2} - |z| \right) \right) - k_2 \right\}$

La fonction  $f(t) = \left( \sum_{i=0}^8 c_i T_i(t) \right) - \frac{c_0}{2}$  pouvant être approchée par l'algorithme suivant :

Soient  $d_{10} = 0$  et  $d_9 = 0$

Soient  $d_i$  les réels déterminés par la relation récursive :

$$d_i = 2td_{i+1} - d_{i+2} + c_i \text{ pour } i = 8, 7, \dots, 1$$

$$\text{Alors } f(t) = td_1 - d_2 + \frac{c_0}{2}$$

Les valeurs  $a_i, b_i, c_i, k_i$  sont des paramètres réels disponibles en annexe.

3.1.4 Décomposition de *CHOLESKY*:

Soit  $S_{n \times n}$  une matrice symétrique définie positive. Il existe une unique matrice triangulaire inférieure  $A_{n \times n}$  à diagonale positive telle que  $S = AA'$ . On appelle  $A$  la "racine carrée" de  $S$  ou la décomposition de *CHOLESKY*.

Soit  $X \sim N(0a; Id_a)$ . Si on pose  $Y = m + AX$ , on a  $Y = N(m; S)$ .

Ainsi à partir d'un échantillon i.i.d de loi normale centrée et réduite, et la décomposition de CHOLESKY, on peut simuler un vecteur gaussien  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  de moyenne  $m$  et de variance  $S$ .

### 3.2 Modélisation du taux d'intérêt :

Il existe deux grandes familles qui couvrent les nombreux modèles de taux : la famille des modèles d'équilibre et celle des modèles d'arbitrage :

- ✓ Dans un modèle d'équilibre, les taux résultent de l'équilibre entre l'offre et la demande, chaque partie cherchant à maximiser sa fonction d'utilité. Les modèles de Vasicek et ses prolongements Cox, Ingersoll et Ross, Hull and White appartiennent à cette catégorie.
- ✓ Les modèles d'arbitrage tels que celui d'Heath, Jarrow and Morton reposent sur le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage.

#### 3.2.1 Le modèle de Cox-Ingersoll et Ross (CIR) :

Le modèle retenu pour modéliser l'évolution du taux court instantané est le modèle de Cox Ingersoll et Ross (CIR) développé en 1985.

L'évolution du taux court instantané est modélisée suivant l'équation différentielle stochastique:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t$$

Où:

- $a$  est la force de retour à la moyenne.
- $b$  est la moyenne sur le long terme du taux instantané.
- $\sigma$  est la volatilité telle que  $\sigma\sqrt{r_t}$  corresponde à l'écart type instantané du taux court.
- $W$  est un mouvement brownien standard.

Les variations du taux court sont expliquées par un effet de retour à la moyenne (le taux court terme est poussé vers  $b$  à la vitesse  $a$ ) et un effet aléatoire dû au mouvement brownien.

Ce modèle garantit que le processus de taux soit toujours positif contrairement au modèle de Vasicek par exemple. Il est basé sur l'hypothèse de retour à la moyenne, qui est vérifiée en pratique, ce qui lui confère un caractère économique.

Cependant, le modèle *COX, INGERSOLL et ROSS* possède des limites connues comme celle de ne s'appuyer que sur une seule variable explicative à savoir le taux instantané  $r_0$ . Or, en pratique, l'hypothèse de corrélation parfaite entre  $r_0$  et  $r_t$  n'est pas observée.

### 3.2.2 Simulation du modèle de taux :

Pour simuler le processus de diffusion du taux, il faut avoir recours à une technique de discrétisation approximative car une discrétisation exacte facilement programmable n'existe pas.

Nous avons choisi d'utiliser le schéma d'Euler.

Soit  $(X_t)_{t=0\dots T}$  un processus continu sur T périodes. L'idée de la discrétisation d'*EULER* est de poser :

$$\begin{aligned} X_{t+\delta} &= X_t + \int_t^{t+\delta} \beta(X_s) ds + \int_t^{t+\delta} \alpha(X_s) dB_s \\ &\approx X_t + \beta(X_t)\delta + \sigma(X_t)(B_{t+\delta} - B_t) \end{aligned}$$

Où  $\sigma(\cdot)$  et  $\beta(\cdot)$  sont deux fonctions intégrables de  $X_t$ .

Dans le cadre du processus CIR, le développement d'ITO-TAYLOR à l'ordre 1 s'écrit :

$$\begin{aligned} r_{t+\delta} &= r_t + \mu(r_t, t)\delta + \sigma(r_t, t)(B_{t+\delta} - B_t) \\ &= r_t + \mu(r_t, t)\delta + \sigma(r_t, t)\sqrt{\delta} Z_t \\ &= r_t + a(b - r_t)\delta + \sigma\sqrt{r_t\delta} Z_t \end{aligned}$$

Avec :

- $Z_t \sim N(0,1)$
- $\delta$  le pas de projection
- $\mu$  et  $\sigma$ , la moyenne et l'écart type qui dépendent du niveau du taux d'intérêt de la période précédente.

### 3.2.3 Estimation des paramètres

L'avantage du modèle *COX, INGERSOLL et ROSS* est la positivité stricte du taux pour  $b$  suffisamment grand. Cependant, la discrétisation du processus dans le schéma d'EULER (ou dans un autre schéma) est basée sur un mouvement brownien, ce qui peut entraîner des taux négatifs. Cela peut engendrer quelques problèmes dans la mesure où l'on procède par récurrence et que la condition  $r_t \geq 0$  est imposée par la racine carrée. Les conditions initiales sont les suivantes :

- $\sigma > 0$
- $0 < \delta \leq 1$
- $a \in R_+$  et  $b \in R_+$
- $Z \sim N(0,1)$

Nous pouvons avoir un taux négatif si  $Z_t < \frac{a(b-r_t)\delta-r_t}{\sigma\sqrt{r_t\delta}}$ . Nous devons donc définir une condition nécessaire pour que le CIR discrétisé ne donne pas de taux négatifs. On pose donc :

$$2ab > \sigma^2$$

Les paramètres du modèle CIR sont estimés à partir de la courbe des taux zéro-coupon publiée par l'Institut des Actuaire entre le 31/12/2013 et 31/12/2063. La courbe de taux IA obtenue par le modèle *Vasicek-Fong* peut être utilisée pour calculer simplement les valeurs actuelles des engagements par actualisation. Dans le cadre de *Solvency II*, le choix de la courbe de taux est laissé à l'assureur mais celle-ci devra être validée par les auditeurs.

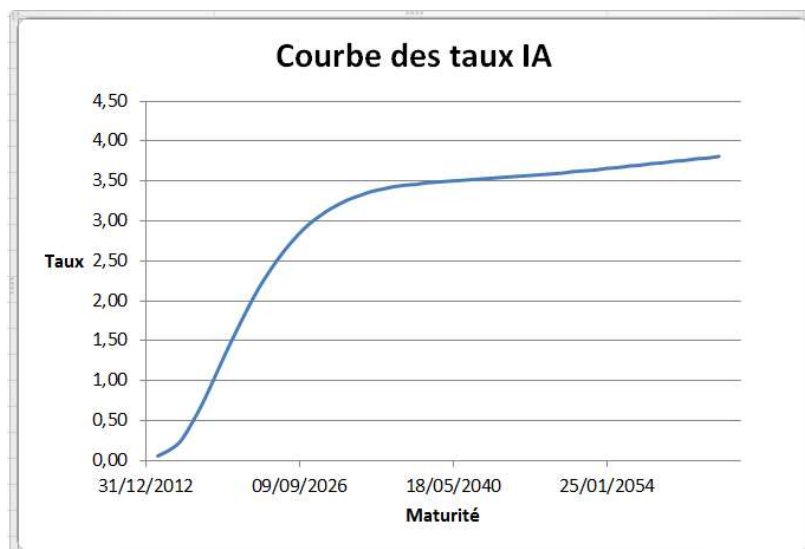


Figure 13: Courbe des taux fournie par l'institut des actuaires

La méthode d'estimation utilisée est la méthode des Moindres Carrées Ordinaires (MCO).

On a :

$$r_{t+\delta} - r_t = a(b - r_t)\delta + \sigma\sqrt{r_t\delta} Z_t$$

On transforme la formule en :

$$\frac{r_{t+\delta} - r_t}{\sqrt{r_t}} = \frac{ab\delta}{\sqrt{r_t}} - a\sqrt{r_t\delta} + \sigma\sqrt{\delta} Z_t$$

Les paramètres sont alors déterminés en minimisant la fonction suivante :

$$(\hat{a}, \hat{b}) = \operatorname{argmin}_{a,b} \sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{r_{t_{i+1}} - r_{t_i}}{\sqrt{r_{t_i}}} - \frac{ab\delta}{\sqrt{r_{t_i}}} + a\sqrt{r_{t_i}}\delta \right)^2$$

L'estimation du paramètre  $\hat{\sigma}$  correspond à l'écart-type des résidus.

La solution est donnée par :

$$\hat{a} = \frac{N^2 - 2N + 1 + \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_{i+1}} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}} - \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_i} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}} - (N-1) \sum_{i=1}^{N-1} \frac{r_{t_{i+1}}}{r_{t_i}}}{\left( N^2 - 2N + 1 + \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_i} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}} \right) \delta}$$

$$\hat{b} = \frac{(N-1) \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_{i+1}} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{r_{t_{i+1}}}{r_{t_i}} \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_i}}{N^2 - 2N + 1 + \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_{i+1}} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}} - \sum_{i=1}^{N-1} r_{t_i} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_{t_i}} - (N-1) \sum_{i=1}^{N-1} \frac{r_{t_{i+1}}}{r_{t_i}}}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{(N-2)} \sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{r_{t_{i+1}} - r_{t_i}}{\sqrt{r_{t_i}}} - \frac{\hat{a}\hat{b}\delta}{\sqrt{r_{t_i}}} + \hat{a}\sqrt{r_{t_i}}\delta \right)^2}$$

On obtient les paramètres suivant :

<i>a</i>	<b>12,72%</b>
<i>b</i>	<b>3.91%</b>
<i>σ</i>	<b>0,21%</b>

La condition de positivité des taux obtenus par le modèle CIR est vérifiée.

Projection de la courbe des taux à l'aide du modèle CIR et les paramètres obtenus :

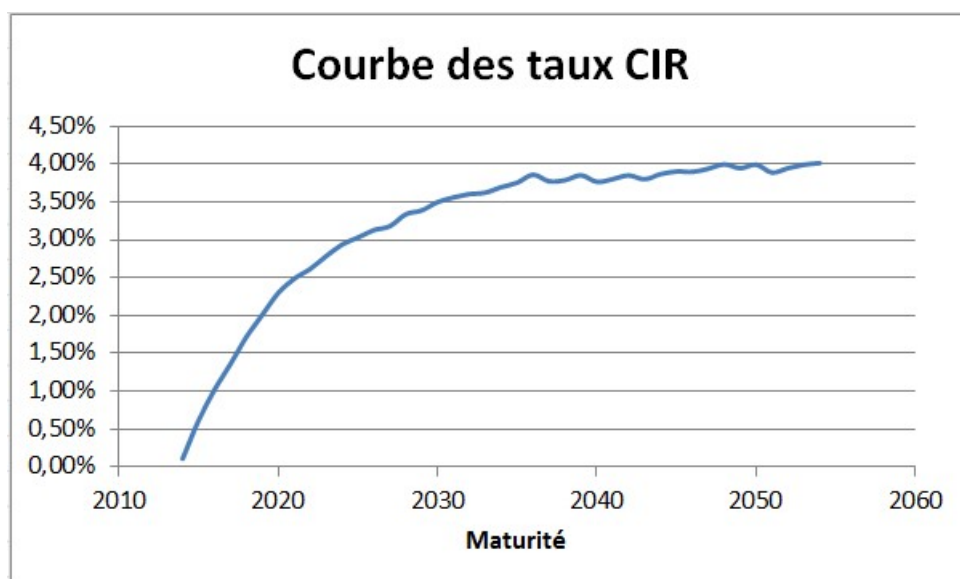


Figure 14: Trajectoire de la Courbe des taux obtenu à l'aide du modèle CIR

### 3.2.4 Prix des zéro-coupon et taux zéro-coupon :

Le taux court instantané permet de reconstituer la structure par terme des taux à n'importe quelle date. En effet, le prix en t du zéro-coupon de maturité T sous le modèle CIR est déterminé par la formule suivante :

$$B(t, T) = A(t, T)e^{(-C(t, T)r_t)}, \quad \forall t < T$$

Avec :

$$A(t, T) = \left( \frac{2\gamma e^{\frac{\gamma+a}{2}(T-t)}}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}$$

$$C(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$$

Les taux zéro-coupon sont déduits du prix des obligations zéro-coupon par la formule :

$$R(t, T) = -\frac{\ln(B(t, T))}{T - t}$$

### 3.3 Modélisation des obligations :

Le prix des obligations est donné à partir des taux courts simulés suivant le modèle CIR. Le prix en t d'une obligation est donné par la formule suivante :

$$\text{Prix Oblig}(t, T) = \sum_{i=t}^T C * B(t, i) + N * B(t, T)$$

Avec :

- N : le nominal de l'obligation.
- T : la maturité de l'obligation.
- C : la valeur du coupon aux différentes maturités.
- B(t, T) : le prix en t du ZC de maturité i=1...T.

### 3.4 Modélisation des actions :

#### 3.4.1 Le modèle de Black et Scholes :

Le modèle retenu pour modéliser le cours des actions est le modèle de Black et Scholes :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

Où:

- $S_t$  le prix de l'action à la date  $t$ .
- $\mu$  est le rendement.
- $\sigma$  est la volatilité.
- $B$  est un mouvement brownien.

Ce modèle est valable pour les actions ne versant pas de dividendes.

La solution explicite de l'équation précédente est déduite d'un calcul d'Itô s'écrit:

$$S_t = S_0 * e^{\left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right\}}$$

Le processus de prix d'une action est log-normal.

Le modèle de Black et Scholes repose sur des hypothèses assez restrictives, notamment la continuité des trajectoires, la volatilité constante et la log-normalité des rendements. L'observation du marché contredit certaines de ces hypothèses :

- Les mouvements des marchés sont soumis à des sauts et le modèle doit être capable de simuler des fluctuations aléatoires fortes et soudaines, à la hausse et à la baisse.
- Les événements rares arrivent plus souvent qu'avec une loi normale dont les queues de distribution ne sont pas assez épaisses.
- La volatilité n'est pas constante dans le temps mais suit comme le cours de l'action, un processus stochastique.

Malgré ces inconvénients, le modèle de Black et Scholes reste largement le plus utilisé sur le marché.

#### 3.4.2 Simulation du modèle :

Comme dans le modèle de taux, pour simuler la dynamique du cours des actions, on procède à la discrétisation du processus suivant le schéma d'Euler :

$$S_{t+\delta} = S_t * \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \delta + \sigma \sqrt{\delta} Z_t \right\}$$

Avec :

- $Z_t \sim N(0,1)$
- $\delta$  le pas de projection
- $\mu$  et  $\sigma$ , le rendement et la volatilité de l'action.



Dans notre modèle, le pas de projection est égal à 1 (projection annuelle).

Le rendement de l'action est égal au taux sans risque dans l'univers risque neutre, Le taux sans risque est le taux d'intérêt court instantané simulé par le modèle de CIR. Ce taux est constant sur chaque période  $[t; t + 1[$ .

### 3.4.3 Estimation de la volatilité :

Le calibrage de la volatilité de l'indice action est possible selon deux méthodes :

- La volatilité historique : utiliser les données passées disponibles sur le marché pour déterminer la volatilité.
- La volatilité implicite : déduire la volatilité des prix de certaines options sur le marché.

Selon les instructions des ONC de l'ACPR, le coefficient de volatilité doit être calibré de manière à retrouver le prix mid (moyenne entre le prix bid et le prix ask) du call de maturité un an à la monnaie.

Le prix d'un call avec la formule de Black & Scholes s'écrit de la manière suivante :

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}} ; \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{(T-t)}$$

La démonstration de cette formule est disponible en annexe.

Le problème auquel on se trouve confronté est que, la formule de Black & Scholes n'étant pas inversible en  $\sigma$ , seules des méthodes numériques permettent d'extraire cette valeur de volatilité implicite. Nous utilisons l'algorithme de Newton-Raphson.

#### Principe de l'algorithme de Newton-Raphson :

On commence par se fixer une valeur  $\sigma_0$  représentant une estimation 'grossière' de la volatilité de l'actif sous-jacent, et on note  $BS(\alpha, \sigma_0)$  le prix du call calculé à partir de la formule de Black & Scholes correspondant, avec  $\alpha$  qui représente le vecteur des paramètres directement observables. En effectuant un développement de Taylor d'ordre 1 de la formule de Black & Scholes au voisinage de  $\sigma_0$ , il vient :

$$BS(\alpha, \sigma)_{\sigma_0} \approx BS(\alpha, \sigma_0) + (\sigma - \sigma_0) \frac{\partial BS(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} (\sigma_0)$$

La dérivée de la quantité  $BS(\alpha, \sigma)$  par rapport à la volatilité correspondant au "véga" et appartient à un ensemble nommé les "grecques", le nombre de la droite de l'approximation peut se réécrire :

$$BS(\alpha, \sigma_0) + (\sigma - \sigma_0)\vartheta(\alpha, \sigma_0)$$

En égalisant l'expression obtenue à la prime (notée  $P$ ) observée sur le marché, on aboutit à une approximation, meilleure que l'estimation initiale de la valeur implicite de volatilité. En notant  $\sigma_1$  cette nouvelle estimation, celle-ci est telle que :

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \frac{P - BS(\alpha, \sigma_0)}{\vartheta(\alpha, \sigma_0)}$$

De façon plus générale:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{P - BS(\alpha, \sigma_n)}{\vartheta(\alpha, \sigma_n)}$$

Dès lors que  $\vartheta(\alpha, \sigma_p)$  n'est pas infini, la valeur de  $\sigma_p$  obtenue est celle qui égalise le prix calculé selon la formule de Black & Scholes au prix de marché.

Dans ce mémoire, la volatilité est obtenue à l'aide du prix d'un call sur CAC 40 au 31/12/2013.

Le call sur CAC 40 au 31/12/2013 avait les propriétés suivantes :

- Prix du call : 275
- CAC 40 au 31/12/2013 : 4 295,95
- Strike (K) : 4 295,95
- Taux sans risque : 1.21%
- Durée (T) : 1 an

On trouve :  $\sigma = 14.59\%$

**Volatilité sur les derniers 6 mois :**

Date	Cours du CAC40	Volatilité implicite
31/12/2013	4295,95	14,59%
29/11/2013	4295,21	14,59%
31/10/2013	4299,89	14,57%
30/09/2013	4143,44	15,19%
30/08/2013	3933,78	16,08%
31/07/2013	3992,69	15,82%

Contrairement à la méthode de la volatilité historique, le calibrage de la volatilité de notre modèle par la méthode de volatilité implicite garantit le caractère « market-consistent » de notre modèle, c'est-à-dire la cohérence avec les prix observés sur les marchés financiers.

### 3.5 Prise en compte de la corrélation actions/taux:

En réalité, les évolutions des cours des actions et des taux sont corrélées. En effet, Tous les actifs évoluent sur des marchés qui sont régis par des variables financières communes comme le taux d'inflation ou le taux de chômage. Dans ce sens, ils possèdent des interactions évidentes entre eux et le comportement du marché a des impacts sur tous les actifs.

Pour modéliser ces interactions dans notre générateur d'actifs, on réalise la décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation.

La décomposition de Cholesky donne les dynamiques suivantes :

$$r_{t+\delta} = r_t + a(b - r_t)\delta + \sigma_1\sqrt{r_t\delta} \varepsilon_t^1$$
$$S_{t+\delta} = S_t * \exp\left\{\left(r_t - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)\delta + \rho \sigma_2\sqrt{\delta} \varepsilon_t^1 + \sigma_2\sqrt{(1 - \rho^2)\delta} \varepsilon_t^2\right\}$$

Où  $\varepsilon_t^1$  et  $\varepsilon_t^2$  sont des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes.

## 4. Interaction Actif-Passif et Calcul du SCR marché :

### 4.1 Description du portefeuille étudié et composition du portefeuille d'actif :

#### 4.1.1 Description du portefeuille :

Nous disposons d'un portefeuille de 487 contrats sur un périmètre de clients GF (Gestion de Fortune) ayant souscrit au produit d'épargne étudié.

Les informations nécessaires pour la mise en œuvre des calculs sont les suivantes :

- l'année de souscription du contrat,
- l'âge de l'assuré,
- le sexe de l'assuré,
- la provision mathématique du contrat au 31 décembre 2013.

#### Statistiques descriptives de l'échantillon :

##### ➤ Ancienneté :

L'ancienneté des contrats est comprise entre 1an et 13ans avec une ancienneté moyenne de 10,07ans. Le tableau suivant présente la fréquence des contrats par ancienneté :

Nous remarquons que 85.6% des contrats ont été souscrits il y a plus de 8ans.

Ancienneté (en année)	Fréquence
1	0,62%
2	2,26%
3	1,03%
4	2,87%
5	0,82%
6	1,85%
7	1,03%
8	3,90%
9	12,32%
10	21,77%
11	18,28%
12	28,34%
13	4,93%

Figure 15 : Fréquence des contrats par ancienneté

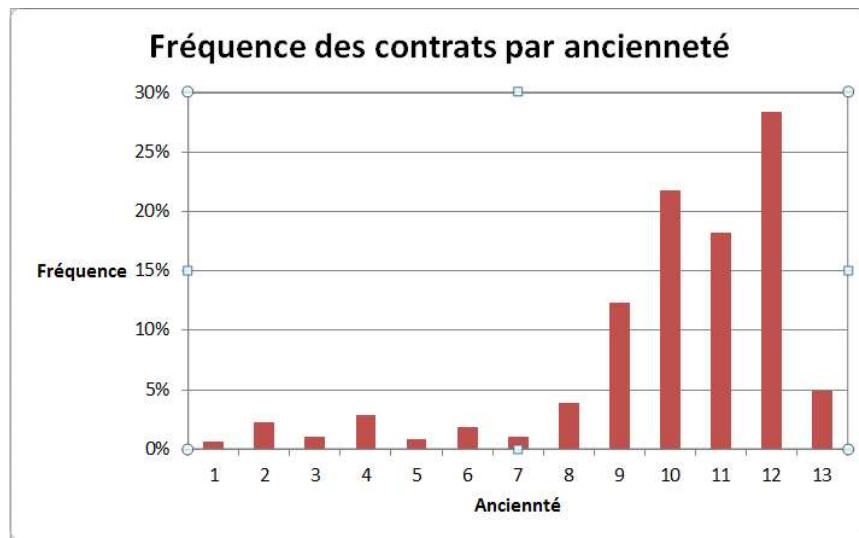


Figure 16: Fréquence des contrats par ancienneté

➤ **Age de l'assuré :**

L'âge des assurés s'étale de 30 à 65ans, avec un âge moyen de 52ans. Le graphique représente la pyramide d'âge des assurés du portefeuille.

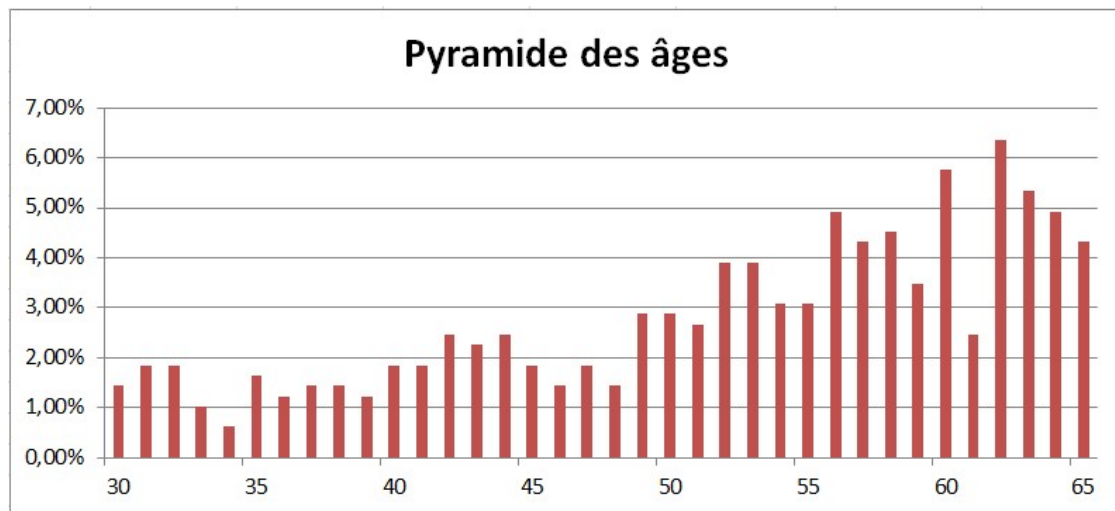


Figure 17: Pyramide des âges

A partir des quantiles de répartition des âges dans le portefeuille de contrats, nous avons défini des tranches en fonction des âges :

Quantile	Estimation
5%	32,3
25%	45
50%	54
75%	60
90%	64

Figure 18 : Quantile des âges

Tranche d'âge	Fréquence
<45	24,64%
[45 ; 54]	25,87%
[55 ; 60]	26,08%
> 60	23,41%

Figure 19 : Fréquence par tranche d'âge

➤ **Sexe :**

La variable sexe de l'assuré est déterminante pour l'utilisation des tables de mortalité.  
Le portefeuille de contrats est composé de 39.63% de femmes et de 60.37% d'hommes.

Le tableau 19 présente la répartition de la provision mathématique du portefeuille au 31/12/2013 par ancienneté et par sexe :

Ancienneté	Nb de contrat		PM au 31/12/2013		Total Nb de contrat	Total PM au 31/12/2013
	F	M	F	M		
1	1	2	2 040	573 134	3	575 173
2	6	5	89 598	9 999	11	99 597
3	3	2	21 310 202	968 897	5	22 279 098
4	6	8	5 446 613	569 994	14	6 016 607
5	3	1	972 931	1 677	4	974 608
6	3	6	177 196	1 435 756	9	1 612 952
7	3	2	357 881	189 392	5	547 273
8	8	11	14 138 110	50 622 920	19	64 761 030
9	27	33	16 135 020	31 838 117	60	47 973 137
10	41	65	11 592 269	19 582 089	106	31 174 358
11	31	58	14 200 883	10 982 116	89	25 183 000
12	55	83	22 375 583	44 435 495	138	66 811 078
13	6	18	4 676 876	10 545 583	24	15 222 459
<b>Total général</b>	<b>193</b>	<b>294</b>	<b>111 475 201</b>	<b>171 755 169</b>	<b>487</b>	<b>283 230 371</b>

Figure 20: Répartition de la provision mathématique au 31/12/2013

### Composition des « Model Points »

Afin d'accélérer le temps de calcul nécessaire aux projections, nous agrégeons le passif en utilisant des « Model Points ».

Un Model Point constitue un regroupement de contrats ayant des caractéristiques semblables. Selon les spécifications techniques du LTGA, le regroupement en Model Point peut se faire uniquement sous les conditions suivantes:

- Il n'y a pas de différences significatives dans la nature et de la complexité des risques sous-jacents aux politiques qui appartiennent au même groupe ;
- le regroupement ne déforme pas la structure des risques sous-jacents et des coûts ;
- le regroupement n'entraîne pas de perte significative d'attributs du portefeuille (les garanties financières, options contractuelles...) à évaluer et ne fausse pas l'évaluation des provisions techniques ;

Les caractéristiques permettant de construire des classes de risques homogènes sont par exemple le type de contrat, le taux garanti, le taux de participation aux bénéficiaires, la présence de garantie plancher, le sexe, l'âge et l'ancienneté de l'assuré.

Notre portefeuille sera agrégé selon les critères discriminants : Ancienneté pour le risque de rachat, sexe et l'âge pour le risque de décès. Nous obtenons 66 model points.

Model Points N°	Ancienneté	Sexe	Age moyen	PM au 31/12/2013
1	1	F	52	2 040
2	1	M	41	571 094
3	1	M	54	2 040
4	2	F	34	7 293
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
64	>10	M	50	18 037 413
65	>10	M	57	17 545 514
66	>10	M	63	19 111 999

Figure 21: Model points

Les caractéristiques du produit d'épargne étudié sont :

Caractéristiques	Valeurs
Durée du contrat	30ans puis prorogée tacitement
Prélèvement sur encours	0.80%
Frais de gestion	0.60%
Taux de distribution de la PB	90% des produits financiers
Taux de PS	15.5%*

\*Les contrats souscrits sont soumis à la fiscalité de l'assurance vie en vigueur au 31/12/2013, et en particulier aux prélèvements sociaux. Ainsi les produits financiers générés en fin d'année sont soumis aux prélèvements sociaux de 15.5%.

Le produit contient une option de rachat total du montant de la provision mathématique constituée.

Les hypothèses de projection sont :

- Date de début de projection : 31/12/2013
- Durée de projection : 30 ans
- TMG : 1.75%
- Table de mortalité : TF00-02 / TH00-02
- PPB initiale : 1 000 000€

#### 4.1.2 Composition du portefeuille d'actif :

L'assureur place ses fonds en obligations et en actions.

L'allocation de l'assureur sur le fonds Euro est de 80% d'obligations et 20% d'actions. Les obligations sont majoritaires pour assurer la sécurité du placement. La part d'action permet d'améliorer le rendement du fonds mais reste minoritaire pour ne pas exposer excessivement l'assureur aux risques de marché. On suppose également que la société ne possède que des actions « globales » c'est-à-dire, au sens solvabilité 2, des actions cotées dans un pays de l'OCDE.

Le portefeuille obligataire est composé d'obligations à taux fixe au pair de maturité 10 ans.

Caractéristiques des actifs :

Actif	Caractéristiques
<b>ACTION</b>	Valeur initiale = 100/rendement= taux sans risques/ volatilité=14.59%
<b>OBLIGATION</b>	Au pair/maturité 10ans/nominal=100€/taux facial=2.38%*

\*On considère que le taux facial est identique pour toutes les obligations détenues.

Le portefeuille obligataire est composé de 52.2% de titres d'Etat et de 47.8% d'obligations Corporate.

Emetteur	composition	Nominal	Valeur de Marché	Rating
<b>Etat (Allemagne, Pays bas...)</b>	7,6%	17 220 407	17 220 407	AAA
<b>Corporate</b>	5,2%	11 782 383	11 782 383	AAA
<b>Etat (France, Belgique)</b>	29,6%	67 068 952	67 068 952	AA
<b>Corporate</b>	4,9%	11 102 631	11 102 631	AA
<b>Etat (Pologne, R.Tchèque, slovaquie)</b>	1,6%	3 625 349	3 625 349	A
<b>Corporate</b>	27,0%	61 177 760	61 177 760	A
<b>Etat (Italie, Irlande, Espagne)</b>	13,1%	29 682 543	29 682 543	BBB
<b>Corporate</b>	9,5%	21 525 508	21 525 508	BBB
<b>Etat (Portugal)</b>	0,3%	679 753	679 753	BB
<b>Corporate</b>	1,2%	2 719 012	2 719 012	BB

Figure 22: Répartition du portefeuille obligataire

La VM totale du portefeuille obligataire est : 227 384 296€ (80% de la valeur de l'actif).



## Allocation d'actif

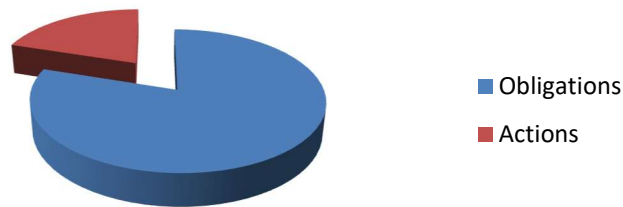


Figure 23: Répartition des actifs en portefeuille

Nous supposons que l'allocation déterminée au début du contrat restera la même tout au long de la durée de vie du contrat. Si la proportion change au cours d'un exercice comptable, l'assureur désinvestit la quantité de l'actif en excès dans le portefeuille pour réinvestir dans les autres actifs afin de retrouver la structure initiale.

Les rendements financiers réalisés servant à revaloriser les PM l'année N.

### 4.2 Calcul de la provision Best Estimate sous Solvabilité II :

Le « *Best Estimate* » est défini dans la directive cadre comme la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents. Son calcul est fondé sur des informations actualisées et crédibles et des hypothèses réalistes.

#### 4.2.1 Nécessité d'utiliser un modèle ALM :

Contrairement à l'assurance non-vie où le rendement financier de l'actif n'a pas d'influence sur le passif et sur les prestations versées, l'une des spécificités de l'assurance vie réside dans le lien étroit qui existe entre :

- la performance financière constatée à l'actif ;
- la revalorisation des contrats par le biais de la participation aux bénéfices ;
- et le comportement de rachat des assurés.

Le calcul du Best Estimate en vie requiert ainsi l'utilisation d'un modèle actif-passif ou ALM (Asset & Liability Management) permettant de modéliser ces interactions qui existent entre l'actif et le passif de l'assureur.

#### 4.2.2 Nécessité d'une approche stochastique :

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la plupart des contrats d'assurance vie contient des options et des garanties :

- Taux minimum garanti associé au mécanisme de participation aux bénéfices,
- Option de rachat.

L'assureur est contraint d'utiliser une méthode stochastique de type Monte-Carlo pour évaluer les options et garanties contenues dans les contrats.

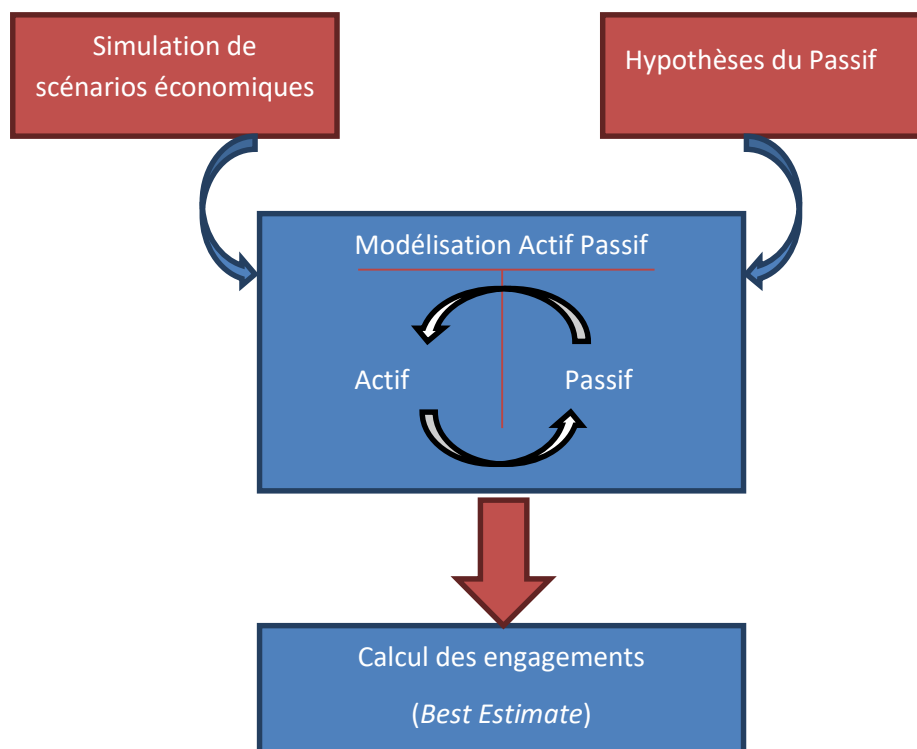


Figure 24: Schéma général de calcul du Best Estimate

### 4.2.3 Méthode de calcul :

Le *Best Estimate* correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs actualisés.

$$BE = \sum_{t=1}^T \frac{Flux_t}{(1+r_t)^t}$$

Avec :

- $Flux_t$ : les flux probables de l'année t,
- $r_t$ : le taux sans risque de maturité t (obtenu par le modèle CIR),

La valeur des flux probables n'étant pas connue, elle sera estimée grâce aux simulations de Monte-Carlo.

#### **Principe de la méthode de Monte-Carlo:**

La méthode de Monte-Carlo est basée sur un théorème fondamental qui permet l'approximation de l'espérance :

#### **La loi des grands nombres:**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de probabilité, alors, leur moyenne empirique converge vers l'espérance de ces variables

Formellement :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = E(X_1)$

#### **Théorème central limite :**

Le théorème central limite permet d'obtenir des intervalles de confiance :

$$\frac{\sqrt{n}}{\hat{\sigma}_n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E(X_1) \right) \xrightarrow{loi} N(0,1)$$

Intervalle de confiance à 95% :  $\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - 1.96 \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} ; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + 1.96 \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \right]$

La qualité de l'estimation dépend du nombre de simulations effectuées. Nous supposons que les scénarii sont tous indépendants et identiquement distribués. Le Best Estimate est estimé de la manière suivante :

$$BE = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T Flux(s, t) * \frac{1}{(1 + r_t)^t}$$

Avec :

- $Flux(s, t)$ : le flux de l'année t pour le scénario s,
- $S$  : le nombre de scénarii financiers.

Dans le cadre de cette étude, les flux pris en compte dans le calcul du Best Estimate sont :

- les prestations rachat et décès,
- les frais liés aux contrats payés par l'assureur.

Le calcul consiste à simuler des réalisations des flux de prestations. L'actualisation au taux sans risque de ces flux fournit une réalisation de la valeur en  $t=0$  des prestations futures. On simule une trajectoire d'actif, cette trajectoire conduit à générer un rendement financier qui va déterminer la revalorisation du contrat. Cette revalorisation permet d'établir une loi de rachat, qui évalue le comportement de l'assuré ainsi obtenir une trajectoire du passif.

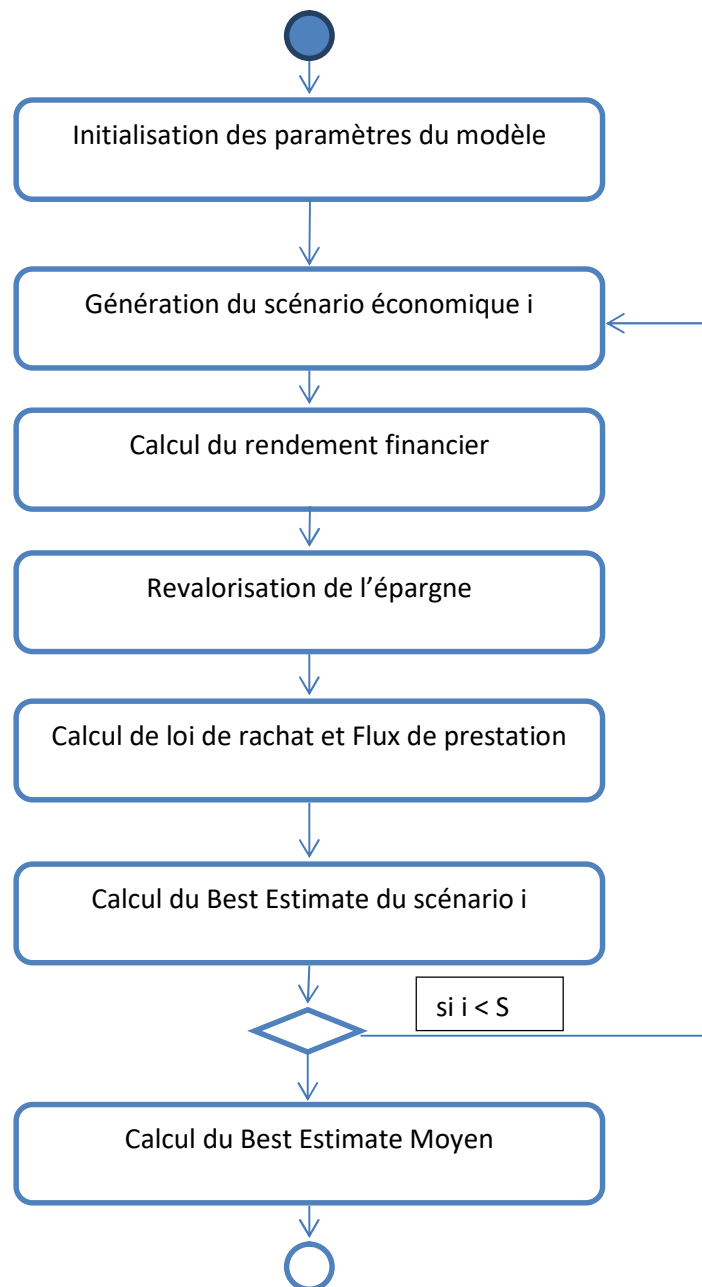


Figure 25: Modèle Mis en place pour le calcul du Best Estimate

### Détermination du Best Estimate Garanti et de la FDB :

Le BEG (*Best Estimate Garanti*) est calculé selon les hypothèses suivantes :

- Pour chaque scénario simulé, l'épargne acquise à la date d'évaluation est revalorisée au taux garanti.

- Au sein de la PPB en stock à la date de calcul, la part ne pouvant pas être utilisée pour servir le TMG est incorporée à l'épargne acquise 8 ans après sa constitution.
- L'épargne est diminuée annuellement des chargements contractuels.

La *FDB (Future Discretionary Benefits)* se déduit comme la différence entre le Best Estimate total et le Best Estimate Garanti.

#### 4.2.4 Résultats :

Nous avons réalisé une étude de convergence afin de déterminer le nombre de simulation nécessaire, nous avons constaté que le Best Estimate converge assez rapidement, ainsi nous retenons 1000 comme nombre de trajectoire.

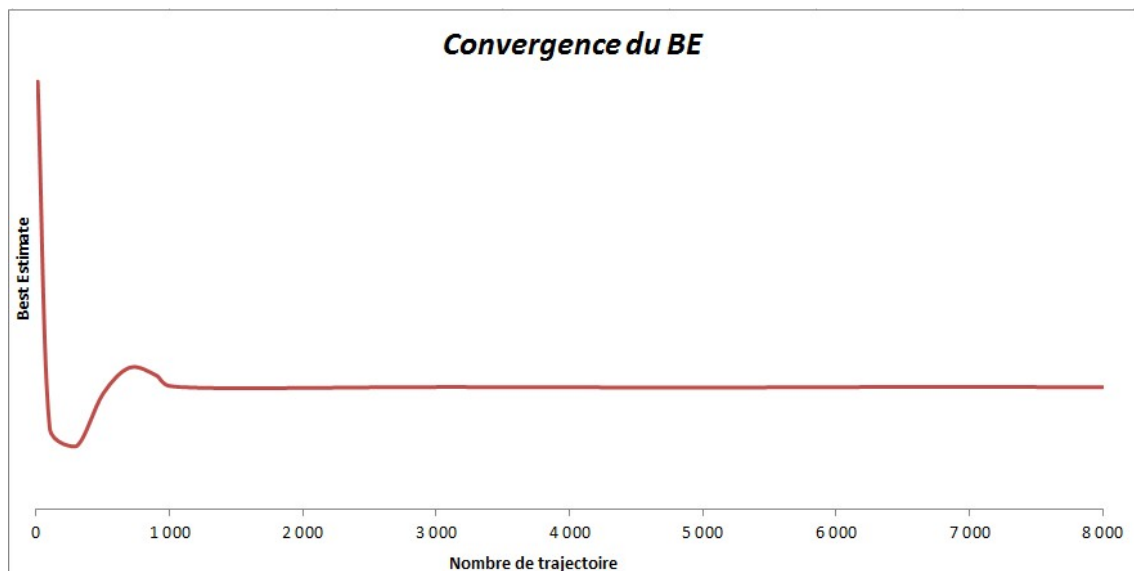


Figure 26 : Convergence du Best Estimate

On obtient pour chaque model point un Best Estimate et un intervalle de confiance à 95% donné par :

$$\left[ \widehat{BE}_0 - 1.96 \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} ; \widehat{BE}_0 + 1.96 \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \right]$$

Où :

$$\hat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\widehat{BE}_0^i - \widehat{BE}_0)^2}$$

Voici les résultats obtenus :

Model Points N°	Ancienneté	Sexe	Age moyen	PM au 31/12/2013	Borne inf	BE	Borne Sup	BEG
1	1	F	52	2 040	1 844	1 847	1 849	1 720
2	1	M	41	571 094	517 349	518 043	518 737	481 397
3	1	M	54	2 040	1 865	1 868	1 870	1 753
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
40	8	M	51	47 596 605	43 298 615	43 350 622	43 402 629	40 865 649
41	8	M	55	731 932	673 265	674 141	675 017	632 830
42	8	M	64	2 172 589	2 033 640	2 036 184	2 038 729	1 929 056
43	9	F	36	548 650	492 291	492 946	493 600	457 391
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
64	>10	M	50	18 037 413	14 355 958	14 362 823	14 369 688	15 249 770
65	>10	M	57	17 545 514	14 270 131	14 275 700	14 281 268	15 079 712
66	>10	M	63	19 111 999	15 968 098	15 972 372	15 976 645	16 756 327

Le Best Estimate total du portefeuille est :

$$BE = 257\,885\,849\text{€}$$

L'intervalle de confiance est donné par :

$$IC(BE, 95\%) = [257\,542\,380\text{€} ; 258\,229\,318\text{€}]$$

Le BEG (*Best Estimate Garanti*) et la FDB (*Future Discretionary Benefits*) obtenus :

$$BEG = 241\,617\,281\text{€}$$

$$FDB = 16\,268\,568\text{€}$$

**Tableau récapitulatif :**

BE	257 885 849 €
IC (BE , 95%)	[ 257 542 380 € ; 258 229 318 € ]
BEG	241 617 281 €
FDB	16 268 568 €

#### 4.2.5 Impact du TMG sur le Best Estimate :

L'effet du TMG sur le Best Estimate est présenté dans le tableau suivant :

TMG	1,75%	2,25%	2,75%	3,25%	3,75%
<b>Best Estimate</b>	257 885 849	260 139 392	265 560 059	275 443 646	287 779 635
<b>Variation</b>	0,00%	0,87%	2,98%	6,81%	11,59%

Plus le TMG est élevé, plus l'engagement de l'assureur envers l'assuré est important. Lorsque le TMG augmente, les scénarios stochastiques économiques dans lesquels le rendement de l'actif est inférieur au TMG sont plus nombreux, avec pour conséquence, des pertes supérieures pour l'assureur qui doit honorer cette garantie.

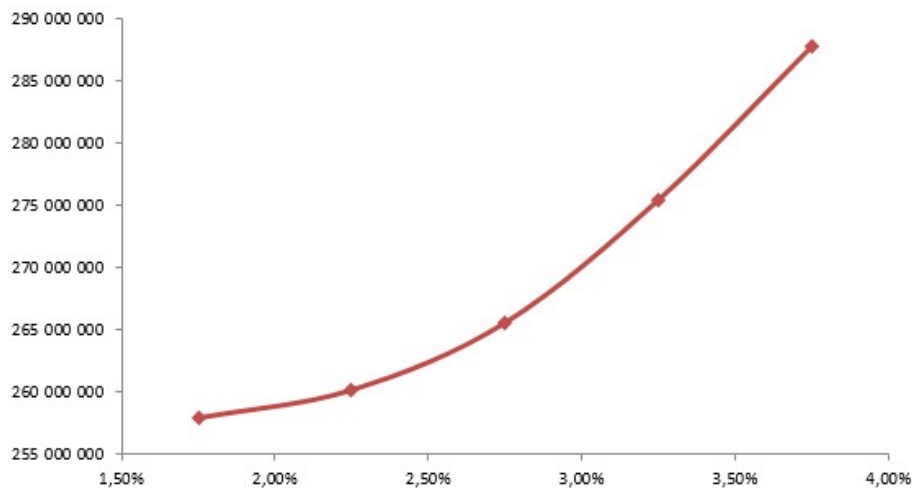


Figure 27: Evolution du Best Estimate en fonction du TMG

#### 4.2.6 Ecart de convergence :

Un « écart de convergence » ou « fuite de modèle » correspond à une création ou une perte de valeur dans un modèle de projection. Il s'agit de la différence entre la valeur de marché (VM) de l'actif d'une part, et l'espérance des flux de trésorerie actualisés d'autre part. Ces flux se décomposent entre BE et marges futures (VIF).

$$\text{Fuite de modèle} = VM (\text{Actif}) - PV (\text{Flux de trésorerie}) = VM (\text{Actif}) - BE - VIF$$

Théoriquement, l'écart de convergence est nul. Mais, dans la pratique, c'est rarement le cas pour tous les scénarios d'une projection stochastique. Lorsqu'une fuite de modèle



incompressible existe, elle doit être allouée de sorte à garantir que les provisions techniques sont calculées de manière fiable et prudente.

Notre modèle de projection présente un écart de convergence incompressible de 4,88M€ (les projections donnent une VIF égale à 21, 77M€), soit 1.71% de la valeur de marché initiale de l'actif.

Cet écart de convergence sera intégré au Best Estimate, ainsi on trouve :

$$BE_{retraité} = 262\,753\,217\text{€}$$

Le bilan économique de la société à  $t = 0$  :

<i>Actif</i>	<i>Passif</i>
	NAV: 21 477 154€
Placements : 284 230 371€	BE: 262 753 217€

Figure 28: Le bilan économique de la société

### 4.3 Calcul du SCR :

Nous retenons dans cette étude, les risques auxquels les compagnies d'assurance vie sont les plus exposées, à savoir : le risque de marché et le risque de souscription.



Source : ACPR

Figure 29: Décomposition du SCR des organismes Mixtes

#### 1.1.1 Risque de marché :

Les chocs de risque de marché impactent à la fois le passif et l'actif.

Dans cette étude, le risque de taux, le risque actions et le risque de crédit sont pris en compte.

Le choc de taux d'intérêt a un impact sur le rendement de l'actif ainsi que sur la courbe d'actualisation du passif.

Le choc sur les actions et le choc de spread impactent le rendement de l'actif, la valeur du passif sur la revalorisation du fonds Euro.

Risque de taux d'intérêt :

Pour calculer le risque de taux d'intérêt, il faut choquer le taux d'intérêt à la hausse et à la baisse comme précisé précédemment.

Les résultats obtenus sont détaillés dans le tableau suivant :

Scénario	Best Estimate	Actif en VM	NAV	Delta NAV	Capital Requis
<b>hausse des taux</b>	237 506 114	264 620 818	27 114 704	-5 637 551	0
<b>central</b>	262 753 217	284 230 371	21 477 154	0	0
<b>baisse des taux</b>	296 039 876	305 718 271	9 678 395	11 798 758	11 798 758

$$Mkt_{int} = 11\,798\,758\text{€}$$

Risque action :

La prise en compte du risque action nécessite de choquer le cours des actions. Dans cette étude, les actions sont toutes considérées comme « globales ». Ce sont par exemple des actions cotées.

Le choc à appliquer sera donc une baisse de 22%:

Les résultats obtenus sont détaillés dans le tableau suivant :

Scénario	Best Estimate	Actif en VM	NAV	Delta NAV	Capital Requis
<b>central</b>	262 753 217	284 230 371	21 477 154	0	0
<b>baisse des actions</b>	262 617 960	271 724 234	9 106 274	12 370 880	12 370 880

$$Mkt_{equity} = 12\,370\,880\text{€}$$

Risque de crédit :

L'exigence de capital est calculée comme suit :

$$Mkt_{sp} = \sum_i VM_i * F^{up}(rating_i)$$

Les facteurs  $F^{up}$  préconisés dans les spécifications techniques du LTGA pour les obligations corporate sont :

credit quality step	AAA	AA	A	BBB	BBB	B or lower	Unrated
duration: (years)							
up to 5	0.9 %. duration: up to 5	1.1 %. duration: up to 5	1.4 %. duration: up to 5	2.5 %. duration: up to 5	4.5 %. duration: up to 5	7.5 %. duration: up to 5	3.0 %. duration: up to 5
More than 5 and up to 10	4.50% + 0.53 %.( duration: - 5)	5.50% + 0.58%.( duration: - 5)	7% + 0.70%.( duration: - 5)	12.50% + 1.50%.( duration: - 5)	22.50% + 2.51%.( duration: - 5)	37.50% + 4.20%.( duration: - 5)	15.0%+1.6 8%.( duration: - 5)

More than 10 and up to 15	7.15% + 0.50 %.(durationi - 10)	8.40% + 0.50 %.(durationi - 10)	10.50% + 0.50 %.(durationi - 10)	20% + 1 %.(durationi - 10)	35.05% + 1.80 %.(durationi - 10)	58.50% + 0.50 %.(durationi - 10)	23.40%+1.16%.(durationi - 10)
More than 15 and up to 20	9.65% + 0.50 %.(durationi - 15)	10.90% + 0.50 %.(durationi - 15)	13% + 0.50 %.(durationi - 15)	25% + 1 %.(durationi - 15)	44.05% + 0.50 %.(durationi - 15)	61% + 0.50 %.(durationi - 15)	29.2% + 1.16%.(durationi - 15)
More than 20	12.15% + 0.50 %.(durationi - 20)	13.40% + 0.50 %.(durationi - 20)	15.50% + 0.50 %.(durationi - 20)	30% + 0.50 %.(durationi - 20)	46.55% + 0.50 %.(durationi - 20)	63.50% + 0.50 %.(durationi - 20)	35% + 0.50 %.(durationi - 20)
Maximum modified duration	176	173	169	140	107	73	130

Notre portefeuille est constitué d'obligations avec une modified duration de 8.81, nous appliquons les  $F^{up}$  en gras dans le tableau.

Aucun capital n'est requis dans ce sous-module pour les obligations d'États de l'EEE, ou de la Banque Centrale Européenne.

Ainsi on obtient les résultats suivant :

Emetteur	Composition	Valeur de Marché	Rating	Modified Duration	F(rating)	Choc Spread
Etat (Allemagne, Pays bas...)	7,6%	17 281 207	AAA	8,81	0	0
Corporate	5,2%	11 823 983	AAA	8,81	6,52%	770 841
Etat (France, Belgique)	29,6%	67 305 752	AA	8,81	0	0
Corporate	4,9%	11 141 831	AA	8,81	7,71%	859 013
Etat (Pologne, R.Tchèque, slovaquie)	1,6%	3 638 149	A	8,81	0	0
Corporate	27,0%	61 393 760	A	8,81	9,67%	5 934 935
Etat (Italie, Irlande, Espagne)	13,1%	29 787 343	BBB	8,81	0	0
Corporate	9,5%	21 601 508	BBB	8,81	18,22%	3 934 715
Etat (Portugal)	0,3%	682 153	BB	8,81	0	0
Corporate	1,2%	2 728 612	BB	8,81	32,06%	874 877

$$Mkt_{spread} = 12\,374\,381\text{€}$$

Agrégation des risques et calcul du  $SCR_{mkt}$  :

Dans les spécifications techniques, les risques et taux à la hausse et à la baisse ne sont pas identiquement corrélés avec le risque action.

$$SCR_{mkt} = \max(SCR_{mkt}^{up}; SCR_{mkt}^{down})$$

En cas de hausse des taux :

$$SCR_{mkt}^{up} = \sqrt{\sum_{rc} CorrMktUp_{r,c} * Mkt_{up,r} * Mkt_{up,c}}$$

$$SCR_{mkt}^{up} = \sqrt{\begin{bmatrix} mkt_{int}^{up} & mkt_{equity} & mkt_{sp} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.75 \\ 0 & 0.75 & 1 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} mkt_{int}^{up} \\ mkt_{equity} \\ mkt_{sp} \end{bmatrix}}$$

$$SCR_{mkt}^{up} = 23\,147\,071\text{€}$$

En cas de baisse des taux :

$$SCR_{mkt}^{down} = \sqrt{\sum_{rc} CorrMktDown_{r,c} * Mkt_{down,r} * Mkt_{down,c}}$$

$$SCR_{mkt}^{down} = \sqrt{\begin{bmatrix} mkt_{int}^{down} & mkt_{equity} & mkt_{sp} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.75 \\ 0.5 & 0.75 & 1 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} mkt_{int}^{down} \\ mkt_{equity} \\ mkt_{sp} \end{bmatrix}}$$

$$SCR_{mkt}^{down} = 28\,652\,736\text{€}$$

Le SCR marché :  $SCR_{mkt} = \max(SCR_{mkt}^{up}; SCR_{mkt}^{down})$

On obtient :  $SCR_{mkt} = 28\,652\,736\text{€}$

### 1.1.2 Risque de souscription vie :

Dans cette étude, les risques de souscription vie étudiés sont les risques de mortalité, de longévité, et de rachat.

Mortalité :

Le capital réglementaire pour le risque de mortalité est défini comme la variation de la NAV après un choc à la hausse de 15% des taux de mortalité.

$$Life_{mort} = \Delta NAV_{mort\ shock}$$

Longévité :

Le capital réglementaire pour le risque de longévité est défini comme la variation de la NAV après un choc à la baisse de 20% des taux de mortalité.

$$Life_{long} = \Delta NAV_{long\ shock}$$

Rachat :

La charge en capital relative au risque de rachat se calcule de la manière suivante :

$$Life_{lapse} = \max ( lapse_{down}; lapse_{up}; lapse_{mass} )$$

Avec :

- $lapse_{down}$  : Chargement en capital au titre du risque de diminution permanente des taux de rachat
- $lapse_{up}$  : chargement en capital au titre du risque d'augmentation permanente des taux de rachat ;
- $lapse_{mass}$  : Chargement en capital au titre du risque de rachat massif.

Scénario	Best Estimate	Net Asset Value	Delta NAV	Capital Requis
Central	262 753 217	21 477 154	0	0
Choc mortalité	263 146 585	21 083 786	393 368	393 368
Choc longévité	261 408 165	22 822 206	-1 345 052	0
Choc rachat	hausse	269 415 818	14 814 553	6 662 601
	baisse	251 053 373	33 176 997	-11 699 844
	massif	267 457 005	16 773 366	4 703 788

$$Life_{mort} = 393\ 368; \quad Life_{long} = 0; \quad Life_{lapse} = 6\ 662\ 601$$

Le SCR de souscription vie est donné par :

$$SCR_{life} = \sqrt{ [Life_{mort} \quad Life_{long} \quad Life_{lapse}] * \begin{pmatrix} 1 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 1 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} Life_{mort} \\ Life_{long} \\ Life_{lapse} \end{bmatrix} }$$

$$SCR_{life} = 6\ 674\ 203\text{€}$$

1.1.3 Agrégation des modules de risques et calcul du BSCR :

La matrice de corrélation utilisée pour calculer le BSCR est :

Corr	Marché	Souscription vie
Marché	1	
Souscription vie	0.25	1

$$BSCR = \sqrt{[SCR_{mkt} \quad SCR_{life}] * \begin{pmatrix} 1 & 0.25 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} SCR_{mkt} \\ SCR_{life} \end{bmatrix}}$$

$$BSCR = 31\,002\,280 \text{ €}$$

1.1.4 Risque opérationnel :

Le risque opérationnel est le risque de perte résultant de l'inadéquation ou de la défaillance de processus internes, ou du personnel et des systèmes, ou d'événements extérieurs.

La formule de calcul du risque opérationnel dans le QIS5 est donnée par :

$$SCR_{op} = \text{Min}(30\% BSCR; Op) + 25\% Exp_{ul}$$

Avec :

$Op$  : Charge du risque opérationnel pour tous les contrats hors les contrats d'assurance vie où le risque est pas porté entièrement par l'assuré ;

$Exp_{ul}$  : Montant des dépenses annuelles (brutes de réassurance) dans le cadre des contrats en UC (dépenses administratives) durant les 12 derniers mois.

$$Op = \text{Max} (Op_{primes} ; Op_{provisions})$$

Dans le cadre du contrat étudié, il faut considérer :

$$Op = Op_{provisions} = 0.45\% * (TP_{life} - TP_{life-ul})$$

Avec :

$TP_{life}$  : Total des provisions techniques pour l'activité vie ;

$TP_{life-ul}$  : Total des provisions techniques pour la partie UC des contrats d'assurance vie.

La formule appliquée sera donc:

$$SCR_{op} = \text{Min}(30\% BSCR; 0.45\% * TP_{life})$$

$$SCR_{op} = \text{Min}(30\% * 29\,645\,012 ; 0.45\% * 283\,230\,371)$$

$$SCR_{op} = 1\,274\,537 \text{ €}$$

#### 1.1.5 Les Ajustements :

Le calcul de l'ajustement se sépare en deux parties : l'ajustement au titre de la capacité d'absorption des pertes des provisions techniques et des impôts différés. Cet ajustement reflète la compensation potentielle de pertes inattendues par une diminution des participations aux bénéfices et des impôts futurs.

$$Adj. = Adj_{TP} + Adj_{DT}$$

Avec :

- $Adj_{TP}$  : ajustement lié à l'absorption des pertes par les provisions techniques
- $Adj_{DT}$  : ajustement lié à l'absorption par les impôts différés.

Nous supposons que l'ajustement lié à l'absorption des pertes par les provisions techniques correspond à la FDB (*Future Discretionary Benefits*) :

$$FDB = BE (\text{scénario central}) - BEG (\text{Best Estimate Garanti})$$

$$Adj_{TP} = FDB = 16\,268\,568 \text{ €}$$

Le facteur de 12% (taux observé lors de l'exercice de préparation 2014) sera retenu comme facteur d'absorption lié aux impôts. Il s'agit d'une hypothèse simplificatrice pour alléger la mise en œuvre opérationnelle.

$$Adj_{DT} = 3\,720\,274 \text{ €}$$

#### 1.1.6 Calcul du $SCR_{final}$ :

Le SCR final se détermine de la façon suivante :

$$SCR = BSCR + Adj + SCR_{op}$$



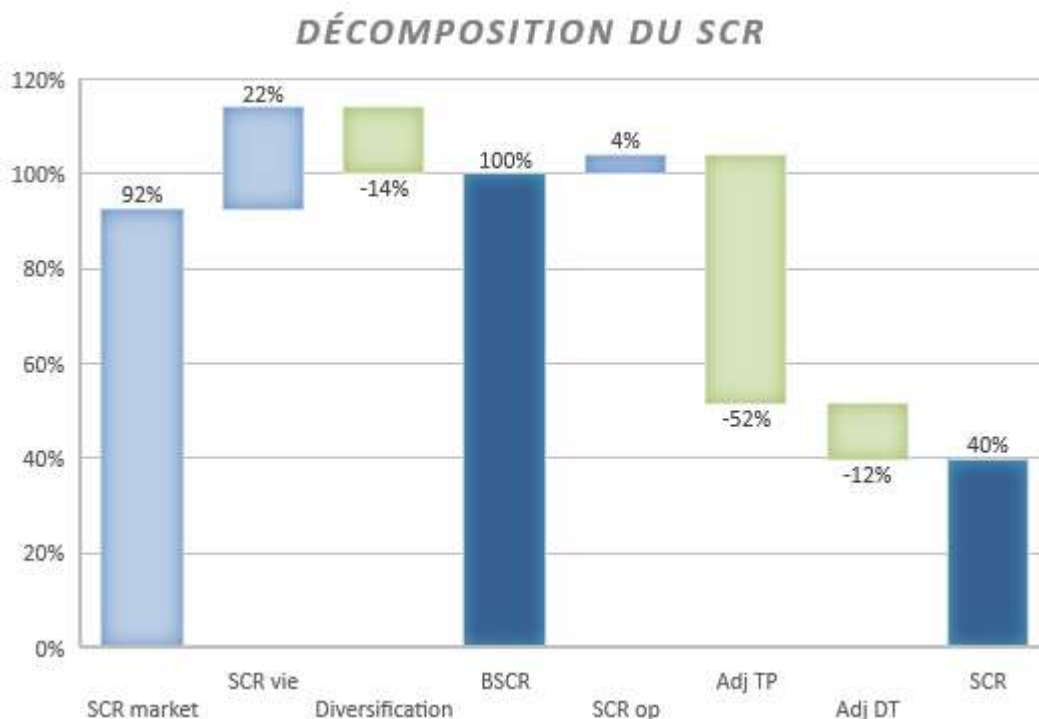
On en déduit que :  $SCR = 12\,287\,975\text{€}$

Le taux de couverture de la marge de solvabilité est défini comme suit :

$$SR = \frac{\text{Fonds propres}}{SCR}$$

On obtient un SR de **175 %**.

Le graphe suivant permet d'analyser la composition du SCR :



**Figure 30:** Décomposition du SCR

La décomposition de notre SCR reproduit les mêmes ordres de grandeurs par rapport à ce qui a été observé lors des exercices de préparation avec notamment une pondération très forte du risque de marché et une réduction considérable du SCR par l'absorption des pertes par les Provisions Techniques.

Pour notre étude, nous n'avons pas considéré tous les risques, ce qui explique l'effet de diversification faible par rapport à la moyenne (14% vs 25%).

# Quatrième partie

## Mise en place des stratégies de couverture

## V. Mise en place de la couverture et impact sur le SCR marché :

Une institution dont le bilan contient des garanties (TMG) et des options implicites (rachat, plancher, ...), pouvant modifier la valeur des flux en cas de variation des taux, cherche absolument à couvrir cette exposition.

Une couverture parfaite des différents risques nécessiterait l'achat de produits dérivés permettant de couvrir tous les états de la nature possibles, ce qui aurait un coût trop élevé.

### 1. Mise en place de la Couverture :

On décide de couvrir le risque de taux par des swaps et le risque action par des puts.

#### 1.1 Couverture du risque de taux par des swaps :

La technique la plus simple théoriquement et la plus efficace pour réduire l'exposition au risque de taux consiste à adosser tous les flux de l'actif et ceux du passif « cash-flow matching », pour les assurances-vie il est difficile de trouver des titres ayant une durée aussi longue que les éléments de leur passif (engagements long terme).

Le recours aux swaps « receveurs du taux fixe – payeurs du taux variable » permet un allongement synthétique de l'actif, et par conséquent réduire l'écart entre la sensibilité de l'actif et celle du passif aux variations des taux d'intérêt.

##### 1.1.1 Gap de duration :

La duration d'une série de flux représente la sensibilité de cette série de flux à la variation des taux.

Elle représente également la durée de vie moyenne de ces flux futurs pondérés par un facteur d'actualisation.

On peut exprimer mathématiquement la duration d'une série de flux de la manière suivante:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{tF_t}{(1+r_t)^t}}{\sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+r_t)^t}}$$

Où :

$F_t$  : la valeur de flux à la date t.

$r_t$  : taux d'actualisation.

Le bilan initial de la compagnie se présente de la façon suivante :

<b>Actif</b>	<b>€</b>	<b>%</b>	<b>Passif</b>	<b>€</b>	<b>%</b>
Actions	56 846 074	20%	Capitaux propres	26 344 521	9%
Obligations	227 384 296	80%	Best Estimate	257 885 849	91%
<b>Total</b>	<b>284 230 371</b>	<b>100%</b>	<b>Total</b>	<b>284 230 371</b>	<b>100%</b>
<b>Duration<sub>Actif</sub></b>	<b>7,20</b>		<b>Duration<sub>Passif</sub></b>	<b>11,58</b>	

Pour chaque model point, on calcul la duration du passif en faisant la moyenne des trajectoires des flux de prestations obtenues par les simulations de Monte Carlo, pondérés par le facteur d'actualisation. Ensuite nous faisons la moyenne pour obtenir la duration du passif.

La duration du passif excède significativement à celle de l'actif, une baisse de taux induira une augmentation de la valeur du passif plus importante que la valeur de l'actif, ce qui engendrera des pertes financières.

L'écart entre la duration de l'actif et celle du passif (Gap de duration) est un indicateur très utilisé car il permet de quantifier le risque de taux auquel s'expose la compagnie.

Le Gap de duration se calcul comme suit :

$$Duration_{Gap} = Duration_{Actif} - Duration_{Passif} * \frac{Valeur\ du\ Passif}{Valeur\ de\ l'Actif}$$

Ainsi on trouve :  $Duration_{Gap} = -3.30$

### 1.1.2 La couverture en swaps :

On décide de couvrir le risque de taux du passif en ajoutant des swaps à notre portefeuille d'actifs. Il s'agira de swaps receveur de la jambe fixe et payeur de la jambe variable.

#### ➤ Calcul du nominal du swap :

Nous devons calculer le nominal du swap qui permet de combler le gap de duration entre l'actif et le passif, une méthode simple consiste à faire correspondre la sensibilité au taux de l'actif à celle du passif :

A l'actif :

$$\Delta V_{Oblig+Swap} = -D_{Oblig} * \Delta r * V_{Oblig} - D_{Swap} * \Delta r * N_{Swap}$$

Au Passif :

$$\Delta V_{Passif} = -D_{Passif} * \Delta r * V_{Passif}$$

On posant :  $\Delta V_{Oblig+Swap} = \Delta V_{Passif}$

On obtient :  $N_{Swap} = 217\,360\,867\text{€}$

➤ *Valorisation d'un Swap :*

- La valeur de la branche fixe du swap est calculée par actualisation des flux certains futurs à l'aide de la courbe des taux zéro coupon issue du modèle CIR.
- La valeur de la branche variable du swap est calculée par actualisation, des flux variables futurs déterminés à partir des taux forward, à l'aide de la courbe des taux zéro coupon issue du modèle CIR.
- La valeur du Swap est calculée comme la différence entre les deux branches

**Etapas de calcul de la valeur de la jambe variable :**

*Etape 1 : Calcul des taux forward :*

Le taux base exact/360 d'un forward débutant dans n pour une période d est donné par la formule :

$$f_{n,d} = \left( \frac{b_n}{b_{n+d}} - 1 \right) * \frac{360}{n}$$

Pour le calcul des taux forward au 30/06/n, nous aurons besoin des facteurs d'actualisation au 30/06/n et au 31/12/n. Le facteur d'actualisation du 31/12/n est obtenu par le modèle CIR, celui du 30/06/n est calculé par interpolation linéaire.

*Etape 2 : Calcul de l'équivalent certain du flux variable :*

A l'aide des taux forward, on détermine les équivalents certains des flux variables futurs.

$$Flux\ variable_{n+d} = Nominal_{Swap} * f_{n,d}$$

*Etape3 : Calcul de la valeur de jambe variable :*

La valeur de la jambe variable est calculée par actualisation des flux variables futurs à l'aide des facteurs d'actualisation.

➤ *Caractéristiques du swap mis en place :*

Les caractéristiques du swap contracté sont stockées dans le tableau suivant :

Caractéristique	Valeur
<b>Type</b>	swap prêteur (taux fixe receveur)
<b>Nominal</b>	170 M€
<b>Echéance</b>	5ans
<b>Taux fixe</b>	1.92%
<b>Taux variable</b>	Euribor 6mois + 1%

Le taux de swap a été calculé de façon à rendre la valeur du swap à t=0 nulle.

➤ *Calcul des flux variables futurs : Approche « Equivalent Certain »*

	30/06/14	31/12/14	30/06/15	31/12/15	30/06/16	31/12/16	30/06/17	31/12/17	30/06/18	31/12/18
<b>Nb de jours</b>	185	180	185	180	185	181	185	180	185	180
<b>Zéro coupon</b>	-	1,37%	-	1,53%	-	1,67%	-	1,79%	-	1,91%
<b>Facteur actualisation</b>	99,32%	98,63%	97,81%	96,99%	96,06%	95,13%	94,10%	93,08%	91,98%	90,88%
<b>taux forward 6mois</b>	1,34%	1,38%	1,63%	1,69%	1,89%	1,95%	2,12%	2,20%	2,32%	2,41%
<b>Equivalent certain</b>	1168446	1176533	1425829	1437889	1652461	1668681	1852013	1872412	2027723	2052201
<b>Flux actualisés</b>	1160470	1160470	1394666	1394666	1587357	1587357	1742769	1742769	1865081	156364396

La somme totale des flux actualisés donne la valeur de la jambe variable, soit  $V(J_v) = 170M€$

Ainsi à t=0, on a :  $V(J_v) = V(J_f) = 170M€$  et  $V(Swap) = V(J_f) - V(J_v) = 0$

### 1.2 Couverture du risque actions par des puts:

Pour couvrir le risque de chute des marchés actions, on décide de couvrir le portefeuille actions par des options de vente (puts) de type européen. Le cout de cette couverture est égal aux prix des primes des options contractées.

➤ *Valorisation des Puts:*

La formule d'évaluation est la formule de *Black et Scholes*:

$$P(t, S_t) = -S_t N(-d_1) + Ke^{-r(T-t)} N(-d_2)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}} ; \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{(T-t)}$$

La démonstration de cette formule est disponible en annexe.

## 2. Calcul du SCR marché avec couverture :

En plus des obligations et des actions, notre portefeuille d'actifs contient désormais des swaps et des puts.

Le cout de la couverture en swaps est 0 (la valeur d'un swap à t=0 est nulle), celui en puts est égale aux primes d'achat des options.

Après le paiement des primes, l'allocation d'actif sera la même que précédemment : 80% en obligation et 20% en action.

### 2.1. Calcul de $Mkt_{int}$ :

L'application des chocs de taux à la hausse et à la baisse à notre nouveau portefeuille contenant des swaps et des puts donnera les résultats suivants :

Scénario	Best Estimate	Actif en VM	NAV	Delta NAV	Capital Requis
hausse des taux	237 506 114	256 232 878	18 726 764	2 750 390	2 750 390
central	262 753 217	284 230 371	21 477 154	0	0
baisse des taux	296 039 876	314 107 754	18 067 879	3 409 275	3 409 275

$$Mkt_{int} = 3\,409\,275\text{€}$$

On constate que la couverture en swap permet de réduire significativement (71%) la charge de capital requise au titre du risque de taux :

$Mkt_{int}$	$Mkt_{int}$ avec couverture	Réduction en $Mkt_{int}$	% de la réduction	Coût de la couverture
11 798 758	3 409 275	8 389 483	71%	0

## 2.2. Calcul de $Mkt_{Equity}$

La charge de capital dépendra du prix d'exercice des puts achetés :

- $K = 80%$  de la monnaie :

Scénario	Best Estimate	Actif en VM	NAV	Delta NAV	Capital Requis
central	262 753 217	284 230 371	21 477 154	-	-
baisse des actions	262 617 960	274 587 637	11 969 677	9 507 477	9 507 477

$$Mkt_{Equity} = 9\,507\,477\text{€}$$

- $K = 85%$  de la monnaie :

Scénario	Best Estimate	Actif en VM	NAV	Delta NAV	Capital Requis
central	262 753 217	284 230 371	21 477 154	-	-
baisse des actions	262 617 960	276 384 316	13 766 356	7 710 798	7 710 798

$$Mkt_{Equity} = 7\,710\,798\text{€}$$

- $K = 90%$  de la monnaie :

Scénario	Best Estimate	Actif en VM	NAV	Delta NAV	Capital Requis
central	262 753 217	284 230 371	21 477 154	-	-
baisse des actions	262 617 960	278 562 591	15 944 630	5 532 523	5 532 523

$$Mkt_{Equity} = 5\,532\,523\text{€}$$

- $K = 95%$  de la monnaie :

Scénario	Best Estimate	Actif en VM	NAV	Delta NAV	Capital Requis
central	262 753 217	284 230 371	21 477 154	-	-
baisse des actions	262 617 960	281 010 578	18 392 618	3 084 536	3 084 536

$$Mkt_{Equity} = 3\,084\,536\text{€}$$

- $K = 100%$  de la monnaie :

Scénario	Best Estimate	Actif en VM	NAV	Delta NAV	Capital Requis
central	262 753 217	284 230 371	21 477 154	-	-
baisse des actions	262 617 960	283 627 419	21 009 459	467 695	467 695

$$Mkt_{Equity} = 467\,695\text{€}$$



Tableau récapitulatif :

Prix d'exercice	$Mkt_{Equity}$	$Mkt_{Equity}$ avec couverture	Réduction en $Mkt_{Equity}$	% de la réduction	Coût de la couverture
80	12 370 880	9 507 477	2 863 403	23%	161 991
85	12 370 880	7 710 798	4 660 082	38%	419 143
90	12 370 880	5 532 523	6 838 356	55%	912 807
95	12 370 880	3 084 536	9 286 344	75%	1 726 996
100	12 370 880	467 695	11 903 185	96%	2 913 797

### 2.3. Calcul du $SCR_{mkt}$ :

L'agrégation des risques permet de calculer le  $SCR_{mkt}$ , on obtient :

Prix d'exercice	$SCR_{Mkt}$	$SCR_{Mkt}$ avec couverture	Réduction en $SCR_{Mkt}$	% de la réduction	Coût de la couverture
80	28 652 736	21 936 494	6 716 242	24%	161 991
85	28 652 736	19 281 353	9 371 383	30%	419 143
90	28 652 736	16 489 355	12 163 381	37%	912 807
95	28 652 736	15 447 465	13 205 271	44%	1 726 996
100	28 652 736	13 983 541	14 669 195	51%	2 913 797

#### 2.4. Risque de contrepartie issu de la couverture :

La mise en place de la couverture contre le risque de taux et action en souscrivant des produits dérivés, induit un risque de contrepartie. Ce risque est pris en compte dans le module  $SCR_{default}$ .

Le risque de contrepartie correspond au risque de défaut d'une contrepartie venant en réduction de risques : réassureurs, dérivés financiers, intermédiaires ...

Pour ce risque, il est nécessaire de distinguer 2 types d'exposition :

- les expositions de type 1 : ce sont les expositions qui, en général, ne sont pas diversifiées et pour lesquelles une notation est en général disponible.
- les expositions de type 2 : ce sont les expositions qui sont largement diversifiées et pour lesquelles les contreparties ne sont généralement pas notées.

L'exigence de capital est calculée séparément pour chaque type d'exposition. L'exigence de capital  $SCR_{def}$  est ensuite obtenue par agrégation des besoins en capitaux calculés pour chaque type d'exposition  $SCR_{def,1}$  et  $SCR_{def,2}$  en supposant que la corrélation entre les types d'exposition est de 75% :

$$SCR_{def} = \sqrt{SCR_{def,1}^2 + 1.5 \times SCR_{def,1} \times SCR_{def,2} + SCR_{def,2}^2}$$

Dans cette étude, on se limitera aux contreparties de type 1.

Le modèle standard calcule le risque de contrepartie pour les contreparties financières comme suit :

$$SCR_{def} = \begin{cases} 3\sqrt{V} & \text{si } \sqrt{V} \leq 7.05\% \cdot \sum_i LGD_i \\ 5\sqrt{V} & \text{si } 7.05\% \cdot \sum_i LGD_i < \sqrt{V} \leq 20\% \cdot \sum_i LGD_i \\ \sum_i LGD_i & \text{si } 20\% \cdot \sum_i LGD_i < \sqrt{V} \end{cases}$$

Avec :

- $LGD_i$  « Loss Given Default » est la perte en cas de défaut de la contrepartie  $i$ .

$$LGD_i = \max[(1 - RR) \cdot (MV_i + RM_i) - collateral_i; 0]$$

- $RR$ : taux de recouvrement en cas de défaut de la contrepartie. Pour les dérivés, il est fixé à 10%.
  - $MV_i$  est la valeur du marché du produit dérivé considéré.
  - $RM_i$  est la réduction en SCR issu de la couverture par le produit dérivé.
  - $collateral_i$  la valeur des dépôts faits par la contrepartie (Appels de marge)
- $V$  est la variance de la loi de probabilité qui décrit les pertes potentielles.

Ainsi le calcul du risque de contrepartie prend non seulement en compte la perte en valeur du produit dérivé lui-même, mais également la perte de la couverture (à travers le  $RM_i$ ). En outre, la formule exposée précédemment reconnaît la réduction du risque de contrepartie par les mécanismes de collatéralisation.

L'EIOPA a publié les « *Consultation Papers* » 28 et 51 un tableau reprenant l'exigence en capital au titre du risque de contrepartie (en % de la somme des  $LGDs$ ) en fonction du nombre de contreparties et du rating des contreparties:

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
1	1.3%	3.0	6.7	14.7	54.5	100	100
2	1.1	2.5	5.6	12.3	45.5	83.4	83.4
3	1.0	2.3	5.2	11.4	42.2	77	77.0
4	1.0	2.2	5.0	10.9	40.3	73.7	73.7
5	1.0	2.2	4.8	10.6	39.2	71.5	71.5
6	0.9	2.1	4.7	10.4	38.3	70.1	70.1
...							
10	0.9	2.0	4.5	10.0	36.8	67.1	67.1

Figure 31: L'exigence en capital en fonction du nombre et du rating des contreparties

Dans notre étude, on considère que l'achat des puts s'est fait à l'aide de quatre contreparties notées toutes A, et le contrat Swap est conclu avec une seule contrepartie notée aussi A.

En faisant l'hypothèse de l'absence de mécanisme de collatéralisation, La charge de capital au titre du risque de contrepartie est calculée de la manière suivante :

$$SCR_{def} = 4.8\% * 90\% * (MarketValue + Réduction en SCR_{mkt})$$

Les résultats obtenus sont stockés dans le tableau suivant :

Prix d'exercice	Réduction en $SCR_{Mkt}$	Coût de la couverture	Augmentation en $SCR_{def}$
80	6 716 242	161 991	309 324
85	9 371 383	419 143	390 214
90	12 163 381	912 807	494 161
95	13 205 271	1 726 996	618 687
100	14 669 195	2 913 797	759 585

### 2.5. Impact sur le $SCR_{final}$ :

A défaut d'un modèle complet, nous faisons ici l'hypothèse que la réduction globale du SCR est égale à la réduction du  $SCR_{mkt}$  plus l'augmentation du  $SCR_{def}$ .

Prix d'exercice	$SCR_{final}$	$SCR_{final}$ avec couverture	Réduction en $SCR_{final}$	Coût de la couverture	Ratio de couverture
80	12 287 975	5 599 006	6 688 968	161 991	384%
85	12 287 975	4 064 598	8 223 377	419 143	528%
90	12 287 975	3 200 000	9 087 975	912 807	671%
95	12 287 975	3 200 000	9 087 975	1 726 996	671%
100	12 287 975	3 200 000	9 087 975	2 913 797	671%

Nous observons une réduction significative du SCR et une amélioration du taux de couverture. Cependant le coût de cette stratégie de couverture n'est pas négligeable, il convient alors de mesurer le gain économique généré suite à la mise en place de cette stratégie.

### 3. Evaluation du gain économique :

Dans cette partie, nous procédons à l'évaluation de l'intérêt économique d'une stratégie de couverture, cela revient à confronter le coût de la stratégie au gain en besoin de capital (bénéfice qui pourrait être réalisé sur l'excédent de capital qui apparaît lors de la réduction du SCR).

Nous avons mis en évidence dans le chapitre précédant que le recours à des instruments dérivés à des fins de couverture permet de réduire le SCR de manière significative, cependant ces stratégies de couverture ont un coût qui n'est pas négligeable. Or quelle motivation incite le management d'une compagnie d'assurance à opter pour cette solution ?

Il convient de garder à l'esprit que le SCR doit être mis au regard des fonds propres de l'assureur. En effet, la réduction du SCR n'a de sens que si les fonds propres n'ont pas réduit d'autant proportionnellement.

Le SR (Solvency ratio) est le principal indicateur de solvabilité dans le référentiel SII, il représente le taux de couverture de la marge de solvabilité est défini comme suit :

$$SR = \frac{\text{Fonds propres}}{SCR}$$

Pour chaque niveau de SR correspond une probabilité de défaut, par exemple : une compagnie d'assurance qui affiche un SR de 100% a une probabilité de défaut de 0.5% à horizon un an, et plus ce ration est plus élevé plus le niveau de solvabilité de la compagnie est élevé.

SR	Probabilité de défaut
>196%	0.01%
175%	0.05%
150%	0.1%
125%	0.2%
122%	0.24%
100%	0.5%
95%	1.2%
< 75%	4.175%

Figure 32: Ratio de solvabilité et probabilité de défaut associée (source LTGA)

Tout d'abord, considérons que le SR est constant. Nous procédons à l'évaluation de l'intérêt économique d'une stratégie de couverture, cela revient à confronter le coût de la stratégie au gain en besoin de capital. Le coût de la stratégie peut être un coût financier lié à la prime de l'option achetée ou un coût lié au risque de décorrélation de l'actif sous-jacent avec la couverture. Le gain en besoin de capital correspond au bénéfice qui pourrait être réalisé sur l'excédent de capital suite à la réduction du SCR. En effet, pour rester au même niveau de SR, la réduction du SCR induit une diminution des fonds propres. Ainsi une partie du capital est libérée pour être investie ailleurs.

A SR constant, le gain économique se calcule comme suit :

$$SR * (CoC * Réduction en SCR) - Coût(Stratégie de couverture)$$

Soit  $CoC_{seuil}$  le niveau du CoC à partir duquel cette quantité (le gain économique) devient positive, il représente le seuil de rentabilité économique.

Si l'investisseur juge qu'il y a un coût de capital (un rendement attendu) supérieur à ce seuil, il est économiquement rentable d'entrer dans une stratégie de couverture.

➤ *Couverture totale : 100% du portefeuille actions :*

Strike	Réduction en SCR <sub>final</sub>	Coût de la couverture	Seuil CoC (SR=100%)	Seuil CoC (SR=150%)	Seuil CoC (SR=200%)	Seuil CoC (SR=250%)
80	6 688 968	161 991	2,42%	1,61%	1,21%	0,97%
85	8 223 377	419 143	5,10%	3,40%	2,55%	2,04%
90	9 087 975	912 807	10,04%	6,70%	5,02%	4,02%
95	9 087 975	1 726 996	19,00%	12,67%	9,50%	7,60%
100	9 087 975	2 913 797	32,06%	21,37%	16,03%	12,82%

Le tableau montre que le SR influe fortement la rentabilité économique des stratégies de couverture. Ainsi pour une stratégie de couverture d'un strike de 90% de la monnaie serait peu intéressante pour une entreprise ayant un SR de 100% ( $CoC_{seuil} = 10.04\%$ ). A l'opposé, pour une entreprise qui a un SR de 250%, il s'agit d'une stratégie tout à fait envisageable ( $CoC_{seuil} = 4.02\%$ ).

➤ *Couverture partielle : 50% du portefeuille actions :*

Strike	Réduction en SCR <sub>final</sub>	Coût de la couverture	Seuil CoC (SR=100%)	Seuil CoC (SR=150%)	Seuil CoC (SR=200%)	Seuil CoC (SR=250%)
80	5 442 436	80 996	1,49%	0,99%	0,74%	0,60%
85	6 222 962	209 572	3,37%	2,25%	1,68%	1,35%
90	7 157 323	456 403	6,38%	4,25%	3,19%	2,55%
95	8 189 773	863 498	10,54%	7,03%	5,27%	4,22%
100	9 087 975	1 456 899	16,03%	10,69%	8,02%	6,41%

➤ *Couverture partielle : 25% du portefeuille actions :*

Strike	Réduction en <i>SCR<sub>final</sub></i>	Coût de la couverture	Seuil CoC (SR=100%)	Seuil CoC (SR=150%)	Seuil CoC (SR=200%)	Seuil CoC (SR=250%)
80	4 813 961	40 498	0,84%	0,56%	0,42%	0,34%
85	5 207 005	104 786	2,01%	1,34%	1,01%	0,80%
90	5 679 833	228 202	4,02%	2,68%	2,01%	1,61%
95	6 205 992	431 749	6,96%	4,64%	3,48%	2,78%
100	6 761 985	728 449	10,77%	7,18%	5,39%	4,31%

Les entreprises peuvent limiter le coût des stratégies de couverture en couvrant que partiellement le portefeuille actions.

Ainsi, des stratégies qui n'étaient pas économiquement rentables avec une couverture totale deviennent envisageables avec une couverture partielle.

Si on raisonne à SR variable et on prend l'exemple d'une compagnie d'assurance qui, suite à une sinistralité importante, se trouve avec un SR de 80%. L'objectif à court terme est de retrouver un niveau au moins égal à 100%.

Pour ce faire, la compagnie peut procéder à une augmentation de capital, ce qui aurait un coût égal à  $Fonds\ propres * \frac{100\%}{80\%}$ . La compagnie peut également changer sa structure de risque et diminuer le SCR de 20% dans le but de retrouver un SR de 100%. Ainsi elle peut envisager de mettre en place une stratégie de couverture sur un an et d'affecter les bénéfices (ou une partie des bénéfices) de l'année suivante en fonds propres. De cette manière la compagnie peut adapter son profil de risque au fur et à mesure en faisant appel à la couverture.

Notons que l'amélioration du SR peut également concerner les compagnies qui ont un niveau de SR suffisant d'un point de vue strictement prudentiel. En effet, cet indicateur de solvabilité que les compagnies d'assurance sont amenées à publier permet aux acteurs de marché de quantifier la solvabilité des assureurs. Un SR plus élevé correspond à une probabilité de défaut plus basse.

Le référentiel Solvabilité 2 se réfère aux niveaux de SR pour déterminer le risque de contrepartie.

## Conclusion générale :

La nouvelle réforme Solvabilité II a défini des nouveaux principes de valorisation des actifs et des passifs d'assurance. Les assureurs doivent avoir recours à un modèle de scénario économique. Le modèle implémenté a permis d'effectuer une projection de l'évolution de l'actif de l'assureur et des interactions entre l'actif et le passif à travers la politique de participation aux bénéficiaires. La projection du passif a nécessité de modéliser le comportement des assurés, à travers la mortalité, les rachats. Pour simplifier la modélisation, le portefeuille d'assurés a été segmenté en «model points».

L'évolution du marché et de la réglementation a conduit les assureurs à explorer de nouvelles techniques de gestion des risques sur leurs actifs et leurs passifs. Les dérivés constituent un outil fondamental de la gestion du risque pour tout assureur. Les compagnies d'assurance peuvent se servir des dérivés à des fins de couverture, en tenant compte des risques de contrepartie que ces dérivés font apparaître et qui peuvent être atténués par les techniques de collatéralisation.

Dans ce mémoire, on a mis en évidence que l'utilisation des swaps pour couvrir l'exposition aux variations de taux, et les options de vente pour couvrir le risque de chute des marchés actions, ont permis à la compagnie de réduire de manière significative l'exigence en capital et d'améliorer son taux de couverture.

Il est à noter que la modélisation adoptée comporte certaines limites au niveau de la précision des résultats obtenus, du fait de la nécessité de recourir à des hypothèses simplificatrices.

Enfin, l'étude pourrait être étendue à d'autres types de contrats et, en particulier, aux contrats de type retraite qui sont soumis aux mêmes risques que ceux que nous avons pu étudier tout au long de ce mémoire.



## Annexes

### *Annexe 1 : Mouvement brownien :*

Un mouvement brownien standard  $\{W_t, t \geq 0\}$  est un processus stochastique adapté construit sur un espace probabilisé filtré  $(\Omega, F, P)$  et qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall \omega \in \Omega, W_0 = 0$ ;
- $\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ , les variables aléatoires  $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$  sont indépendantes ;
- $\forall s, t \geq 0$  tels que  $s \leq t$ , la variable aléatoire  $W_t - W_s$  suit une loi normale centrée réduite de variance  $t - s$  ;
- $\forall \omega \in \Omega$ , la trajectoire  $t \rightarrow W_t(\omega)$  est continue ;
- L'espérance conditionnelle  $E(W_t | W_s) = W_s$ , on dit que  $W$  est une martingale.

*Annexe 2 : Démonstration de la formule de Black & Scholes :*

Dans le modèle de B&S, le prix d'une action évolue selon le processus :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

Où:

- $S_t$  le prix de l'action à la date  $t$ .
- $\mu$  est le rendement.
- $\sigma$  est la volatilité.
- $B$  est un mouvement brownien.

L'équation précédente peut s'écrire :

$$d \ln(S_t) = \mu dt + \sigma dB_t$$

L'application du lemme d'Itô donne :

$$d \ln(S_t) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{S_t^2} d \langle S_t, S_t \rangle$$

$$d \langle S_t, S_t \rangle = \langle dS_t, dS_t \rangle$$

$$= \langle S_t \mu dt + S_t \sigma dB_t, S_t \mu dt + S_t \sigma dB_t \rangle$$

$$= \langle S_t \mu dt, S_t \mu dt \rangle + 2 \langle S_t \sigma dB_t, S_t \mu dt \rangle + \langle S_t \sigma dB_t, S_t \sigma dB_t \rangle$$

$$= \langle S_t \sigma dB_t, S_t \sigma dB_t \rangle$$

$$= S_t^2 \sigma^2 \langle dB_t, dB_t \rangle = S_t^2 \sigma^2 dt$$

L'équation précédente devient:

$$d \ln(S_t) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{S_t^2} S_t^2 \sigma^2 dt$$

$$= \mu dt + \sigma dB_t - \frac{\sigma^2}{2} dt$$

$$= \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t$$

Finalement :

$$S_T = S_t \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma (B_T - B_t) \right\}$$

On sait par ailleurs que les accroissements du mouvement brownien  $(B_T - B_t)$  suit une loi normale de variance  $T - t$ . Soit  $U$  une variable normale centrée réduite, on écrira :

$$B_T - B_t = \sqrt{T-t} \cdot U \quad \text{d'où :} \quad S_T = S_t \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} \cdot U \right\}$$

Considérons un Call de maturité  $T$ , de prix d'exercice  $K$  et de payoff  $\varphi_T = \max(S_T - K, 0)$

On a : 
$$C(t, S_t) = E^Q [\max(S_T - K, 0) e^{-r(T-t)} | S_t]$$

$$C_t = E^Q \left[ \max \left( S_t \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} \cdot U \right\} - K, 0 \right) e^{-r(T-t)} \right]$$

$$C_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \max \left( S_t \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} \cdot U - K \right\}, 0 \right) e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Notons que le maximum dans cette expression est nul lorsque :

$$S_t \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} \cdot U \right\} - K < 0$$

c.à.d :

$$\ln(S_t) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} \cdot U < \ln(K)$$

soit : 
$$U < -d_2, \quad \text{où} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

donc :

$$C_t = \int_{-d_2}^{+\infty} \left( S_t \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} \cdot U - K \right\} \right) e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Posons : 
$$I_1 = \int_{-d_2}^{+\infty} S_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma \sqrt{T-t} \cdot U} e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Et : 
$$I_2 = \int_{-d_2}^{+\infty} K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

En remarquant que la densité de la loi normale est une fonction symétrique, on obtient :

$$I_2 = K e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

En procédant au changement de variable  $v = u - \sigma \sqrt{T-t}$ , on obtient :

$$I_1 = S_t \int_{-d_2 - \sigma\sqrt{T-t}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

$$I_1 = S_t \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = S_t N(d_1)$$

$$\text{Où } d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$$

$$\text{On en déduit le prix du Call : } C_t = I_1 - I_2 = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

La formule du Put peut être démontrée à l'aide d'un calcul semblable, ou, plus simplement déduite de celle du Call et de la relation de parité Call-Put :

$$P_t = C_t - S_t + K e^{-r(T-t)}$$

### *Annexe 3: La Value at Risk (VaR)*

La *VaR* est une mesure de risque. Elle correspond à un montant de perte probable. Pour calculer la *VaR*, il faut spécifier deux paramètres, la période sur laquelle la variation de valeur est mesurée et le seuil de confiance.

La *VaR*, de niveau  $\alpha \in [0; 1]$  associée au risque  $X$  est donnée par l'égalité :

$$VaR(X, \alpha) = \inf \{x / P(X \leq x) > \alpha\}$$

*Annexe 4 : Courbe des taux fournie par l'institut des actuaires*

<i>Date</i>	<i>Taux zero coupon (2 décimales)</i>	<i>Taux zero coupon (5 décimales)</i>
31/12/2013	0,06	0,05753
31/12/2014	0,13	0,12516
31/12/2015	0,24	0,24064
31/12/2016	0,46	0,46113
31/12/2017	0,72	0,72408
31/12/2018	1,02	1,01964
31/12/2019	1,33	1,32515
31/12/2020	1,62	1,62322
31/12/2021	1,90	1,90275
31/12/2022	2,16	2,15745
31/12/2023	2,38	2,38438
31/12/2024	2,58	2,58290
31/12/2025	2,75	2,75380
31/12/2026	2,90	2,89884
31/12/2027	3,02	3,02032
31/12/2028	3,12	3,12083
31/12/2029	3,20	3,20305
31/12/2030	3,27	3,26960
31/12/2031	3,32	3,32298
31/12/2032	3,37	3,36547
31/12/2033	3,40	3,39913
31/12/2034	3,43	3,42577
31/12/2035	3,45	3,44693
31/12/2036	3,46	3,46395
31/12/2037	3,48	3,47791
31/12/2038	3,49	3,48972
31/12/2039	3,50	3,50010
31/12/2040	3,51	3,50962
31/12/2041	3,52	3,51874
31/12/2042	3,53	3,52778
31/12/2043	3,54	3,53699
31/12/2044	3,55	3,54655
31/12/2045	3,56	3,55658
31/12/2046	3,57	3,56715
31/12/2047	3,58	3,57829
31/12/2048	3,59	3,59001
31/12/2049	3,60	3,60231
31/12/2050	3,62	3,61514
31/12/2051	3,63	3,62848
31/12/2052	3,64	3,64228
31/12/2053	3,66	3,65650
31/12/2054	3,67	3,67108
31/12/2055	3,69	3,68597
31/12/2056	3,70	3,70112
31/12/2057	3,72	3,71648
31/12/2058	3,73	3,73201
31/12/2059	3,75	3,74767

## Annexe 5 : Code VBA

```

=====
'
'   Calcul de l'inverse de la fonction de répartition de la loi Normale centrée et réduite
'   Algorithme de Moro
'
=====

Function Moro_NormSInv(u)

    Dim a0, a1, a2, a3 As Double
    Dim b0, b1, b2, b3, b4 As Double
    Dim c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9 As Double
    Dim X As Double
    Dim r As Double

    a0 = 2.50662823884
    a1 = -18.6150062529
    a2 = 41.39119773534
    a3 = -25.44106049637
    b0 = 1
    b1 = -8.4735109309
    b2 = 23.08336743743
    b3 = -21.06224101826
    b4 = 3.13082909833
    c1 = 0.337475482272615
    c2 = 0.976169019091719
    c3 = 0.160797971491821
    c4 = 2.76438810333863E-02
    c5 = 3.8405729373609E-03
    c6 = 3.951896511919E-04
    c7 = 3.21767881768E-05
    c8 = 2.888167364E-07
    c9 = 3.960315187E-07
    X = u - 0.5
    If Abs(X) < 0.42 Then
        r = X ^ 2
        r = X * (((a3 * r + a2) * r + a1) * r + a0) / (((b4 * r + b3) * r + b2) * r + b1) * r + 1)
    Else
        If X > 0 Then r = Log(-Log(1 - u))
        If X <= 0 Then r = Log(-Log(u))
        r = c1 + r * (c2 + r * (c3 + r * (c4 + r * (c5 + r * (c6 + r * (c7 + r * (c8 + r * c9)))))))
        If X <= 0 Then r = -r
    End If

Moro_NormSInv = r

End Function

```

```

'-----
'
'   Calcul des facteurs D'actualisation
'   Modèle CIR
'
'-----
Function CIR_DF(r, R_inf, alpha, sigma, T_mat, Optional T = 0)
  Dim Gamma As Double, a As Double, b As Double
  Gamma = Sqr(alpha ^ 2 + 2 * sigma ^ 2)
  b = 2 * (Exp(Gamma * (T_mat - T)) - 1) / ((Gamma + alpha) * (Exp(Gamma * (T_mat - T)) - 1) + 2 * Gamma)
  a = ((2 * Gamma * Exp((alpha + Gamma) * (T_mat - T) * 0.5)) / ((Gamma + alpha) * _
  (Exp(Gamma * (T_mat - T)) - 1) + 2 * Gamma)) ^ (2 * alpha * R_inf / sigma ^ 2)

  CIR_DF = a * Exp(-b * r)
End Function
'-----
'
'   Calcul du prix de Call/Put
'   Formule de Back & Scholes
'
'-----
Function BS_STD(TypeOption, S, K, r, sigma, T)
  d1 = (Log(S / K) + (r + 0.5 * sigma ^ 2) * T) / (sigma * Sqr(T))
  d2 = d1 - sigma * Sqr(T)
  Z = Switch(TypeOption)
  BS_STD = Z * (S * Nd(Z * d1) - K * Exp(-r * T) * Nd(Z * d2))
End Function
Function Nd(d)
  Nd = WorksheetFunction.NormSDist(d)
End Function
Function Switch(TypeOption)
  TypeOption = UCase(TypeOption)
  If TypeOption = "C" Or TypeOption = "CALL" Then
    Switch = 1
  ElseIf TypeOption = "P" Or TypeOption = "PUT" Then
    Switch = -1
  End If
End Function
'-----

```

```

Sub BestEstimate()

    Dim r, rf, a, b, sigma_taux As Double
    Dim N, T_mat As Integer
    Dim m, sigma_action As Double

    '=====chargements des paramètres de l'actif=====

    Worksheets("Paramètres").Activate

    r0 = Range("r0").Offset(0, 1).Value
    a = Range("a").Offset(0, 1).Value
    b = Range("b").Offset(0, 1).Value
    sigma_taux = Range("sigma_taux").Offset(0, 1).Value

    TME0 = Range("TME0").Offset(0, 1).Value
    r0_IA = Range("r0_IA").Offset(0, 1).Value

    N = Range("N").Offset(0, 1).Value
    rf = Range("rf").Offset(0, 1).Value
    rf_15 = Range("rf_15").Offset(0, 1).Value
    rf_30 = Range("rf_30").Offset(0, 1).Value
    T_mat = Range("Maturité").Offset(0, 1).Value

    S0 = Range("S0").Offset(0, 1).Value
    mu = Range("mu").Offset(0, 1).Value
    sigma_action = Range("sigma_action").Offset(0, 1).Value
    rho = Range("rho").Offset(0, 1).Value

    prop_action = Range("prop_action").Offset(0, 1).Value
    prop_obligation = Range("prop_obligation").Offset(0, 1).Value

    '=====chargement des Hypothèses du Passif=====

    Worksheets("Hypothèses Actuarielles").Activate

    startDate = Range("Date_souscription").Offset(0, 1).Value
    endDate = Range("Date_terme").Offset(0, 1).Value
    duree_contrat = DateDiff("yyyy", startDate, endDate)
    TMG = Range("TMG").Offset(0, 1).Value
    tx_frais = Range("Frais").Offset(0, 1).Value
    tx_PB = Range("Taux_PB").Offset(0, 1).Value
    tx_PS = Range("Tx_PS").Offset(0, 1).Value
    Epargne0 = Range("Epargne0").Offset(0, 1).Value
    anciennete = Range("Ancienneté").Offset(0, 1).Value
    Sexe = Range("Sexe").Offset(0, 1).Value
    Age = Range("age moyen").Offset(0, 1).Value

    ' Loi de rachat

    alpha = Range("alpha").Offset(1, 0).Value
    beta = Range("beta").Offset(1, 0).Value
    lamda = Range("lamda").Offset(1, 0).Value
    theta = Range("theta").Offset(1, 0).Value
    Rmax = Range("Rmax").Offset(1, 0).Value
    Rmin = Range("Rmin").Offset(1, 0).Value

    ReDim RS(duree_contrat) As Double

    For j = 1 To duree_contrat

        If j <= duree_contrat - anciennete Then
            RS(j) = Range("RS").Offset(0, j + anciennete).Value
        Else
            RS(j) = Range("RS").End(xlToRight).Value
        End If

    Next j

```



```

'Loi de survie

Worksheets("mortalité").Activate

ReDim q_x(110) As Double

For i = 1 To 110

    If Sexe = "M" Then
        q_x(i) = Range("qx_TH").Offset(Age + i, 0).Value
    Else
        q_x(i) = Range("qx_TF").Offset(Age + i, 0).Value
    End If

Next i

Worksheets("Simulation BE").Activate

NbTraj = Range("NbTraj").Offset(0, 1).Value
V_Actif0 = Range("Actif_0").Offset(0, 1).Value
PM_0 = Range("PM_0").Offset(0, 1).Value
PPB_0 = Range("PPB_0").Offset(0, 1).Value
TME_0 = Range("TME_0").Offset(0, 1).Value

'Dimensionnement des tableaux de stockage de données

ReDim TME(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim TME_actu(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim V_Actif(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim TRAnnuel(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim tx_servi(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim tx_servi_attendu(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim RConj(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim tx_presta(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim PFD(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim BesoinIT(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim BesoinCible(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim PB_servi(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim PPB_repris(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim PPB(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim Flux_presta(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim presta_totale(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim tx_actu(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim ZC(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim PPB(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim Presta_actualise(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim PM(NbTraj, duree_contrat + 1) As Double
ReDim BE(NbTraj) As Double

For i = 1 To NbTraj
    S = S0
    r = r0
    TME(i, 1) = TME0
    VAN_B = Calcul_VAN(r, a, b, sigma_taux, N, rf, 0, T_mat)
    V_Actif(i, 1) = V_Actif0
    PM(i, 1) = PM_0
    PPB(i, 1) = PPB_0
    NB_S = prop_action * V_Actif(i, 1) / S
    NB_B = prop_obligation * V_Actif(i, 1) / VAN_B
    BE(i) = 0
    For j = 1 To duree_contrat

        Randomize
        epsilon1 = Moro_NormSInv(Rnd)
        Randomize
        eta = Moro_NormSInv(Rnd)
        epsilon2 = rho * epsilon1 + Sqr(1 - rho ^ 2) * eta

        'Projection Action avec modèle BS
        S = S * Exp((r - 0.5 * sigma_action ^ 2) + sigma_action * epsilon1)
        'Projection taux avec modèle CIR
        r = r + a * (b - r) + sigma_taux * Sqr(r) * epsilon2
        TME(i, j + 1) = TME(i, j) + a * (b - TME(i, j)) + sigma_taux * Sqr(TME(i, j)) * epsilon2
    Next j
Next i

```

```

VAN_B = Calcul_VAN(r(i, j + 1), a, b, sigma_taux, n, rf_30, 0, duree_contrat)
coupon = n * rf

V_Actif(i, j + 1) = NB_B * (VAN_B + coupon) + NB_S * S(i, j + 1)
TRAnnuel(i, j) = (V_Actif(i, j + 1) - V_Actif(i, j)) / V_Actif(i, j)

'Rebalancement de l'actif : 20% en Action et 80% en Oblig
NB_S = prop_action * V_Actif(i, j + 1) / S(i, j + 1)
NB_B = prop_obligation * V_Actif(i, j + 1) / VAN_B

'Mécanisme de PB : 90% PF
PFD(i, j) = tx_PB * WorksheetFunction.Max(PM(i, j) * TRAnnuel(i, j), 0)
'PFD(i, j) = PM(i, j) * TRAnnuel(i, j)

BesoinIT(i, j) = PM(i, j) * TMG
BesoinCible(i, j) = PM(i, j) * TME(i, j)

If j <= 8 Then

    PPB_repris(i, j) = PPB_reprise(PFD(i, j), PPB(i, j), BesoinIT(i, j), BesoinCible(i, j))

    If PPB_repris(i, j) > 0 Then

        For K = 1 To j - 1
            If PPB(i, K + 1) = 0 Then
                For T = 1 To K
                    PPB_dotation(i, T) = 0
                    PPB(i, T) = 0
                Next T
            End If
        Next K

        For K = 1 To j - 1
            If PPB(i, K + 1) > 0 Then

                For T = 1 To K

                    If PPB_dotation(i, T) > 0 Then

                        TMP(i, T) = PPB_dotation(i, T)

                        If TMP(i, T) >= PPB_repris(i, j) Then
                            TMP(i, T) = TMP(i, T) - PPB_repris(i, j)
                            PPB_dotation(i, T) = TMP(i, T)
                            Exit For
                        End If

                    Else

                        TMP(i, T) = TMP(i, T) + PPB_dotation(i, T + 1)

                        PPB_dotation(i, T) = 0
                        PPB_dotation(i, T + 1) = TMP(i, T) - PPB_repris(i, j)

                    End If

                Next T

            End If

        Next K

    End If
End If

```

```

PPB_dotation(i, j) = WorksheetFunction.Max(PFD(i, j) - WorksheetFunction.Max(BesoinCible(i, j), BesoinIT(i, j)), 0)
PB_servi(i, j) = PB_distribue(PFD(i, j), PPB(i, j), BesoinIT(i, j), BesoinCible(i, j))
PPB(i, j + 1) = WorksheetFunction.Max(PPB(i, j) + PPB_dotation(i, j) - PPB_repris(i, j), 0)

ElseIf j < duree_contrat Then

    PPB_repris(i, j) = PPB_reprise(PFD(i, j), PPB(i, j), BesoinIT(i, j), BesoinCible(i, j))

    If PPB_repris(i, j) > 0 Then

        For K = 1 To j - 1
            If PPB(i, K + 1) = 0 Then
                For T = 1 To K
                    PPB_dotation(i, T) = 0
                    PPB(i, T) = 0
                Next T
            End If
        Next K

        For K = 1 To j - 1
            If PPB(i, K + 1) > 0 Then

                For T = 1 To K

                    If PPB_dotation(i, T) > 0 Then

                        TMP(i, T) = PPB_dotation(i, T)

                        If TMP(i, T) >= PPB_repris(i, j) Then
                            TMP(i, T) = TMP(i, T) - PPB_repris(i, j)
                            PPB_dotation(i, T) = TMP(i, T)
                            Exit For
                        Else

                            TMP(i, T) = TMP(i, T) + PPB_dotation(i, T + 1)

                            PPB_dotation(i, T) = 0
                            PPB_dotation(i, T + 1) = TMP(i, T) - PPB_repris(i, j)

                        End If

                    End If

                Next T
                If PPB_dotation(i, T) > 0 Then
                    Exit For
                End If

            Next K

        End If

        PPB_repris(i, j) = PPB_reprise(PFD(i, j), PPB(i, j), BesoinIT(i, j), BesoinCible(i, j)) + PPB_dotation(i, j - 8)
        PPB_dotation(i, j) = WorksheetFunction.Max(PFD(i, j) - WorksheetFunction.Max(BesoinCible(i, j), BesoinIT(i, j)), 0)
        PB_servi(i, j) = PB_distribue(PFD(i, j), PPB(i, j), BesoinIT(i, j), BesoinCible(i, j)) + PPB_dotation(i, j - 8)
        PPB(i, j + 1) = WorksheetFunction.Max(PPB(i, j) + PPB_dotation(i, j) - PPB_repris(i, j), 0)

    Else
        PB_servi(i, j) = PFD(i, j) + PPB(i, j)
        PPB_repris(i, j) = PPB(i, j)
        PPB(i, j + 1) = 0
    End If

    'Calcul du taux de prestation de l'année
    tx_servi(i, j) = PB_servi(i, j) / PM(i, j)
    tx_servi_attendu(i, j) = tx_servi(i, j) - TME(i, j)

    RConj(i, j) = RachatConjoncturel(alpha, beta, lamda, theta, Rmin, Rmax, tx_servi_attendu(i, j))
    RT(i, j) = WorksheetFunction.Min(1, WorksheetFunction.Max(0, RS(j) + RConj(i, j)))

    If j < duree_contrat Then
        tx_presta(i, j) = q_x(j) + RT(i, j)
    Else
        tx_presta(i, j) = 1
    End If

```

```

'Flux de prestation
Flux_presta(i, j) = (PM(i, j) + PB_servi(i, j) - tx_prelev * PM(i, j)) * tx_presta(i, j)
presta_totale(i, j) = Flux_presta(i, j) + tx_frais * PM(i, j)
tx_actu(i, j) = CIR_DF(r0, b, a, sigma_taux, j, 0)
ZC(i, j) = ZCPrice_to_ZCRate(tx_actu(i, j), j, 0)
Presta_actualise(i, j) = presta_totale(i, j) * tx_actu(i, j)

'Epargne au 31/12
PM(i, j + 1) = WorksheetFunction.Max(PM(i, j) * (1 - tx_prelev) + PB_servi(i, j) * (1 - tx_PS) - Flux_presta(i, j), 0)

'Best Estimate simulation i
BE(i) = BE(i) + Presta_actualise(i, j)

'Calcul duration Passif
dur_num(i) = dur_num(i) + Presta_actualise(i, j) * j
Duration(i) = dur_num(i) / BE(i)

Next j

Next i

'Calcul du BestEstimate et l'intervalle de confiance
BestEstimate(1) = WorksheetFunction.Average(BE)
BestEstimate(2) = BestEstimate(1) - 1.96 * WorksheetFunction.StDev(BE) / Sqr(NbTraj)
BestEstimate(3) = BestEstimate(1) + 1.96 * WorksheetFunction.StDev(BE) / Sqr(NbTraj)

Range("BE_Borne_inf").Offset(1, 0) = BestEstimate(2)
Range("BE_Moyen").Offset(1, 0) = BestEstimate(1)
Range("BE_Borne_Sup").Offset(1, 0) = BestEstimate(3)

End Sub

```

---

## Bibliographie :

### Ouvrages :

- Pierre Petauton, Michel Fromenteau- THEORIE ET PRATIQUE DE L'ASSURANCE VIE- 4<sup>ème</sup> édition, DUNOD.
- Frédéric PLANCHET, Pierre THEROND, Aymric KAMEGA- SCENARIOS ECONOMIQUES EN ASSURANCE, Modélisation et simulation-Economica.
- John HULL – Options, futures et autres actifs dérivés, 6<sup>ème</sup> édition – Person Education France.
- Roland PORTAIT, Patrice PONCET - FINANCE DE MARCHE. Instruments de base, produits dérivés, portefeuilles et risques - 2<sup>ème</sup> édition, DALLOZ.

### Publications :

- Journal officiel de l'Union européenne – Directive 2009/138/CE du Parlement européen et du conseil du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II)- 17/12/2009
- EUROPEAN COMMISSION – LTGA Technical Specifications – 28/01/2013
- ACPR – Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques
- ACPR – Analyse de l'exercice 2014 de préparation à Solvabilité II.
- FFSA – Rapport annuel 2013.
- BLACK F., SCHOLLES M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. The Journal of Political Economy 81, 637-654

### Mémoires d'actuariat :

- Jim RASQUE – Mesure et gestion du risque de marché dans l'environnement Solvabilité II – Mémoire ISFA 2011.
- Emmanuel OHNOUNA - Evaluation du Best Estimate de contrats d'épargne en euros – Mémoire ULP Strasbourg 2008.
- Esther AIDAN & Gaëlle MIONE – Développement d'un outil de simulation dans le cadre de Solvency II – Mémoire ENSAE

### Sites internet :

- [www.ffsa.fr](http://www.ffsa.fr)
- <https://eiopa.europa.eu/>
- [www.institutdesactuaires.com](http://www.institutdesactuaires.com)
- [www.ressources-actuarielles.net](http://www.ressources-actuarielles.net)
- <http://acpr.banque-france.fr/lacpr.html>
- [www.legifrance.gouv.fr/](http://www.legifrance.gouv.fr/)

## Tables des illustrations

FIGURE 1 : <i>BILAN ECONOMIQUE SOUS SOLVABILITE II</i> .....	8
FIGURE 2 : <i>LE PROCESSUS LAMFALUSSY</i> .....	9
FIGURE 3 : <i>LES 3 PILIERS DE SOLVABILITE II</i> .....	12
FIGURE 4 : <i>CALENDRIER DE LA REFORME SOLVABILITE II</i> .....	13
FIGURE 5 : <i>STRUCTURE GENERALE DU SCR</i> .....	15
FIGURE 6 : <i>PRINCIPE DE CALCUL DU CAPITAL REQUIS</i> .....	17
FIGURE 7 : <i>DEFORMATIONS RELATIVES A APPLIQUER SUR LA COURBE DES TAUX</i> .....	19
FIGURE 8 : <i>FLUX AFFERENTS AU CONTRAT</i> .....	34
FIGURE 9 : <i>TAUX DE RACHAT STRUCTUREL EN FONCTION DE L'ANCIENNETE DU CONTRAT</i> .....	38
FIGURE 10 : <i>TAUX DE RACHAT CONJONCTUREL FOURNIS PAR L'ACPR</i> .....	40
FIGURE 11 : <i>GRAPHE DES TAUX DE RACHAT CONJONCTUREL</i> .....	40
FIGURE 12 : <i>SCHEMA DE REVALORISATION DE L'EPARGNE</i> .....	45
FIGURE 13 : <i>COURBE DES TAUX FOURNIE PAR L'INSTITUT DES ACTUAIRES</i> .....	51
FIGURE 14 : <i>TRAJECTOIRE DE LA COURBE DES TAUX OBTENU A L'AIDE DU MODELE CIR</i> .....	53
FIGURE 15 : <i>FREQUENCE DES CONTRATS PAR ANCIENNETE</i> .....	58
FIGURE 16 : <i>FREQUENCE DES CONTRATS PAR ANCIENNETE</i> .....	59
FIGURE 17 : <i>PYRAMIDE DES AGES</i> .....	59
FIGURE 18 : <i>QUANTILE DES AGES</i> .....	59
FIGURE 19 : <i>FREQUENCE PAR TRANCHE D'AGE</i> .....	59
FIGURE 20 : <i>REPARTITION DE LA PROVISION MATHEMATIQUE AU 31/12/2013</i> .....	60
FIGURE 21 : <i>MODEL POINTS</i> .....	61
FIGURE 22 : <i>REPARTITION DU PORTEFEUILLE OBLIGATAIRE</i> .....	62
FIGURE 23 : <i>REPARTITION DES ACTIFS EN PORTEFEUILLE</i> .....	63
FIGURE 24 : <i>SCHEMA GENERAL DE CALCUL DU BEST ESTIMATE</i> .....	64
FIGURE 25 : <i>MODELE MIS EN PLACE POUR LE CALCUL DU BEST ESTIMATE</i> .....	67
FIGURE 26 : <i>CONVERGENCE DU BEST ESTIMATE</i> .....	68
FIGURE 27 : <i>EVOLUTION DU BEST ESTIMATE EN FONCTION DU TMG</i> .....	70
FIGURE 28 : <i>LE BILAN ECONOMIQUE DE LA SOCIETE</i> .....	71
FIGURE 29 : <i>DECOMPOSITION DU SCR DES ORGANISMES MIXTES</i> .....	72
FIGURE 30 : <i>DECOMPOSITION DU SCR</i> .....	79
FIGURE 29 : <i>L'EXIGENCE EN CAPITAL EN FONCTION DU NOMBRE ET DU RATING DES CONTREPARTIES</i> .....	89
FIGURE 30 : <i>RATIO DE SOLVABILITE ET PROBABILITE DE DEFAULT ASSOCIEE (SOURCE LTGA)</i> .....	91