

Mémoire présenté devant l'ENSAE Paris
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires
le 10/11/2023

Par : **Bruno Detchinli**

Titre : **Allocation stratégique d'actifs sous contrainte de SCR -
Construction d'un proxy du SCR en fonction de
l'allocation cible d'actifs par des modèles de régression**


Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de la filière

Entreprise : WTW


Nom : BARADEL Nicolas

Signature : 

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaires*

Directeur du mémoire en entreprise :


Nom : COFFARD Estelle

Signature : 

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)**


Secrétariat :

Signature du responsable entreprise



Bibliothèque :

Signature du candidat



Remerciements

Je ne peux commencer ce rapport sans adresser respectueusement mes sincères remerciements à Estelle COFFARD et Gaël GOUBA pour leurs encadrements, leurs explications et conseils avisés. Leurs disponibilités ont été sans faille et leurs encouragements m'ont galvanisé tout au long de ce mémoire. Je remercie également Mounir BELLMANE pour la relecture de ce rapport, et pour toutes ses remarques qui ont été pertinentes, aboutissant à ce rendu final.

Mes remerciements vont également à l'endroit de Amine CHERQUAOUI, directeur de l'équipe ICT Life, et Bertrand PITAVY, directeur de ICT France pour m'avoir permis de rejoindre WTW, et d'effectuer mon alternance en travaillant sur diverses thématiques aussi instructives les unes que les autres.

J'exprime également toute ma reconnaissance à l'endroit de Madame Caroline HILLAIRET, responsable de la voie Actuariat à l'ENSAE Paris, et de Monsieur Nicolas BARADEL, mon encadrant académique, pour leurs conseils, leur bienveillance et leurs disponibilités tout au long de cette année.

Pour finir, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers toutes les personnes qui m'ont soutenu tout au long de ce voyage académique. Je remercie ma famille pour leur soutien inébranlable et leurs encouragements. Leur amour et leur appui ont été ma source d'inspiration tout au long de mon parcours universitaire. Je n'oublie pas mes amis qui m'ont soutenu dans les moments de doute et de stress. Enfin, je remercie tous les enseignants, les camarades de classe et les collègues de ICT France qui ont contribué, de près ou de loin, à enrichir mon expérience académique. Ce mémoire n'aurait pas été possible sans vous tous.

Merci du fond du cœur.

À vous...

Résumé

En moins de deux ans après la pandémie de covid 19, le contexte économique a considérablement évolué. Il est marqué au 31/12/2022 par une forte inflation, une remontée rapide des taux d'intérêts et une forte volatilité sur les marchés financiers. Les compagnies d'assurance, notamment celles d'assurance-vie, ne sont pas insensibles à ce changement brusque. Elles doivent revoir leurs politiques d'investissement afin d'assurer leurs solvabilités et leurs rentabilités. Concrètement, ces politiques d'investissement visent à trouver l'allocation ou la composition du portefeuille d'actifs à détenir afin de maximiser la richesse finale du portefeuille, et à minimiser le risque pris pour cela. Le sujet de l'allocation stratégique d'actifs est alors non seulement un sujet important pour les assureurs-vie, mais il est également d'actualité.

La nature de l'activité amène les assureurs-vie à utiliser des modèles complexes de gestion actif/passif ou modèles ALM tout en respectant les normes prudentielles. L'une des contraintes prudentielles auxquelles est soumis l'assureur-vie est justement le provisionnement d'une charge en capital SCR pour assurer sa solvabilité sur un an avec une probabilité de 99.5%. L'immobilisation de cette charge en capital s'avère être coûteuse pour l'assureur qui a tout intérêt à l'amenuiser le plus possible. Les assureurs doivent donc ajouter au problème de maximisation/minimisation énoncé précédemment, une contrainte de SCR, en lien avec son appétence au risque.

Ainsi d'un point de vue théorique, la recherche de l'allocation optimale passe par la détermination pour chaque allocation admissible, de la distribution de la richesse sur un horizon de temps donné, et du SCR associé. Cependant, de fortes contraintes opérationnelles complexifient la mise en œuvre d'un tel processus calculatoire, notamment les limites en ressources de calculs (serveurs externes etc...), ressources humaines limitées, délais de production courts et incompressibles etc.

Ce mémoire propose une approche de prise en compte du SCR dans la détermination de l'allocation stratégique optimale d'actifs. Elle vise à alléger considérablement le processus de calcul via la calibration d'un proxy du SCR en fonction de l'allocation d'actifs. L'objectif est de fournir pour chaque allocation le SCR associé sans avoir à faire des projections de bilan au moyen de modèle ALM. La méthode d'approximation mise en évidence lors de ce mémoire est l'approximation des SCR net de chaque sous-module de risque de marché. Cette méthode a permis d'obtenir des résultats intéressants dans l'évaluation de la l'allocation stratégique d'actifs pour améliorer la prise de décision.

Abstract

In less than two years since the covid 19 pandemic, the economic context has changed considerably. By 12/31/2022, it is marked by high inflation, a rapid rise in interest rates and high volatility on the financial markets. Insurance companies, particularly life insurers, are not immune to this sudden change. They need to review their investment policies to ensure their solvency and profitability. In concrete terms, these investment policies aim to find the allocation or composition of assets portfolio to be held in order to maximize the portfolio's ultimate wealth, and to minimize the risk taken in doing so. The subject of strategic asset allocation is therefore not only an important one for life insurers, but also a topical one.

The nature of the business requires life insurers to use complex asset liability management (ALM) models, while complying with prudential standards. One of the prudential constraints to which life insurers are subject is the provisioning of an SCR capital charge to ensure solvency over one year with a probability of 99.5%. This capital charge is costly for the insurer, who has every interest in reducing it as much as possible. Insurers therefore need to add an SCR constraint to the maximization/minimization problem described above, in line with their risk appetite.

Thus, from a theoretical point of view, the search for the optimal allocation involves determining, for each admissible allocation, the distribution of wealth over a given time horizon, and the associated SCR. However, the implementation of such a computational process is hampered by a number of operational constraints : limited computational resources (external servers, etc....), limited human resources, short and incompressible production lead times, and so on.

This study proposes a method for taking SCR into account when determining the optimal strategic asset allocation. The aim of this method is to considerably simplify the calculation process by calibrating a proxy of the SCR as a function of the asset allocation. The aim is to provide the associated SCR for each allocation, without the need for balance sheet projections using ALM models. The approximation method highlighted in this study is the approximation of the net SCR of each market risk sub-module. This method has produced interesting results in the evaluation of strategic asset allocation to improve decision-making.

Note de synthèse

0.0 CADRE DE L'ÉTUDE

Les compagnies d'assurance, particulièrement celles d'assurance vie, sont des institutions financières qui jouent un rôle important d'investissement de l'épargne des particuliers dans l'économie. Elles sont, à cet effet, très réglementées afin de protéger l'investissement des épargnants.

L'actuaire a alors un rôle important à jouer dans la gestion des actifs afin d'assurer un certain niveau de rendement et un certain niveau de risque. Cette gestion d'actifs est d'autant plus compliquée dans la mesure où il doit également prendre en compte le passif et ses flux. De plus, la variété des profils de risque des assurés présents dans son portefeuille est une variable importante qui peut influencer considérablement la stratégie mise en place.

Le contexte économique doit également être pris en compte. La remontée des taux d'intérêt après la pandémie de covid 19 depuis 2020, associée à la volatilité des marchés et une inflation forte, ont marqué la fin de l'année 2022 et le premier semestre 2023. Cette situation affecte le bilan de l'assureur.

Il existe donc actuellement pour les compagnies d'assurance-vie un réel besoin de définition optimale de la composition de leurs portefeuilles d'actifs. L'actuaire doit mettre en place une stratégie d'allocation d'actifs afin d'assurer la solvabilité et la rentabilité de son activité : c'est la stratégie d'allocation optimale d'actifs.

0.0 PROBLÉMATIQUE

Pour ce faire, l'actuaire dispose d'un certain nombre de méthodes ou de modèles.

D'abord, les modèles de matching ou d'immunisation permettent, comme leur nom l'indique, d'immuniser un portefeuille face à un risque spécifique en raccordant des indicateurs caractéristiques de ce risque. On distingue deux types de modèles d'immunisation. Les modèles de *duration matching* permettent d'immuniser le portefeuille contre le risque de taux en faisant concorder les durations de l'actif et du passif. Les modèles de *cashflow matching* permettent d'immuniser le portefeuille contre le risque de liquidité en faisant concorder directement les flux futurs de trésorerie de l'actif et du passif.

Mais, ces modèles d'immunisation ne sont pas adaptés pour appréhender la spécificité du portefeuille d'actifs de l'assurance et la complexité des interactions de ce dernier avec le passif. Face à ces insuffisances, des modèles de plus en plus complexes voient le jour. La gestion des actifs en assurance a lors pu bénéficier de la théorie moderne du portefeuille initiée par Markowitz en 1952. Ce dernier propose un formalisme théorique de la gestion d'actifs et de l'allocation stratégique d'actifs en ramenant le problème à un problème

d'optimisation sous contrainte et en intégrant la notion de risque.

La théorie moderne du portefeuille est un problème d'optimisation qui consiste à arbitrer entre le rendement et le risque d'un portefeuille d'actifs risqués. Il permet de définir la composition optimale que doit avoir le portefeuille pour maximiser le rendement global tout en minimisant le risque associé. L'ensemble des portefeuilles qui respectent ces deux conditions est la frontière efficiente.

Même en ayant défini la frontière efficiente du portefeuille, une question subsiste encore. Lequel de ces portefeuilles optimaux correspond au mieux à l'assureur-vie comme un investisseur? La théorie introduit la notion d'aversion au risque matérialisée par un objet mathématique appelé fonction d'utilité. Cette dernière permet de représenter l'appréhension ou non d'un investisseur à prendre des positions risquées en quête de rendement. Traditionnellement on distingue les fonctions d'utilité de type CARA (*Constant Absolute Risk Aversion*) qui traduit une aversion au risque constante de l'investisseur indépendante de sa richesse finale. Pour cette famille, la fonction d'utilité s'écrit, pour un paramètre γ comme

$$U : x \rightarrow -\exp(-\gamma x) \text{ pour } \gamma \geq 0.$$

Nous avons pu mettre en exergue un autre type de fonction d'utilité qui représenterait mieux le profil de l'assureur-vie. Il s'agit des fonctions d'utilité de type IARA (*Increasing Absolute Risk Aversion*) où l'aversion au risque est une fonction croissante de la richesse finale. Les fonctions IARA ont une fonction d'utilité qui s'écrit pour un paramètre α , comme :

$$U : x \in \mathbb{R}^n \rightarrow x - \alpha x^2, \text{ avec } \alpha \geq 0.$$

En effet, l'assureur-vie investit l'épargne des particuliers, et ne peut se permettre de prendre des positions très risquées au risque de tout perdre. La norme Solvabilité 2 veille d'ailleurs à cela.

Nous justifions cela en prenant un univers d'investissement composé des actifs obligations souveraines, obligations d'entreprises, actions et immobilier dont les caractéristiques ont été calibrées au 31 décembre 2022. Sous l'hypothèse forte de normalité de la richesse finale, nous sommes arrivés à écrire une correspondance des problèmes d'allocation optimale pour les deux fonctions. Cela a permis de dégager par ailleurs la valeur du paramètre (γ pour la fonction CARA et α pour la fonction IARA) qui caractériserait le profil de l'assureur-vie comme investisseur.

<i>Paramètre γ</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>5</i>
<i>Actif</i>				
<i>Obligations d'État</i>	0%	0%	0%	9.61%
<i>Obligations d'entreprises</i>	0%	0%	0%	32.64%
<i>Action</i>	100%	83.90%	41.11%	12.57%
<i>Immobilier</i>	0%	16.10%	58.89%	45.18%

TABLEAU 1 – Allocations optimales pour une fonction d'utilité CARA.

<i>Paramètre α</i>	<i>0</i>	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2.5</i>
<i>Actif</i>				
<i>Obligations d'État</i>	0%	0%	0%	17.95%
<i>Obligations d'entreprises</i>	0%	0%	0%	34.29%
<i>Action</i>	100%	77.29%	35.42%	8.37%
<i>Immobilier</i>	0%	22.71%	64.58%	39.39%

TABLEAU 2 – Allocations optimales pour une fonction d'utilité IARA.

Nous avons ainsi montré que pour un même niveau d'aversion au risque ($\alpha = \gamma/2$), la fonction IARA allouait plus de poids aux obligations au détriment des actions qui sont plus risquées. Il s'agit d'une conséquence de la norme Solvabilité 2 qui incite les assureurs à privilégier des positions sûres et à bénéficier de la faible présence du risque de spread sur les obligations ; ce qui contribue à mieux diversifier le portefeuille.

Néanmoins, la complexité de l'activité de l'assureur nécessite d'avoir recours à une architecture de modélisation adaptée. Il s'agit des modèles ALM. Notre approche de détermination du portefeuille efficient consistera en une projection du bilan de l'assureur afin de déterminer les indicateurs d'intérêts comme la distribution de la valeur actualisée des profits futurs (PVFP) et le SCR global du portefeuille. Or, dans cette étude, le calcul du SCR pour une allocation nécessite l'exécution d'une projection stochastique sur 1000 scénarios risque neutre. Avec les ressources à disposition, la production du SCR pour une seule allocation est déjà très fastidieuse et chronophage. Il est inimaginable d'en produire pour des centaines d'allocations cibles à tester.

Afin de s'affranchir de cette contrainte opérationnelle, nous nous sommes proposés comme problématique secondaire de construire un proxy du SCR en fonction de l'allocation cible.

0.0 MÉTHODOLOGIE D'APPROXIMATION DES SCR DE CHAQUE SOUS MODULE DE RISQUE DE MARCHÉ

L'autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles (EIOPA) a défini une méthodologie de calcul du SCR appelée la formule standard. Cette méthodologie distingue les risques inhérents à l'activité de l'assureur en modules de risques dont les charges en capital sont agrégées au moyen de matrices de corrélations.

La formule standard présente le SCR de marché comme l'agrégation des SCR des sous modules de risque de marché : taux, actions, immobilier, spread, change, concentration.

$$SCR_{marché} = \sqrt{\sum_{r,c} CorrMarché_{r,c} * SCR_r^{marché} * SCR_c^{marché}} \quad (1)$$

où :

- $SCR_r^{marché}$ est le besoin en capital requis pour le sous-module de risque $r \in \{actions, taux, spread, concentration, change, immobilier\}$;
- $CorrMarché_{r,c}$ est la corrélation entre les sous-modules de risque r et c fournie par l'EIOPA.

La méthode d'approximation consistera à trouver un proxy du SCR net de chaque sous-module du risque de marché en fonction de l'allocation. Puis, ces SCR seront agrégés au moyen de la matrice de corrélation des sous-modules de risque afin de produire le SCR de marché, et par extension le SCR global du portefeuille. Limités par les ressources, nous avons produit les SCR de 29 allocations que nous avons définies avec soin pour "bien" calibrer les algorithmes.

Ensuite, nous avons eu recours aux modèles de régressions comme la régression linéaire, les modèles linéaires généralisés et les arbres de décisions. Comme les SCR sont de grands montants, la calibration du proxy telle quelle sur le SCR a révélé une très grande variance de l'erreur de prédiction. Nous avons procédé à deux méthodes de mise à l'échelle. La première consiste à standardiser les SCR (centrer et réduire) et la seconde consiste à diviser tous les SCR par le SCR d'une allocation de référence.

Enfin, en définissant des indicateurs de performance comme l'erreur quadratique moyenne (MSE), l'erreur relative moyenne (MAPE), l'erreur maximale sur une prédiction et le coefficient de détermination R^2 , nous avons calibré les différents proxys. Comme notre portefeuille d'actifs ne comporte pas d'expositions en devises, le SCR au titre du risque de change est nul. De plus, comme il n'y a pas d'absorption au titre du SCR concentration (on a SCR brut = SCR net), nous ne calibrons pas de proxy pour le SCR concentration.

Les modèles GLM gamma se sont révélés bien performants pour appréhender l'évolution du SCR net de chaque sous module de risque de marché en fonction de l'allocation cible du portefeuille. Ils offrent l'avantage de fournir une formule fermée à travers les coefficients estimés. Les arbres de décisions ont également montré de bonnes performances. Bien qu'ils ne fournissent pas de formule fermée pour les proxys, les arbres de décisions offrent l'avan-

tage d'être interprétables. Il se s'agit pas de modèles *boîte noire*. L'analyse en profondeur des règles de décisions établies ne permet pas toujours de valider la pertinence de l'algorithme.

0.0 DÉTERMINATION DE L'ALLOCATION OPTIMALE

La recherche de l'allocation optimale a consisté à produire les couples rendement/risque associés aux portefeuilles résultant de toutes les combinaisons des différentes classes d'actifs. Il s'agit de milliers d'allocations possibles pour lesquelles il aurait fallu produire tous les indicateurs de rendement, de risque et de charge en capital. En se servant des résultats de la théorie du portefeuille, il a été possible de réduire considérablement l'ensemble admissible de portefeuilles à 92 allocations. La richesse finale a été définie comme la valeur actuelle des profits futurs. Le rendement et le risque associés sont calculés respectivement comme la moyenne et le quantile de niveau 98% de la distribution de la richesse finale. Il a également été possible de prédire les SCR associés en utilisant les modèles GLM gamma calibrés à cet effet.

La prise en compte de la charge en capital passe la détermination de son coût d'immobilisation qui pénalise la distribution de la richesse finale. Les résultats obtenus ont révélé que les allocations optimales (celles qui offrent les meilleurs arbitrages rendement/risque) ont tendance à être composées majoritairement d'obligations, comme le montre la figure suivante.

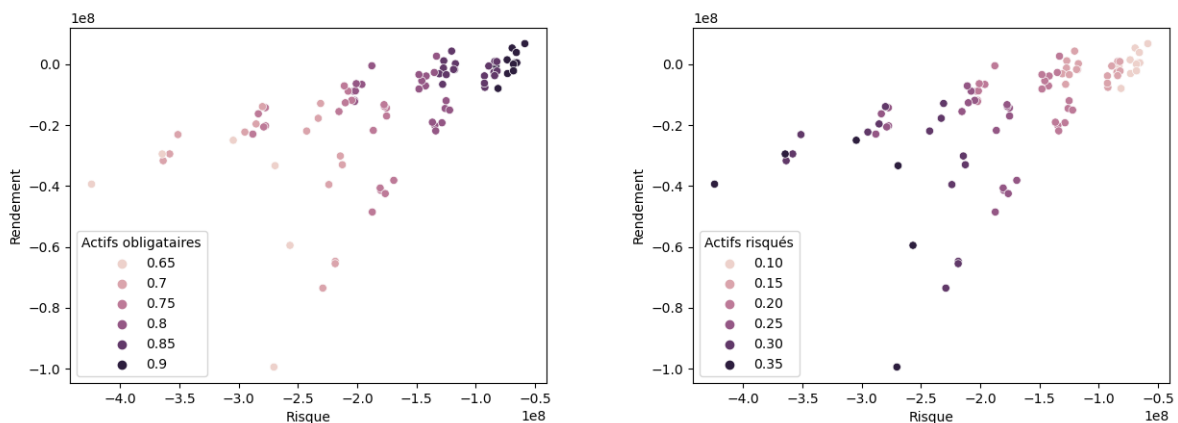


FIGURE 1 – Nuage de points formé par les couples rendement/risque selon la nature des actifs avec prise en compte du coût de portage du SCR.

Le choix d'un quantile de la distribution de la richesse finale, plutôt que la variance par exemple, contribue à inciter l'assureur à investir dans des actifs moins risqués. La prise en compte du coût de portage a certes changé les niveaux des rendements et des risques des différentes allocations, mais la répartition du nuage de points reste cohérente. Les modèles de régression calibrés se sont révélés efficaces malgré le peu de données à disposition.

L'étude a permis de définir alors pour chaque allocation les niveaux de rendement, de risque de charge en capital associés. Le choix final de l'allocation finale revient à l'assureur.

Il doit le définir selon les stratégies de la compagnie, en accord avec son appétence au risque, et de sa capacité à supporter le coût de portage ou d'immobilisation du SCR.

De plus, ce choix devra prendre en compte le rendement de l'actif ou de la stratégie d'investissement. L'allocation optimale devra sans aucun doute permettre à l'assureur d'honorer ses prestations contractuelles (TMG), et d'effectuer des prestations discrétionnaires (PB). L'assureur-vie cherchera alors l'allocation pour laquelle le rendement moyen de l'actif sur la période de projection lui permettrait d'honorer ses engagements. Afin de visualiser cela, nous présentons également la répartition des couples rendement/risque suivant le rendement net (de frais financiers et de taxes) de l'actif à la figure suivante.

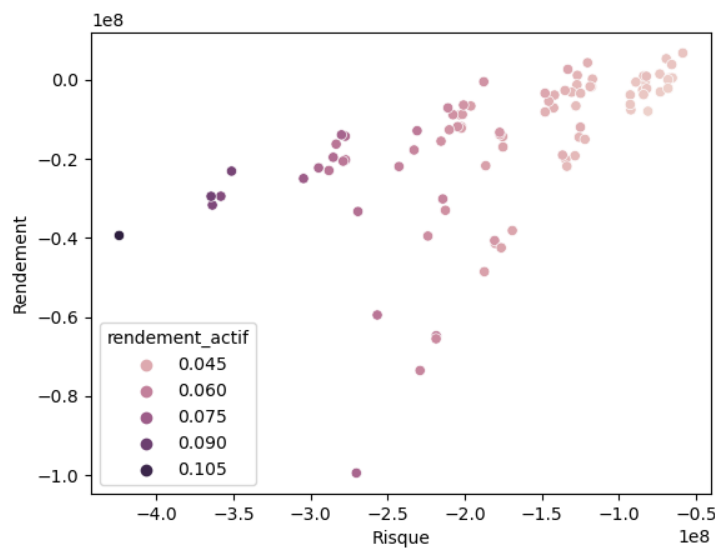


FIGURE 2 – Couples rendement/risque déclinés suivant le rendement net de l'actif.

La figure précédente indique logiquement que les allocations qui permettent d'obtenir les plus grands rendements de l'actif sont celles qui ont un critère de risque très faible (donc très risquées). Cette situation met en lumière le cadre spécifique de l'assurance où le choix de l'allocation optimale n'est pas uniquement le résultat d'un problème d'optimisation. Il prend en compte de nombreux paramètres tous en lien avec les stratégies financières de la compagnie, de l'appétence au risque et la capacité à supporter un coût d'immobilisation plus ou moins important de la charge en capital.

0.0 LIMITES ET PERSPECTIVES

Pour cette étude, nous avons fait l'hypothèse forte selon laquelle seul le module de risque de marché est sensible à l'allocation du portefeuille. Cette hypothèse n'est certainement pas réaliste. Les résultats de prédiction de la charge en capital qui ont été utilisés pour l'analyse des allocations optimales sont potentiellement biaisés. Pour une meilleure précision des résultats, il aurait fallu procéder de manière similaire avec les autres modules de risques techniques. Cela pourra certainement faire l'objet d'une amélioration de cette étude.

Executive summary

0.0 STUDY SCOPE

Insurance companies, particularly life insurance companies, are financial institutions that play an important role in investing the savings of individuals in the economy. To this end, they are highly regulated in order to protect people savings.

The actuary has an important role to play in asset management, to ensure a certain level of return and a certain level of risk. Asset management is even more complicated by the fact that the actuary also has to take into account liabilities and cash flows. In addition, the variety of risk profiles of the policyholders in his portfolio is an important variable that can considerably influence the strategy implemented.

The economic context must also be taken into account. The rise in interest rates following the covid 19 pandemic since 2020, combined with market volatility and high inflation, have marked the end of 2022 and the first semester of 2023. This situation affects the insurer's balance sheet.

Life insurance companies therefore have a real need to define the optimal composition of their asset portfolios. The actuary must implement an asset allocation strategy to ensure the solvency and profitability of his business : this is the optimal asset allocation strategy.

0.0 PROBLEMATIC

To do this, the actuary has a number of methods or models at his disposal.

Firstly, matching or immunization models, as their name suggests, make it possible to immunize a portfolio against a specific risk by matching indicators characteristic of that risk. There are two types of immunization models. Duration matching models immunize the portfolio against interest-rate risk by matching asset and liability durations. Cashflow matching models immunize the portfolio against liquidity risk by directly matching the future cash flows of assets and liabilities.

However, these immunization models are ill-suited to the specific nature of the insurance asset portfolio and the complexity of its interactions with liabilities. Faced with these shortcomings, increasingly complex models are being developed. Insurance asset management has benefited from the modern portfolio theory initiated by Markowitz in 1952. Markowitz proposed a theoretical formalism for asset management and strategic asset allocation, reducing the problem to one of constrained optimization and integrating the notion of risk.

Modern portfolio theory is an optimization problem involving the trade-off between return and risk in a portfolio of risky assets. It defines the optimal portfolio composition to maximize overall return while minimizing associated risk. The set of portfolios meeting

these two conditions is the efficient frontier.

Even after defining the portfolio's efficient frontier, one question remains. Which of these optimal portfolios best suits the life insurer as an investor? The theory introduces the notion of risk aversion, materialized by a mathematical object known as the utility function. The latter represents an investor's willingness or unwillingness to take risky positions in search of returns. Traditionally, a distinction is made between CARA-type utility functions (Constant Absolute Risk Aversion), which reflect an investor's constant risk aversion, independent of his final wealth. For this family, the utility function is written, for a parameter γ as

$$U : x \rightarrow -\exp(-\gamma x) \text{ pour } \gamma \geq 0$$

We have been able to highlight another type of utility function that better represents the life insurer's profile. These are IARA (Increasing Absolute Risk Aversion) utility functions, where risk aversion is an increasing function of final wealth. IARA functions have a utility function written for a parameter α , as :

$$U : x \in \mathbb{R}^n \rightarrow x - \alpha x^2, \text{ avec } \alpha \geq 0 \quad (2)$$

Life insurers invest the savings of individuals, and cannot afford to take very risky positions at the risk of losing everything. This is what the Solvency 2 standard is all about.

We justify this by taking an investment universe composed of sovereign bond, corporate bond, equity and real estate assets whose characteristics have been calibrated to December 31, 2022. Under the strong assumption of normality of final wealth, we were able to write a correspondence of optimal allocation problems for the two functions. This also enabled us to identify the value of the parameter (γ for the CARA function and α for the IARA function) that would characterize the life insurer's profile as an investor.

<i>Parameter : γ</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>5</i>
<i>Asset</i>				
<i>Government bonds</i>	0%	0%	0%	9.61%
<i>Corporate bonds</i>	0%	0%	0%	32.64%
<i>Equity</i>	100%	83.90%	41.11%	12.57%
<i>Estate</i>	0%	16.10%	58.89%	45.18%

TABLEAU 3 – Optimal allocations according to CARA utility function.

<i>Parameter : α</i>	<i>0</i>	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2.5</i>
<i>Asset</i>				
<i>Government bonds</i>	0%	0%	0%	17.95%
<i>Corporate bonds</i>	0%	0%	0%	34.29%
<i>Equity</i>	100%	77.29%	35.42%	8.37%
<i>Estate</i>	0%	22.71%	64.58%	39.39%

TABLEAU 4 – Optimal allocations according to IARA utility function.

We have shown that for the same level of risk aversion ($\alpha = \gamma/2$), the IARA function allocates more weight to bonds, to the detriment of riskier equities. This is a consequence of the Solvency 2 standard, which encourages insurers to favour safe positions and benefit from the low spread risk on bonds, thus contributing to better portfolio diversification.

Nevertheless, the complexity of the insurer’s business requires the use of an adapted modeling architecture. These are ALM models. Our approach to determining the efficient portfolio consists in projecting the insurer’s balance sheet in order to determine indicators of interest such as the distribution of the present value of future profits (PVFP) and the overall SCR of the portfolio. In this study, calculating the SCR for an allocation requires running a stochastic projection on 1000 risk-neutral scenarios. With the resources available, producing the SCR for a single allocation is already very tedious and time-consuming. It is unimaginable to produce one for hundreds of target allocations to be tested.

In order to free ourselves from this operational constraint, we proposed as a secondary problem to construct a proxy of the SCR as a function of the target allocation.

0.0 METHODOLOGY FOR APPROXIMATING THE SCR OF EACH MARKET RISK SUB-MODULE

The European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA) has defined a methodology for calculating the SCR, known as the standard formula. This methodology distinguishes the risks inherent in the insurer’s business into risk modules, whose capital charges are aggregated using correlation matrices.

The standard formula presents the market SCR as the aggregate of the SCRs of the market risk sub-modules : interest rates, equities, real estate, spread, foreign exchange and concentration.

$$SCR_{market} = \sqrt{\sum_{r,c} CorrMarket_{r,c} * SCR_r^{market} * SCR_c^{market}} \quad (3)$$

where :

— SCR_r^{market} is the capital requirement for the risk sub-module

$r \in \{equity, interestrate, spread, currency, concentration, property\}$.

— $CorrMarket_{r,c}$ is the correlation between risk sub-modules r et c .

The approximation method will involve finding a proxy for the net SCR of each market risk sub-module as a function of allocation. Then, these SCRs will be aggregated using the correlation matrix of the risk sub-modules to produce the market SCR, and by extension the overall portfolio SCR. Limited by resources, we produced SCRs of 29 allocations, which we carefully defined to properly calibrate the proxies.

We then used regression models such as linear regression, generalized linear models and decision trees. As the SCRs are large, calibrating the proxies as is on the SCR revealed a very high variance in the prediction error. We proceeded with two scaling methods. The first consisted in standardizing the SCRs (centering and reducing), while the second involved dividing all the SCRs by the SCR of a reference allocation.

Finally, by defining performance indicators such as mean square error (MSE), mean absolute relative error (MAPE), maximum error on a prediction and coefficient of determination R^2 , we calibrated the various proxies. As our asset portfolio has no currency exposure, the SCR for currency risk is zero. Furthermore, as there is no absorption for the concentration SCR (gross SCR = net SCR), we do not calibrate a proxy for the concentration SCR.

The GLM gamma models have proven to be very effective for understanding the evolution of the net SCR of each market risk sub-module as a function of the portfolio's target allocation. They offer the advantage of providing a closed formula through the estimated coefficients. Decision trees also performed well. Although they do not provide a closed formula for proxies, decision trees offer the advantage of being interpretable. They are not *black box* models. In-depth analysis of the decision rules established does not always validate the algorithm's relevance.

0.0 DETERMINING OPTIMAL ALLOCATION

The search for the optimal allocation consisted in producing the risk/return ratios associated with the portfolios resulting from all the combinations of the different asset classes. These are thousands of possible allocations for which all the indicators of return, risk and capital charge would have had to be produced. Using the results of portfolio theory, it was possible to significantly reduce the allowable set of portfolios to 92 allocations. Final wealth was defined as the present value of future profits. The associated return and risk are calculated respectively as the mean and the 98% level quantile of the final wealth distribution. It was also possible to predict the associated SCRs using GLM gamma models calibrated for this purpose.

The capital charge is taken into account by determining its capital cost, which penalizes the distribution of final wealth. The results obtained revealed that optimal allocations (those offering the best risk/return trade-offs) tend to be composed predominantly of bonds, as shown in the following figure.

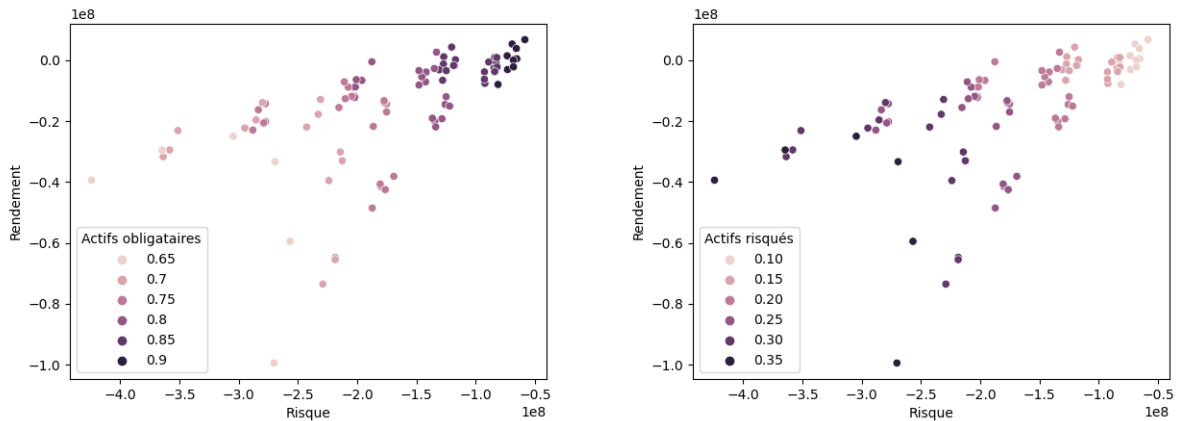


FIGURE 3 – Scatter plot of risk/return combinations by asset type, taking into account the SCR cost of carry.

Choosing a quantile of the final wealth distribution, rather than the variance for example, helps to encourage the insurer to invest in less risky assets. Taking into account the cost of carry has certainly changed the levels of returns and risks of the different allocations, but the distribution of the scatterplot remains consistent. The calibrated regression models proved effective despite the limited data available.

The study enabled us to define the associated levels of return, risk and capital charge for each allocation. The final choice of allocation lies with the insurer. It must be defined according to the company's strategies, in line with its risk appetite, and its ability to bear the cost of carrying or locking-in the SCR.

In addition, this choice must take into account the return on assets or the investment strategy. The optimal allocation will undoubtedly enable the insurer to meet its contractual benefits (TMG), and to pay discretionary benefits (PB). The life insurer will therefore be looking for the allocation for which the average return on assets over the projection period will enable it to meet its commitments. In order to visualize this, we also present the distribution of risk/return combinations according to the net return (of financial expenses and taxes) on assets in the following figure.

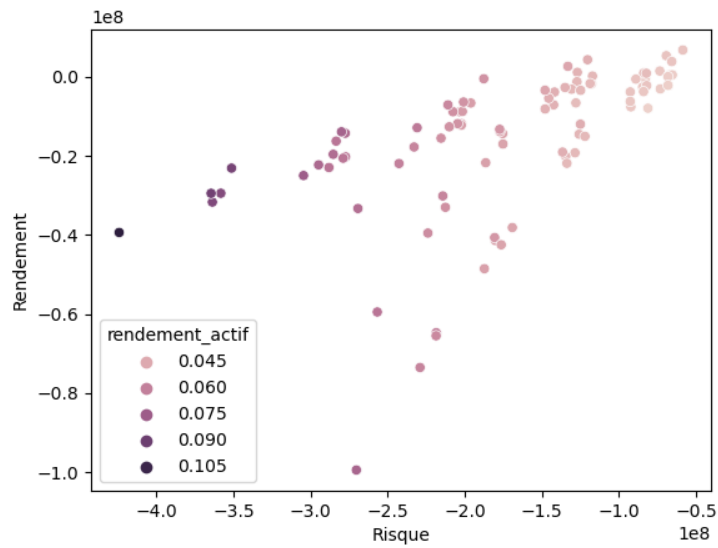


FIGURE 4 – Risk/return ratios based on net return on assets.

The previous figure logically indicates that the allocations that yield the highest returns on assets are those with a very low risk criterion (i.e. very risky). This situation highlights the specific context of insurance, where the choice of the optimal allocation is not solely the result of an optimization problem. It takes into account numerous parameters, all linked to the company's financial strategies, risk appetite and ability to bear a greater or lesser capital charge.

0.0 LIMITS AND PERSPECTIVES

For this study, we have made the strong assumption that only the market risk module is sensitive to portfolio allocation. This assumption is certainly not realistic. The capital charge prediction results used for the optimal allocation analysis are potentially biased. To improve the accuracy of the results, a similar procedure should have been applied to the other technical risk modules. This could certainly be the subject of an improvement to this study.

3.3	Au passif	46
3.3.1	Produits d'épargne	46
3.3.1.1	Caractéristiques des assurés	46
3.3.1.2	Meilleure estimation des engagements pour l'épargne	49
3.3.1.3	Best estimate des primes	49
3.3.1.4	Best estimate des frais/commissions	50
3.3.1.5	Best estimate des sinistres	50
3.3.2	Produits de retraite	50
3.3.2.1	Caractéristiques des assurés	51
3.3.2.2	Meilleure estimation des engagements pour la retraite	53
3.3.2.3	Best estimate des sinistres	53
3.3.3	Hypothèses techniques de projections	53
3.4	À l'actif	54
3.5	Stratégie de participation aux bénéfices - Crediting strategy	57
3.6	Stratégie d'investissement - Investment strategy	59
3.7	Scénarios économiques	60
3.7.1	Scénarios risque neutre	61
3.7.2	Scénarios monde réel	62
3.8	Conclusion	62
4	Allocation stratégique d'actifs	63
4.1	Introduction	63
4.2	Conséquences de Solvabilité 2 sur l'allocation d'actifs des assureurs	63
4.3	Théorie moderne du portefeuille	66
4.4	Allocation stratégique d'actif - vision ALM	75
4.5	Conclusion	79
5	Construction de proxy du SCR en fonction de l'allocation d'actif	80
5.1	Introduction	80
5.2	Méthodes d'approximation des SCR de marché	81
5.3	Description théorique des modèles d'apprentissage automatique utilisés	81
5.3.1	Algorithme par apprentissage supervisé	82
5.3.1.1	Fonction de prédiction	82
5.3.1.2	Fonction de perte	83
5.3.1.3	Qualité d'une fonction de prédiction	83
5.3.1.4	Fonction oracle	83
5.3.1.5	Consistance d'un algorithme	84
5.3.2	La régression linéaire	85
5.3.3	Les modèles de régression linéaire généralisés	86
5.3.4	Les arbres de décision	86

5.3.5	Indicateurs de performance	88
5.3.5.1	L'erreur quadratique moyenne	88
5.3.5.2	L'erreur relative moyenne	88
5.3.5.3	L'erreur maximale effectuée sur une prédiction	89
5.3.5.4	Le coefficient de détermination	89
5.4	Conclusion	90
6	Résultats et conclusions	91
6.1	Introduction	91
6.2	Calibration du proxy du SCR de marché	91
6.3	Détermination de l'allocation optimale	100
6.4	Conclusion	112
	Conclusion générale	113

Liste des tableaux

1	Allocations optimales pour une fonction d'utilité CARA.	6
2	Allocations optimales pour une fonction d'utilité IARA.	6
3	Optimal allocations according to CARA utility function.	11
4	Optimal allocations according to IARA utility function.	12
2.1	Matrice de corrélation des modules de risque pour le calcul du BSCR. [EIOPA, 2014]	32
2.2	Matrice de corrélation des sous-modules de risque pour le calcul du SCR de marché. [EIOPA, 2014]	34
2.3	Matrice de corrélation des catégories d'actions pour le calcul du SCR marché actions. [EIOPA, 2014]	35
2.4	Qualité de crédit associée aux différentes notations des actifs obligataires.	37
2.5	Facteurs de chocs en fonction de la durée de l'actif et de la qualité de crédit. [EIOPA, 2014]	38
2.6	Facteurs de chocs en fonction de la durée pour les actifs non notés.[EIOPA, 2014]	38
2.7	Facteurs de chocs en fonction de la durée pour les titres de type 1. [EIOPA, 2014]	39
2.8	Facteurs de chocs en fonction de la durée pour les titres de type 2. [EIOPA, 2014]	39
2.9	Facteurs de chocs en fonction de la durée pour les retitrisations.[EIOPA, 2014]	39
2.10	Facteurs de chocs pour le risque de spread des dérivés de crédit. [EIOPA, 2014]	40
2.11	Seuils d'excès d'exposition relatives pour le risque de concentration en fonction de la qualité de crédit. [EIOPA, 2014]	42
2.12	Facteurs de chocs g. [EIOPA, 2014]	42
3.1	Distribution de l'âge pour les assurés en épargne.	47
3.2	Répartition des PM par TMG pour les produits d'épargne.	48
3.3	Distribution de l'âge pour les assurés en retraite.	51
3.4	Répartition des assurés en retraite selon le statut.	51
3.5	Répartition des PM par TMG pour les produits de retraite.	52
3.6	Répartition de la valeur de marché des actifs selon les classes d'actifs.	56
3.7	Déclinaison du portefeuille obligataire suivant le type d'obligation.	56
3.8	Répartition des notations de crédit de la part des obligations souveraines.	56
3.9	Répartition des notations de crédit de la part des obligations d'entreprise.	56

3.10 Bilan comptable d'un assureur.	57
4.1 Conséquences de Solvabilité sur l'allocation d'actifs.	65
4.2 Allocations optimales selon pour une fonction d'utilité CARA.	71
4.3 Allocations optimales selon pour une fonction d'utilité IARA.	71
6.1 Résultats de l'approximation du SCR taux en fonction de l'allocation cible du portefeuille.	93
6.2 Résultats de l'approximation du SCR actions en fonction de l'allocation cible du portefeuille.	94
6.3 Résultats de l'approximation du SCR immobilier en fonction de l'allocation cible du portefeuille.	95
6.4 Résultats de l'approximation du SCR spread en fonction de l'allocation cible du portefeuille.	96
6.5 Conséquences de Solvabilité 2 sur l'allocation d'actifs.	101
6.6 Composition de l'allocation la plus optimale au sens rendement/risque.	109

Table des figures

1	Nuage de points formé par les couples rendement/risque selon la nature des actifs avec prise en compte du coût de portage du SCR.	8
2	Couples rendement/risque déclinés suivant le rendement net de l'actif.	9
3	Scatter plot of risk/return combinations by asset type, taking into account the SCR cost of carry.	14
4	Risk/return ratios based on net return on assets.	15
2.1	Présentation des piliers de Solvabilité II.	29
2.2	Fonctions clés du Pilier 2.	31
2.3	Déclinaison du calcul du SCR selon la formule standard. [EIOPA, 2014]	33
3.1	Application C-ALM.	45
3.2	Déroulement d'une projection ALM.	59
4.1	Illustration de la frontière efficiente parmi un ensemble de portefeuilles d'actifs risqués. [Bodie - Kane - Marcus, 2017]	66
4.2	Structure de placements des assureurs aux Q4 2019, 2020 et 2022. [ACPR, 2023]	73
4.3	Ventilation du portefeuille obligataire des assureurs, après mise en transparence des parts d'OPCVM, en % de l'ensemble des placements au 31 décembre 2022. [ACPR, 2023]	78
6.1	Arbre de décisions pour le SCR de taux d'intérêt.	99
6.2	Nuage de points formé par les couples rendement/risque.	101
6.3	Nuage de points du rendement en fonction du risque selon la nature des actifs.	103
6.4	Sensibilité du rendement et du risque par rapport aux actifs obligataires et aux actifs risqués.	105
6.5	Nuage de points formé par les couples rendement/risque selon la nature des actifs avec prise en compte du coût de portage du SCR.	107
6.6	Effets de la prise en compte du coût de portage du SCR sur le couple rendement/risque.	108
6.7	Couples rendement/risque déclinés suivant le rendement net de l'actif.	110
6.8	Couples rendement/risque déclinés suivant le rendement net de l'actif pour le quadrant IV.	111

Introduction générale

Un contrat d'assurance est un engagement contractuel entre un assureur et un assuré. L'assureur reçoit de l'assuré une prime en échange de laquelle il s'engage à fournir des prestations dans le futur en cas de survenance de sinistres affectant l'assuré. On parle ainsi de cycle de production inversé.

La gestion des actifs constitue ainsi un élément fondamental particulièrement pour les compagnies d'assurance-vie où l'épargne des particuliers est engagée. Elles sont confrontées à des défis complexes, notamment celui de la nécessité de garantir la solvabilité à long terme de leur activité tout en maximisant les rendements de leurs investissements. Dans ce contexte, la mise en place d'une stratégie d'allocation d'actifs appropriée revêt une importance cruciale.

De plus, le contexte économique actuel de forte inflation, de remontée des taux, et de volatilité des marchés ne laisse pas insensible le bilan de l'assureur. Il doit en effet revoir sa stratégie d'allocation qui est sans doute obsolète, car adaptée à l'environnement de taux bas voire négatif d'il y a encore deux ans.

Ce mémoire vise à construire une architecture complète sur la problématique spécifique de l'allocation d'actifs sous contrainte de SCR (*Solvency Capital Requirement*) pour une compagnie d'assurance-vie. Le SCR est une mesure clé de la réglementation prudentielle Solvabilité 2 qui vise à évaluer le niveau de fonds propres que doit immobiliser l'assureur pour faire face aux risques inhérents à ses activités. Cette contrainte réglementaire introduit des considérations supplémentaires dans la gestion des actifs, car les compagnies d'assurance vie doivent équilibrer leurs objectifs de rendement avec les exigences en capital.

L'objectif principal de cette étude est de déterminer l'allocation optimale du portefeuille d'actifs à mettre en face d'un portefeuille classique d'épargne et de retraite. Cette allocation devra permettre de maximiser une métrique de rendement et de minimiser une métrique de risque en plus de permettre d'optimiser le SCR.

Cependant, les compagnies d'assurance-vie se retrouvent très vite confrontées à des difficultés d'ordre opérationnel dans la production de leur SCR pour une composition donnée de leur portefeuille d'actifs. Le calcul du SCR pour une allocation d'actifs peut nécessiter plusieurs heures voire plusieurs jours d'exécution de logiciels de projections de bilan. Par conséquent, il est difficile de mettre en place une stratégie d'allocation d'actifs complète et rigoureuse. Afin de s'affranchir de ce coût opérationnel, nous nous sommes proposés de construire un proxy du SCR en fonction de l'allocation du portefeuille.

Le mémoire s'articulera autour de plusieurs axes. Le premier chapitre posera le contexte de l'étude et précisera l'environnement professionnel dans lequel ce mémoire a été effectué. Le second chapitre fera l'état des lieux du cadre prudentiel Solvabilité 2 et de ses recommandations les plus importantes. Ensuite, le troisième chapitre présentera la gestion actif/passif en assurance-vie et les portefeuilles d'actifs et de passifs sur lesquels ont porté cette étude. Le quatrième chapitre mettra en exergue la méthodologie adoptée dans ce mémoire pour déterminer l'allocation optimale du portefeuille d'actifs. Dans l'atteinte de cette allocation optimale, le cinquième chapitre sera consacré à présenter la méthodologie d'approximation du SCR utilisée. Enfin, le sixième et dernier chapitre présentera les aspects pratiques de notre étude, de la calibration des proxies du SCR, à la détermination de l'allocation optimale du portefeuille.

L'importance de ce mémoire réside dans sa contribution potentielle à l'amélioration des pratiques de gestion d'actifs pour les compagnies d'assurance-vie. En proposant une méthodologie robuste de construction d'un proxy du SCR, ce mémoire pourrait permettre aux assureurs d'optimiser leurs choix d'investissements tout en respectant les réglementations prudentielles en vigueur.

Contexte et cadre de l'étude

1.1	Introduction	24
1.2	Gestion d'actifs et assurances	24
1.3	Environnement professionnel	26
1.4	Confidentialité des données	27
1.5	Conclusion	27

1.1 INTRODUCTION

Ce premier chapitre a pour objectif de présenter le contexte de notre étude. Le choix de ce mémoire sur l'allocation stratégique d'actifs n'est pas anodin. Nous introduisons dans ce chapitre les raisons qui ont motivé le choix d'un tel sujet ainsi que le cadre dans lequel nous avons travaillé.

1.2 GESTION D'ACTIFS ET ASSURANCES

Les compagnies d'assurance, particulièrement celles d'assurance-vie, sont des institutions financières. Elles jouent un rôle important d'investissement de l'épargne des particuliers dans l'économie. Elles sont, à cet effet, très réglementées afin de protéger l'investissement des épargnants.

L'actuaire a alors un rôle important à jouer dans la gestion des actifs afin d'assurer un certain niveau de rendement et un certain niveau de risque. Cette gestion d'actifs est d'autant plus complexe dans la mesure où il doit également prendre en compte le passif et ses flux. De plus, la nature des produits en portefeuille et la variété des profils de risque des assurés présents dans son portefeuille sont des indicateurs importants qui peuvent influencer considérablement la stratégie mise en place.

Le contexte économique doit également être pris en compte. La remontée des taux d'intérêt après la pandémie de covid 19, associée à la volatilité des marchés et une inflation forte, ont marqué la fin de l'année 2022 et le premier semestre 2023. Cette situation n'est pas sans effets sur le bilan de l'assureur.

Effets de l'inflation sur l'assurance vie : La plupart des produits d'assurance-vie, tels que l'assurance décès ou la retraite, offrent des prestations qui sont nominalement fixes. Les

paiements sont définis au moment de la souscription de la police et ne sont pas indexés sur l'inflation. Par conséquent, l'effet de l'inflation sur les bénéfices des assureurs-vie est neutre pour la plupart des segments d'activité. Ce n'est pas le cas, cependant, avec certains produits de morbidité, tels que l'invalidité et les soins de longue durée, qui offrent généralement des ajustements liés au coût de la vie.

Cela étant dit, l'inflation a des effets indirects importants sur les bénéfices des assureurs-vie. Une inflation élevée ou croissante a tendance à réduire l'attrait de l'assurance-vie avec des prestations fixes. Si l'inflation est de 5 % par an, un capital décès versé aux bénéficiaires dans cinq ans aura perdu près de 30 % de sa valeur actuelle [Geneva, 2023]. Cela dissuade non seulement les personnes d'acheter une assurance-vie, mais cela entraîne également une augmentation des résiliations des polices d'assurance-épargne à rendement fixe, car les souscripteurs cherchent à profiter de rendements plus élevés offerts par de nouveaux contrats d'assurance-vie ou d'autres produits financiers.

D'autre part, si en raison de l'inflation, les assurés s'attendent à ce que les taux d'intérêt se stabilisent à des niveaux plus élevés, les ventes d'assurances-vie de type épargne (garantie) augmenteront. L'inflation des frais administratifs est un autre défi pour les assureurs-vie. Cela affecte principalement les polices à long terme avec des primes fixes où la charge de prime liée aux dépenses administratives pourrait bientôt s'avérer insuffisante pour couvrir les frais réels.

Effets de la remontée des taux d'intérêt sur l'assurance vie : Une hausse des taux entraîne un manque de compétitivité de l'assureur. Ce qui peut se traduire par une vague de rachats conjoncturels et une perte de valeur du portefeuille d'actif conduisant à une dégradation du résultat de la compagnie [Barbe, 2019]. Ce risque peut se matérialiser dans deux situations :

- Une hausse brutale des taux d'intérêt peut entraîner une vague de rachats ainsi que la réalisation de pertes financières par suite de la vente d'actifs obligataires en moins-value ;
- Une hausse significative et prolongée des taux peut conduire à une situation équivalente après épuisement des richesses latentes de la compagnie.

Il existe donc actuellement pour les compagnies d'assurance-vie un réel besoin de définition optimale de la composition de leurs portefeuilles d'actifs. Pour ce faire, l'actuaire dispose d'un certain nombre de méthodes ou de modèles. On distingue : les modèles de matching ou d'immunisation, les modèles d'optimisation sous contrainte, les modèles d'évaluation stochastique à base de scénarios économiques notamment le modèle ALM.

Les modèles de matching ou d'immunisation permettent, comme leur nom l'indique, d'immuniser un portefeuille face à un risque spécifique en mettant en concordance des indicateurs caractéristiques de ce risque.

Duration matching : Les modèles de duration matching permettent d'immuniser le portefeuille contre le risque de taux en faisant concorder les durations de l'actif et du passif.

Dans le cas où l'on restreint l'actif à la classe obligation, il est possible de démontrer qu'une variation de la courbe des taux a exactement le même impact (en pourcentage) sur l'actif que sur le passif [Pierrat, 2017].

Cashflow matching : Ces derniers permettent d'immuniser le portefeuille contre le risque de liquidité en faisant concorder directement les flux futurs de trésorerie de l'actif et du passif. De cette façon, tout mouvement du passif est parfaitement compensé par un mouvement de l'actif rendant les flux futurs nets nuls. Par conséquent, le risque de liquidité qui naît d'une indisponibilité des actifs pour répondre à un mouvement du passif est parfaitement géré.

Ces modèles ont révélé des insuffisances car bien trop simplistes. En effet, ils se concentrent principalement sur les risques de taux et de liquidité, et s'appliquent à des portefeuilles intégralement obligataires, sans autres classes d'actifs [Pierrat, 2017]. De plus, la spécification des obligations selon qu'elles sont classiques, indexées, convertibles ou de différentes notations de crédit, n'est pas permise. Les modèles d'immunisation ne sont donc pas adaptés pour appréhender la spécificité du portefeuille d'actifs de l'assurance et la complexité des interactions de ce dernier avec le passif.

Face à ces insuffisances, des modèles de plus en plus complexes voient le jour. La gestion des actifs en assurance a alors pu bénéficier de la théorie moderne du portefeuille initiée par Markowitz en 1952. Ce dernier propose un formalisme théorique de la gestion d'actifs et de l'allocation stratégique d'actifs en ramenant le problème à un problème d'optimisation sous contrainte et en intégrant la notion de risque. Puis, les réglementations, qui se sophistiquent et se perfectionnent au cours du temps, sont arrivées à proposer à travers la norme Solvabilité 2, une architecture intégrante de gestion actif/passif pour l'assurance-vie. Il s'agit des modèles de gestion actif/passif ou *asset liability management* (ALM) en anglais.

Nous reviendrons plus en détail dans la suite de mémoire sur ces deux dernières familles de modèles.

1.3 ENVIRONNEMENT PROFESSIONNEL

Ce mémoire est la concrétisation d'une année d'alternance effectuée au sein de l'équipe de consultants Insurance Consulting & Technologies (ICT) Life France de WTW. De par son activité, l'équipe ICT Life est au plus proche des acteurs d'assurance en France et donc bien au fait de leurs besoins.

Elle accompagne les acteurs d'assurance-vie entre autres sur les questions de gestion actif/passif, d'allocation d'actifs, modélisation Solvabilité 2 et IFRS17.

De plus, l'équipe a une dimension technologique développée dans le sens où elle accompagne également ses clients en leur fournissant des logiciels actuariels adaptés afin de mener leurs études. C'est le cas du logiciel qui a servi à notre modélisation ALM, *Risk Agility Financial Modeller* (RAFM), et du générateur de scénarios économiques *STAR RN/RW* dont

nous nous sommes servis pour générer nos scénarios économiques.

1.4 CONFIDENTIALITÉ DES DONNÉES

Afin que notre étude soit adaptée au contexte économique actuel, nous avons travaillé sur un portefeuille réel d'épargne-retraite basé sur l'inventaire du dernier trimestre de l'année 2022 (Q4 2022) d'une société d'assurance française. Pour des raisons de confidentialité, sauf mention contraire, les indicateurs de richesse et les flux au bilan présentés dans ce rapport ont subi des modifications. Ces modifications n'affecteront pas pour autant les interprétations actuarielles de nos résultats.

1.5 CONCLUSION

Le sujet de l'allocation stratégique d'actifs est un problème d'actualité qui concerne les compagnies d'assurance-vie. Cependant, les contraintes opérationnelles pour produire le SCR peuvent empêcher les assureurs de mener une étude complète de leur gestion d'actifs. Ce mémoire répond alors à un besoin réel et tente d'apporter des solutions pour aider les assureurs à déterminer plus précisément l'allocation optimale de leurs portefeuilles.

Solvabilité 2

2.1	Introduction	28
2.2	La norme Solvabilité 2	28
2.2.1	Pilier 1	29
2.2.2	Pilier 2	30
2.2.3	Pilier 3	31
2.3	Calcul du SCR par la formule standard	32
2.3.1	Risque de taux	34
2.3.2	Risque actions	35
2.3.3	Risque immobilier	36
2.3.4	Risque de spread	36
2.3.5	Risque de change	40
2.3.6	Risque de concentration	41
2.4	Conclusion	43

2.1 INTRODUCTION

Afin d'assurer leur bon fonctionnement, les compagnies d'assurance sont soumises à des réglementations. Celles-ci permettent de cadrer l'activité des assureurs afin d'harmoniser les règles de solvabilité. Ces réglementations ou normes fournissent une vision définie pour évaluer le bilan de l'assureur, le rendant auditable et comparable à ceux des autres assureurs. Dans notre étude sur l'allocation stratégique d'actifs, nous avons travaillé sur un portefeuille composé de produits d'épargne et de retraite supplémentaire.

Le portefeuille assurantiel étudié est évalué selon la norme Solvabilité 2, et ses flux de trésorerie sont calculés au moyen d'un modèle ALM. L'objectif est en effet de valoriser le bilan, de déduire les montants de fonds propres et de capital réglementaire, puis les résultats bruts et nets d'impôts. Nous présentons dans ce chapitre cette la norme Solvabilité 2, et ses spécifications techniques.

2.2 LA NORME SOLVABILITÉ 2

Pendant longtemps, l'activité des assureurs a été réglementée par la norme Solvabilité 1. Développée dès les années 1970 par le marché unique européen, la directive Solvabilité 1 a

montré ses limites à l’occasion de la crise financière de 2008 (crise des *subprimes* [Rodriguez, 2020]). Elle ne prenait en compte qu’imparfaitement les risques inhérents à l’activité des assureurs. En effet, elle s’appuyait sur une vision simplificatrice de l’exposition aux risques assureurs : le capital réglementaire y est calculé comme un pourcentage des provisions mathématiques. Il y a eu un besoin d’une norme plus adéquate pour la mesure des risques portés par un assureur, et c’est ainsi que **Solvabilité 2** a vu le jour.

La norme **Solvabilité 2** est entrée en application au niveau européen le 1er janvier 2016, et consiste en un ensemble de règles fixant le régime de solvabilité applicable aux entreprises d’assurances dans l’Union Européenne [ACPR, 2019]. Elle repose sur 3 piliers à savoir le pilier 1 sur les exigences quantitatives, le pilier 2 sur les exigences qualitatives et le pilier 3 sur la discipline de marché. Nous illustrons les éléments de chaque pilier à la figure 2.1.



FIGURE 2.1 – Présentation des piliers de Solvabilité II.

2.2.1 Pilier 1

Ce pilier porte sur les exigences quantitatives du bilan de l’assureur. Il définit en particulier les règles de valorisation des actifs et des passifs, ainsi que les exigences de capital et leur mode de calcul [ACPR, 2019].

Le passif de l’assureur se décompose en deux parties : les fonds propres et les provisions techniques. Le pilier 1 exige le calcul des quantités suivantes :

- **SCR** (*Solvency Capital Requirement*) : il s’agit pour l’assureur, du capital requis pour être solvable. C’est donc le montant de fonds propres qu’il doit détenir pour faire face à ses engagements futurs. Le SCR est calculé comme la **Value at Risk (VaR)** des fonds

propres de base à un niveau de confiance de 99.5% sur une période d'un an [EIOPA, 2021]. En d'autres termes, le SCR représente la part des fonds propres à immobiliser afin de faire face à un choc bicentenaire sur un horizon d'un an.

Le SCR peut être calculé au moyen d'une formule standard¹ ou d'un modèle interne complet ou partiel² [ACPR, 2019].

- **MCR** (*Minimum Capital Requirement*) : il s'agit pour l'assureur du capital minimum requis pour exercer son activité. C'est le niveau minimal de fonds propres que l'organisme d'assurance doit détenir en permanence, sous peine d'une action immédiate de l'autorité de contrôle susceptible d'entraîner un transfert du portefeuille.

Le MCR est calculé suivant trois étapes³ de sorte qu'il soit compris entre 25% et 45% du SCR [ACP Banque de France, 2011].

- **BE** (*Best Estimate*) : correspond à la meilleure estimation des engagements futurs de l'assureur. En ce sens, il s'agit de l'espérance actualisée à l'aide des courbes de taux sans risque des flux de trésorerie futurs probables. Le BE est estimé brut de réassurance.
- **RM** (*Risk Margin*) : La marge pour risque représente quant à elle le coût du capital que devrait lever le cessionnaire pour couvrir son exigence de capital jusqu'à l'extinction des passifs [ACP Banque de France, 2011]. Elle correspond au montant à immobiliser si le portefeuille devait être cédé à une contrepartie qui devrait supporter le service des contrats jusqu'à extinction de ceux-ci.

Ces éléments permettent de juger de la bonne santé de la compagnie d'assurance. Ils fournissent également des niveaux d'alerte pour l'assureur et pour le superviseur.

- **Premier niveau d'alerte** : si les fonds propres sont inférieurs au SCR, l'assureur doit agir selon les leviers dont il dispose pour inverser le rapport. Ainsi, le ratio de solvabilité défini comme le rapport entre les fonds propres et le SCR doit être supérieur ou égal à 100%.

Par extension, la marge de solvabilité, correspond au surplus du ratio de solvabilité par rapport à la demande réglementaire de 100%.

- **Second niveau d'alerte** : si les fonds propres sont inférieurs au MCR, le superviseur intervient immédiatement pour éviter un défaut de paiement.

2.2.2 Pilier 2

Le Pilier 2 touche à l'organisation même des organismes d'assurance. Il fixe les règles qualitatives de gouvernance et de gestion des risques afin de s'assurer que la compagnie est bien gérée. Ce second pilier de Solvabilité 2 exige au moins deux dirigeants effectifs, et formalise la politique de gestion des risques. Il cadre également la mise en place par

1. La formule standard est prévue par la directive Solvabilité II et le règlement délégué de la Commission européenne du 10 octobre 2014.

2. Certains risques étant alors couverts par la formule standard.

3. Les étapes sont présentées à la ressource [ACP Banque de France, 2011] de l'ACPR.

l'assureur de son évaluation interne des risques et de la solvabilité : **Own Risk and Solvency Assessment (ORSA)** [Vial, 2016]. Pour ce faire, il exige la mise en place de 4 fonctions clés : la gestion des risques, l'audit interne, le contrôle interne, et l'actuariat [Vial, 2016]. Nous illustrons ces fonctions à la figure 2.2 [Trivière, 2021].

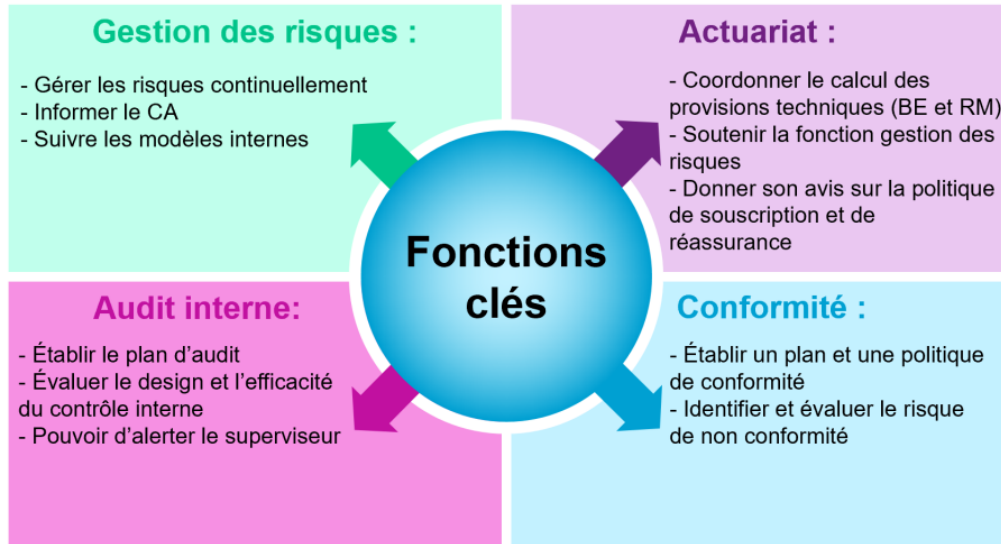


FIGURE 2.2 – Fonctions clés du Pilier 2.

2.2.3 Pilier 3

Ce dernier pilier est celui de la transparence et de la communication financière, non seulement vis-à-vis du régulateur, mais également vis-à-vis du marché [Vial, 2016]. L'assureur est donc tenu de fournir régulièrement des rapports à la fois quantitatifs (bilan prudentiel, fonds propres, SCR, MCR, synthèse des provisions techniques) et qualitatifs de sa situation financière, afin de créer une relation de confiance entre les assureurs, le régulateur et le public.

2.3 CALCUL DU SCR PAR LA FORMULE STANDARD

En formule standard, le capital de solvabilité requis s'exprime comme suit [EIOPA, 2014] :

$$SCR = BSCR + Adj + SCR_{op} \quad (2.1)$$

Où :

- BSCR (Basic Solvency Capital Requirement) est le capital requis de base.
- Adj est l'ajustement au titre de la capacité d'absorption des pertes par les assurés (via notamment les mécanismes de participations aux bénéfices) et les impôts différés. Il est négatif par définition.
- SCR_{op} est la charge en capital au titre du risque opérationnel.

Comme les risques inhérents à l'activité de l'assureur sont de nature diverse, la formule standard les classe en 6 modules de risques distincts à savoir : marché, santé, défaut, vie, non-vie, intangible. Ainsi, la charge en capital de base BSCR représente l'agrégation des besoins en capitaux pour chaque module de risque par la formule suivante [EIOPA, 2014] :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} CorrSCR_{i,j} * SCR_i * SCR_j + SCR_{intangible}} \quad (2.2)$$

où :

- SCR_i est le besoin en capital requis pour le module de risque $i, j \in \{\text{marché, santé, défaut, vie, non - vie}\}$.
- CorrSCR_{i,j} est la corrélation entre les modules de risque i et j fournie par l'EIOPA.

Risque	Marché	Défaut	Vie	Santé	Non-vie
Marché	1				
Défaut	0.25	1			
Vie	0.25	0.25	1		
Santé	0.25	0.25	0.25	1	
Non-vie	0.25	0.5	0	0	1

TABLEAU 2.1 – Matrice de corrélation des modules de risque pour le calcul du BSCR. [EIOPA, 2014]

La figure 2.3 illustre la déclinaison du calcul du SCR en ses différentes composantes, fournie par l'EIOPA.

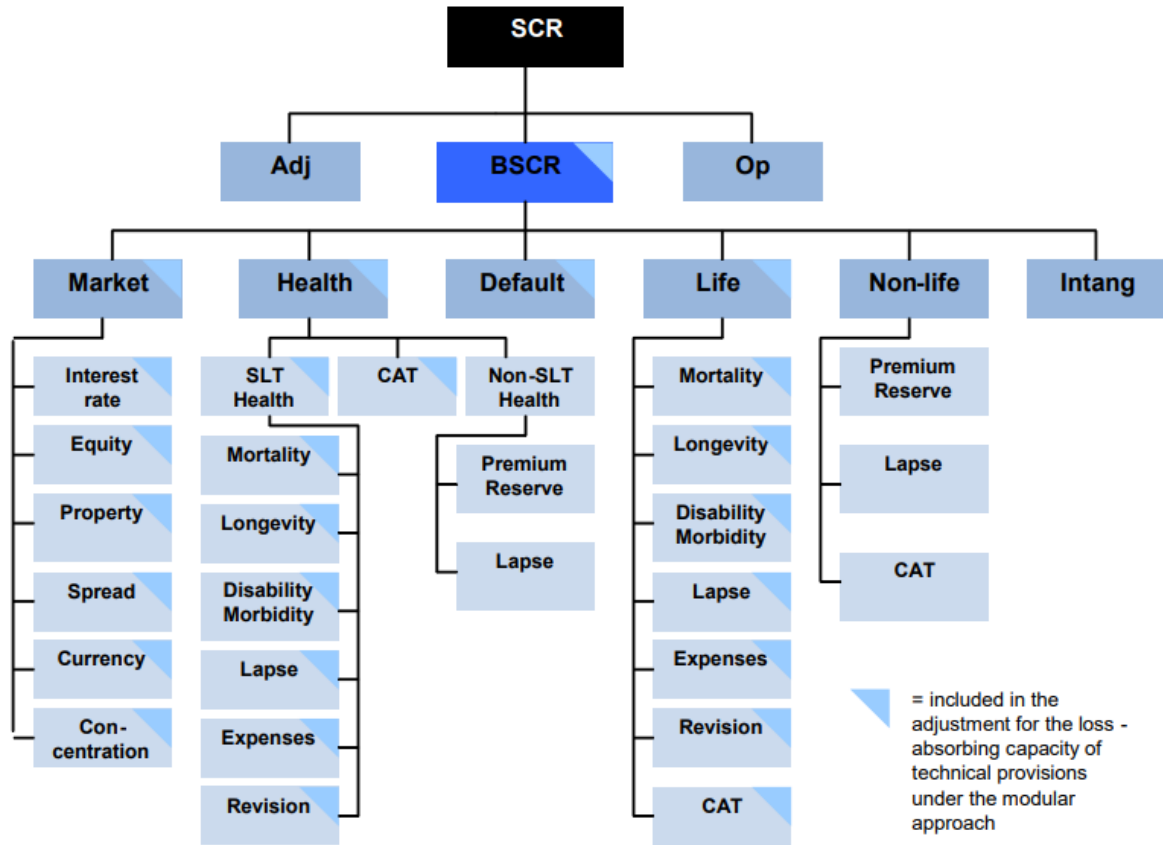


FIGURE 2.3 – Déclinaison du calcul du SCR selon la formule standard. [EIOPA, 2014]

Les modules de risques défaut, vie, santé, non-vie sont spécifiques à la nature du portefeuille de l'assureur. Ils sont obtenus en effectuant des chocs sur le passif. En revanche, le module de risque marché se réfère directement à la composition des actifs en contrepartie au bilan. Il est donc le plus sensible aux mouvements de marché. Pour cette étude, nous ne présenterons davantage que ce module de risque. Nous préciserons dans la suite les raisons de cela.

Selon l'EIOPA, le risque de marché découle du niveau ou de la volatilité des prix de marché des instruments financiers. L'exposition au risque de marché est mesurée par l'impact des mouvements du niveau des variables financières telles que les prix des actions, le niveau des taux d'intérêt, les prix de l'immobilier, le spread de crédit, les taux de change et la diversification du portefeuille. Ces six variables financières caractérisent l'évolution des marchés financiers et de l'économie. Elles caractérisent les sous-modules de risque selon lesquels se décompose à son tour le module de risque marché.

Par analogie au BSCR, le SCR marché est calculé par la formule [EIOPA, 2014] :

$$SCR_{marché} = \sqrt{\sum_{r,c} CorrMarché_{r,c} * SCR_r^{marché} * SCR_c^{marché}} \quad (2.3)$$

où :

- $SCR_r^{marché}$ est le besoin en capital requis pour le sous-module de risque $r \in \{\text{marché, santé, défaut, vie, non – vie, concentration}\}$.
- $CorrMarché_{r,c}$ est la corrélation entre les sous-modules de risque r et c fournie par l’EIOPA.

Risque	Taux	Actions	Immobilier	Spread	Change	Concentration
Taux	1					
Actions	A	1				
Immobilier	A	0.75	1			
Spread	A	0.75	0.5	1		
Change	0.25	0.25	0.25	0.25	1	
Concentration	0	0	0	0	0	1

TABLEAU 2.2 – Matrice de corrélation des sous-modules de risque pour le calcul du SCR de marché. [EIOPA, 2014]

Le facteur A présent dans le tableau 2.3 représente la corrélation entre les sous-modules actions, immobilier et spread avec le sous-module taux. L’EIOPA définit sa valeur à 0 si le choc pour le calcul du SCR taux est appliqué à la hausse, et à 0.5 sinon [EIOPA, 2014].

2.3.1 Risque de taux

Selon l’EIOPA, le risque de taux d’intérêt existe pour tous les actifs et passifs qui sont sensibles aux variations en termes de structure ou à la volatilité des taux d’intérêt.

Le SCR de taux consiste en la perte maximale attendue sur la valeur de marché des actifs nette du passif (actif net réévalué) à la suite d’un choc à la hausse et d’un choc à la baisse. Les chocs à appliquer selon la maturité de la position sont également fournis par l’EIOPA.

Ainsi, si $r_0(T)$ est le taux sans risque et $choc(T)$ est le choc à la hausse ou à la baisse correspondants à la maturité T , alors le taux choqué est [EIOPA, 2014] :

$$r_1(T) = r_0(T) * (1 + choc(T)) \quad (2.4)$$

Indépendamment des facteurs de chocs, l’augmentation absolue des taux d’intérêt dans le cas d’un choc à la hausse quelle que soit la maturité devrait être d’au moins un point de pourcentage. Lorsque pour une maturité donnée, la valeur initiale du taux d’intérêt est négative, comme c’était le cas avant la pandémie de covid 19, le taux choqué est calculé comme [EIOPA, 2014] :

- $r_1(T) = r_0(T) + (|r_0(T)| * choc(T))$ pour un choc à la hausse ;
- $r_1(T) = r_0(T) - (|r_0(T)| * choc(T))$ pour un choc à la baisse.

2.3.2 Risque actions

Le risque actions est lié au niveau ou à la volatilité des prix du marché des actions. L'exposition au risque actions concerne tous les actifs dont la valeur est sensible aux variations des prix des actions. L'EIOPA décompose les actions en deux types [EIOPA, 2014] :

- Type 1 : comprend les actions cotées sur les marchés régulés des pays membres de l'OCDE.
- Type 2 : comprend les actions cotées sur les marchés actions dans des pays non membres de l'OCDE.

Le choc actions à appliquer pour chaque type, se décompose en un choc de base et un ajustement symétrique [EIOPA, 2014] :

$$choc_{actions} = choc_{base} + AS \quad (2.5)$$

$$AS = \frac{1}{2} * \left(\frac{CI - AI}{AI} - 8\% \right) \quad (2.6)$$

où :

- $choc_{base}$ est égal à 39% pour les actions Type 1 et 49% pour les actions Type 2 ;
- AS est l'ajustement symétrique ;
- CI est la valeur actuelle de l'indice actions ;
- AI est la moyenne des valeurs de l'index sur un historique de 36 mois.

Alors pour chaque catégorie $k \in \{Type1, Type2\}$, lorsque VM représente la valeur de marché de l'actif, le SCR est égal à [EIOPA, 2014] :

$$SCR_k^{marché,actions} = VM * (1 - choc_k^{actions}) \quad (2.7)$$

Le SCR marché actions se déduit finalement comme [EIOPA, 2014] :

$$SCR^{marché,actions} = \sqrt{\sum_{k,l} CorrIndex_{k,l} * SCR_k^{marché,actions} * SCR_l^{marché,actions}} \quad (2.8)$$

où :

- $SCR_k^{marché,actions}$ est la charge en capital au titre des actions de la catégorie k
- $CorrIndex_{k,l}$ la matrice de corrélation des indices d'actions Type 1 et Type 2 fournie par l'EIOPA.

Catégorie	Type 1	Type 2
Type 1	1	
Type 2	0.75	1

TABLEAU 2.3 – Matrice de corrélation des catégories d'actions pour le calcul du SCR marché actions. [EIOPA, 2014]

2.3.3 Risque immobilier

Selon l'EIOPA, le risque immobilier résulte de la sensibilité des actifs, des passifs et des placements financiers au niveau ou à la volatilité des prix du marché de l'immobilier.

La charge en capital requise pour le risque immobilier est définie comme [EIOPA, 2014] :

$$SCR^{marché, immo} = \max(\Delta ANR_{|chocImmo}; 0) \quad (2.9)$$

Le choc immobilier est l'effet immédiat sur l'actif net réévalué (ANR) dans le cas **d'un choc à la baisse de 25 %** de la valeur des investissements en biens immobiliers, en tenant compte de toutes les expositions individuelles directes et indirectes aux prix de l'immobilier [EIOPA, 2014].

2.3.4 Risque de spread

Le risque de spread résulte de la sensibilité de la valeur des actifs et des instruments financiers aux variations du niveau ou de la volatilité des spreads de crédit par rapport à courbe des taux d'intérêt sans risque [EIOPA, 2014]. Il s'applique particulièrement aux classes d'actifs suivantes [EIOPA, 2014] : obligations d'entreprises, dettes subordonnées, instruments financiers présentant des caractéristiques d'actions et d'obligations, obligations sécurisées, prêts autre que les prêts hypothécaires aux particuliers, positions de titrisations, dérivés de crédit non destinés à la couverture.

De plus, le module de risque de spread est applicable à tous les types de titres adossés à des actifs ainsi qu'à toutes les tranches de produits de crédit structurés, tels que les titres de créance garantis. Cette catégorie de titres comprend les transactions ou les mécanismes par lesquels le risque de crédit associé à une exposition ou à un ensemble d'expositions est divisé en tranches, avec les caractéristiques suivantes :

- les paiements effectués dans le cadre de la transaction ou du mécanisme dépendent de la performance de l'exposition ou du groupe d'expositions ;
- la subordination des tranches détermine la répartition des pertes pendant la durée de vie de la transaction ou du mécanisme.

La conception du sous-module spread permet à l'assureur d'obtenir une reconnaissance et une prise en compte appropriées de ses instruments de couverture dans le cadre du risque de spread, sous réserve d'un traitement adéquat des risques inhérents aux programmes de couverture. L'EIOPA propose une décomposition des actifs soumis au risque de spread en trois classes : obligations, titrisations, et dérivés de crédit. La charge en capital au titre du risque de spread n'est donc que la somme des charges en capital du risque de spread associé à chacune de ces classes [EIOPA, 2014].

$$SCR^{marché, spread} = SCR_{oblig}^{marché, spread} + SCR_{titres}^{marché, spread} + SCR_{dérivés}^{marché, spread} \quad (2.10)$$

Par ailleurs, le calcul du SCR spread prend en compte la notation du titre en lui attri-

buant un score représentant la qualité de crédit ou **credit quality step** (CQS) en anglais.

<i>Notation</i>	CQS
AAA	0
AA	1
A	2
BBB	3
BB	4
B	5
CCC	6
Non noté (NR)	7

TABLEAU 2.4 – Qualité de crédit associée aux différentes notations des actifs obligataires.

2.3.4.1 Risque de spread sur les obligations et prêts autre que les prêts hypothécaires

La charge en capital requise pour le risque de spread de cette première classe est définie comme [EIOPA, 2014] :

$$SCR_{oblig}^{marché,spread} = \max(\Delta ANR|_{chocSpreadOblig}; 0) \quad (2.11)$$

Le choc de spread à appliquer sur les obligations et les prêts non hypothécaires est l'effet immédiat d'une diminution instantanée de la valeur des actifs de cette classe sur l'actif net réévalué (ANR) due à l'augmentation de leurs spreads de crédit [EIOPA, 2014].

$$chocSpreadOblig = \sum_i MV_i * F^{hausse}(rating_i; duration_i) \quad (2.12)$$

où :

- $F^{hausse}(rating_i; duration_i)$ est une fonction de la qualité de crédit et de la durée de l'exposition ;
- MV_i la valeur de marché du ième actif de la classe obligations et prêts autre que les prêts hypothécaires.

La fonction $F^{hausse}(rating_i; duration_i)$ est calibrée pour obtenir un choc consistant à la *Value at Risk* (VaR) à 99.5% à la suite d'un élargissement du spread de crédit. Elle est plafonnée à un niveau de 100% [EIOPA, 2014].

CQS - Duration	0	1	2	3	4	5	6
$D \leq 5$	$0.9\% * D$	$1.1\% * D$	$1.4\% * D$	$2.5\% * D$	$4.5\% * D$	$7.5\% * D$	$7.5\% * D$
$5 < D \leq 10$	$4.5\% + 0.5\% * (D - 5)$	$5.5\% + 0.6\% * (D - 5)$	$7\% + 0.7\% * (D - 5)$	$12.5\% + 1.5\% * (D - 5)$	$22.5\% + 2.5\% * (D - 5)$	$37.5\% + 4.2\% * (D - 5)$	$37.5\% + 4.2\% * (D - 5)$
$10 < D \leq 15$	$7.2\% + 0.5\% * (D - 10)$	$8.4\% + 0.5\% * (D - 10)$	$10.5\% + 0.5\% * (D - 10)$	$20\% + 1\% * (D - 10)$	$35\% + 1.8\% * (D - 10)$	$58.5\% + 0.5\% * (D - 10)$	$58.5\% + 0.5\% * (D - 10)$
$15 < D \leq 20$	$9.7\% + 0.5\% * (D - 15)$	$10.9\% + 0.5\% * (D - 15)$	$13\% + 0.5\% * (D - 15)$	$25\% + 1\% * (D - 15)$	$44\% + 0.5\% * (D - 15)$	$61\% + 0.5\% * (D - 15)$	$61\% + 0.5\% * (D - 15)$
$D > 20$	$12.5\% + 0.5\% * (D - 20)$	$13.4\% + 0.5\% * (D - 20)$	$15.5\% + 0.5\% * (D - 20)$	$30\% + 0.5\% * (D - 20)$	$46.6\% + 0.5\% * (D - 20)$	$63.5\% + 0.5\% * (D - 20)$	$63.5\% + 0.5\% * (D - 20)$

TABLEAU 2.5 – Facteurs de chocs en fonction de la durée de l’actif et de la qualité de crédit. [EIOPA, 2014]

De même, pour les actifs qui ne disposent pas de notation, l’EIOPA propose la calibration des chocs suivante [EIOPA, 2014] :

Duration (années)	F^{hausse}
$D \leq 5$	$3\% * D$
$5 < D \leq 10$	$15\% + 1.7\% * (D - 5)$
$10 < D \leq 15$	$7.2\% + 0.5\% * (D - 10)$
$15 < D \leq 20$	$23.5\% + 1.2\% * (D - 15)$
$D > 20$	$\min(35.5\% + 0.5\% * (D - 20); 1)$

TABLEAU 2.6 – Facteurs de chocs en fonction de la durée pour les actifs non notés. [EIOPA, 2014]

2.3.4.2 Risque de spread sur les actifs issus de la titrisation

La charge en capital requise pour le risque de spread de cette seconde classe est définie comme [EIOPA, 2014] :

$$SCR_{titres}^{marché,spread} = \max(\Delta ANR_{|chocDirectSpreadTitres}; 0) \quad (2.13)$$

Le choc de spread à appliquer sur positions issues de la titrisation est l’effet immédiat d’une diminution instantanée de la valeur des actifs de cette classe sur l’actif net réévalué (ANR) dans le cas due à l’augmentation de leurs spreads de crédit.

$$chocDirectSpreadTitres = \sum_i MV_i * F^{hausse}(rating_i; duration_i) \quad (2.14)$$

où $F^{hausse}(rating_i; duration_i)$ est une fonction de la qualité de crédit et de la durée de l’exposition ; et MV_i la valeur de marché du titre i .

La fonction $F^{hausse}(rating_i; duration_i)$ est calibrée pour obtenir un choc consistant à la VaR à 99.5% à la suite d'un élargissement du spread de crédit. Elle est plafonnée à un niveau de 100% [EIOPA, 2014]. Ici encore, l'EIOPA propose une décomposition des titrisations en trois types :

- Titres de type 1 : il s'agit de titres qui respectent plusieurs critères dont les plus caractérisants sont :
 - * l'exposition doit avoir une qualité de crédit de 3 ou mieux;
 - * le titre est coté dans un marché régulier d'un pays membre de l'OCDE;
 - * après la délivrance d'un avis d'exécution et, le cas échéant, d'un avis de déchéance du terme, la tranche n'est pas subordonnée à d'autres tranches de la même opération ou du même mécanisme de titrisation en ce qui concerne le paiement du principal et des intérêts.

CQS	0	1	2	3
F^{hausse}	$2.1\% * D$	$4.2\% * D$	$7.4\% * D$	$8.5\% * D$

TABLEAU 2.7 – Facteurs de chocs en fonction de la duration pour les titres de type 1. [EIOPA, 2014]

- Titres de type 2 : il s'agit de tous les titres autre que les titres de type 1.

CQS	0	1	2	3	4	5 – 6
F^{hausse}	$12.5\% * D$	$13.4\% * D$	$16.6\% * D$	$19.7\% * D$	$82\% * D$	$100\% * D$

TABLEAU 2.8 – Facteurs de chocs en fonction de la duration pour les titres de type 2. [EIOPA, 2014]

- Actifs issus de retitrisations

CQS	0	1	2	3	4 – 6
F^{hausse}	$33\% * D$	$40\% * D$	$51\% * D$	$91\% * D$	$100\% * D$

TABLEAU 2.9 – Facteurs de chocs en fonction de la duration pour les retitrisations. [EIOPA, 2014]

2.3.4.3 Risque de spread sur les dérivés de crédit

Les dérivés de crédit sont composés des swaps de protection contre le risque de défaut (*credit default swaps* ou CDS), une perte de rendement (*total return swaps* ou TRS) et titres obligataires liés (*credit linked notes* ou CLN) où [EIOPA, 2014] :

- l'entreprise ne détient pas l'instrument sous-jacent ou une autre exposition pour laquelle le risque de base entre cette exposition et l'instrument sous-jacent est négligeable dans tous les scénarios possibles;
- le dérivé de crédit ne fait pas partie de la politique d'atténuation des risques de l'entreprise.

La détermination de la charge en capital au titre du risque spread pour les dérivés de crédit se fait par scénarios de choc à la hausse et à la baisse.

$$SCR_{DC,hausse}^{marché,spread} = \max(\Delta ANR_{|chocSpreadHausseDC}; 0) \quad (2.15)$$

$$SCR_{DC,baisse}^{marché,spread} = \max(\Delta ANR_{|chocSpreadBaisseDC}; 0) \quad (2.16)$$

L'exigence de fonds propres pour le risque de spread sur les dérivés de crédit est égale à la perte de fonds propres de base qui résulterait d'une augmentation absolue instantanée des spreads de crédit des instruments sous-jacents au dérivé de crédit ou d'une diminution relative instantanée des spreads des instruments sous-jacents au dérivé de crédit selon l'ordre de grandeur suivant [EIOPA, 2014] :

CQS	Élargissement du spread en variation absolue	Diminution du spread en variation relative
0	+130bp	-75%
1	+150bp	-75%
2	+260bp	-75%
3	+450bp	-75%
4	+840bp	-75%
5	+1620bp	-75%
6	+1620bp	-75%
7	+500bp	-75%

TABLEAU 2.10 – Facteurs de chocs pour le risque de spread des dérivés de crédit. [EIOPA, 2014]

2.3.5 Risque de change

Selon l'EIOPA, le risque de change découle des variations du niveau ou de la volatilité des taux de change. Les assureurs peuvent être exposés à un risque de change provenant de diverses sources, notamment de leurs portefeuilles d'investissement, ainsi que de leurs actifs, de leurs passifs et de leurs investissements dans des entreprises liées. La conception du sous-module "risque de change" vise à prendre en compte le risque de change pour un assureur provenant de toutes les sources possibles.

La monnaie locale est la monnaie dans laquelle l'entreprise prépare ses états financiers. Toutes les autres monnaies sont appelées monnaies étrangères. Une devise étrangère est pertinente pour le calcul des scénarios si le montant des fonds propres de base dépend du taux de change entre la devise étrangère et la devise locale [EIOPA, 2014].

Il convient de noter que pour chaque devise C, la position de change doit inclure tout investissement dans des instruments étrangers pour lesquels le risque de change n'est pas couvert [EIOPA, 2014]. En effet, les chocs pour les risques de taux d'intérêt, d'actions, de spread et d'immobilier n'ont pas été conçus pour intégrer le risque de change [EIOPA, 2014].

Les investissements dans des actions de type 1 et type 2 qui sont cotées sur des marchés boursiers opérant dans des monnaies différentes sont réputés sensibles à la monnaie de leur principale cotation. Les actions de type 2 qui ne sont pas cotées sont réputées sensibles à la monnaie du pays dans lequel l'émetteur exerce ses principales activités [EIOPA, 2014]. Les biens immobiliers sont supposés sensibles à la monnaie du pays dans lequel ils sont situés [EIOPA, 2014].

$$SCR_{hausse}^{marché,change} = \max(\Delta ANR_{|choc_change_hausse}; 0) \quad (2.17)$$

$$SCR_{baisse}^{marché,change} = \max(\Delta ANR_{|choc_change_baisse}; 0) \quad (2.18)$$

Le choc à la hausse est une **augmentation instantanée de 25%** de la valeur de la devise C par rapport à la devise locale, alors que choc à la baisse est une **baisse instantanée de 25%** de la valeur de la devise C par rapport à la devise locale [EIOPA, 2014].

Des réductions sur les chocs de 25% sont appliquées spécifiquement à certaines devises non libellées en euros mais rattachées à l'euro. Il en est de même, par effet de transitivité, entre les devises non libellées en euro mais qui sont rattachées à l'euro [EIOPA, 2014].

2.3.6 Risque de concentration

Le champ d'application du sous-module relatif au risque de concentration s'étend aux actifs pris en compte dans les sous-modules relatifs aux actions, au risque de spread et au risque immobilier, et exclut les actifs couverts par le module relatif au risque de défaut de la contrepartie afin d'éviter tout chevauchement entre les deux éléments du calcul standard du SCR.

À titre d'exemple, les risques découlant de la concentration des liquidités détenues par une banque sont pris en compte dans le module relatif au risque de défaut de la contrepartie, tandis que les risques correspondant à la concentration d'autres actifs bancaires devraient être reflétés dans le sous-module relatif au risque de concentration.

Une évaluation appropriée des risques de concentration doit prendre en compte les expositions directes et indirectes découlant des investissements inclus dans le champ d'application de ce sous-module [EIOPA, 2014].

Par souci de simplicité et de cohérence, la définition des concentrations de risque de marché concernant les investissements financiers est limitée au risque lié à l'accumulation des expositions avec la même contrepartie. Elle n'inclut pas d'autres types de concentrations (par exemple, zone géographique, secteur d'activité, etc.) [EIOPA, 2014].

L'EIOPA préconise que le calcul du SCR concentration doit être effectué par sur la base individuelle de chaque exposition. À cette fin, les expositions multiples auprès d'une unique contrepartie doivent être considérées comme une exposition individuelle [EIOPA, 2014].

Si nous posons E_i l'exposition nette au défaut auprès d'une contrepartie, $Assets_{x_i}$ le mon-

tant total des actifs considérés et $rating_i$ la qualité de crédit de la contrepartie i , alors l'excès d'exposition relative par exposition est calculé comme :

$$XS_i = \max\left(0; \frac{E_i}{Asset_{xl}} - CT\right) \quad (2.19)$$

où le seuil d'excès d'exposition relative CT , dépend de la qualité de crédit de la contrepartie i comme suit :

CQS	CT
0-2	3%
3-7	1.5%

TABLEAU 2.11 – Seuils d'excès d'exposition relatives pour le risque de concentration en fonction de la qualité de crédit. [EIOPA, 2014]

L'exigence de fonds propres pour la concentration du risque de marché sur une exposition individuelle i $Conc_i$ est égale à la perte de fonds propres de base qui résulterait d'une baisse relative instantanée de la valeur des actifs correspondant aux éléments suivants à l'exposition sur un seul nom i égale à :

$$Conc_i = XS_i * g_i \quad (2.20)$$

où g_i dépend de la qualité de crédit de la contrepartie i comme suit :

CQS	0 – 1	2	3	4 – 7
Facteur de risque g_i	12%	21%	27%	73%

TABLEAU 2.12 – Facteurs de chocs g . [EIOPA, 2014]

Par suite [EIOPA, 2014] :

$$SCR^{marché,conc} = \sqrt{\sum_i Conc_i^2} \quad (2.21)$$

2.4 CONCLUSION

L'assurance est une institution financière portée sur le risque dont le fonctionnement est régi par certaines règles. Elle a connu des évolutions au cours des années dues aux différentes crises financières, mais elle reste incontournable dans la société. On distingue deux branches traditionnelles d'assurance : l'assurance-vie et l'assurance non-vie.

Dans le cadre de l'assurance-vie, les assureurs ont recours à la gestion actif/passif ou ALM pour valoriser au mieux leurs engagements futurs. Il existe plusieurs types de contrats d'assurance sur la vie, dont les contrats d'épargne et de retraite qui ont fait l'objet de notre étude.

Une fois le cadre de l'étude présenté, il est également important de décrire les données qui ont servi de base pour notre étude. Cela permettra non seulement de comprendre les éléments qui constituent l'épargne et la retraite, mais cela constituera également un point de repères pour mesurer les changements qu'apporte notre étude.

Assurance vie et modèle ALM

3.1	Introduction	44
3.2	Assurance vie et modèle ALM	44
3.3	Au passif	46
3.3.1	Produits d'épargne	46
3.3.2	Produits de retraite	50
3.3.3	Hypothèses techniques de projections	53
3.4	À l'actif	54
3.5	Stratégie de participation aux bénéfices - Crediting strategy	57
3.6	Stratégie d'investissement - Investment strategy	59
3.7	Scénarios économiques	60
3.7.1	Scénarios risque neutre	61
3.7.2	Scénarios monde réel	62
3.8	Conclusion	62

3.1 INTRODUCTION

Le risque constitue l'objet principal de l'assurance. Les événements dommageables contre lesquels un assuré souhaite se prémunir sont contractuels et sont appelés **garanties**. Si ces garanties portent sur la durée de vie de l'assuré, alors il s'agit d'une assurance-vie. Sinon, il s'agit d'une assurance non-vie. Ce chapitre vise à présenter les produits d'assurance-vie qui ont fait l'objet de notre étude, ainsi que le modèle utilisé.

3.2 ASSURANCE VIE ET MODÈLE ALM

L'assurance-vie est un contrat par lequel l'assureur s'engage à verser une rente ou un capital à une personne, le souscripteur, moyennant une prime. Ce versement se fait selon le type de contrat souscrit. En effet dans un contrat d'assurance-vie, il faut distinguer deux sortes de contrats : un contrat d'assurance en cas de décès et un contrat d'assurance en cas de vie [[Previssima, 2023](#)].

- L'assurance en cas de vie : Le risque garanti ici est la vie de l'assuré. Le capital est versé à l'assuré à l'échéance du contrat, si celui-ci est toujours en vie. Dans ce type de contrat, l'assuré peut être le bénéficiaire.

- L'assurance en cas de décès : Dans le cadre d'une assurance-décès, le risque se réalise si l'assuré décède avant le terme du contrat, le capital ou la rente (éventuellement revalorisé des bénéfices de l'assureur) sera versé au bénéficiaire désigné par le souscripteur. Le bénéficiaire désigné doit être différent du souscripteur.
- Il existe également une 3ème catégorie : l'assurance mixte (vie et décès).

Par ailleurs, les contrats d'assurance-vie présentent la particularité d'être adossés à des actifs financiers. Ainsi, les assureurs mettent en place une gestion visant à équilibrer les flux de trésorerie à l'actif et au passif [Ooreka, 2023]. Cette gestion, appelée gestion actif/passif ou *Asset Liability Management* (ALM en anglais) consiste en une analyse du bilan comptable ou économique afin d'évaluer les engagements (passifs) de la compagnie et de définir un pilotage stratégique de ses ressources (actifs). Cette gestion est également déterminante pour permettre à l'assureur de réaliser des bénéfices financiers reversés ensuite aux assurés et aux actionnaires. Pour ce faire, l'actuaire s'aide d'un modèle de projection de bilan ou d'un **modèle ALM**.

Le modèle ALM qui a servi pour cette étude est une application développée par WTW et qui répond aux exigences prudentielles européennes de solvabilité ainsi qu'aux spécificités liées à la législation française. Cette application appelée **C-ALM** est une architecture complète qui permet de modéliser l'activité des assureurs-vie français. Il s'agit d'un emboîtement d'interactions de différents blocs appelés sous-modèles, qui interviennent dans la durée de vie d'un contrat. L'application permet de modéliser à la fois le passif et son évolution anticipée, l'actif, ainsi que les interactions qui les lient. Son architecture est présentée à la figure 3.1.

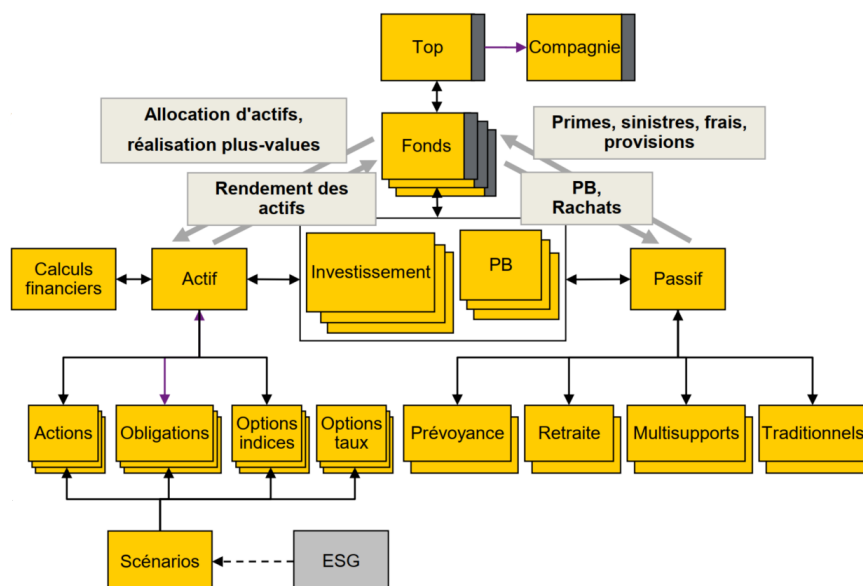


FIGURE 3.1 – Application C-ALM.

L'application C-ALM est donc une succession de **modèles** et **sous-modèles** avec des interactions comme le montre la figure 3.1.

3.3 AU PASSIF

Le passif de l'assureur représente l'ensemble des engagements pris par l'assureur envers ses assurés. Selon leur nature, ces engagements se déclinent en plusieurs produits commerciaux avec une fiscalité spécifique. Il existe à cet effet plusieurs types de produits d'assurance-vie, mais cette étude n'a concerné que ceux dit d'épargne et de retraite. L'application C-ALM permet de modéliser chacun de ces deux produits avec leurs garanties.

De manière générale, les assurés d'une compagnie d'assurance présentent des caractéristiques qui sont prises en compte lors de la modélisation et la projection des engagements. Avant toute étude à proprement parler de gestion actif/passif, il est primordial de comprendre les caractéristiques des contrats représentés au sein du passif.

3.3.1 Produits d'épargne

L'épargne constitue le placement préféré des français. Elle consiste à mettre de côté une partie des revenus non destinés directement à la consommation. Les primes collectées par l'assureur-vie sont alors investies sur des produits financiers afin de générer des rendements. Il existe principalement deux supports d'investissement pour l'épargne : le fonds en euros (ou fonds euros) et les unités de compte.

Les fonds en euros ont été créés en France dans les années 1980 pour répondre aux besoins des épargnants à la recherche d'un placement sécuritaire et stable. Ils tirent leurs noms du fait que l'investissement des assurés est libellé en euros. Les placements sur ces fonds ont quelques vertus [[Assurancevie.com](https://www.assurancevie.com), 2023]. D'abord, ils sont sécurisés car ils offrent une garantie en capital totale ou partielle à travers les revalorisations au taux minimum garanti (TMG). Ensuite, les intérêts annuels versés sur le fonds en euros sont définitivement acquis. Ils ne peuvent pas être remis en cause. Une fois versés, ces gains génèrent de nouveaux intérêts. On parle ainsi d'effet cliquet. Enfin, les capitaux accumulés sur les fonds en euros sont à la disponibilité des assurés qui peuvent racheter leurs polices d'assurance.

Les unités de compte à la différence des fonds en euros sont des investissements en parts d'actifs. Les primes investies sont converties en nombre de titres ou de parts de fonds. Ainsi, elles n'offrent aucune garantie de capital pour l'assuré qui supporte tout le risque. Ces dernières ne nécessitent donc aucune étude d'allocation de la part de l'assureur.

Par suite, cette étude sur l'allocation stratégique d'actifs n'a concerné que les produits d'épargne adossés au fonds en euros. Il s'agit précisément de contrats d'épargne individuelle et d'épargne collective issus de l'inventaire au 31/12/2022.

3.3.1.1 Caractéristiques des assurés

Le portefeuille d'épargne projeté a été sélectionné de sorte à représenter l'état du marché français. Les assurés sont caractérisés par un certain nombre d'informations que nous présentons dans la suite.

Distribution de l'âge des assurés : Une première caractéristique importante est l'âge de l'assuré à la date d'évaluation, c'est-à-dire au 31/12/2022.

<i>Âge minimal</i>	0
<i>Âge moyen</i>	45 ans
<i>Âge maximal</i>	75 ans

TABLEAU 3.1 – Distribution de l'âge pour les assurés en épargne.

Primes : Elles représentent l'investissement des assurés. Il s'agit d'une information importante qui est projetée par le modèle ALM. Les éléments concernant le versement des primes sont donc renseignés dans la base de passif et sont lus par le modèle. En assurance-vie, nous distinguons trois modalités de versement de la prime à savoir :

- **le versement unique :** la prime est versée en une fois, généralement à l'adhésion au contrat ;
- **les versements périodiques ou programmés :** les primes sont payées périodiquement selon une fréquence (annuelle, semestrielle, trimestrielle, mensuelle) définie dans le contrat ;
- **les versements libres :** l'assuré peut effectuer des versements supplémentaires sur son contrat d'assurance vie, à tout moment.

Pour cette étude, nous ne projetons que les primes programmées suivant une fréquence annuelle. Le niveau des primes annuelles sur tous les contrats d'épargne s'élève à 9,143,640 euros.

Provisions mathématiques (PM) : L'épargne constituée par l'assuré est représentée par une réserve dite provision mathématique (au singulier). Elle est calculée comme la différence entre les flux entrants (primes) et les flux sortants (prestations contractuelles dont les frais et commissions) qui caractérisent la durée de vie du contrat.

$$provision\ mathématique(t) = primes(t) - prestations(t) \quad (3.1)$$

L'effet cliquet sur l'épargne oblige les assureurs à revaloriser cette provision mathématique à un taux de sorte à préserver a minima les gains acquis par l'assuré. Ce taux est le taux de rendement servi, qui prend en compte le taux minimum garanti (TMG), et la participation aux bénéfices (PB) si possible. Concrètement, la dernière équation s'écrira comme :

$$provision\ mathématique = (primes(t) - prestations(t)) \times (1 + \text{taux servis}) \quad (3.2)$$

$$\text{taux servis} = \max(TM\text{G}, \text{taux de PB cible})$$

Alors que le TMG est contractuel, le taux de PB cible dépend des bénéfices techniques¹ et de la production financière nette (du fonds euros). L'assureur est tenu de verser au moins

1. Il s'agit de la différence entre les frais prélevés et les frais réels.

90% des bénéfiques techniques et au moins 85% de la production financière nette, le reste étant destiné aux actionnaires ou à la compagnie. On parlera de provisions mathématiques (au pluriel) pour désigner l'épargne accumulée par l'ensemble des assurés.

Les provisions mathématiques au 31/12/2022 du portefeuille d'épargne considéré s'élèvent à 2,308,109,794.79 euros. Par ailleurs, le TMG n'est pas unique pour tous les assurés. Il existe plusieurs TMG. En ce qui concerne les contrats en épargne, les TMG varient de 0% à 5% par pas de 0.25%. Il apparaît pertinent de décliner le niveau des provisions mathématiques (PM) suivant chaque TMG.

<i>TMG</i>	<i>% de PM</i>
0%	14.947%
0.25%	4.686%
0.5%	15.709%
0.75%	1.455%
1%	1.226%

<i>TMG</i>	<i>% de PM</i>
1.25%	0.572%
1.5%	1.038%
1.75%	1.039%
2%	1.966%
2.5%	4.861%

<i>TMG</i>	<i>% de PM</i>
2.75%	1.790%
3%	1.238%
3.25%	2.601%
3.5%	0.974%
3.75%	6.875%

<i>TMG</i>	<i>% de PM</i>
4%	12.921%
4.25%	6.828%
4.5%	8.949%
4.75%	0.535%
5%	9.790%

TABLEAU 3.2 – Répartition des PM par TMG pour les produits d'épargne.

L'analyse du tableau 3.2 indique que les provisions mathématiques de plus de 100 millions d'euros sont associés aux TMG de 0.5%, 0%, 4%, 5%, 4.5%, 3.75%, 4.25%, 2.5% et 0.25% par ordre décroissant de PM. Cela représente près de 86% des provisions mathématiques, et révèle que les garanties accordées aux assurés sont relativement élevées. La moyenne pondérée des TMG par leurs provisions mathématiques respectives est de 2.5%. Alors sans prendre en compte la participation aux bénéfiques, le fonds euros devra générer en moyenne un rendement supérieur à 2.5% pour verser les intérêts techniques aux assurés en épargne. En comparaison avec les chiffres des assureurs français en 2022, le taux de revalorisation moyen (TMG + participation aux bénéfiques) des contrats d'assurance-vie se porte autour de 2% [ACPR, 2023]. Les taux proposés aux assurés du portefeuille sont donc en moyenne supérieure au taux moyen de marché en 2022. Nous verrons dans quelle mesure ces taux de revalorisation relativement élevés pourront affecter la sélection de l'allocation optimale permettant de soutenir ces engagements envers les assurés.

Ancienneté : En France, les contrats d'assurance-vie bénéficient d'une fiscalité avantageuse après 8 ans d'ancienneté. Tant que l'assuré ne touche pas à son épargne, les rendements de l'investissement ne sont pas imposables. L'impôt sur le revenu ne s'applique que lorsque l'assuré procède à un rachat² de son investissement. Les contrats avec une ancienneté supérieure à 8 ans bénéficient d'un abattement annuel de 4,600 euros pour les célibataires, veufs ou divorcés, ou de 9,200 euros pour les couples mariés ou pacsés soumis à une imposition commune [Impots.gouv.fr, 2023]. S'agissant du portefeuille étudié, l'ancienneté moyenne des assurés en épargne est de 12 ans. Cette ancienneté légèrement supérieure à l'ancienneté moyenne des contrats en épargne (autour de 8 ans), s'explique par le niveau des TMG proposés, comme vu précédemment. Les assurés se voient offrir en effet un bon rendement sur leurs investissements, et ont tendance à rester beaucoup plus longtemps dans leurs contrats.

3.3.1.2 Meilleure estimation des engagements pour l'épargne

Comme préconisé par la norme Solvabilité 2, l'assureur doit déterminer le niveau de ses engagements en les valorisant en valeur de marché. On parle ainsi de meilleure estimation ou *best estimate* (*be*). Les flux qui composent la durée de vie d'un contrat d'épargne sont les primes, les frais/commissions, et les sinistres. Ainsi, la meilleure estimation des engagements en épargne se calcule comme suit :

$$be_{savings} = be_{sinistres} - be_{primes} + be_{frais_commissions} \quad (3.3)$$

Les provisions techniques sont définies dans Solvabilité 2 comme la somme de la meilleure estimation des engagements et de la marge de risques. L'article R.351-2 du code des assurances définit la meilleure estimation comme la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs compte tenu de la valeur temporelle de l'argent estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente, soit la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs [ACPR, 2020].

3.3.1.3 Best estimate des primes

Le BE des primes est calculé comme la somme des valeurs actualisées des primes et des chargements sur primes à chaque pas de temps de projection (qui est mensuel dans notre modèle).

$$be_{primes}(0) = \sum_{t \geq 1} disc_factor(t) \times (primes(t) + chargements_primes(t)) \quad (3.4)$$

- $primes(t)$: représente les primes totales nettes de chargements sur primes.
- $chargements_primes(t)$: représente un pourcentage des primes totales. Ce pourcentage est une hypothèse lue par le modèle ;

2. Une attention sera portée aux rachats dans la suite.

- $disc_factor(t)$: est le facteur d'actualisation calculé à partir d'une courbe des taux avec lesquels sont actualisés les flux de trésorerie au sein du modèle. Dans le cadre de S2, il est calculé à partir de la courbe des taux EIOPA.

3.3.1.4 Best estimate des frais/commissions

Le BE des frais/commissions est calculé comme la somme des valeurs actualisées des frais/commissions initiaux (init) et des frais/commissions de renouvellement (renewal).

$$be_frais_commissions(0) = \sum_{t \geq 1} disc_factor() \times \left(\sum_{i \in \text{init}, \text{renewal}} (frais_i(t) + commissions_i(t)) \right) \quad (3.5)$$

3.3.1.5 Best estimate des sinistres

Pour un contrat d'épargne, un sinistre désigne à la fois :

- le rachat du contrat par l'assuré ;
- les arbitrages entre le fonds euros et les unités de compte pour les contrats multi-supports ;
- les maturités ;
- les taxes sociales notamment la contribution sociale généralisée (CSG) pour financer la sécurité sociale.

$$be_sinistres = (maturities(t) + arbitrage(t) + csg(t-1) + rachats(t)) * discount_factor(t) \quad (3.6)$$

À cette dernière quantité s'ajoute la valeur terminale, la somme de toutes les provisions encore non nulles en fin de projection, et qui est restituée à l'assuré.

3.3.2 Produits de retraite

Un contrat de retraite est un contrat d'assurance-vie qui permet de se constituer une retraite complémentaire et/ou supplémentaire, versée sous forme de rentes viagères (immédiates ou différées). La vie d'un contrat de retraite peut se résumer en deux phases à savoir :

- **Phase de constitution** : l'assuré se constitue d'abord un capital en versant des primes jusqu'à la retraite. Cette phase de constitution est assimilable à un contrat d'épargne.
- **Phase de restitution** : une fois qu'il a atteint l'âge de la retraite, ce capital lui est reversé en rentes moyennant des frais et des commissions jusqu'à son décès ou à celui de son second bénéficiaire s'il est défini.

À l'instar de l'épargne, les contrats de retraite qui ont l'objet de ce mémoire sont des données de l'inventaire au 31/12/2022.

3.3.2.1 Caractéristiques des assurés

Le portefeuille de retraite projeté a également été sélectionné de sorte à représenter l'état du marché français. Les assurés sont caractérisés par un certain nombre d'informations que nous présentons dans la suite.

Distribution de l'âge des assurés : La distribution de l'âge des assurés en retraite se présente comme suit :

<i>Âge minimal</i>	14 ans
<i>Âge moyen</i>	73 ans
<i>Âge maximal</i>	101 ans

TABLEAU 3.3 – Distribution de l'âge pour les assurés en retraite.

Âge à la retraite : Une information importante qui caractérise les produits de retraite est l'âge de la retraite. Il marque le passage de la phase de constitution à la phase de restitution où la nature des prestations est beaucoup plus coûteuse pour l'assureur. L'âge moyen des assurés en retraite qui ont fait l'objet de cette étude est de 64 ans. En considérant l'âge moyen, on peut supposer qu'une grande partie des assurés est déjà à la retraite et touche des rentes.

Statut de l'assuré : Lorsque l'assuré est en phase de constitution, il verse ou cotise des primes. Il est dit cotisant. À la retraite, il perçoit des rentes et est appelé rentier. Ces dénominations caractérisent le statut de l'assuré au sein du portefeuille. Concernant le portefeuille d'étude, la répartition des assurés selon leur statut permet de confirmer qu'ils sont majoritairement déjà à la retraite.

<i>Cotisants</i>	21%
<i>Rentiers</i>	79%

TABLEAU 3.4 – Répartition des assurés en retraite selon le statut.

Primes : Le versement des primes ne concerne que la phase de constitution assimilable à de l'épargne pure. Les modalités de versements des primes sont donc les mêmes que pour l'épargne. Les primes projetées pour cette étude sont des primes programmées suivant une fréquence annuelle. Le niveau des primes annuelles sur la partie en phase de constitution s'élève à 3,800,647 euros.

Provisions mathématiques (PM) : Elles représentent comme pour l'épargne l'investissement des assurés, capitalisé au cours du temps. De manière similaire à l'épargne, la provision mathématique à chaque pas de temps, pour un assuré, se calcule comme la différence entre les primes et les prestations.

$$\text{provision mathématique}(t) = \text{primes}(t) - \text{prestations}(t) \quad (3.7)$$

Cependant, selon la phase du contrat (constitution ou restitution), l'évolution de la PM est différente. D'abord, pendant la phase de constitution, les primes collectées sont converties en rentes en prenant en compte la probabilité pour l'assuré de rester dans le contrat avant la retraite. Un assuré reste dans son contrat s'il ne décède pas, ou s'il ne rachète pas son épargne avant sa retraite. Le capital accumulé pendant la phase de constitution peut faire l'objet ou non d'une revalorisation à un taux contractuel chaque année. Ensuite, pendant la phase de restitution, le capital accumulé pendant la période active de l'assuré lui est versé sous forme de rentes ou de capital selon les termes de son contrat. L'évolution de la PM d'une année à une autre prendra alors en compte la probabilité de survie de l'assuré. Par ailleurs, l'assuré peut souscrire également à des options de réversion, c'est-à-dire qu'à son décès, une partie contractuelle de sa rente reviendra à son conjoint. Pour ces situations, la PM devra prendre également en compte la probabilité de survie du conjoint ainsi que la probabilité jointe de survie du couple.

Les provisions mathématiques au 31/12/2022 du portefeuille de retraite considéré s'élèvent à 1,788,549,881.21 euros. La répartition des PM par TMG se décline comme suit :

TMG	% de PM
0%	40.044%
0.10%	1.767%
0.25%	4.046%
0.5%	10.905%

TMG	% de PM
0.75%	5.312%
1%	3.551%
1.25%	10.084%
1.5%	5.775%

TMG	% de PM
1.75%	4.670%
2%	6.474%
2.5%	3.221%
2.75%	0.029%

TMG	% de PM
3%	0.023%
3.25%	1.141%
4%	0.001%
4.5%	0.956%

TABLEAU 3.5 – Répartition des PM par TMG pour les produits de retraite.

L'analyse du tableau 3.5 indique que 40% des provisions mathématiques ont un TMG de 0%, garantissant à minima le capital investi. La moyenne pondérée des TMG par leurs provisions mathématiques respectives est de 0.73%. Alors sans prendre en compte la participation aux bénéfices, le fonds euros devra générer en moyenne un rendement supérieur à 0.73% pour verser les intérêts techniques aux assurés en retraite.

Ancienneté : L'ancienneté moyenne des assurés en retraite dans le portefeuille étudié est de 28 ans.

3.3.2.2 Meilleure estimation des engagements pour la retraite

La meilleure estimation des engagements en retraite s'écrivent comme :

$$be_{retraite} = be_{sinistres} - be_{primes} + be_{frais_commissions} \quad (3.8)$$

Les contrats de retraite ne diffèrent des contrats d'épargne qu'à travers les sinistres, le BE des primes et des frais/commissions étant calculé de la même manière.

3.3.2.3 Best estimate des sinistres

Pour un contrat de retraite, un sinistre désigne à la fois :

- la prestation de retraite sous forme de rentes (rente);
- la prestation de retraite sous forme de sortie en capital (sortie_capital);
- le rachat du contrat par l'assuré (rachat);
- les prestations de décès (presta_deces).

Par ailleurs, la rente peut être anticipée et donc payée à terme à échoir (a_echoir) ou payée à terme échu (echu). Ainsi, en posant :

$$part_echoir(t) = disc_factor(t) \times (a_echoir(t) + 0.5 \cdot (rachat(t) + presta_deces(t) + sortie_capital(t)))$$

$$part_echu(t) = disc_factor(t) \times (echu(t) + 0.5 \cdot (rachat(t) + presta_deces(t) + sortie_capital(t)))$$

alors,

$$be_{sinistres} = valeur_terminale_assure(t) + part_echoir(t) + part_echu(t) \quad (3.9)$$

où $valeur_terminale_assure(t)$ est le montant de provisions encore existant en fin de projection, et qui est restitué à l'assuré.

3.3.3 Hypothèses techniques de projections

Lors de la tarification de ses produits, l'assureur-vie fait des hypothèses techniques pour prendre en compte les coûts liés à son activité. Il s'agit notamment des coûts de gestion des contrats appelés frais, et des coûts liés aux réseaux de distribution appelés commissions. Les frais et les commissions sont des prestations non négligeables qui interviennent pendant la durée de vie des contrats. De plus, les assurés ont la possibilité de racheter leurs épargnes et de résilier leurs contrats. L'assureur fait également des hypothèses de comportement pour anticiper et prévenir des départs massifs de ses assurés.

Frais et commissions Les frais et commissions auxquels sont soumis les contrats d'assurance sont de nature diverse. Nous distinguons :

- les frais de gestion sur encours et sur sinistres
- les frais d'acquisition des primes
- les commissions de gestion sur encours et sur sinistres
- les commissions d'acquisition

Rachats partiels et totaux En souscrivant à un contrat d'épargne, l'assuré se voit accorder le droit de racheter son épargne à tout moment. Cette asymétrie d'engagements n'est pas à l'avantage de l'assureur. En effet, l'assureur fait ses projections de bilan le futur en espérant que ses clients demeurent fidèles tout le long. Mais en réalité, certains de ses assurés quitteront le portefeuille : il s'agit des rachats. Selon leurs causes, on distingue deux types de rachats à savoir les rachats structurels et les rachats conjoncturels :

- Les rachats structurels définissent les situations dans lesquelles les assurés ont besoin naturellement de toucher à leurs épargnes, notamment pour acheter un bien par exemple. Ils sont calibrés en fonction du type de contrat (épargne, rentes), des caractéristiques de l'assuré (âge, encours, mais surtout l'ancienneté dans le contrat) et des caractéristiques du contrat (options du contrat, pénalités de rachat etc...).
- Les rachats conjoncturels ou dynamiques définissent les situations où les assurés sont mécontents des rendements actuels (TMG +PB) de leurs investisseurs et préfèrent aller à la concurrence. Ils sont calibrés en fonction du contexte économique et de la concurrence. En pratique, une déviation des taux de rachats structurels est calculée, en fonction de la différence entre le taux de rendement de l'assureur (calculé avec son modèle ALM) et le taux de marché.

3.4 À L'ACTIF

À l'instar du passif, le modèle **actif** de l'application C-ALM comporte plusieurs sous-modèles formés par les différentes classes d'actif constituant le portefeuille d'actifs adossé à notre portefeuille de passif. Ces classes d'actifs sont :

Action : il s'agit d'un titre de propriété ou une fraction du capital d'une entreprise. Son détenteur est appelé actionnaire et dispose de certains droits, notamment, celui de percevoir des dividendes, si la société en distribue, et d'influer sur la politique générale de l'entreprise lors des assemblées générales d'actionnaires via son droit de vote [[La finance pour tous, 2022](#)]. Les actions, de par leur caractère risqué représentent généralement une petite partie du portefeuille d'actifs d'un assureur.

Obligation : il s'agit d'un titre de créance utilisé par les entreprises ou les États pour emprunter de l'argent sur les marchés financiers [[La finance pour tous, 2023](#)]. À la différence des actions, les obligations et particulièrement celles d'États sont considérées comme sans

risque ou peu risquées surtout si l'État en question a une solide économie. Ainsi, une obligation peut être jugée risquée si elle est émise par un État ou une entreprise dont la santé économique est douteuse. Cette santé économique de l'entreprise ou de l'État est évaluée régulièrement par des agences de notations. Les notes attribuées permettent alors d'évaluer un risque de défaut. Selon la nature des flux, les obligations peuvent être à taux fixe (*fixed income*), à taux variable (*Floating Rate Note* ou *FRN*, ou indexées sur l'inflation (*OII*)). Elles peuvent également être sans échéance ou date de remboursement. Ces dernières sont appelées des obligations perpétuelles (*PERP*).

Real Estate : désigne les investissements sur l'immobilier. Ces investissements peuvent être physiques ou des indices sur l'immobilier.

OPCVM : Organismes de Placement Collectif en Valeurs Mobilières, il s'agit d'intermédiaires financiers qui permettent d'investir sur des marchés financiers difficiles d'accès autrement (marchés financiers et monétaires étrangers, actions non cotées,...) [INSEE, 2019]. Leur activité principale consiste à émettre des titres financiers auprès de divers agents (particuliers, sociétés, etc...) en vue d'acquérir des actifs financiers [INSEE, 2019]. On distingue traditionnellement deux grandes catégories d'OPCVM selon leur mode d'organisation. D'une part, nous distinguons les sociétés d'investissement à capital variable (Sicav) qui sont des sociétés avec conseil d'administration [INSEE, 2019]. D'autre part, nous avons les fonds communs de placement (FCP) qui n'ont pas de personnalité juridique et qui sont créés à l'instigation d'une société de gestion et d'une banque dépositaire [INSEE, 2019]. Cependant, l'autorité des marchés financiers distingue six grandes familles d'OPCVM selon la nature des fonds gérés : OPCVM monétaires, obligataires, actions, alternatifs, fonds à formule et diversifiés [INSEE, 2019].

Cash : ou liquidités en français, cette classe d'actifs comporte la trésorerie et les actifs liquides présents dans le portefeuille.

Par ailleurs, nous distinguons deux types de valeur pour un actif financier à savoir :

- la valeur nette comptable (VNC) : ou *book value* en anglais, il s'agit de la valeur d'acquisition du titre ;
- la valeur de marché (VM) : ou *market value* en anglais, il s'agit de la valeur réelle de l'actif sur les marchés financiers en prenant en compte les revalorisations ou les dépréciations dues aux amortissements sur l'actif.

La valeur de marché des actifs en portefeuille est de 3,912,259,608.01 euros, ventilée dans les différentes classes d'actifs dans les proportions suivantes :

	<i>Obligations</i>	<i>Actions</i>	<i>Immobilier</i>
% de VM	76.05%	6.01%	3.72%

	<i>OPC obligataires</i>	<i>OPC monétaires</i>	<i>OPC diversifié</i>	<i>Prêts</i>
% de VM	3.89%	5.97%	0.5%	3.85%

TABLEAU 3.6 – Répartition de la valeur de marché des actifs selon les classes d’actifs.

Le portefeuille obligataire se décline particulièrement à une maille plus fine d’obligations selon la nature de ses flux comme suit :

<i>Type d’obligation</i>	<i>% de valeur de marché</i>
<i>FI</i>	95.14%
<i>FRN</i>	4.25%
<i>OII</i>	0.6%
<i>PERP</i>	0.01%

TABLEAU 3.7 – Déclinaison du portefeuille obligataire suivant le type d’obligation.

L’analyse du tableau 3.7 indique que le portefeuille obligataire est principalement composé d’obligations à taux fixe. Cela permet à l’assureur-vie un meilleur pilotage de sa stratégie d’investissement. De plus, il est possible de distinguer le portefeuille obligataire selon la nature de l’émetteur comme indiqué dans les tableaux suivants.

<i>Notation de crédit</i>	<i>% de valeur de marché</i>
<i>AAA</i>	6.29%
<i>AA</i>	76.85%
<i>A</i>	6.62%
<i>BBB</i>	10.23%

TABLEAU 3.8 – Répartition des notations de crédit de la part des obligations souveraines.

<i>Notation de crédit</i>	<i>% de valeur de marché</i>	<i>Notation de crédit</i>	<i>% de valeur de marché</i>
<i>AAA</i>	9.69%	<i>BB</i>	1.29%
<i>AA</i>	27.47%	<i>B</i>	0.01%
<i>A</i>	25.93%	<i>CCC</i>	0.55%
<i>BBB</i>	34.49%	<i>Non noté</i>	0.57%

TABLEAU 3.9 – Répartition des notations de crédit de la part des obligations d’entreprise.

Les tableaux 3.8 et 3.9 révèlent que les obligations détenues en actifs sont majoritairement de notation supérieure à *BBB*. D’une part les obligations souveraines détenues sont celles des États des pays de la zone Euro. Elles offrent beaucoup de garantie sur la sécurité de l’investissement et se traduisent par une bonne notation. D’autre part, les entreprises émettrices des obligations détenues à l’actif sont de très grandes entreprises avec une solidité financière. Cela se traduit par les niveaux de notation du tableau 3.9. Ces obligations

jugées peu risquées voire sans risque n’offrent pas beaucoup de rendement, d’où la présence de quelques unes plus risquées avec un fort rendement, donc une mauvaise notation.

3.5 STRATÉGIE DE PARTICIPATION AUX BÉNÉFICES - CREDITING STRATEGY

Le sous-modèle de stratégie de participation aux bénéfices matérialise les interactions entre l’actif et le passif au sein d’un modèle ALM. Couplé avec le sous-modèle d’investissement, il permet d’équilibrer les différentes réserves suite à des variations soit de l’actif, soit du passif.

Contrairement au bilan économique de Solvabilité 2, c’est le bilan comptable qui est affecté par les mouvements de trésorerie. Le passif au bilan comptable se décline en fonds propres, en provisions mathématiques et en provisions techniques.

Actifs	Passifs
Actions	Fonds propres
Obligations	Provisions mathématiques
Real Estate	
OPCVM	
Infra	Provisions techniques
Cash	

TABLEAU 3.10 – Bilan comptable d’un assureur.

Les provisions techniques sont composées de la réserve de capitalisation, de la provision pour risque d’exigibilité (PRE) et de la provision pour participation aux excédents (PPE).

Réserve de capitalisation : Cette réserve a pour objectif de parer à la dépréciation des valeurs des titres amortissables. Les plus-values réalisées sur ces titres ne peuvent être considérées comme des revenus, elles sont ainsi dotées en Réserve de capitalisation.

Provision pour risque d’exigibilité : Cette provision est destinée à faire face aux engagements, dans le cas de moins-values, de l’ensemble des actifs non amortissables.

Si la société satisfait aux exigences de solvabilité, la dotation annuelle à la provision pour risque d’exigibilité (PRE) au titre de l’exercice est égale au tiers du montant de la moins-value latente nette globale constatée sur ces placements. Elle est inscrite en totalité sinon.

Provision pour participation aux excédents : La provision pour participation aux excédents permet à l’assureur de lisser la revalorisation des PM sur plusieurs années. Ainsi, dans le cas d’une année où les résultats ne sont pas suffisants, l’assureur a la possibilité de réaliser une reprise sur la PPE afin de servir un meilleur taux. L’assureur a le choix de ne pas verser la totalité de la participation aux bénéfices (PB) à la fin de l’exercice comptable. Il

peut doter une partie ou la totalité de la PB en PPE et aura alors au maximum 8 ans pour reverser celle-ci à l'assuré.

De manière générale, une projection ALM se déroule comme suit. En début de projection, le modèle effectue un rebalancement qui vise à équilibrer le bilan. Il s'agit, si la valeur des actifs est différente de la valeur des passifs, de procéder à une première étape d'achat et/ou vente d'actifs.

Puis, au cours de l'année de projection, l'actif et le passif subissent un vieillissement jusqu'en fin d'année. Le passif varie à travers les différentes prestations (rachats, décès, frais/commissions, rentes, etc...) et l'actif varie à travers l'achat et/ou la vente des différentes classes d'actif. En fin d'année de projection, les flux au passif et à l'actif sont agrégés et portés au niveau **fonds** comme l'indique la figure 3.1. En effet, les classes d'actifs sont adossées à des fonds. Les assureurs peuvent disposer de plusieurs fonds en fonction des besoins de l'activité. Le fonds en euros classique est souvent désigné par **actif général** et est donc diffusé au sein des contrats au passif. Pour équilibrer le bilan en fin d'année, il se produit une interaction actif/passif donnant lieu :

- au désinvestissement (resp. réinvestissement) de l'actif ;
- et à la dotation (resp. reprise) des différentes provisions au passif.

Ensuite, le modèle évalue la nouvelle composition du portefeuille et la compare à l'allocation cible définie en hypothèse. Si l'allocation du portefeuille change, il s'en suivra l'étape de ré-allocation d'actifs : il s'agit d'une nouvelle vague d'achat/vente d'actifs.

Pour finir, le modèle produit les différents résultats technique et financier afin de financer les intérêts techniques et la participation au bénéfice. Les provisions subissent des reprises et/ou dotations et sont ainsi revalorisées, aboutissant à la consolidation du bilan et du compte de résultat qui seront projetés au cours de l'année suivante.

Nous illustrons le déroulement de la projection ALM à la figure 3.2.

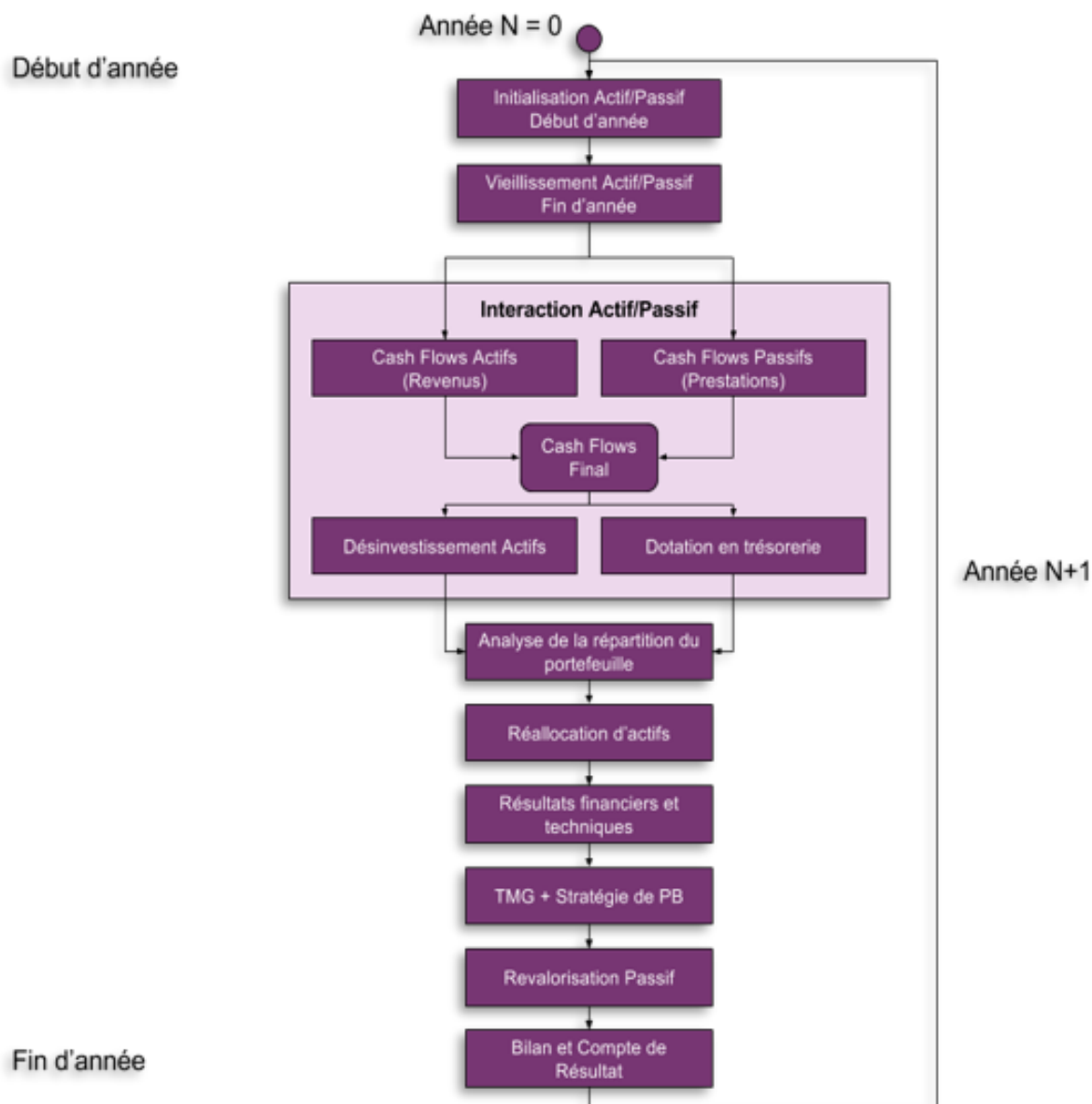


FIGURE 3.2 – Déroulement d’une projection ALM.

3.6 STRATÉGIE D’INVESTISSEMENT - INVESTMENT STRATEGY

Le sous-modèle de stratégie d’investissement est le modèle qui se charge de la stratégie d’investissement lors d’une projection ALM.

Comme présenté à la section précédente, l’exécution d’un modèle ALM comporte plusieurs étapes qui se répètent jusqu’à atteindre l’horizon de projection. Le modèle prend en entrée l’allocation cible du portefeuille à atteindre à chaque fin d’année d’exercice. Afin de contraindre le modèle à respecter cette allocation cible et lui donner à la fois une flexibilité autour de la cible, on spécifie pour chaque classe d’actif, une allocation maximale et une allocation minimale.

Les interactions actif-passif lors de la projection, impliquent de procéder à des achats

et/ou ventes d'actifs.

À chaque fois qu'il y a nécessité d'acheter ou de vendre des actifs, c'est le modèle de stratégie d'investissement qui est sollicité. Il joue un rôle très important, avec le modèle de stratégie de crédit, dans l'équilibre entre les actifs et les passifs.

Le modèle permet, en fonction de la valeur comptable ou de marché, de :

- déterminer l'allocation courante du portefeuille;
- rechercher l'allocation cible définie par l'utilisateur dans les hypothèses;
- déterminer si l'allocation courante du portefeuille est admissible, c'est-à-dire qu'elle se trouve bien dans les intervalles [min, max] renseignés en hypothèse;
- déterminer le pourcentage d'actif à acheter si l'allocation courante est inférieure à l'allocation minimum requise ou à vendre si l'allocation courante est supérieure à l'allocation maximum requise;
- déterminer le pourcentage d'actif à acheter ou à vendre pour atteindre l'allocation cible;
- déterminer les pourcentages additionnels d'actif à acheter ou à vendre lors de l'étape de ré-allocation d'actifs.

Les phases ou étapes d'investissement ou de désinvestissement suivent des règles définies selon des priorités d'achat ou de vente associées à chaque classe d'actifs présente au sein du portefeuille. En effet, l'existence de plusieurs classes d'actifs, ainsi que les contraintes réglementaires font que l'assureur ne peut pas vendre ou acheter n'importe quel actif. Il doit alors définir toujours en hypothèse un ordre de priorité pour chaque classe d'actif destinée à la vente ou à l'achat pour financer un mouvement quelconque au passif.

La projection est fortement influencée par l'allocation cible qu'on lui impose en hypothèse. Pour cette raison, il est important de procéder à une étude minutieuse de cette dernière pour optimiser les performances de l'activité et satisfaire à la fois les assurés et les actionnaires.

3.7 SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES

Les garanties financières (capital garanti, participations aux bénéfiques) et les options contractuelles (rachats partiels et totaux) intégrées dans les contrats d'épargne retraite impliquent pour une valorisation adéquate d'avoir recours à des méthodes par simulation.

La meilleure estimation selon **Solvabilité 2** étant une moyenne pondérée par leur probabilité de toutes les réalisations possibles des flux futurs de trésorerie, il est donc important d'envisager une large gamme de scénarios économiques pouvant avoir une incidence sur le bilan de l'assureur-vie. Pour ce faire, on a recours à un générateur de scénarios économiques (GSE).

L'ACPR définit le GSE comme un ensemble de modèles (taux, actions, spreads de crédit, inflation, etc.) permettant de simuler aléatoirement des scénarios d'évolution possibles des

marchés financiers, qui ont une incidence sur la valeur et les performances de l'actif de l'organisme d'assurance [ACPR, 2020].

Le GSE produit en sortie un échantillon de scénarios économiques, qui constituent à leur tour une hypothèse en entrée du modèle de projection actif/passif utilisé pour le calcul de la meilleure estimation [ACPR, 2020]. Le GSE étant un ensemble de modèles mathématiques, les scénarios générés subissent généralement des tests en guise de validation.

Puis, pour chacun des scénarios de l'échantillon, le modèle projette année après année jusqu'à l'extinction des engagements, le bilan, le compte de résultat, la participation aux bénéfices, et enfin les flux de trésorerie, dont la dépendance vis-à-vis de l'évolution de l'environnement économique et des performances de l'actif est ainsi reflétée [ACPR, 2020].

Selon les objectifs, on peut à partir d'un GSE générer deux univers de jeu de scénarios économiques. Les univers de scénarios risque neutre et monde réel sont les deux alternatives usuelles.

3.7.1 Scénarios risque neutre

Le GSE utilisé pour le calcul de la meilleure estimation et par extension du SCR s'appuie sur la probabilité dite **risque neutre**. L'existence et l'unicité de cette probabilité reposent sur les hypothèses de complétude des marchés et d'absence d'opportunité d'arbitrage. En effet, le GSE risque neutre doit satisfaire certaines exigences à savoir [ACPR, 2020] :

- le niveau des taux doit être, en moyenne, cohérent avec la courbe de taux sans risque EIOPA à la date du calcul ;
- les scénarios respectent le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) ;
- les prix d'actifs générés par le modèle sont cohérents avec les prix observés sur les marchés financiers.

Sous la probabilité **risque neutre**, les processus de prix actualisés sont des martingales. En d'autres termes, tous les actifs ont en moyenne le même rendement, celui de l'actif sans risque. Les investisseurs sont donc supposés être indifférents au risque, et n'exigent pas de primes de risque peu importe le risque associé à un actif [ACPR, 2020].

Le GSE risque neutre est calibré au moyen des prix d'actifs (calls ou puts pour les actions ; caps, floors ou swaptions pour les taux), afin de refléter la volatilité des marchés et la courbe de taux sans risque EIOPA [ACPR, 2020].

Afin de permettre le calcul de la meilleure estimation (puis du SCR), le jeu de scénarios économiques risque neutre est un ensemble de 1000 scénarios où les variables économiques ont été projetées sur 50 ans pour chaque trajectoire. Les scénarios ont été générés sous la probabilité risque neutre à partir de l'outil « ESG STAR RN », développé par WTW. Le générateur a été calibré suivant une méthode standard WTW, sur la base des données de marchés au 31/12/2022. Les scénarios générés ont été testés afin de s'assurer de leur bonne qualité intrinsèque.

3.7.2 Scénarios monde réel

L'utilisation de l'univers de scénarios risque neutre s'impose par le cadre prudentiel pour l'évaluation de la meilleure estimation. En réalité, les investisseurs ne sont pas indifférents au risque et exigent une prime de risque pour détenir ou non un actif risqué. L'utilisation du GSE monde risque neutre n'est donc pas adapté dans certaines situations comme la mise en place de stratégies financières.

Le second univers de scénarios est l'univers monde réel. Ce dernier tient compte des événements économiques et des fluctuations réelles de marché. Ainsi, dans cet univers, les investisseurs sont sensibles au risque. Les prix des actifs financiers y sont déterminés en prenant en compte les risques associés aux investissements, ainsi que les anticipations concernant les événements économiques et l'évolution du marché.

Les scénarios monde réel ont été générés à partir de l'outil « ESG STAR RW », développé par WTW. Le générateur a été calibré suivant une méthode standard WTW, sur la base des données de marchés au 31/12/2022.

3.8 CONCLUSION

Ce chapitre fait état de lieu de l'architecture de modélisation utilisée par les assureurs-vie. La nature de leurs activités se traduit par une complexité de cette architecture de modélisation qu'est le modèle ALM.

D'une part, il modélise le passif afin de calculer au plus précis, le niveau de ses engagements envers ses assurés : c'est la meilleure estimation. D'autre part, il doit avoir de bonnes connaissances en finance de marché pour optimiser les rendements sur les actifs. Ces rendements serviront à rémunérer les placements des assurés. Il existe donc une relation très forte entre les deux postes au bilan de l'assureur-vie, telle que tout mouvement de l'un entraîne un mouvement de l'autre. L'assureur-vie doit être capable d'anticiper et de se préparer à faire face éventuellement à des situations qui lui sont défavorables. Il doit prendre en compte toutes les éventualités dans l'appréhension de l'évolution future de son portefeuille.

À cette fin, il s'aide de scénarios économiques pour simuler des évolutions probables du marché. Selon le but recherché, il peut disposer de scénarios en probabilité risque neutre pour l'évaluation de ses engagements, ou de scénarios monde réel pour définir ses stratégies financières.

L'une des stratégies financières mise en place par l'assureur-vie est la définition de l'allocation cible du portefeuille. Il s'agit de la composition du portefeuille définie en hypothèse que le modèle ALM doit atteindre à la fin de chaque année de projection. Des études plus ou moins sophistiquées doivent être menées pour définir cette dernière. Le chapitre suivant permettra de mieux comprendre les différentes approches possibles ainsi que la méthodologie adoptée dans ce mémoire.

Allocation stratégique d'actifs

4.1	Introduction	63
4.2	Conséquences de Solvabilité 2 sur l'allocation d'actifs des assureurs	63
4.3	Théorie moderne du portefeuille	66
4.4	Allocation stratégique d'actif - vision ALM	75
4.5	Conclusion	79

4.1 INTRODUCTION

L'allocation stratégique étant l'objet de ce mémoire, ce chapitre vise à lui donner une définition plus formelle et à présenter les théories et méthodes qui sont utilisées en pratique. Il part d'un cadre d'application propre à la finance, constitué uniquement d'actifs. Puis, nous y présentons graduellement comment la spécificité de l'assurance, c'est-à-dire le passif et ses flux, peut être prise en compte, en respect aux contraintes réglementaires.

4.2 CONSÉQUENCES DE SOLVABILITÉ 2 SUR L'ALLOCATION D'ACTIFS DES ASSUREURS

Procédure incontournable chez les gestionnaires d'actifs ou dans les sociétés d'investissements, la recherche du portefeuille efficient trouve également sa place dans l'assurance-vie à la seule différence qu'elle doit également prendre en compte les engagements au passif. En effet, la procédure chez les gestionnaires d'actifs consiste à rechercher la composition en pourcentage de chaque classe d'actif qui maximise un critère de rendement tout en minimisant un critère risque sujet au portefeuille.

Traditionnellement, nous distinguons comme [Brach, 2016] :

- critère de rendement : le rendement prospectif ou *Expected Return* (ER). Il s'agit de l'espérance de rendement sur une période prospective.
- critère de risque : la volatilité (Vol). Il s'agit de l'écart-type de la distribution des rendements sur une période prospective.

Les gestionnaires d'actifs chercheront alors à maximiser l'indicateur de performance appelé le **ratio de Sharpe** (RS). Il s'agit du ratio entre l'excès de rendement par rapport à un taux de rendement sans risque r_f (pour *risk free*) et la volatilité.

$$RS = \frac{ER - r_f}{Vol} \quad (4.1)$$

Considérons un portefeuille composé de n classes d'actif. Supposons également que chaque classe d'actif $i \in \{1, \dots, n\}$ a un rendement r_i , un écart-type σ_i et une matrice de variance-covariance Σ . De plus, nous nous mettons dans le cadre d'un portefeuille auto-finançant, c'est-à-dire que chaque actif a un poids $w_i \in [0, 1]$ telle que $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

Alors on peut écrire que :

$$ER = \sum_{i=1}^n E[w_i * r_i] = \sum_{i=1}^n w_i * E[r_i] = \sum_{i=1}^n w_i * ER_i \quad (4.2)$$

$$Vol = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{w' \cdot \Sigma \cdot w} = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} w_i w_j \sigma_i \sigma_j} \quad (4.3)$$

Par suite, le problème s'écrit comme la maximisation du ratio de Sharpe :

$$\max_w RS = \frac{ER - r_f}{Vol} \quad (4.4)$$

Tel que défini, le ratio de Sharpe a tendance à accorder plus d'importance aux actifs ayant le meilleur arbitrage espérance de rendement/risque. Cependant, la volatilité ou la variance n'est pas une mesure de risque cohérente, et ne prend en compte que partiellement la diversification du portefeuille.

La norme Solvabilité 2 ayant introduit le SCR comme un indicateur de risque plus approprié, on peut définir un nouvel indicateur de performance comme le **ROSC** (*Return On Solvency Capital*) comme [Brach, 2016] :

$$ROSC = \frac{ER}{SCR} \quad (4.5)$$

Ici, en présence uniquement d'actifs, le SCR est bien le SCR marché tel que défini dans le chapitre 2. Le problème s'écrit alors comme :

$$\max_w ROSC = \frac{ER}{SCR} \quad (4.6)$$

Le ROSC se veut plus prudent en privilégiant une stratégie d'investissement non agressive et donc moins risquée. Le SCR a été introduit justement pour mieux appréhender les risques inhérents à l'activité de l'assurance. Il offre à cet effet, une meilleure appréciation de la diversification du risque du portefeuille.

Pour illustrer ce résultat, nous considérons un portefeuille d'actifs composé des classes d'actifs obligations d'État, obligations d'entreprises, immobilier et action. Chaque classe d'actif citée est prise comme l'agrégation de tous les actifs cotés du même type de la zone Euro. Les rendements prospectifs et les volatilités de ces actifs ont été déterminés par l'équipe d'investissement de WTW sur la base du dernier trimestre 2022 (Q4 2022).

À partir de ces informations, nous avons calculé le ratio de Sharpe et le ROSC sur toutes les allocations possibles de ce portefeuille en variant la proportion de chaque actif de 0 à 1 par pas de 1%. Les résultats obtenus, en prenant comme actif sans risque les liquidités ou *cash* de rendement 2.67%, sont présentés comme suit :

<i>Classe d'actif</i>	<i>Rdt 10 ans</i>	<i>Volatilité</i>	<i>Allocation max RS</i>	<i>Allocation max ROSC</i>
<i>Obligations d'État</i>	3.1%	4.91%	17%	75%
<i>Obligations d'entreprises</i>	3.7%	4.98%	33%	0%
<i>Action</i>	8.31%	20.16%	9%	14%
<i>Immobilier</i>	5.74%	9.8%	41%	11%

TABLEAU 4.1 – Conséquences de Solvabilité sur l'allocation d'actifs.

L'action est vraisemblablement l'actif ayant le plus grand rendement, mais il a également la plus grande volatilité. L'immobilier dispose d'un meilleur arbitrage rendement/volatilité. Le ratio de Sharpe lui accorde plus de poids dans le portefeuille. Il en est de même pour les obligations d'entreprise qui ont un meilleur arbitrage rendement/volatilité.

En revanche, le ROSC va privilégier les obligations d'État malgré qu'elles offrent un plus faible rendement. En effet, elles possèdent la plus faible volatilité et contribuent à faire diminuer le SCR au titre du risque de spread, et a fortiori le SCR de marché (11.372% contre 19.727% avec le ratio de Sharpe). Les obligations souveraines offrent l'avantage de ne pas être exposées sinon que faiblement au risque de spread, contrairement aux obligations d'entreprises. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle ces dernières ont une allocation de 0% dans le portefeuille optimal selon le ROSC.

Bien que cette analyse offre une première appréciation de la manière dont la directive Solvabilité 2 a changé les perspectives d'investissement, elle reste néanmoins statique. Les besoins de financement des compagnies d'assurance-vie n'étant pas les mêmes, il est important d'introduire une notion capable de traduire l'appétence pour l'assureur-vie, à prendre ou non des positions risquées. Cette notion est l'aversion au risque.

4.3 THÉORIE MODERNE DU PORTEFEUILLE

Si nous reprenons l'univers d'investissement d'actifs risqués introduit à la section précédente, il est facile de représenter graphiquement dans un plan les couples espérance de rendement/volatilité (ER_j, σ_j) de chaque portefeuille j , résultant d'une combinaison des actifs risqués. La maximisation du ratio de Sharpe posée à l'équation 4.4 conduit à la détermination pour chaque niveau de niveau de risque, de l'allocation qui maximise le rendement du portefeuille. La représentation graphique met ainsi en exergue cet ensemble particulier de couples (ER_j, σ_j) optimaux : il s'agit de la **frontière efficiente**.

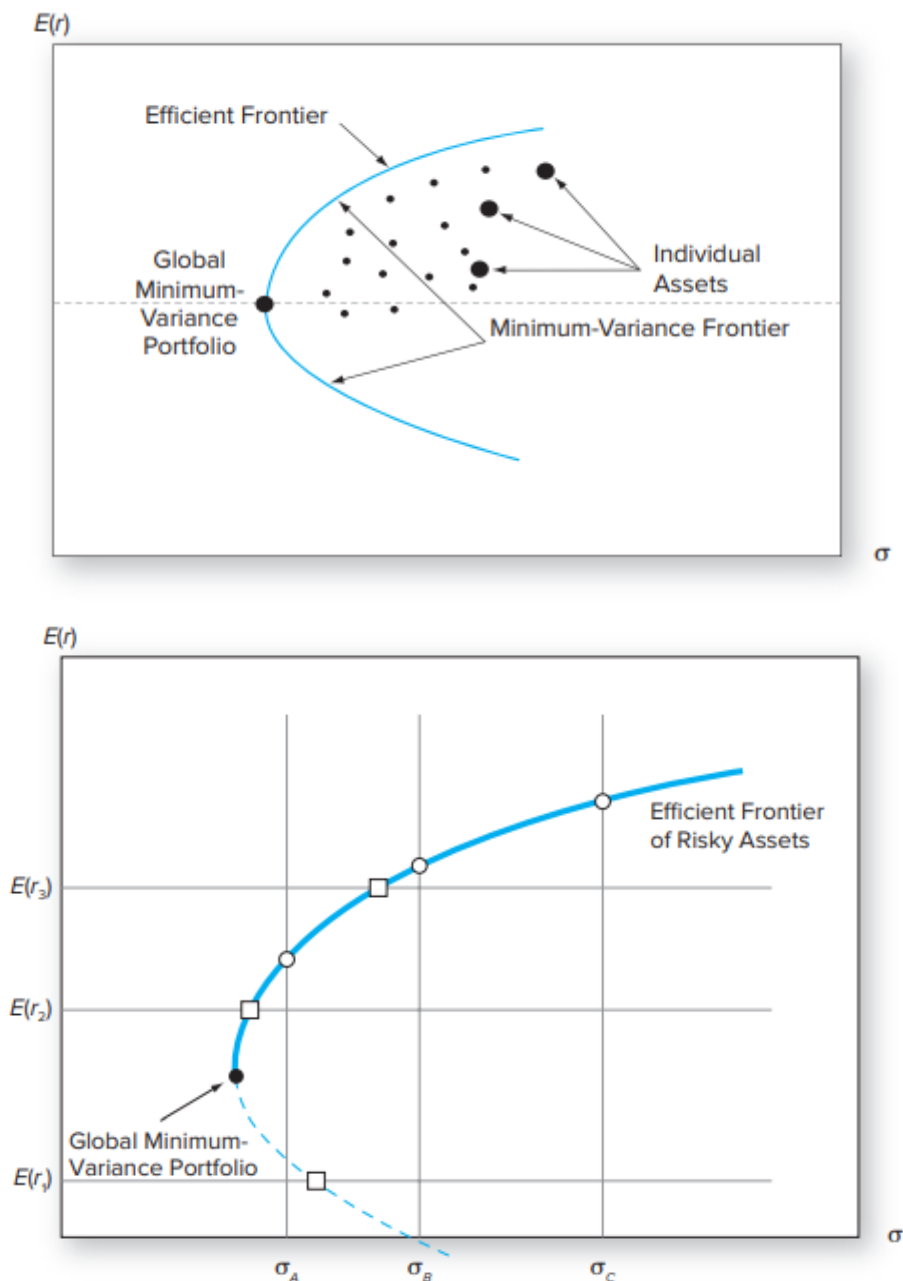


FIGURE 4.1 – Illustration de la frontière efficiente parmi un ensemble de portefeuilles d'actifs risqués. [Bodie - Kane - Marcus, 2017]

Le gestionnaire d'actifs se retrouve ainsi en présence d'un ensemble de portefeuilles optimaux. Chaque portefeuille sur la frontière est celui qui maximise l'espérance de rendement pour le niveau de risque considéré. Mais lequel de ces portefeuilles devrait-il choisir ?

Le choix du portefeuille optimal ne dépendra que du profil de risque de l'investisseur et donc de son aversion au risque. **Harry Markowitz** est le précurseur de la théorie moderne du portefeuille qu'il défend dans sa thèse soutenue en 1954. Elle offre un cadre de gestion d'actifs conçu pour maximiser le couple espérance de rendement/risque associé à un portefeuille d'actifs risqués. Selon cette perspective, bien que la diversification soit une pierre angulaire pour prendre des décisions d'investissement, elle ne constitue pas une mesure suffisante en soi [Dupray, 2017]. L'impératif réside dans l'optimisation de cette diversification. Il est donc important de bien sélectionner les actifs en prenant en compte les corrélations entre eux afin de minimiser le risque global du portefeuille et maximiser son rendement. Il s'agit du concept bien connu de la **frontière efficiente**.

La théorie moderne du portefeuille repose sur deux hypothèses fortes [Dupray, 2017].

1. Les marchés financiers sont efficaces et les différents investisseurs sont rationnels. Cette hypothèse soutient donc la théorie forte de l'efficacité selon laquelle les cours reflètent l'ensemble des informations disponibles pour chaque actif.
2. Les investisseurs ont de l'aversion au risque. Un investisseur acceptera de prendre plus de risque seulement si un supplément de rentabilité lui est proposé. Tous les investisseurs auront toutefois un ratio rendement/risque différent selon leur profil investisseur et leur aversion au risque.

L'aversion au risque est matérialisée par des objets mathématiques appelés **fonctions d'utilité**. Une fonction d'utilité est une fonction $U(x), x \in \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles; elle caractérise un score attribué aux portefeuilles admissibles sur la base d'un arbitrage du couple rendement/risque.

Pour un profil averse au risque, la fonction d'utilité est croissante ($\forall x, U'(x) > 0$) et concave ($\forall x, U'' < 0$). On peut également définir l'indice d'**Arrow-Pratt** ($A > 0$) d'aversion absolue pour le risque.

$$A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} > 0 \quad (4.7)$$

L'indice d'Arrow-Pratt est une quantité qui représente le degré de réticence de l'investisseur à prendre des positions de plus en plus risquées. Plus cet indice est grand, plus l'investisseur est averse au risque.

Dénotons par $V_t(w)$, un indicateur de performance défini par le gestionnaire d'actifs à un instant t . Généralement, $V_t(w)$ désigne la distribution de la richesse finale de l'investisseur, fonction de l'allocation w .

Alors, la recherche du portefeuille efficient s'écrit comme :

$$\max_w \mathbb{E}[U(V_t)] \quad (4.8)$$

Reprenons ici l'univers d'investissement de la section précédente composé de n actifs risqués. Considérons également qu'il existe en plus un actif sans risque. Notons par :

S_t^i : prix de l'actif i à la date t ,

ω_t^i : proportion investie dans l'actif $i \in 0, \dots, n$ (0 faisant référence à l'actif sans risque) à la date t ,

La stratégie d'investissement est également soumise à une contrainte de budget ne permettant pas d'injection ou de retrait de capital pendant toute la période considérée. Cette stratégie d'investissement porte la dénomination de stratégie de portefeuille auto-financé, et s'écrit :

$$\forall t, \sum_{i=0}^n \omega_t^i = 1 \quad (4.9)$$

Par suite, si V_0 est la valeur initiale du portefeuille, et r_f le rendement net de l'actif sans risque, la richesse finale au bout d'une période d'investissement T , par exemple une année, peut s'écrire comme [Brach, 2016] :

$$V_T(\omega) = V_0 \sum_{i=0}^n \omega_0^i \times \frac{S_T^i}{S_0^i} = V_0 \left[\sum_{i=1}^n \omega_0^i \times \frac{S_T^i}{S_0^i} + \left(1 - \sum_{i=1}^n \omega_0^i \right) \times (1 + r_f) \right] \quad (4.10)$$

Le rendement de l'investissement est $\frac{V_T}{V_0}$ et l'excès de rendement s'écrit comme [Brach, 2016] :

$$\pi(\omega) = \frac{V_T}{V_0} - (1 + r_f) = \sum_{i=1}^n \omega_0^i \times \left(\frac{S_T^i}{S_0^i} - (1 + r_f) \right) \stackrel{\text{notation}}{=} \omega' \pi \quad (4.11)$$

avec :

- $\omega = (\omega_0^1, \dots, \omega_0^n)$ proportions investies dans chacun des actifs risqués ;
- $\pi = (\pi_0^1, \dots, \pi_0^n)$ excès de rendements associés à chacun des actifs risqués.

L'équation 4.11 peut se réécrire comme :

$$V_T(\omega) = V_0 \times (1 + r_f + \omega' \pi) \quad (4.12)$$

Dans le cas particulier où les excès de rendements sont gaussiens : $\pi \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ et $V_0 = 1$, la valeur finale du portefeuille est également gaussienne.

$V_T \sim \mathcal{N}(\mu_V, \sigma_V^2)$ avec $\mu_V = 1 + r_f + \omega' \cdot \mu$ et $\sigma_V^2 = \omega' \cdot \Sigma \cdot \omega$.

Si de plus, la fonction d'utilité de l'investisseur est du type CARA (Constant Absolute Risk Adversion), c'est-à-dire que :

$$U : x \rightarrow -\exp(-\gamma x) \text{ pour } \gamma \geq 0 \quad (4.13)$$

Dans ce cas, les propriétés de la loi normale permettent d'écrire :

$$\mathbb{E}[U(V_T)] = \mathbb{E}[-\exp(-\gamma V_T)] = -\exp\left[-\left(\gamma \times \mu_V - \frac{\gamma^2}{2} \times \sigma_V^2\right)\right] \quad (4.14)$$

Par conséquent, la croissance de la fonction exponentielle permet de réécrire le problème de recherche du poids optimal comme :

$$\omega^* = \underset{\omega}{\operatorname{argmax}} \mathbb{E}[U(V_T)] = \underset{\omega}{\operatorname{argmax}} \omega' \mu - \frac{\gamma}{2} \times \omega' \Sigma \omega \quad (4.15)$$

Les fonctions d'utilité du type CARA sont bien des fonctions d'utilité représentant des individus averses au risque. En effet, l'indice d'Arrow-Pratt d'aversion absolue au risque est tel que :

$$A(\omega) = -\frac{U''}{U'} = \gamma \geq 0 \quad (4.16)$$

Pour $\gamma = 0$, $A(\omega) = 0$, ce qui traduit un profil neutre au risque. En revanche, les valeurs strictement positives de γ traduisent des situations d'aversion au risque. De plus, le fait que γ soit fixé et constant signifie que l'aversion au risque peu importe le dénouement de l'investissement est constante.

Ainsi, dans le cas où la compagnie d'assurance-vie représentée par l'actuaire, serait un investisseur averse au risque, il existerait donc une valeur de $A(\omega)$ qui décrirait le niveau de risque qu'elle serait prête à assumer peu importe les résultats financiers. Cette situation n'est pas réaliste si l'on rappelle une fois encore les contraintes réglementaires qui pèsent sur cette dernière.

Il existe néanmoins d'autres familles de fonctions qui peuvent se montrer plus appropriées. On distingue la famille des fonctions IARA (Increasing Absolute Risk Aversion) telles que :

$$U : x \in \mathbb{R}^n \rightarrow x - \alpha x^2, \text{ avec } \alpha \geq 0 \quad (4.17)$$

On a bien :

$$A(x) = -\frac{U''}{U'} = \frac{2}{1 - 2.\alpha.x} \quad (4.18)$$

$A(x)$ est donc une fonction croissante de x lorsque $\alpha > 0$ (IARA).

Si l'on considère toujours le cas où la valeur finale de l'investissement suit une loi normale, c'est-à-dire $V_T \sim \mathcal{N}(\mu_V, \sigma_V^2)$, alors :

$$\mathbb{E}[U(V_T)] = \mathbb{E}[V_T - \alpha V_T^2] = \mathbb{E}[V_t] - \alpha \mathbb{E}[V_t^2] \quad (4.19)$$

$$\mathbb{E}[U(V_T)] = \mathbb{E}[V_T] - \alpha \left(\mathbb{V}[V_T] + \mathbb{E}[V_T]^2 \right) \quad (4.20)$$

$$\mathbb{E}[U(V_T)] = \mu_V - \alpha(\sigma_V^2 + \mu_V^2) \quad (4.21)$$

Le problème dans le cas de la fonction IARA s'écrit comme :

$$\omega^x = \operatorname{argmax}_{\omega} \mathbb{E}[U(V_T)] = \operatorname{argmax}_{\omega} \mu_V - \alpha(\sigma_V^2 + \mu_V^2) \quad (4.22)$$

Or, le problème de l'équation 4.15 pour le cas de la fonction CARA peut se réécrire (car $1 + r_f$ constant) comme suit :

$$\omega^* = \operatorname{argmax}_{\omega} \mathbb{E}[U(V_T)] = \operatorname{argmax}_{\omega} \mu_V - \frac{\gamma}{2} \times \sigma_v^2 \quad (4.23)$$

Alors, en prenant $\alpha \equiv \frac{\gamma}{2}$, l'espérance d'utilité dans le cadre de la fonction IARA comporte une pénalisation en plus, qui augmente lorsque l'espérance de rendement augmente. Cette dernière famille reflète le fait que plus les rendements ou les excès de rendement augmentent, ce que signifie également que le risque associé à leurs réalisations augmente, plus l'investisseur est averse au risque. Cette situation traduit bien le profil de risque d'une compagnie d'assurance-vie, comme mis en exergue à la section précédente.

Nous illustrons notre analyse en reprenant l'exemple de portefeuille des quatre actifs risqués introduits à la section précédente. Il s'agit des classes d'actif obligation souveraine, obligation d'entreprise, action et immobilier de la zone Euro. Nous avons fait varier les valeurs des paramètres représentant l'aversion au risque des investisseurs : $A(w) = \gamma$ pour la fonction CARA, donc $\alpha \equiv \frac{\gamma}{2}$ pour la fonction IARA. Pour chacune des fonctions d'utilité et pour chaque valeur des paramètres, nous avons résolu les problèmes posés aux équations 4.22 et 4.23.

<i>Paramètre γ</i> <i>Actif</i>	0	1	2	5	10
<i>Obligations d'État</i>	0%	0%	0%	9.61%	27.05%
<i>Obligations d'entreprises</i>	0%	0%	0%	32.64%	36.09%
<i>Action</i>	100%	83.90%	41.11%	12.57%	3.78%
<i>Immobilier</i>	0%	16.10%	58.89%	45.18%	33.08%

<i>Paramètre γ</i> <i>Actif</i>	15	20	100	1000	10000
<i>Obligations d'État</i>	32.86%	36.58%	48.21%	50.82%	51.08%
<i>Obligations d'entreprises</i>	37.24%	36.85%	32.75%	31.83%	31.74%
<i>Action</i>	0.85%	0%	0%	0%	0%
<i>Immobilier</i>	29.05%	26.56%	19.04%	17.35%	17.18%

TABLEAU 4.2 – Allocations optimales selon pour une fonction d'utilité CARA.

<i>Paramètre α</i> <i>Actif</i>	0	0.5	1	2.5	5
<i>Obligations d'État</i>	0%	0%	0%	17.95%	34.16%
<i>Obligations d'entreprises</i>	0%	0%	0%	34.29%	37.05%
<i>Action</i>	100%	77.29%	35.42%	8.37%	0.19%
<i>Immobilier</i>	0%	22.71%	64.58%	39.39%	28.15%

<i>Paramètre α</i> <i>Actif</i>	7.5	10	50	500	5000
<i>Obligations d'État</i>	43.07%	47.66%	58.66%	61.14%	61.39%
<i>Obligations d'entreprises</i>	34.56%	32.95%	29.06%	28.19%	28.10%
<i>Action</i>	0%	0%	0%	0%	0%
<i>Immobilier</i>	22.37%	19.40%	12.27%	10.67%	10.51%

TABLEAU 4.3 – Allocations optimales selon pour une fonction d'utilité IARA.

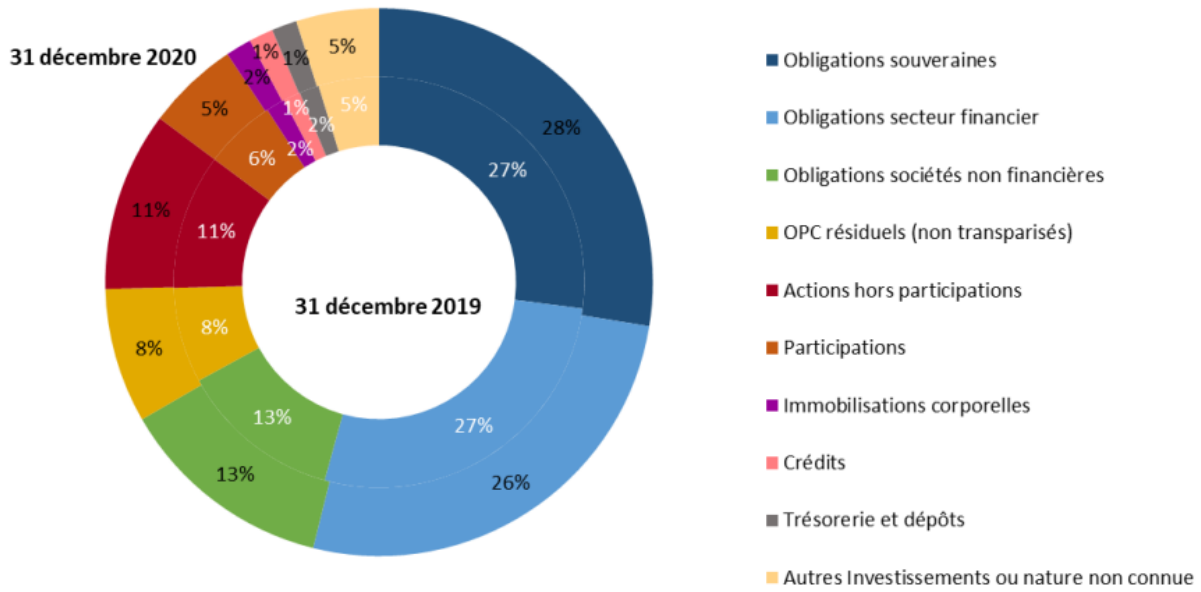
L'analyse des tableaux 4.2 et 4.3 nous révèle les informations suivantes :

- Dans le cas où l'investisseur n'est pas averse au risque ($\gamma = 0 \iff \alpha = \frac{\gamma}{2} = 0$), le portefeuille optimal est composé à 100% d'action. C'est l'allocation qui offre le maximum de rendement, l'investisseur étant indifférent au risque.
- Dès que l'individu a de l'aversion au risque ($\gamma > 0, \alpha > 0$), le portefeuille optimal n'est plus composé à 100% d'action. L'investisseur averse au risque préfère diversifier son portefeuille afin de faire diminuer le risque total du portefeuille.
- Plus les paramètres d'aversion augmentent positivement, plus l'investisseur est averse au risque. Ce dernier aura tendance à privilégier les obligations souveraines au profit des actions.
- Il existe des valeurs limites pour γ et α au delà desquelles les allocations optimales ne varient plus.

De plus, pour γ fixé, donc $\alpha = \frac{\gamma}{2}$ fixé, les allocations optimales pour les fonctions CARA et IARA sont différentes. Comme évoqué précédemment, les fonctions IARA pénalisent fortement les hauts rendements, les rendant moins attrayants pour l'investisseur. C'est pourquoi pour $\gamma = 10000$, le portefeuille optimal est composé à moitié d'obligation souveraine, alors que son équivalent pour la fonction IARA ($\alpha = 5000$) en est composé à près de 61%, car ayant le plus faible rendement.

Il se pose alors la question de savoir à quel degré d'aversion se situe l'assureur-vie. Pour une meilleure appréciation, il est important de considérer l'allocation d'actif moyenne des assureurs sur la période considérée, c'est-à-dire au Q4 2022. Nous présentons à la figure 4.2 l'évolution des structures de placements des assureurs entre 2019 et 2022 fournie par l'ACPR.

Encours total de 2 743 milliards d'euros au 31 décembre 2020

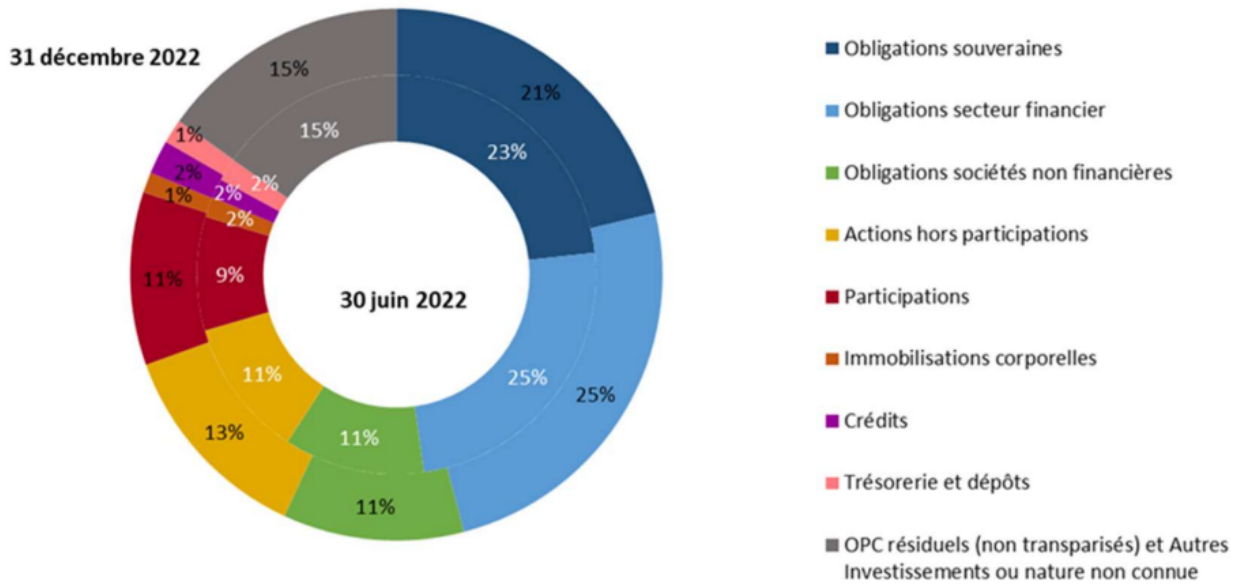


Périmètre : organismes d'assurance soumis aux remises trimestrielles sur base sociale.

Note : Y compris placements en unités de compte. L'actif du bilan se compose des placements et d'autres actifs.

Source : ACPR et Banque de France

Encours total de 2 471 milliards d'euros au 31 décembre 2022



Périmètre : organismes d'assurance soumis aux remises trimestrielles sur base sociale.

Note : - Y compris placements en unités de compte. L'actif du bilan se compose des placements et d'autres actifs.

Source : ACPR et Banque de France

FIGURE 4.2 – Structure de placements des assureurs aux Q4 2019, 2020 et 2022. [ACPR, 2023]

L'analyse de la figure 4.2 indique tout d'abord que l'encours total des organismes d'assurance a diminué de près de 10% entre le 31 décembre 2020 et le 31 décembre 2022. Il faut imputer cette diminution, comme évoqué précédemment, à un concours de circonstances extrêmes dont la pandémie de covid 19, dont le résultat est le contexte économique actuel.

La figure 4.2 révèle également que les compositions du portefeuille d'actif des assureurs a également changé entre les deux périodes.

- La part des obligations souveraines passe de 28% en 2020 à 21% en 2022.
- La part des obligations d'entreprises (secteurs financier + non financier) reste relativement stable entre les deux périodes. Elle est passée de 39% à 36%.
- La part des actions reste également stable, augmentant légèrement de 2% entre 2020 et 2022.

Alors, si l'on admet que l'assureur-vie est plutôt un investisseur avec une fonction d'utilité de type IARA, son paramètre d'aversion au risque serait proche de $\alpha = 2.5$, pour lequel le tableau 4.3 indique l'allocation optimale suivante : obligations souveraines (17.95%), obligations d'entreprise (34.29%), actions (8.37%).

La théorie moderne du portefeuille a permis ici d'appréhender le profil d'investissement d'une compagnie d'assurance-vie. Selon les résultats ci-dessus, l'assureur-vie est un investisseur relativement averse au risque. Il conserve dans son portefeuille une part relativement non négligeable d'actions en quête de rendements.

Il convient de rappeler que la formulation des problèmes aux équations 4.23 et 4.22 repose sur l'hypothèse forte de normalité de la richesse finale. C'est seulement sous cette hypothèse que nous avons pu écrire une forme simplifiée des problèmes d'optimisation. Cette hypothèse ne reflète pas certainement la réalité, d'autant plus que les résultats présentés ne tiennent pas compte du passif de l'assureur, et de ses interactions avec l'actif.

Malgré ces limites évoquées, nous sommes arrivés ici à déterminer une allocation d'actifs optimale pour notre portefeuille simplifié constitué de quatre actifs risqués. Cette allocation optimale reste cohérente par rapport aux pratiques de marché observées par l'ACPR au dernier trimestre de 2022. Les résultats présentés ci-dessus, à défaut de fournir avec précision les compositions optimales du portefeuille, permettent d'avoir une idée des intervalles dans lesquels elles se trouveraient. Ils montrent de manière évidente que pour l'assureur averse au risque, le portefeuille optimal ne serait pas composé à 100% d'action par exemple.

Cette section consiste en une étude préliminaire de la problématique d'allocation stratégique d'actifs traitée dans ce mémoire. En associant la fonction d'utilité adéquate à l'assureur-vie, il est possible de déterminer l'allocation optimale d'un portefeuille d'actifs. Cette étude peut être adaptée à des assureurs qui n'ont pas une très grande activité et qui ne disposent pas de ressources opérationnelles pour une étude intégrant le passif.

4.4 ALLOCATION STRATÉGIQUE D'ACTIF - VISION ALM

La méthode utilisée dans ce mémoire pour la recherche du portefeuille efficient repose sur la théorie moderne du portefeuille évoquée à la section précédente. Elle consistera en la résolution d'un problème de type rendement-risque. Cependant, comme précisé précédemment, il va falloir prendre également en compte le passif et ses interactions. C'est pourquoi les critères de rendement et de risque doivent permettre d'appréhender à la fois les flux à l'actif et au passif.

Pour cette raison, l'indicateur de performance retenu pour la suite est la valeur actualisée des profits futurs ou **PVFP** (*present value of future profits*) en anglais. Il s'agit de la valeur actualisée des résultats futurs nets de toutes les taxes, qui émane de la projection de la meilleure estimation (BE) du portefeuille sur l'horizon de projection. La PVFP représente la valeur intrinsèque du portefeuille assurantiel.

Par définition, le résultat de l'assureur (**RE**) est la somme nette de taxes et impôts du résultat technique (**RT**), du résultat administratif (**RA**) et du résultat financier (**RF**).

$$RE_{brut} = (RT + RA + RF) \times (1 - (taxes + tx_{impot})) \quad (4.24)$$

D'abord, le résultat technique est la valeur actuelle (VA) de la somme des différents flux techniques qui modifient le passif. Il s'agit des primes nettes de chargements, des sinistres et de la charge de réserve. Nous définissons la charge de réserve comme la somme de la variation des provisions mathématiques entre deux périodes et des intérêts techniques (TMG + PB).

$$RT = VA(primes_nettes - sinistres + variation_pm + tmg + pb) \quad (4.25)$$

Ensuite, le résultat administratif est la valeur actuelle de la somme algébrique des chargements (*chgt*), des frais/commissions d'exploitation.

$$RA = VA(chgt_encours + chgt_primes - frais_commissions) \quad (4.26)$$

Enfin, le résultat financier est la valeur actuelle de la production financière de l'actif nette du financement du taux minimum garanti, de la participation aux bénéfices et après dotation à la provision pour participation aux excédents.

$$RF = VA(produits_financiers - tmg - pb - dotation_ppe) \quad (4.27)$$

La PVFP prend ainsi en compte tous les flux qui interviennent dans la durée de vie des contrat tant au passif à travers les résultats technique et administratif, qu'à l'actif à travers le résultat financier. Il s'agit d'un bon indicateur de performance qui matérialise à la fois

les besoins de financement de l'assureur et les contraintes implicites de budget émanant de Solvabilité 2.

La PVFP représente la valeur économique de l'activité en lien avec l'allocation d'actif. Il s'agit de la richesse finale de l'assureur-vie. Elle doit être évaluée sous l'univers de scénarios économiques monde réel, réaliste du contexte économique. Afin d'avoir une distribution représentative, elle est calculée sur 1000 scénarios économiques. De plus, les stratégies financières des compagnies d'assurance sont revues périodiquement, généralement après une période de 1 à 2 ans. Il n'est donc pas utile de faire les projections de bilan sur un long horizon pour produire la distribution de la profits futurs. Pour cette étude, les projections seront faites sur un horizon de 10 ans. Dans toute la suite, nous désignerons par la richesse finale, la distribution de la PVFP.

Par suite, le critère de rendement à maximiser est défini comme l'espérance de la richesse finale. Nous chercherons à maximiser sa contrepartie empirique, la moyenne arithmétique de la richesse finale sur les 1000 scénarios monde réel.

En revanche, puisque le cadre gaussien n'est plus respecté, et que la variance n'est pas une mesure de risque pertinente à utiliser, nous ne pouvons la considérer comme le critère de risque à minimiser. Nous choisissons plutôt le quantile à 98% ou la *Value at Risk (VaR)* à 98% de la distribution de la richesse finale. Il s'agit de la pire valeur que peut prendre la richesse finale avec une probabilité de $1 - 98\% = 2\%$, c'est-à-dire une fois toutes les 50 ans, donc lors des situations extrêmes. Il faudra faire attention au sens donné au terme risque. La richesse finale pouvant prendre des valeurs négatives, il n'est pas impossible que la VaR à 98% soit également négative. On souhaitera donc que le critère de risque soit le plus élevé possible. Une allocation sera considérée comme risquée si le critère de risque est très faible.

Au delà de ces deux quantités, il est primordial de tenir compte du niveau de SCR associé à l'allocation solution du problème. Pour cette raison, il faut intégrer au problème une contrainte supplémentaire sur le SCR. Le portefeuille optimal sera donc la solution du problème consistant à :

- maximiser la moyenne de la PVFP sur 1000 scénarios monde réel ;
- minimiser la $VaR_{98\%}$ de la distribution de PVFP obtenue ;
- obtenir le SCR correspondant à l'appétence au risque et aux capacités de l'assureur.

Le problème d'optimisation ne pouvant pas être simplifié comme à la section précédente, la recherche de l'allocation cible optimale sera effectuée de manière stochastique en considérant divers scénarios économiques. La méthodologie adoptée dans ce mémoire se décline comme suit :

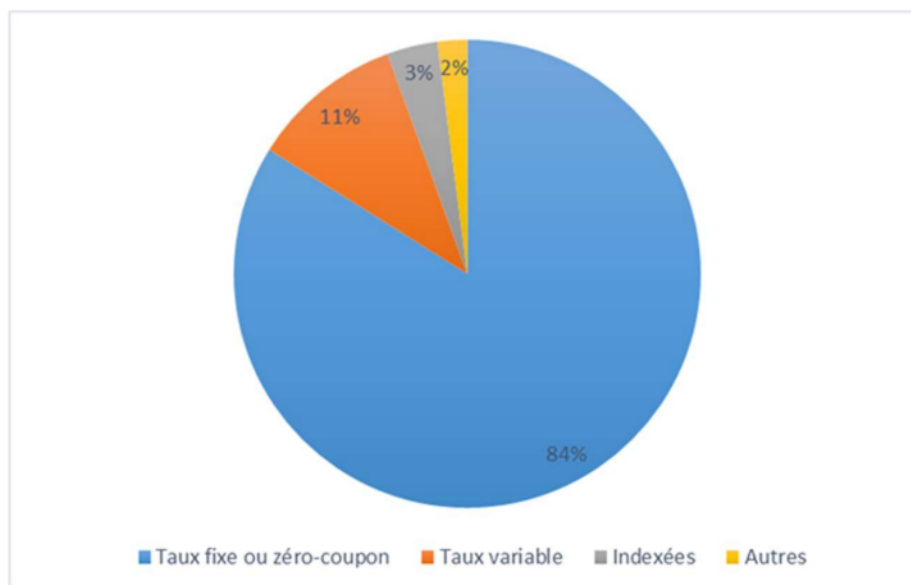
- sélectionner un ensemble admissible d’allocations cibles ;
- calculer pour chaque allocation la distribution de la richesse finale sur 1000 scénarios monde réel, puis déterminer la moyenne et la $\text{VaR}_{98\%}$ correspondantes ;
- calculer pour chaque allocation cible la charge de capital associée en scénarios économiques monde risque neutre ;
- tracer la frontière efficiente et sélectionner le portefeuille optimal.

Comme énuméré, la première étape de recherche de l’allocation optimale va consister en la sélection des allocations cibles. En réalité, la recherche du portefeuille efficient doit se faire en considérant tous les portefeuilles possibles, résultant de toutes les combinaisons des proportions des classes d’actifs. Mais, les résultats de la section précédente permettent de réduire considérablement l’ensemble admissible à étudier.

Cependant, à la différence de l’exemple proposé à la section précédente, les actifs au sein du portefeuille sont adossés au fonds en euros appelé **actif général**. La granularité de ce fonds projeté au travers du modèle ALM est différente de celle présentée précédemment (obligations souveraines, obligations d’entreprises, actions, etc...). Plus précisément, le portefeuille obligataire y est ventilé selon la nature des flux associés. De cette manière, la base de données des actifs sur laquelle a porté cette étude est déclinée comme suit : obligations à taux fixe (*fixed income ou fi*), obligations à taux variable (*frn*), les obligations perpétuelles (*perp*), les obligations indexées sur l’inflation (*oii*), les placements immobiliers (*estate*), les actions (*equity*) et les OPCVM. En plus de ces différentes classes, nous comptons également au sein de l’actif du bilan, les liquidités ou *cash*.

Il reste néanmoins possible de faire le parallèle entre les deux granularités susmentionnées des classes d’actifs en faisant une mise en transparence des parts d’OPCVM. À titre d’exemple, la ventilation des placements obligataires des assureurs au 31 décembre 2022 est présentée à la figure 4.3.

Encours total de 1 406 milliards d'euros au 31 décembre 2022



Périmètre : organismes d'assurance soumis aux remises trimestrielles sur base sociale

Source : ACPR et Banque de France

FIGURE 4.3 – Ventilation du portefeuille obligataire des assureurs, après mise en transparence des parts d'OPCVM, en % de l'ensemble des placements au 31 décembre 2022. [ACPR, 2023]

À présent, nous pouvons définir, eu égard aux éléments évoqués, les intervalles considérés pour chaque classe d'actif.

Pour rester conforme au modèle ALM utilisé, la recherche du portefeuille efficient a été réalisée en gardant les OPCVM avec la part d'obligations qu'ils contiennent. Une mise en transparence sera réalisée une fois les allocations optimales obtenues afin de les rendre comparables à celles de la figure 4.3.

4.5 CONCLUSION

Ce chapitre a permis d'introduire plusieurs indicateurs qu'utilisent les gestionnaires d'actifs dans leur recherche du portefeuille efficient. D'une part, la norme Solvabilité 2 a changé l'allocation d'actifs des assureurs, les incitant à investir plus dans les obligations souveraines. Ces dernières ne sont exposées que faiblement ou nullement au risque de spread, permettant de faire diminuer le SCR du portefeuille d'assurés. D'autre part, sans prendre en compte le passif, il est possible d'appréhender l'aversion au risque de l'assureur-vie. Sous l'hypothèse forte de normalité de la distribution de la richesse finale, nous sommes arrivés à trouver l'allocation optimale qui maximise l'utilité d'un investisseur type assurance-vie, avec divers degrés d'aversion au risque. Cela a permis de mettre en exergue les fonctions d'utilité de type IARA qui représentent mieux le profil d'investisseur des assureurs.

Bien que ces résultats ne prennent pas en compte le passif, ils ont permis d'avoir des résultats proches des pratiques du marché. À défaut de fournir précisément les allocations optimales, ils permettent de définir des intervalles dans lesquels elles se trouveraient avec une forte probabilité. La méthodologie adoptée dans ce mémoire se concentrera sur des allocations admissibles au regard de cette première analyse.

Cependant, notre recherche du portefeuille efficient repose également sur le calcul du SCR selon les différentes allocations cibles à tester. Or, dans cette étude, le calcul du SCR pour une allocation nécessite l'exécution d'une projection stochastique sur 50 ans sur 1000 scénarios risque neutre. Avec les ressources à disposition, la production du SCR pour une seule allocation est déjà fastidieuse et chronophage. Il est unimaginable d'en produire pour des centaines d'allocations cibles à tester.

Afin de s'affranchir de cette contrainte opérationnelle, nous nous sommes proposés de construire un proxy du SCR en fonction de l'allocation cible, dont nous présentons la méthode au chapitre suivant.

Construction de proxy du SCR en fonction de l'allocation d'actif

5.1	Introduction	80
5.2	Méthodes d'approximation des SCR de marché	81
5.3	Description théorique des modèles d'apprentissage automatique utilisés	81
5.3.1	Algorithme par apprentissage supervisé	82
5.3.2	La régression linéaire	85
5.3.3	Les modèles de régression linéaire généralisés	86
5.3.4	Les arbres de décision	86
5.3.5	Indicateurs de performance	88
5.4	Conclusion	90

5.1 INTRODUCTION

Avec des ressources en temps infinies, une approximation de la charge en capital ne serait pas nécessaire. Il aurait suffi de réaliser pour chaque allocation testée lors de l'étude, un calcul complet pour obtenir le SCR exact afférent. La problématique est alors de pouvoir en un minimum de temps de calculs, obtenir une estimation correcte du SCR pour chaque allocation.

Le chapitre 2 a présenté le calcul du SCR selon la formule standard de la norme Solvabilité 2 comme une agrégation des SCR des différents modules de risque marché, santé, défaut, vie et non-vie. La production du SCR en pratique nécessite alors le calcul du SCR de chaque module de risque. Il s'agit d'une tâche chronophage qui n'aurait pas pu être réalisée dans les délais qui nous étaient impartis pour ce mémoire. Limités par les ressources opérationnelles, nous faisons l'hypothèse forte que seul le module de risque de marché serait affecté considérablement par les variations de l'allocation cible du portefeuille d'actifs. Nous supposons donc que les cinq autres modules de risques resteront insensibles à l'allocation d'actifs.

Le calcul du SCR selon l'allocation du portefeuille consistera uniquement, dans le cadre de cette étude, en le calcul du SCR marché. Les SCR des autres modules de risques seront laisser inchangés à cet effet. Leurs valeurs resteront les valeurs officielles de SCR associées

au portefeuille étudié, considérées au 31/12/2022. Cependant les chiffres qui seront présentés dans le rapport ont subi des modifications pour préserver la confidentialité. Alors l'approximation du SCR abordée dans ce chapitre consistera en l'approximation du SCR de marché, toutes choses étant supposées égales par ailleurs.

Nous avons mis en place une méthodologie d'approximation du SCR dans notre étude. Son principe est d'abord d'identifier une composante ou plusieurs composantes du SCR de marché qui sont déterminées par les projections stochastiques (partie chronophage). Puis, elle propose de calibrer un proxy de ces dernières en utilisant des modèles de régression.

Ce chapitre propose de décrire la méthode d'approximation du SCR de marché que mise en place, et de préciser ses spécifications techniques. Nous y présenterons également les différents modèles de régressions qui ont été utilisés à cet effet.

5.2 MÉTHODES D'APPROXIMATION DES SCR DE MARCHÉ

Approximation des sous modules de risque du SCR de marché

Comme présenté au chapitre 2, le SCR de marché est l'agrégation des SCR des sous modules de risque de marché : taux, actions, immobilier, spread, change, concentration.

$$SCR_{marché} = \sqrt{\sum_{r,c} CorrMarché_{r,c} * SCR_r^{marché} * SCR_c^{marché}} \quad (5.1)$$

Où :

- $SCR_r^{marché}$ est le besoin en capital requis pour le sous-module de risque $r \in \{actions, \text{taux d'intérêt}, \text{spread}, \text{immobilier}, \text{change}, \text{concentration}\}$.
- $CorrMarché_{r,c}$ est la corrélation entre les sous-modules de risque r et c fournie par l'EIOPA.

Alors, une bonne approximation des charges en capital de chaque sous-module de risque de marché, conduira à une bonne approximation du SCR marché, et donc à une bonne approximation du SCR.

Par conséquent, la méthode d'approximation consistera à trouver un proxy du SCR de chaque sous-module du risque de marché en fonction de l'allocation au moyen de modèles de régression. Puis, ces SCR seront agrégés en utilisant la matrice de corrélation des sous-modules de risque afin de produire le SCR de marché, et par extension le SCR global du portefeuille.

5.3 DESCRIPTION THÉORIQUE DES MODÈLES D'APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE UTILISÉS

L'un des principaux objectifs de ce mémoire consiste en la détermination d'un proxy du SCR en fonction de l'allocation cible pour s'affranchir des contraintes opérationnelles. Nous aspirons ici à trouver la meilleure relation entre le SCR et l'allocation d'actifs. Il existe une multitude de familles de modèles qui peuvent être utilisées à cet effet. La principale

difficulté réside dans la détermination de la famille appropriée et de la bonne estimation de ses paramètres. Il faudra faire attention à ce que le modèle n'apprenne pas **trop** ni **pas assez** sur les données. En d'autres termes, nous cherchons le modèle qui apprend suffisamment sans pour autant coller parfaitement aux données. La tâche est d'autant plus ardue dans la mesure où l'échantillon d'apprentissage ici est de **petite taille**.

La problématique ici implique l'utilisation des modèles de régression. Ces derniers sont des modèles d'apprentissage automatique faisant partie de la famille des modèles d'apprentissage supervisé.

5.3.1 Algorithme par apprentissage supervisé

Les algorithmes par apprentissage supervisé sont caractérisés de la manière suivante. La base observée est composée de n couples $Z_i = (X_i, Y_i)$ supposés être des réalisations indépendantes d'une même loi P inconnue. On écrira :

$$Z_i = (X_i, Y_i) \stackrel{iid}{\sim} P. \quad (5.2)$$

Les variables X_i appartiennent à un espace \mathcal{X} et sont appelées variables explicatives ou variables indépendantes ou encore *features* en anglais. Il s'agit des entrées du modèle d'apprentissage. Typiquement, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ pour un grand entier d . Les Y_i appartiennent à un espace \mathcal{Y} , et correspondent à la variable dépendante ou encore à l'étiquette (*label* en anglais). Typiquement, \mathcal{Y} est fini ou \mathcal{Y} est un sous-ensemble de \mathbb{R} .

L'apprentissage supervisé vise à prédire l'étiquette Y associée à toute nouvelle entrée X , où il est sous-entendu que la paire (X, Y) est une nouvelle réalisation de la loi P . Cette réalisation est également supposée indépendante des réalisations précédemment observées.

Les algorithmes par apprentissage supervisé comme tout algorithme par apprentissage automatique sont caractérisés par des quantités qui permettent de jauger de la bonne qualité de l'apprentissage.

5.3.1.1 Fonction de prédiction

La première caractéristique des algorithmes par apprentissage est la fonction de prédiction. Il s'agit d'une fonction mesurable de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} . L'ensemble de toutes les fonctions de prédiction est noté $\mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

La base de données (Z_1, \dots, Z_n) est appelée ensemble d'apprentissage.

Par suite, un algorithme d'apprentissage est une fonction qui à tout ensemble d'apprentissage renvoie une fonction de prédiction, c'est-à-dire une fonction de l'union $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}^n$ dans l'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, où $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

C'est un estimateur de la **meilleure fonction de prédiction**.

5.3.1.2 Fonction de perte

Afin de juger de l'erreur commise lors de la prédiction, on définit une fonction permettant de la mesurer. Il s'agit de la fonction de perte.

Soit $\ell(y, \hat{y})$ la perte encourue lorsque la sortie réelle est y et la sortie prédite est \hat{y} . La fonction $\ell : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction de perte.

Dans le cadre d'une régression dans l'espace L_p :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Y} = \mathbb{R} \\ \ell(y, \hat{y}) = |y - \hat{y}|^p \end{array} \right\} \text{ où } p \geq 1 \text{ est un réel fixe.} \quad (5.3)$$

Dans ce cas, on parle de régression L_p . La tâche d'apprentissage lorsque $p = 2$ est aussi appelée régression aux moindres carrés.

5.3.1.3 Qualité d'une fonction de prédiction

La qualité d'une fonction de prédiction $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est mesurée par son risque encore appelé erreur de généralisation :

$$R_P(g) = \mathbf{E}_P[\ell(Y, g(X))]. \quad (5.4)$$

Le risque est donc l'espérance par rapport à loi P de la perte encourue sur la donnée (X, Y) par la fonction de prédiction g .

La **meilleure fonction de prédiction** évoquée précédemment correspondra à la ou plus rigoureusement à une fonction de $\mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ minimisant le risque R_P :

$$g_P^* \in \arg \min_{g \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} R_P(g). \quad (5.5)$$

Une telle fonction g_P n'existe pas nécessairement mais existe pour les fonctions de pertes usuelles, notamment celles que nous considérerons par la suite. Cette meilleure fonction sera appelée **fonction oracle** ou **prédicteur de Bayes**. Elle dépend de la probabilité inconnue P et, par conséquent, est inconnue.

5.3.1.4 Fonction oracle

Soit P_X la loi de X . Par définition de P_X , pour toute fonction intégrable $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}_P[h(X)] = \int_{\mathcal{X}} h(x) dP_X(x) = \int_{\mathcal{Z}} h(x) dP(x, y). \quad (5.6)$$

Soit $P_{Y|X}(y | x)$ la loi conditionnelle de la variable aléatoire Y sachant $X = x$. Par définition, pour tout $x \in \mathcal{X}$, $P(\cdot | x)$ est une probabilité sur l'espace \mathcal{Y} (en particulier, nous avons $P_{Y|X}(\mathcal{Y} | x) = \int_{\mathcal{Y}} dP_{Y|X}(y | x) = 1$) et pour toute fonction intégrable $f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}_P[f(X, Y)] = \int_{\mathcal{X}} \left\{ \int_{\mathcal{Y}} f(x, y) dP_{Y|X}(y | x) \right\} dP_X(x) = \int_{\mathcal{X}} \mathbf{E}_P[f(x, Y) | X = x] dP_X(x). \quad (5.7)$$

Supposons que pour tout $x \in \mathcal{X}$, l'infimum $\inf_{y \in \mathcal{Y}} \mathbf{E}[\ell(Y, y) | X = x]$ est atteint.

Alors une fonction $g_P^* : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ telle que pour tout $x \in \mathcal{X}$, $g_P^*(x)$ minimise $y \mapsto \mathbf{E}[\ell(Y, y) | X = x]$ est une fonction oracle ; c'est-à-dire,

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad g_P^*(x) \in \arg \min_{y \in \mathcal{Y}} \mathbf{E}[\ell(Y, y) | X = x] \implies g_P^* \in \arg \min_{g \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} R_P(g). \quad (5.8)$$

5.3.1.5 Consistance d'un algorithme

Nous rappelons qu'un algorithme d'apprentissage g est une application

$$g : \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}). \quad (5.9)$$

Par conséquent, $g = \{g_n : n \in \mathbb{N}_*\}$ où chaque $g_n : \mathcal{D}_n \mapsto \widehat{g}_n \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ avec $\mathcal{D}_n = (Z_1, \dots, Z_n)$. Comme \mathcal{D}_n est aléatoire, il en est de même pour $\widehat{g}_n(x)$ quelle que soit la valeur $x \in \mathcal{X}$.

Par conséquent, la quantité

$$R_P(\widehat{g}_n) = \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \ell(y, \widehat{g}_n(x)) dP(x, y) \quad (5.10)$$

est aléatoire. Il est alors possible de considérer son espérance par rapport à $\mathcal{D}_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} P$, notée $\mathbf{E}_P[R_P(\widehat{g}_n)]$.

Dans ces conditions, un algorithme d'apprentissage est dit consistant par rapport à la loi P si et seulement si :

$$\mathbf{E}_P[R_P(\widehat{g}_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R_P(g_P^*). \quad (5.11)$$

Ensuite, un algorithme d'apprentissage est dit consistant par rapport à une famille de lois \mathcal{P} si et seulement si il est consistant par rapport à tout $P \in \mathcal{P}$.

Pour finir, un algorithme d'apprentissage est dit universellement consistant si et seulement si il est consistant par rapport à toute probabilité P sur \mathcal{Z} .

Les résultats de consistance universelle ne fournissent pas la taille n de l'échantillon nécessaire pour avoir une garantie du type $\mathbf{E}_P[R_P(\widehat{g}_n)] \leq R_P(g_P^*) + \epsilon$ pour $\epsilon > 0$ fixé.

Pour que ce nombre existe, il faudrait avoir un résultat de consistance universelle uniforme, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_P \{\mathbf{E}_P[R_P(\widehat{g}_n)] - R_P(g_P^*)\} = 0, \quad (5.12)$$

En général, ce nombre n'existe pas d'après le théorème suivant :

Théorème : Si $\text{Card}(\mathcal{X}) = +\infty$, il n'existe pas d'algorithme d'apprentissage uniformément universellement consistant.

L'absence d'algorithme universellement uniformément consistant nous amène à définir un **bon** algorithme d'apprentissage comme étant un algorithme universellement consistant et ayant une propriété de convergence uniforme sur une classe de probabilités paraissant pertinente pour le problème à traiter. Plus précisément, si \mathcal{P} est un ensemble de probabilités sur \mathcal{Z} dans laquelle nous pensons que P est, nous souhaitons que le bon algorithme satisfasse

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{P \in \mathcal{P}} \{ \mathbf{E}_P [R_P(\widehat{g}_n)] - R_P(g_P^*) \} = 0 \quad (5.13)$$

et également avoir une suite $\sup_{P \in \mathcal{P}} \{ \mathbf{E}_P [R_P(\widehat{g}_n)] - R_P(g_P^*) \}$ décroissant le plus vite possible vers 0 pour que peu de données soient nécessaires à l'algorithme pour prédire efficacement dans le cas où $P \in \mathcal{P}$.

5.3.2 La régression linéaire

La régression linéaire vise à trouver la droite qui passe au plus proche de tous points X_i présents dans la base de données. Ainsi, dans le cadre de la régression linéaire, la variable dépendante s'écrit comme une fonction affine des variables explicatives.

$$Y = \alpha + X \cdot \beta + \epsilon \quad (5.14)$$

avec :

- $\alpha \in \mathbb{R}^n$ est l'intercept. Il s'agit de la valeur de Y lorsque $X = 0_{n,d}$
- $\beta \in \mathbb{R}^d$ est la pente. β_j représente la variation de Y lorsque j ème la variable explicative varie d'une unité.
- $\epsilon \in \mathbb{R}^d$ est le vecteur de résidus. Il s'agit de l'erreur commise dans la détermination de β . De plus, ϵ est une variable aléatoire indépendante de X .

Les coefficients α et β sont déterminés par moindres carrés, c'est-à-dire en minimisant la somme des carrés des écarts entre les vraies valeurs Y_i et les valeurs prédites \hat{Y}_i .

$$\min_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad (5.15)$$

On parle alors de régression par moindres carrés. La fonction oracle dans ce dernier cas s'écrit comme :

$$\eta_P^*(x) = \mathbf{E}_P(Y | X = x) = \int_{\mathcal{Y}} y dP_{Y|X}(y | x). \quad (5.16)$$

soit la prédiction moyenne :

$$\eta_P^*(x) = X \cdot \beta \quad (5.17)$$

5.3.3 Les modèles de régression linéaire généralisés

Ces modèles sont une généralisation des modèles linéaires. En gardant les mêmes notation qu'à la section précédente, ils sont caractérisés par une fonction h telle que :

$$Y = h(\alpha + X \cdot \beta) + \epsilon \quad (5.18)$$

La fonction oracle ou encore la meilleure fonction de prédiction pour les modèles de régression linéaire généralisés s'écrit alors comme suit :

$$\eta_P^*(x) = \mathbf{E}_P(Y | X = x) = h(X \cdot \beta). \quad (5.19)$$

Les valeurs prédites par la fonction oracle ne correspondent pas à la prédiction moyenne $X \cdot \beta$, mais plutôt à une transformation de cette dernière par une fonction h qui est appelée **fonction de lien**. Par conséquent, si on note par $\mu(x)$ la prédiction moyenne $X \cdot \beta$, on pourra écrire :

$$\mu(x) = h^{-1}(\eta_P^*(x)) \quad (5.20)$$

Comme on ne s'attend toujours pas à avoir une relation linéaire entre Y et X , il est d'usage d'appliquer une transformation afin de se ramener à une forme linéaire ou quasi linéaire. Il existe à ce titre plusieurs familles de lois auxquelles peuvent correspondre la fonction h . Les familles les plus utilisées correspondent à la famille gaussienne (h est la fonction identité), la famille gamma (h est la fonction inverse) et la famille poisson (h est la fonction logarithme).

5.3.4 Les arbres de décision

Les arbres de décision, très utilisés en pratique, sont des méthodes à partition. En effet, ils génèrent une partition de \mathcal{X} basée à la fois sur les variables explicatives X_i , et sur les étiquettes observées Y_i .

Dans un arbre de décision, chaque noeud correspond à un sous-ensemble A de \mathcal{X} et un test T (également appelé critère de segmentation) auquel on soumet les variables explicatives $x \in \mathcal{X}$. Si le test peut donner lieu à k résultats différents, c'est-à-dire $T : A \rightarrow \{1, \dots, k\}$, alors le noeud correspondant à (A, T) donne naissance à k noeuds-fils, tel que l'ensemble $A^{(k)}$ associé au $k^{\text{ème}}$ fils est $A^{(k)} = \{x \in A : T(x) = k\}$.

La construction de l'arbre est donc un processus récursif, initialisé par le noeud racine qui correspond à $A = \mathcal{X}$. De façon schématique, ce processus peut être décrit de la façon suivante :

Initialisation : $ARBRE = \text{le noeud racine}$

Expansion : *pour chaque noeud N de ARBRE*

si N ne satisfait pas la condition d'arrêt

. choisir un critère de segmentation T

. créer les noeuds-fils

. mettre à jour $ARBRE = ARBRE + \text{noeuds-fils}$

fin si

Élagage : *pour chaque noeud N de l'arbre ARBRE*

si N vérifie la condition d'élagage

. $ARBRE = ARBRE - \text{noeud N et ses descendants}$

fin si

Par conséquent, les différents algorithmes de construction d'un arbre de décision ont pour différences principales :

- (a) la manière dont les critères de segmentation sont choisis,
- (b) le critère d'arrêt,
- (c) le critère d'élagage.

Typiquement, le critère d'arrêt consiste à vérifier que l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- la profondeur de l'arbre dépasse un seuil prescrit,
- le nombre de feuilles dans l'arbre dépasse un seuil prescrit,
- l'effectif du noeud est inférieur à un seuil prescrit.

L'étape d'élagage procède à la suppression d'une branche lorsque cette opération ne détériore pas significativement le risque estimé. Dans la plupart des cas, l'erreur estimée est calculé à l'aide d'un échantillon de test, différent de celui qui a servi dans l'étape d'expansion. Une fois que l'arbre est construit, la règle de classification qui s'ensuit est simple. En effet, pour un $x \in \mathcal{X}$, on détermine la feuille (le noeud terminal) qui le contient en parcourant l'arbre de haut en bas. Dans le problème de la régression, on affecte à x la moyenne des étiquettes Y_i correspondant aux exemples X_i qui **tombent** dans cette feuille.

Il y a plusieurs façons de construire un arbre de décision à partir d'un échantillon d'apprentissage. Les deux algorithmes les plus répandus sont C4.5 et CART.

Dans ce qui suit, on présentera plus en détail le choix des tests de l'algorithme CART. Ce dernier, dont l'acronyme signifie *Classification And Regression Trees*, s'attelle à un arbre de décision binaire (c'est-à-dire chaque noeud non-terminal a deux fils) utilisant comme critère de segmentation la variance dans le cas de la régression.

Notons qu'un noeud est bon pour la prédiction, si à quelques exceptions près les étiquettes des exemples associés à ce noeud sont les mêmes. On évalue la qualité d'un critère

qui segmente l'ensemble A en deux parties disjointes A_1 et A_2 par le gain d'homogénéité :

$$I_E(A_1, A_2) = E(A) - qE(A_1) - (1 - q)E(A_2) \quad (5.21)$$

où

$$E(A) = \frac{1}{N_A} \sum_{i: X_i \in A} (Y_i - \bar{Y}_A)^2 \quad (5.22)$$

et $q = N_{A_1}/N_A$, la proportion des $X_i \in A$ qui se dirige vers A_1 .

5.3.5 Indicateurs de performance

Les modèles présentés précédemment ne sont pas infaillibles. Tester l'un des algorithmes de régression sus-mentionnés revient à faire une hypothèse selon laquelle la variable à prédire suit une distribution particulière. Si cette hypothèse se révèle fautive, les résultats d'apprentissage ne seront pas satisfaisants. Il convient donc de définir des indicateurs de performance non seulement pour mesurer le bon pouvoir de prédiction de chaque algorithme testé (donc vérifier la pertinence de l'hypothèse de distribution émise), mais aussi pour comparer les algorithmes entre eux. Le choix final du "meilleur" modèle se fera sur la base de ces indicateurs de performance.

Nous noterons par :

- y_i : la valeur réelle de la variable explicative ;
- \hat{y}_i : la valeur prédite par le modèle ;
- n : la taille de l'échantillon.

5.3.5.1 L'erreur quadratique moyenne

L'erreur quadratique moyenne (*mean squared error* ou MSE) est une métrique de risque qui correspond à l'espérance du carré de l'erreur commise par la fonction de prédiction. Elle est calculée comme [Scikit Learn, 2023] :

$$\text{MSE}(y, \hat{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2. \quad (5.23)$$

5.3.5.2 L'erreur relative moyenne

L'erreur relative moyenne, de sa dénomination *mean absolute percentage error* (MAPE) en anglais, permet d'évaluer l'erreur relative commise dans la prédiction de l'étiquette. Elle est calculée comme [Scikit Learn, 2023] :

$$\text{MAPE}(y, \hat{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{\max(\epsilon, |y_i|)} \quad (5.24)$$

où ϵ est un nombre arbitrairement petit mais strictement positif pour éviter des résultats indéfinis lorsque y est égal à zéro.

Cette métrique s'avère être un indicateur de performance pertinent pour notre étude. En assurance, il est usuel de définir des montants ou coussins de sécurité (*buffer* en anglais) pour prévenir contre le risque d'une mauvaise estimation des variables importantes comme la meilleure estimation. À cette fin, il est également important de connaître l'erreur relative moyenne commise par le modèle. Un montant de sécurité pourra alors être défini et ajouté à la valeur prédite par le modèle.

5.3.5.3 L'erreur maximale effectuée sur une prédiction

Non seulement il faut s'assurer que le modèle a un bon pouvoir de prédiction de façon globale, mais il faut également s'assurer qu'il reste cohérent pour chaque prédiction. La bonne performance du modèle pourrait se cacher derrière un effet de compensation entre des bonnes et des mauvaises prédictions. L'erreur maximale permet de mesurer cela en repérant la pire situation de prédiction du modèle, et s'assurer qu'elle reste raisonnable. Elle est calculée comme [Scikit Learn, 2023] :

$$\text{Max Error}(y, \hat{y}) = \max(|y_i - \hat{y}_i|) \quad (5.25)$$

5.3.5.4 Le coefficient de détermination

Il représente la proportion de la variance de y expliquée par les variables indépendantes du modèle [Scikit Learn, 2023]. Il donne une indication de la qualité de l'ajustement et donc une mesure de la probabilité que les échantillons encore inconnus au modèle (l'échantillon de test par exemple) soient correctement prédits par le modèle, grâce à la proportion de variance expliquée [Scikit Learn, 2023].

$$R^2(y, \hat{y}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (5.26)$$

Comme cette variance expliquée dépend de l'ensemble des données, l'indicateur R^2 n'est pas significativement comparable entre différentes bases de données [Scikit Learn, 2023].

Par ailleurs, le coefficient de détermination peut être assimilé à la consistance du modèle. Rappelons qu'un algorithme est dit consistant par rapport à la loi P si et seulement si :

$$\mathbb{E}_P [R_P(\widehat{g}_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R_P(g_P^*). \quad (5.27)$$

D'une part, en prenant comme fonction de risque l'erreur quadratique moyenne, ou l'erreur relative moyenne ou encore l'erreur maximale de prédiction, on peut mettre en évidence que le terme $R_P(g_P^*)$ est nul. En effet, lorsque l'algorithme est consistant, on s'attend à avoir le modèle le plus précis possible, donc avec une fonction de risque nulle.

D'autre part, on peut réécrire le coefficient de détermination comme :

$$R^2(y, \hat{y}) = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (5.28)$$

De cette dernière écriture, on peut identifier que le terme au numérateur correspond à l'erreur quadratique moyenne de la fonction de prédiction.

Remarquons également que le terme au dénominateur est tel que :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Var}(y) \quad (5.29)$$

où $\text{Var}(y)$ est la variance de l'étiquette y . Le terme au dénominateur est un estimateur asymptotiquement sans biais de la variance.

Par suite, lorsque le modèle est consistant, la fraction de l'équation 5.28 converge vers 0.

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (5.30)$$

ce qui se traduit par :

$$R^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (5.31)$$

En revanche, un algorithme non consistant aura tendance à produire une fonction de risque au moins égale à la variance de y . En d'autres termes, le coefficient de détermination sera proche de 0.

En conclusion, le meilleur score possible pour R^2 est 1. Il peut être négatif parce que le modèle peut être arbitrairement moins bon. Un modèle constant qui prédit toujours la valeur attendue (moyenne) de y , sans tenir compte des caractéristiques d'entrée, obtiendrait un score R^2 de 0 [Scikit Learn, 2023].

5.4 CONCLUSION

Ce chapitre a permis de présenter la méthode d'approximation du SCR mise en place, et les fondements théoriques des modèles de régression que nous souhaitons utiliser dans cette étude. Les modèles de machine learning se révèlent souvent efficaces en présence de données de grande taille. Dans ces situations, ils ont une grande capacité d'apprentissage avec un faible risque de sur-apprentissage. En revanche, pour notre étude, la taille de l'échantillon est petite. Cela semble présenter un désavantage quant à l'utilisation de modèles sophistiqués.

Le chapitre suivant sera consacré à présenter les différents tests que nous avons effectués ainsi que les résultats obtenus.

Résultats et conclusions

6.1	Introduction	91
6.2	Calibration du proxy du SCR de marché	91
6.3	Détermination de l'allocation optimale	100
6.4	Conclusion	112

6.1 INTRODUCTION

Les chapitres précédents ont permis de situer le contexte de notre étude d'allocation stratégique sous contrainte de SCR pour un portefeuille d'épargne-retraite. Tout au long de ce rapport, nous avons progressivement défini en quoi a consisté notre recherche du portefeuille efficient, et la méthode d'approximation de la charge en capital que nous avons testée.

Ce chapitre va consister en la mise en œuvre pratique de notre étude. Nous y présenterons d'abord les résultats de l'approximation des charges en capital des différents sous-modules de risque de marchés. Les résultats obtenus seront ensuite utilisés pour calculer le SCR d'un ensemble d'allocations que nous préciserons. Puis, nous procéderons à la détermination du portefeuille efficient en prenant en compte le SCR obtenu par prédiction.

6.2 CALIBRATION DU PROXY DU SCR DE MARCHÉ

Compte tenu des contraintes opérationnelles évoquées précédemment, il a été possible de produire les charges en capital seulement pour 29 allocations que nous avons préalablement définies. Il s'agit d'un échantillon de **petite taille**. Malgré cela, nous divisons l'échantillon en deux bases d'apprentissage et de test en proportions respectives de 2/3 et 1/3.

Les modèles de régression présentés au chapitre précédent sont ensuite calibrés. Les indicateurs de performance présentés également au chapitre précédent permettront de juger de la qualité de prédiction de chaque algorithme.

Proxy de la charge en capital de chaque sous-module de marché

La méthode que nous testons dans ce mémoire consiste à calibrer un proxy pour chaque sous-module du SCR de marché en fonction de l'allocation cible. Une fois ces proxys calibrés, nous serons en mesure de calculer pour chaque sous module de risque de marché

le SCR associé, puis de déterminer les charges en capital au titre du risque de marché et basique (BSCR) à travers les différentes matrices de corrélations fournies par l'EIOPA. Il convient de préciser que les SCR peuvent être bruts ou nets des facteurs d'absorption émanant du passif et de ses interactions avec l'actif. Dans le premier cas, il s'agit de chocs sur les valeurs de marchés des actifs, alors que dans le second, les SCR sont calculés comme présenté au chapitre 2. Dans la suite, sauf mention contraire, le SCR désignera bien le SCR net des facteurs d'absorption.

Les six sous-modules de risque de marché selon la formule standard de la norme Solvabilité 2 sont : risque de taux d'intérêt, risque actions, risque immobilier, risque de spread de crédit, risque de change, risque de concentration. Puisque le portefeuille à l'actif ne contient pas d'expositions en devises, le SCR au titre du risque de change est nul. De plus, il n'y a pas de facteurs d'absorption au titre du risque concentration, c'est-à-dire que le SCR au titre du risque de concentration est égal à son SCR brut. Par conséquent, les risques qui font l'objet de notre étude pour cette méthode sont les risques taux, actions, immobilier et spread de crédit.

Pour chacune des allocations cibles définies pour calibrer le proxy, nous avons calculé le SCR net associé à ces quatre sous-modules de risque. Nous tentons ensuite de déterminer le meilleur proxy en testant les modèles de régression linéaire, les modèles linéaires généralisés et les arbres de décision. Nous évaluons les performances de chaque modèle au moyen de l'erreur quadratique moyenne, de l'erreur relative moyenne, de l'erreur maximale et du coefficient de détermination.

Notons que les SCR sont de très gros montants. La calibration des algorithmes, directement sur ces valeurs peut révéler de très grandes valeurs lors de l'évaluation des fonctions de risques. Comme les allocations cibles ont été choisies pour couvrir les situations d'une extrême à une autre, la variance de la fonction de risque est très élevée. L'erreur moyenne commise lors des prédictions peut vite atteindre l'ordre du milliard, ce qui met en cause les coefficients estimés malgré les performances du modèle. Il est donc judicieux de ramener ces valeurs de SCR à une même échelle.

Pour ce faire, nous considérons deux moyens de mise à l'échelle des SCR. La première consiste à standardiser les SCR, c'est-à-dire à soustraire à chaque SCR la moyenne de l'échantillon et à diviser le tout par l'écart-type de l'échantillon. La seconde consiste à diviser tous les SCR par le SCR associé à l'une des allocations cibles prise comme référence. Cette allocation de référence a été définie de sorte à représenter l'allocation d'actifs des assureurs-vie au 31/12/2022. Pour chacune des quatre variables à approximer, les trois modèles de régression ont été testés sur chaque type de retraitement effectué. Les estimateurs des coefficients de chaque algorithme ainsi que leurs performances sont présentés aux tableaux suivants.

Régression linéaire			
Coefficients	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
<i>Intercept</i>	$-3.2e + 07$	0.0	-1.52
<i>Equity</i>	$2.42e + 08$	0.13	11.36
<i>Estate</i>	$2.27e + 08$	0.12	10.67
<i>FRN</i>	$4.39e + 07$	-0.49	2.06
<i>FI</i>	$-6.24e + 07$	-0.90	-2.93
<i>OPCVM</i>	$8.45e + 07$	-0.52	3.97
<i>OII</i>	$1.28e + 09$	3.96	60
<i>PERP</i>	$-1.39e + 08$	-1.15	-6.54
<i>MSE</i>	$7.9e + 14$	0.13	17.46
<i>MAPE</i>	2.13	0.61	2.13
<i>Max Error</i>	$2.3e + 07$	0.83	10.77
R^2	0.57	0.57	0.77
GLM gamma			
Coefficients	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
<i>Intercept</i>	18.11	-	1.05
<i>Equity</i>	0.67	-	1.01
<i>Estate</i>	0.74	-	1.07
<i>FRN</i>	-0.91	-	-1.19
<i>FI</i>	-0.78	-	-0.97
<i>OPCVM</i>	-0.58	-	0.48
<i>OII</i>	2.16	-	2.67
<i>PERP</i>	-0.32	-	-0.36
<i>MSE</i>	$3.39e + 14$	-	14.80
<i>MAPE</i>	0.96	-	0.68
<i>Max Error</i>	$3.2e + 08$	-	11.72
R^2	0.69	-	0.81
Arbres de décision			
	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
<i>MSE</i>	$6.18e + 14$	0.89	151.22
<i>MAPE</i>	0.98	0.64	0.98
<i>Max Error</i>	$7.2e + 07$	2.61	34.00
R^2	0.57	0.57	0.57

TABLEAU 6.1 – Résultats de l'approximation du SCR taux en fonction de l'allocation cible du portefeuille.

Régression linéaire			
Coefficients	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
<i>Intercept</i>	2.1e+07	0	0.92
<i>Equity</i>	-4.34e+06	-1.17	-0.39
<i>Estate</i>	-4e+06	-1.08	-0.39
<i>FRN</i>	-7.65e+06	-1.67	0.01
<i>FI</i>	7.63e+06	1.49	0.11
<i>OPCVM</i>	-5.37e+05	-0.42	-0.28
<i>OII</i>	-1.33e+08	-17.53	-0.32
<i>PERP</i>	1.75e+08	20.57	-0.19
<i>MSE</i>	8.4e+12	0.38	0.02
<i>MAPE</i>	0.11	0.72	0.13
<i>Max Error</i>	4.2e+06	0.87	0.41
<i>R²</i>	0.39	0.35	0.41
GLM gamma			
Coefficients	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
<i>Intercept</i>	16.87	-	-0.25
<i>Equity</i>	-0.19	-	-0.29
<i>Estate</i>	-0.21	-	-0.26
<i>FRN</i>	-0.003	-	0.14
<i>FI</i>	0.29	-	0.15
<i>OPCVM</i>	-0.083	-	-0.08
<i>OII</i>	-0.07	-	-0.22
<i>PERP</i>	-0.04	-	-0.06
<i>MSE</i>	9.3e+12	-	0.01
<i>MAPE</i>	0.12	-	0.09
<i>Max Error</i>	4.5e+06	-	0.21
<i>R²</i>	0.34	-	0.6
Arbres de décision			
	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
<i>MSE</i>	1.2e+13	0.33	0.01
<i>MAPE</i>	0.09	0.43	0.09
<i>Max Error</i>	6.7e+06	0.93	0.21
<i>R²</i>	0.49	0.55	0.63

TABLEAU 6.2 – Résultats de l'approximation du SCR actions en fonction de l'allocation cible du portefeuille.

Régression linéaire			
Coefficients	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
<i>Intercept</i>	1.89e + 06	0	0.28
<i>Equity</i>	-2.55e + 06	-0.97	-0.38
<i>Estate</i>	-2.4e + 06	-0.89	-0.35
<i>FRN</i>	-2.86e + 06	-12.18	-4.29
<i>FI</i>	2.46e + 06	1.15	0.37
<i>OPCVM</i>	-1.26e + 06	-0.37	-0.19
<i>OII</i>	5.89e + 06	-3.98	0.88
<i>PERP</i>	-2e + 07	1.38	-3.02
<i>MSE</i>	5.3e + 12	0.99	0.12
<i>MAPE</i>	2.3e + 21	0.86	3.43e + 14
<i>Max Error</i>	4.3e + 06	1.86	0.65
<i>R²</i>	0.08	0.05	0.08
GLM gamma			
Coefficients	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
<i>Intercept</i>	16.32	-	-2.98
<i>Equity</i>	-17.9	-	-4.79
<i>Estate</i>	-3.48	-	-7.02
<i>FRN</i>	4.45	-	1.95
<i>FI</i>	-0.95	-	3.70
<i>OPCVM</i>	-0.84	-	3.29
<i>OII</i>	-2.8e + 03	-	-6.19
<i>PERP</i>	-1.96e + 03	-	0.55
<i>MSE</i>	3.1e + 11	-	0.01
<i>MAPE</i>	2.73e + 20	-	0.09
<i>Max Error</i>	1.2e + 06	-	0.13
<i>R²</i>	0.87	-	0.88
Arbres de décision			
	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
<i>MSE</i>	3.6e + 12	0.61	0.01
<i>MAPE</i>	0.16	0.24	0.07
<i>Max Error</i>	4.86e + 06	2	0.16
<i>R²</i>	0.47	0.5	0.81

TABLEAU 6.3 – Résultats de l'approximation du SCR immobilier en fonction de l'allocation cible du portefeuille.

Régression linéaire			
Coefficients	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
<i>Intercept</i>	$7.04e+07$	0	1.24
<i>Equity</i>	$-7.26e+07$	-1.98	-1.43
<i>Estate</i>	$-6.12e+07$	-1.63	-1.11
<i>FRN</i>	$3.56e+08$	16.01	-0.007
<i>FI</i>	$-1.52e+07$	0.55	-0.06
<i>OPCVM</i>	$-1.51e+07$	1.63	-0.18
<i>OII</i>	$1.97e+08$	-80.3	-0.80
<i>PERP</i>	$-4.48e+08$	116.06	0.03
<i>MSE</i>	$9.4e+13$	0.13	0.09
<i>MAPE</i>	0.15	0.4	0.09
<i>Max Error</i>	$1.4e+07$	0.87	0.63
R^2	0.39	0.42	0.59
GLM gamma			
	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
Coefficients	0	-	0
<i>Intercept</i>	17.65	-	0.3
<i>Equity</i>	-0.95	-	-2.2
<i>Estate</i>	-0.08	-	-1.77
<i>FRN</i>	0.07	-	9.95
<i>FI</i>	0.19	-	-0.26
<i>OPCVM</i>	0.3	-	-0.18
<i>OII</i>	0.03	-	-1.79
<i>PERP</i>	0.02	-	-1.77
<i>MSE</i>	$5.12e+14$	-	0.03
<i>MAPE</i>	$1.2e+22$	-	0.2
<i>Max Error</i>	$4.2e+07$	-	0.23
R^2	0.36	-	0.38
Arbres de décision			
	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
<i>MSE</i>	$3.58e+14$	0.81	0.1
<i>MAPE</i>	$1.2e+22$	0.49	0.28
<i>Max Error</i>	$3.9e+07$	1.83	0.64
R^2	0.55	0.55	0.56

TABLEAU 6.4 – Résultats de l'approximation du SCR spread en fonction de l'allocation cible du portefeuille.

L'analyse des tableaux 6.1, 6.2, 6.3 et 6.4 indique à première vue que les meilleurs résultats sont obtenus lorsqu'on a mis à l'échelle les SCR par rapport à celui de l'allocation de référence.

Comme attendu, la calibration du proxy directement sur les montants de SCR entraîne une grande imprécision des modèles. Le premier retraitement de standardisation (qui consiste à retrancher aux observations la moyenne de l'échantillon et à diviser par son écart-type) permet de diminuer la grande variance de l'erreur de prédiction. Mais les indicateurs de performance calculés, notamment le coefficient de détermination, ne permettent pas de valider les résultats. En effet, la taille de l'échantillon est statistiquement petite. Les proportions de chaque classe d'actif ont été générées entre 0 et 1, avec un pas relativement grand de sorte à couvrir toutes les possibilités même extrêmes. Il est donc plus que probable que les moyennes et écart-types estimés soient biaisés. Cela a contribué potentiellement aux mauvaises performances des modèles de régression pour ce retraitement.

En revanche, le deuxième retraitement (qui consiste à diviser tous les SCR par le SCR de l'allocation de référence) semble convenir le mieux pour cette étude. Il permet non seulement de diminuer la variance de l'erreur de prédiction, mais il assure également une bonne stabilité du coefficient de détermination. Dans la suite, toutes les analyses seront faites pour les résultats obtenus avec ce second retraitement.

Selon la variable à prédire, le choix du "meilleur" modèle peut être différent. L'analyse du tableau 6.1 montre par exemple que la régression linéaire, la famille gamma des modèles linéaires généralisés (GLM gamma) et les arbres de décision offrent des résultats satisfaisants pour le SCR taux. En effet, malgré la petite taille de l'échantillon d'étude, les coefficients de détermination R^2 sont supérieurs à 0.5, voire proches de 1 en ce qui concerne la régression linéaire et le modèle GLM gamma. Les erreurs commises lors de la prédiction sont également contenues à un niveau proche de 0. Une attention devra être portée également sur les coefficients estimés et la pertinence de leurs signes.

Ainsi, en considérant toujours le SCR taux, les coefficients estimés par la régression linéaire ne semblent pas cohérents. On s'attend à ce qu'une augmentation des proportions des classes d'actifs obligataires *fi*, *frn*, *oii*, *perp* et *opcvm* (les OPCVM au sein du portefeuille d'actifs sont majoritairement composés d'obligations) entraîne une augmentation de la charge en capital au titre du risque de taux d'intérêt. En d'autres termes, on s'attend à avoir pour $i \in \{fi, frn, oii, perp, opcvm\}$, $\beta_i > 0$. Cependant, les résultats obtenus indiquent que $\beta_{FI} < 0$, et $\beta_{perp} < 0$. De plus, malgré leurs signes positifs, l'intensité des coefficients associés aux obligations indexées sur l'inflation, aux obligations à taux variable et aux OPCVM ne semblent pas cohérents. En conclusion, au vu des coefficients estimés, la régression linéaire ne semble pas appréhender correctement la relation entre le SCR taux et l'allocation du portefeuille.

Toutefois, ces résultats peuvent s'expliquer par la possibilité de l'existence d'une très forte capacité d'absorption pour le risque de taux d'intérêt. Il apparaît évident que le SCR

brut de taux d'intérêt augmente lorsque la part des actifs obligataires augmente. Mais, nous tentons d'approximer le SCR net des facteurs d'absorption. Ces résultats peuvent cacher les effets des facteurs d'absorption sur les effets marginaux (les coefficients β_i), contrairement à ce qui était attendu.

En revanche, les coefficients estimés avec le modèle GLM gamma semblent aller dans le sens qui était attendu. Rappelons que ce dernier modèle consiste à supposer que $Y = \frac{1}{\alpha + X \cdot \beta}$. Cette dernière famille de modèle est utilisée pour modéliser les variables continues, positives avec potentiellement des queues épaisses. Son utilisation est commune en assurance, notamment en assurance non-vie pour modéliser le coût des sinistres en tarification.

Par ailleurs, en standardisant les charges en capital, on se retrouve potentiellement avec des valeurs négatives. Comme le modèle GLM gamma ne s'applique qu'aux variables positives, son application pour ce type de retraitement n'a pas été possible. C'est pourquoi les coefficients estimés et les indicateurs de performance associés sont vides aux tableaux 6.1, 6.2, 6.3 et 6.4.

En ce qui concerne les arbres de décision, ils ont été calibrés avec une profondeur maximale de 3. En d'autres termes, le modèle n'aura au maximum que trois ramifications. Il a été constaté en pratique que lorsque cette profondeur est supérieure stricto sensu à 3, le modèle a tendance à faire du sur-apprentissage.

Par ailleurs, les arbres de décision ne fournissent pas une relation explicite entre la variable à prédire et les variables explicatives. Ils établissent plutôt des règles de décisions qui permettent de suivre le processus de prédiction. Cela fait des arbres de décision des modèles interprétables.

En effet, l'utilisation de modèles d'apprentissage automatique dit *boîtes noires* n'est pas très appréciée de manière générale, et particulièrement pour l'assurance qui est soumise à des contraintes de transparence.

Les arbres de décision, bien qu'ils soient plus sophistiqués que les modèles linéaires généralisés, offrent la possibilité de suivre toute la chaîne de décisions. Par exemple, l'arbre final pour le SCR taux qui a servi à fournir les performances au tableau 6.1, est présenté ci-après.

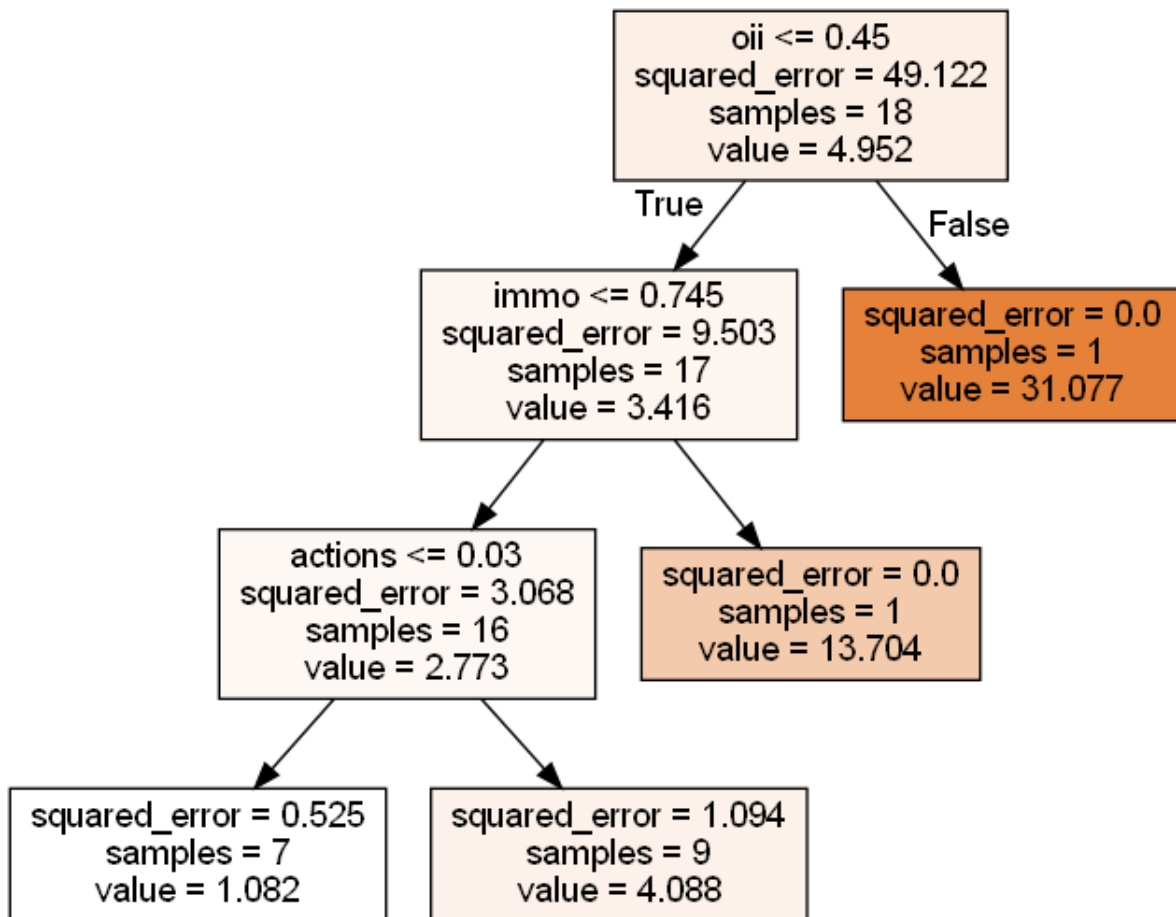


FIGURE 6.1 – Arbre de décisions pour le SCR de taux d'intérêt.

La figure 6.1 indique que la racine de l'arbre est la proportion des obligations indexées sur l'inflation. Cette première décision de l'arbre n'est pas cohérente avec les réalités d'investissement de l'assurance. On s'attend plutôt à avoir une racine qui soit définie par rapport à la proportion des obligations à taux fixe. Cette "mauvaise" décision semble en provoquer d'autres. On remarque que dans l'évolution de l'arbre, les critères de segmentation sont portés sur les proportions des classes d'actifs immobilier et actions. Les règles de décisions établies pour la calibration du proxy du SCR taux ne sont donc pas celles qui pouvaient être attendues pour le portefeuille étudié. Cela explique la faible performance de l'arbre au vu du coefficient de détermination.

Ces résultats peuvent néanmoins être imputés à la petite taille de l'échantillon et à la petite profondeur maximale définie pour l'arbre de décisions. En effet, le manque de données a conduit l'algorithme à établir des règles de décisions grossières pour minimiser la variance de prédiction. À la racine de l'arbre à la figure 6.1, la règle consiste à comparer la proportion des obligations indexées sur l'inflation à 0.45. Il suffit que cette proportion soit différente de 0.45 au millième près pour que le résultat de la prédiction soit complètement différent. Cela résulte en une grande sensibilité de l'algorithme en fonction des variables en entrée.

Par conséquent, compte tenu des éléments évoqués de performance et de pertinence des

coefficients estimés précédemment, le choix du "meilleur" modèle parmi ceux qui ont été testés pour approximer le SCR taux d'intérêt sera porté sur le modèle GLM gamma. Une analyse identique à celle faite pour le SCR taux permet de déterminer également les meilleurs modèles pour approximer les SCR actions, immobilier et spread de crédit.

Alors, pour les SCR actions et immobilier, c'est le modèle GLM gamma qui est également retenu. En ce qui concerne le SCR spread, l'examen du tableau 6.4 indique que les performances obtenues sont globalement en dessous de celles obtenues pour les SCR des autres sous-modules de risque de marché. Bien que le modèle de régression linéaire fournit les meilleures performances, les signes des coefficients estimés ne semblent pas cohérents. On s'attend à ce que le SCR au titre du spread de crédit augment lorsque la part des actifs obligataires augmente, contrairement aux résultats obtenus pour la régression linéaire. Comme expliqué pour le SCR taux, cela peut s'expliquer par une grande absorption du modèle. En revanche, bien que les performances du modèle GLM gamma sont moins bonnes que celles du modèle de régression linéaire, les coefficients estimés sont cohérents. C'est donc ce dernier qui est également retenu.

En conclusion, les modèles GLM gamma se sont révélés meilleurs pour approximer les variations des différents SCR en fonction de l'allocation cible du portefeuille. Cependant, il faut rappeler que pour cette méthode d'approximation, les variables à prédire sont les charges en capital nets de facteurs d'absorption. Une grande absorption lors de la projection de bilan peut expliquer les résultats contre intuitifs que nous avons pu obtenir pour les modèles de régression.

6.3 DÉTERMINATION DE L'ALLOCATION OPTIMALE

La première étape de la recherche de l'allocation optimale a consisté à réduire l'ensemble admissible des allocations possibles. Le portefeuille d'actifs est composé de huit classes d'actifs. Les proportions de chacune d'elles varient entre 0 et 1 avec la seule contrainte que leur somme soit égale à 1. Il ne s'agit pas d'une contrainte de portefeuille autofinçant car le modèle ALM aura toujours la possibilité d'acheter et de vendre des actifs sur toute la période de projection.

Pour une meilleure précision de l'analyse, il aurait fallu générer toutes les combinaisons possibles de portefeuilles qui respectent cette contrainte avec un pas de variation très fin. Mais comme analysé dans le chapitre 2, il y a certains portefeuilles qui ne sont pas envisageables au vu des contraintes réglementaires de solvabilité. La théorie moderne du portefeuille, avec l'analyse des expositions des assureurs au 31/12/2022 a permis de réajuster les bornes des proportions des classes d'actifs comme suit :

<i>Classe d'actif</i>	<i>Borne inférieure (%)</i>	<i>Borne supérieure (%)</i>	<i>Pas (%)</i>
<i>FI</i>	55	75	10
<i>FRN</i>	5	30	6.25
<i>OII</i>	0	5	1
<i>Equity</i>	5	30	5
<i>Estate</i>	5	30	5
<i>OPCVM</i>	5	25	4
<i>Cash</i>	0	10	5

TABLEAU 6.5 – Conséquences de Solvabilité 2 sur l'allocation d'actifs.

Ces nouvelles bornes ont permis de réduire les milliers de portefeuilles qui auraient dû être testés à "seulement" 92 allocations. Ensuite, pour chacune des 92 allocations, une projection en monde réel sur 10 ans a été effectuée pour déterminer la distribution de la richesse finale : la valeur actuelle des profits futurs (PVFP). Nous rappelons que la projection est faite avec un jeu de scénarios monde réel parce que les stratégies financières (et la détermination de la richesse finale) doivent rester cohérentes avec le contexte économique. Dans un premier temps, nous considérons le critère de rendement (moyenne de la PVFP sur les 1000 scénarios monde réel) et le critère de risque (Value at Risk de la PVFP) sans prendre en compte les SCR associés. Le critère de risque a été pris à un niveau de confiance de 98% ($Var_{98\%}$) en accord avec les pratiques de marché. On cherchera alors à déterminer le plus petit niveau que peut atteindre la richesse finale avec une probabilité de 2%. Le nuage de points résultant est présenté à la figure 6.2.

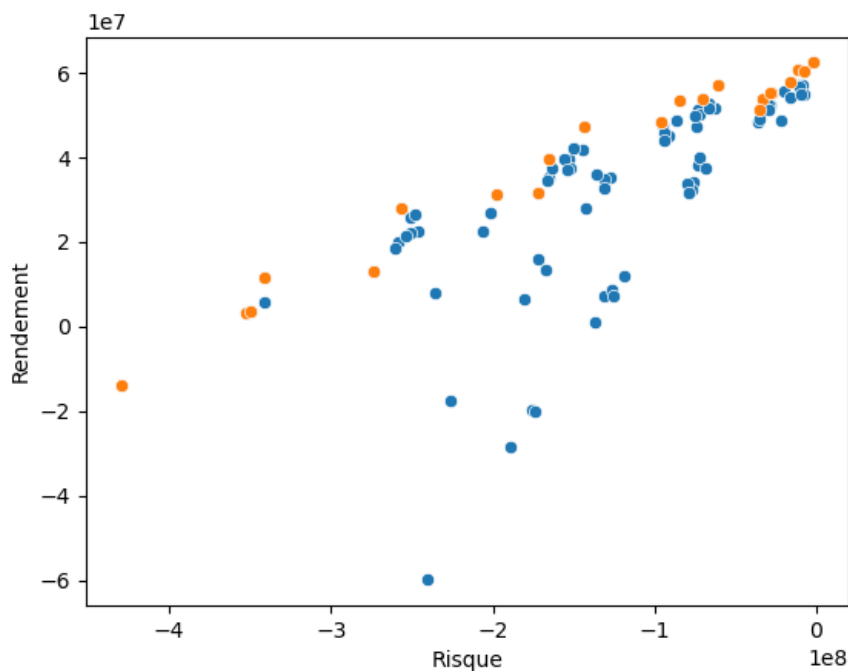


FIGURE 6.2 – Nuage de points formé par les couples rendement/risque.

La figure 6.2 indique la dispersion du rendement obtenu selon le risque associé pour chaque allocation cible. Nous remarquons que le rendement reste le plus souvent positif. Comme il est calculé comme la moyenne sur plusieurs scénarios, la mutualisation des effets (positifs et négatifs) contribue à lui assurer un niveau satisfaisant pour l'assureur. Plus le rendement est positif, plus l'activité de l'assureur sera rentable. En revanche, le risque a tendance à être négatif. En effet, il s'agit de la pire richesse finale attendue avec une probabilité de 2%. En ce sens, il correspond le plus souvent à des mauvaises performances de l'activité d'assurance. Plus l'indicateur de risque sera petit (de plus en plus négatif), plus l'allocation d'actifs associée sera considérée risquée.

La figure 6.2 peut alors être divisée en quatre cadrants :

- **Cadrant I** (coin supérieur gauche) : il caractérise les allocations pour lesquelles le rendement est positif mais modéré, et le risque associé est le plus élevé. Ces allocations seront considérées comme légèrement risquées. Elles permettent notamment d'obtenir du rendement positif (modéré) malgré le risque associé.
- **Cadrant II** (coin inférieur gauche) : il caractérise les allocations pour lesquelles le rendement est négatif, et le risque associé est le plus élevé. Ces allocations seront considérées comme très risquées.
- **Cadrant III** (coin inférieur droit) : il caractérise les allocations pour lesquelles le rendement est négatif, et le risque associé est le plus faible. Ces allocations, bien qu'elles aient un risque contenu, ne permettent pas de générer suffisamment de rendement pour assurer l'activité.
- **Cadrant IV** (coin supérieur droit) : il caractérise les allocations pour lesquelles le rendement est positif, et le risque associé est le plus faible. Ces allocations sont celles qui offrent les meilleurs compromis rendement/risque.

Par ailleurs, le nuage de points à la figure 6.2 semble se concentrer dans la partie supérieure, et précisément au centre et dans le quadrant IV. Les allocations représentées semblent alors être de bons candidats pour être l'allocation optimale du portefeuille. Cela est le résultat de la présélection effectuée, éliminant considérablement les allocations qui sont sous-optimales.

De plus, suivant l'axe du risque, tous les points supérieurs, c'est-à-dire pour lesquels le rendement est maximal pour le niveau de risque associé, représentent la frontière efficiente du portefeuille. Il s'agit des couples rendement/risque représentés en orange sur la figure 6.2.

Le nuage de points tel qu'il est représenté à la figure 6.2 ne donne pas beaucoup d'informations sur les allocations qui permettent de se retrouver dans le quadrant IV. Pour ce faire, nous déclinons le nuage de points de la figure 6.2 en fonction des actifs risqués (actions + immobilier) d'une part et des actifs obligataires (fi + frn + oii + opcv) d'autre part.

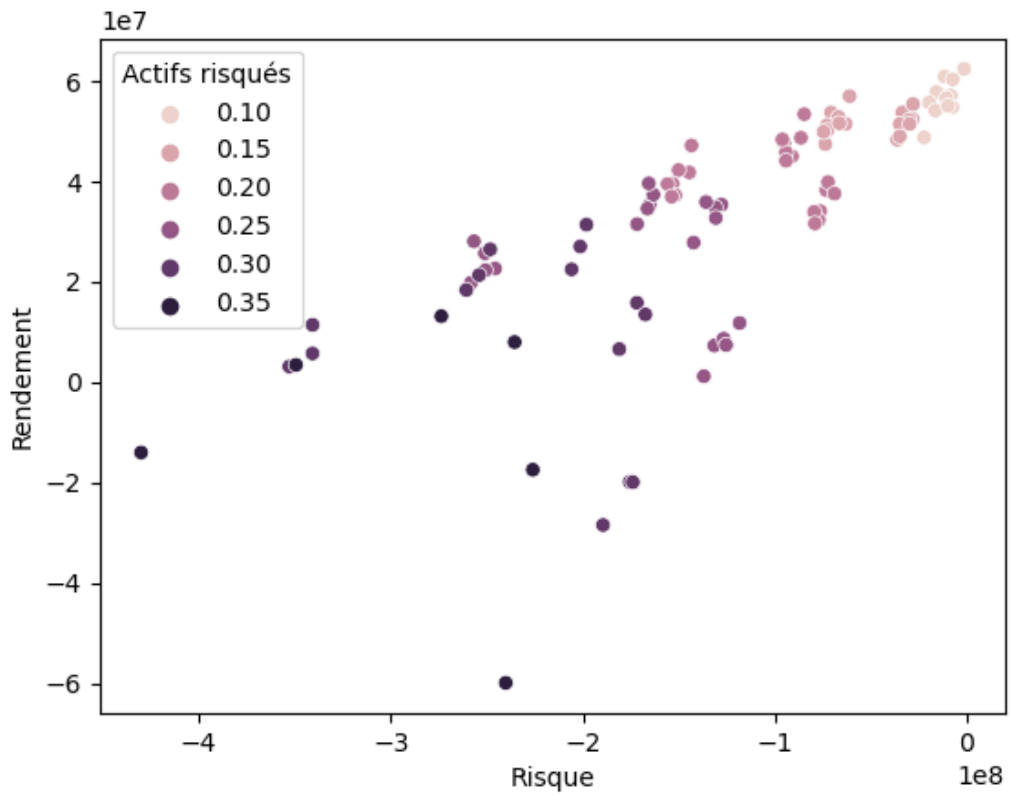
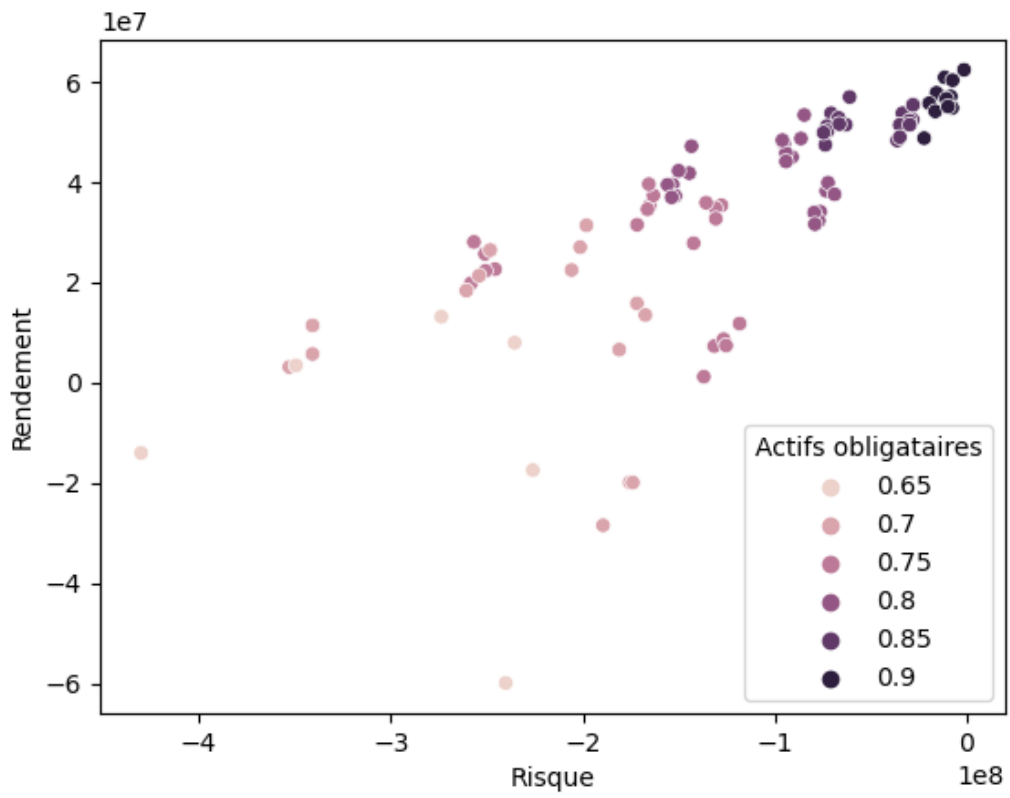


FIGURE 6.3 – Nuage de points du rendement en fonction du risque selon la nature des actifs.

L'analyse de la figure 6.3 révèle que les portefeuilles qui se retrouvent dans le quadrant IV sont principalement composés d'actifs obligataires, malgré leurs faibles rendements. En effet, les critères de performance considérés pour cette étude ne sont pas associés uniquement au portefeuille d'actifs. Ils portent sur la valeur intrinsèque ou la rentabilité du portefeuille actif/passif en tant que business.

La richesse finale telle que nous la définissons pour cette étude est composée des résultats technique, administratif et financier. Lorsque la tarification des produits est bien faite, le résultat technique reste proche de 0. S'il est positif, l'assureur a l'obligation d'en reverser au moins 90% aux assurés sous forme de participation aux bénéfices. De plus, comme les différentes hypothèses de frais et commissions à la charge de l'assureur sont connues, le résultat administratif reste également contenu à un certain niveau connu. La composante qui explique concrètement les variations de la richesse finale est donc le résultat financier.

Cependant, contrairement à ce qu'on pourrait imaginer, l'investissement massif dans les actifs risqués ne permettra pas forcément d'augmenter la richesse finale. Les interactions entre l'actif et le passif, en plus des contraintes réglementaires contribuent à orienter les assureurs plutôt vers des actifs obligataires. En effet, les rendements de l'actif sont majoritairement destinés aux assurés, contribuant à financer le taux minimum garanti et les prestations discrétionnaires. L'assureur doit reverser, en plus de ses engagements contractuels, une grande partie des performances financières à l'actif.

D'une part, en investissant de plus en plus dans des actifs risqués (actions ou immobilier), l'assureur s'attend à dégager du rendement en moyenne. Il prend alors le risque de perdre son investissement à la suite de mauvaises performances. Lorsque les situations de mauvaises performances surviennent, la richesse finale connaîtra ses niveaux les plus bas qui seront a priori négatifs. D'autre part, si son investissement génère du rendement comme espéré, il devra reverser une grande partie à ses assurés, augmentant ainsi le niveau de ses engagements. Dans les deux cas, il risque de subir une vague de rachats, résultat du mécontentement de ses assurés.

Par conséquent, les actifs obligataires auront majoritairement un effet positif sur le rendement (la rentabilité de l'activité), et un effet négatif sur le risque (plus la part des obligations augmente, plus la perte attendue dans les situations extrêmes, c'est-à-dire le risque diminue). Nous illustrons les sensibilités des critères de rendement et risque selon la proportion des actifs obligataires et des actifs risqués à la figure 6.4.

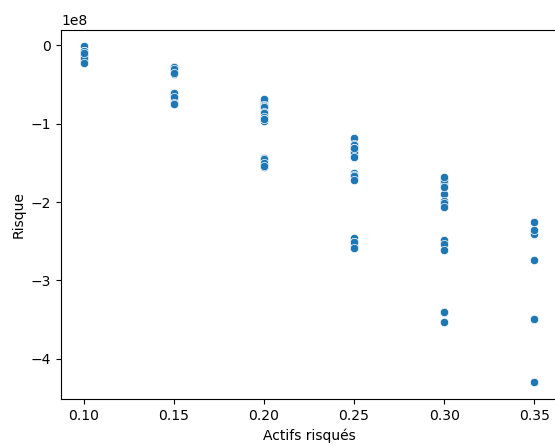
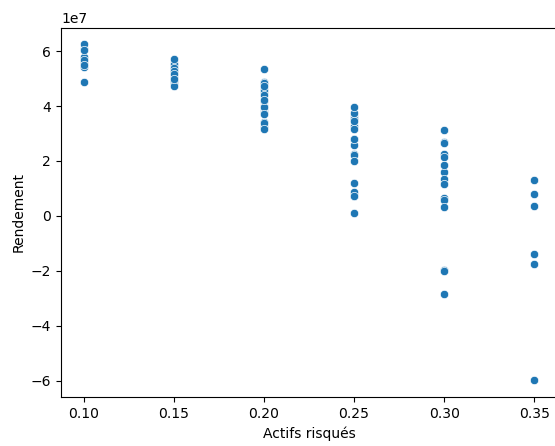
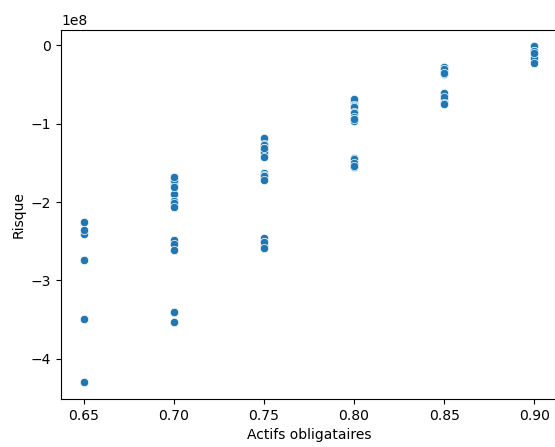
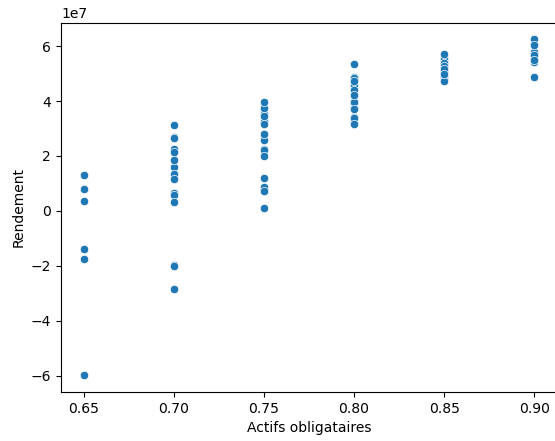


FIGURE 6.4 – Sensibilité du rendement et du risque par rapport aux actifs obligataires et aux actifs risqués.

La plus value de ce mémoire réside dans la possibilité qu'il offre de prendre en compte la charge en capital dans l'analyse des couples rendement/risque. L'analyse des spécificités de l'assurance a permis de diminuer l'ensemble des allocations pour lesquelles on détermine les indicateurs de rendement et de risque à 92. Pour que l'étude soit complète, il aurait fallu produire la charge en capital associé à toutes ces allocations. Cette tâche nécessite en pratique des mois de production avec des ressources importantes. Les résultats des algorithmes de régression obtenus pour l'approximation du SCR seront utilisés pour s'affranchir de la lourde tâche opérationnelle associée.

Concrètement, la prise en compte de la charge en capital dans les critères de rendement et de risque passe par la détermination d'un coût de portage. Il s'agit pour l'assureur du coût de l'immobilisation du SCR au regard de la norme Solvabilité 2. Pour ce faire, il faut d'abord disposer pour chacune des 92 allocations, les charges en capital en début de projection ($t=0$). Il s'agit du SCR calculé par la méthode standard, que nous prédisons avec les modèles de régression déjà calibrés à cet effet.

Le coût de portage est calculé sur la période de projection en monde réel, c'est-à-dire sur 10 ans. Pour cela, le SCR (prédit par *machine learning*) est projeté suivant l'évolution des provisions mathématiques (pm) selon la formule suivante.

$$scr_t = scr_{t-1} \times \frac{pm_t}{pm_{t-1}} \quad (6.1)$$

Le coût de portage est alors calculé comme un pourcentage du SCR. Ce pourcentage est calculé comme la différence entre le taux de rendement attendu par les actionnaires et le taux de rendement de l'actif (du fonds euros) net des frais financiers et net des impôts.

$$\text{coût portage}(t) = scr(t-1) \times (\text{taux attente actionnaire} - \text{rendement net actif}(t)) \quad (6.2)$$

Enfin, le coût de portage pour l'allocation cible du portefeuille s'écrit comme :

$$\text{coût portage final} = \sum_{t=1}^{10\text{ans}} \text{coût portage}(t) \times \text{deflateur}(t) \quad (6.3)$$

$$\text{deflateur}(t) = \frac{1}{(1 + \text{taux attente actionnaire})^t} \quad (6.4)$$

Le coût de portage du SCR calculé servira à pénaliser la distribution de PVFP produite pour chaque allocation. Les métriques de rendement et de risque seront alors calculées sur la base de cette distribution de PVFP nette (de coût de portage du SCR).

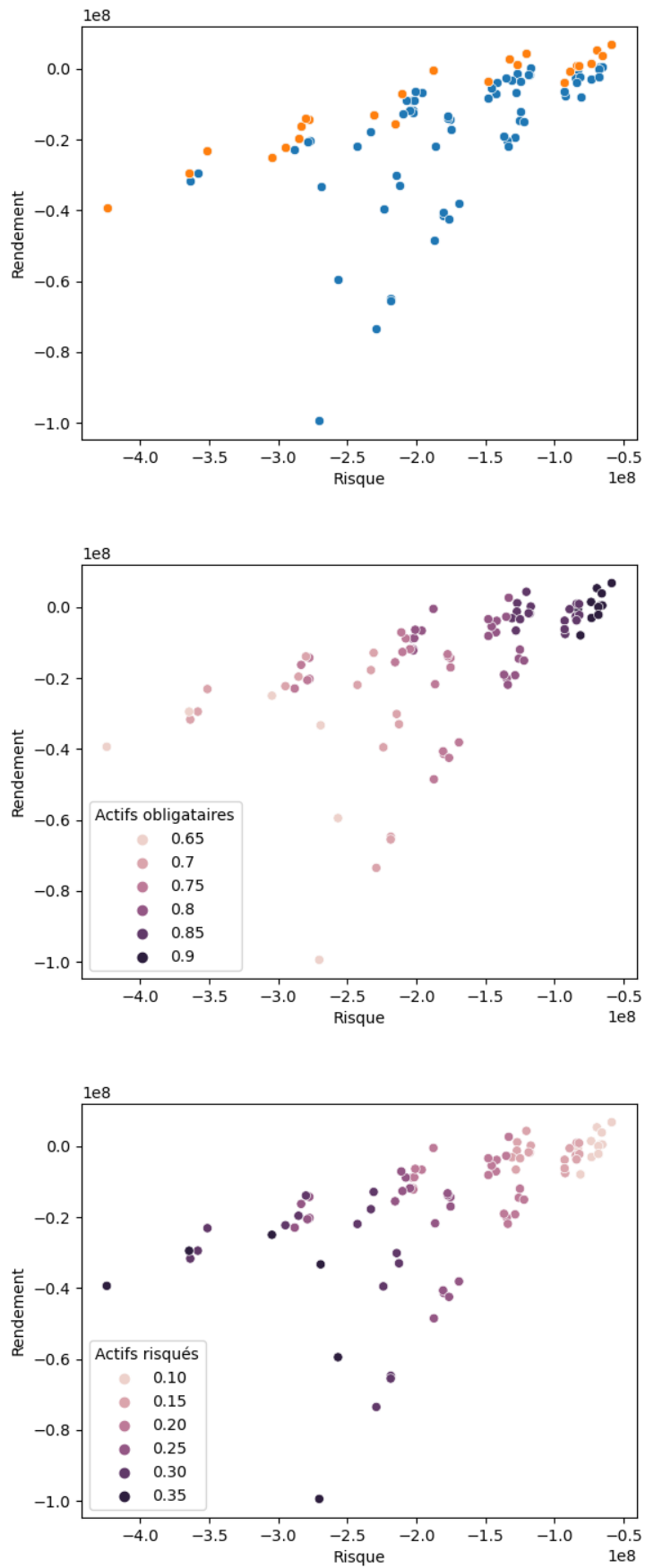


FIGURE 6.5 – Nuage de points formé par les couples rendement/risque selon la nature des actifs avec prise en compte du coût de portage du SCR.

Comme le montre la figure 6.5, la prise en compte du coût de portage du SCR pénalise les rendements obtenus pour les différentes allocations ainsi que les risques associés. On observe deux effets de translation par rapport aux résultats sans prise en compte du SCR : une translation vers le bas sur l'axe du rendement et une translation vers la gauche sur l'axe du risque. La répartition du nuage de points semble cependant stable par rapport à ceux des figures 6.2 et 6.3. Pour s'en assurer, nous annotons les nuages de points avec leurs numéros d'allocation. Pour plus de lisibilité, nous ne présentons que les nuages de points répartis dans la cadran IV. L'effet de la prise en compte du coût de portage du SCR sur ce cadran est présenté à la figure 6.6.

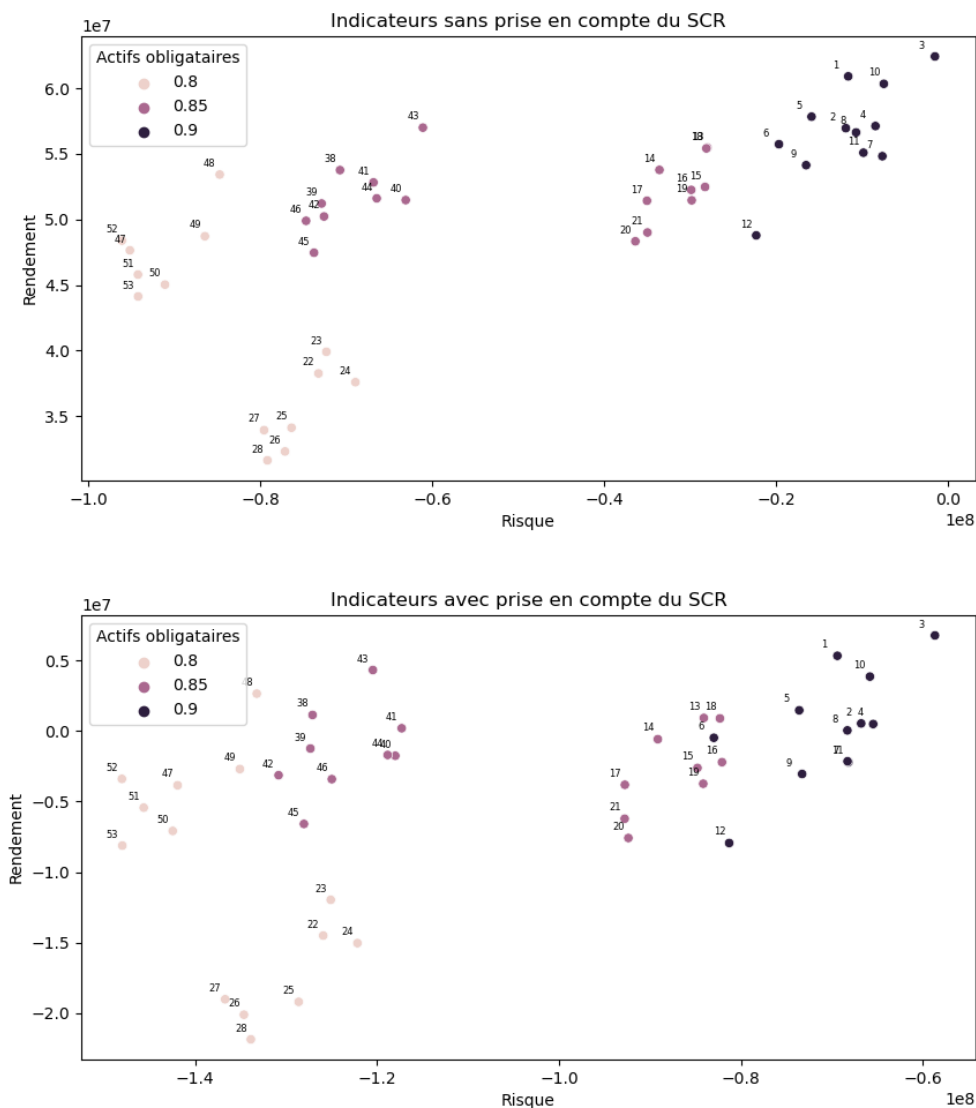


FIGURE 6.6 – Effets de la prise en compte du coût de portage du SCR sur le couple rendement/risque.

On remarque que la prise en compte du SCR ne perturbe pas globalement la répartition du nuage de points formé par les couples rendement/risque, même si la séparation entre deux points voisins est plus marquée. Par exemple, l'allocation 3 reste celle qui offre le plus de rendement avec le minimum de risque. La composition des actifs pour cette allocation se décline comme suit :

<i>FI</i>	75%
<i>FRN</i>	5%
<i>OII</i>	5%
<i>Equity</i>	5%
<i>Estate</i>	5%
<i>OPCVM</i>	5%
<i>Cash</i>	0%

TABLEAU 6.6 – Composition de l'allocation la plus optimale au sens rendement/risque.

L'allocation 3 pour laquelle le rendement est maximal et le risque associé le plus faible est composé à plus de 85% d'obligations. Le reste est partagé entre les actifs risqués pour générer un certain niveau de rendement supplémentaire.

Cette observation permet de valider la méthode d'approximation adoptée, qui reste cohérente à la réalité du portefeuille actif/passif. En effet, l'enjeu principal dans la calibration du proxy du SCR a été de dégager un algorithme aussi précis que possible avec le peu de données à disposition. La stabilité de la répartition dans l'espace du nuage de points après la prise en compte du coût de portage du SCR témoigne de la stabilité des charges en capital prédites par notre méthode d'approximation. Les modèles GLM gamma arrivent donc à appréhender le lien entre les charges en capital au titre des risques de marché et l'allocation du portefeuille, malgré le peu de données pour l'apprentissage.

Bien que la prise en compte du coût de portage du SCR ne perturbe pas la répartition du nuage de points dans l'espace, elle change néanmoins la décision finale de l'assureur. Elle permet à l'assureur de disposer des niveaux "réels" des indicateurs de rendement et de risque, ce qui peut contribuer à modifier considérablement le choix de l'allocation cible du portefeuille. En effet, tous les points supérieurs (en orange) dans le nuage de points sont des points optimaux, dans le sens où ce sont les allocations qui permettent de maximiser le rendement pour chaque niveau de risque.

L'assureur doit alors se poser la question du choix de l'allocation finale parmi ces portefeuilles efficients. Ce dernier choix revient à sa discrétion en ligne avec les stratégies globales de la compagnie et du niveau de SCR qu'il est prêt à immobiliser.

De plus, ce choix devra prendre en compte le rendement de l'actif ou de la stratégie d'investissement. Nous rappelons que le taux minimum garanti moyen pondéré par les provisions mathématiques est de 2.5% pour l'épargne et de 0.73% pour la retraite. Alors, sans prendre en compte les prestations discrétionnaires comme la participation aux bénéfices, la stratégie d'investissement de l'assureur devra générer un certain rendement (net des frais et taxes) moyen (sur la période de projection égale à 10 ans pour cette étude) pour supporter les engagements de TMG. Si les produits sont considérés séparément, le rendement de l'actif doit être au moins égal à 2.5% pour l'épargne et au moins égal à 0.73% pour la retraite.

Si l'assureur souhaite verser également de la participation aux bénéfices, il cherchera à obtenir un rendement moyen de l'actif supérieur aux TMG moyens associés à chaque produit. Cela se fera en accord avec le niveau moyen de prestations discrétionnaires qu'il est prêt à accorder à ses assurés. Il est donc important de connaître les performances de l'actif dans le choix de l'allocation optimale. Nous présentons à cet effet la répartition des couples rendement/risque (avec prise en compte du SCR) déclinés suivant le rendement de l'actif associé à la figure 6.7.

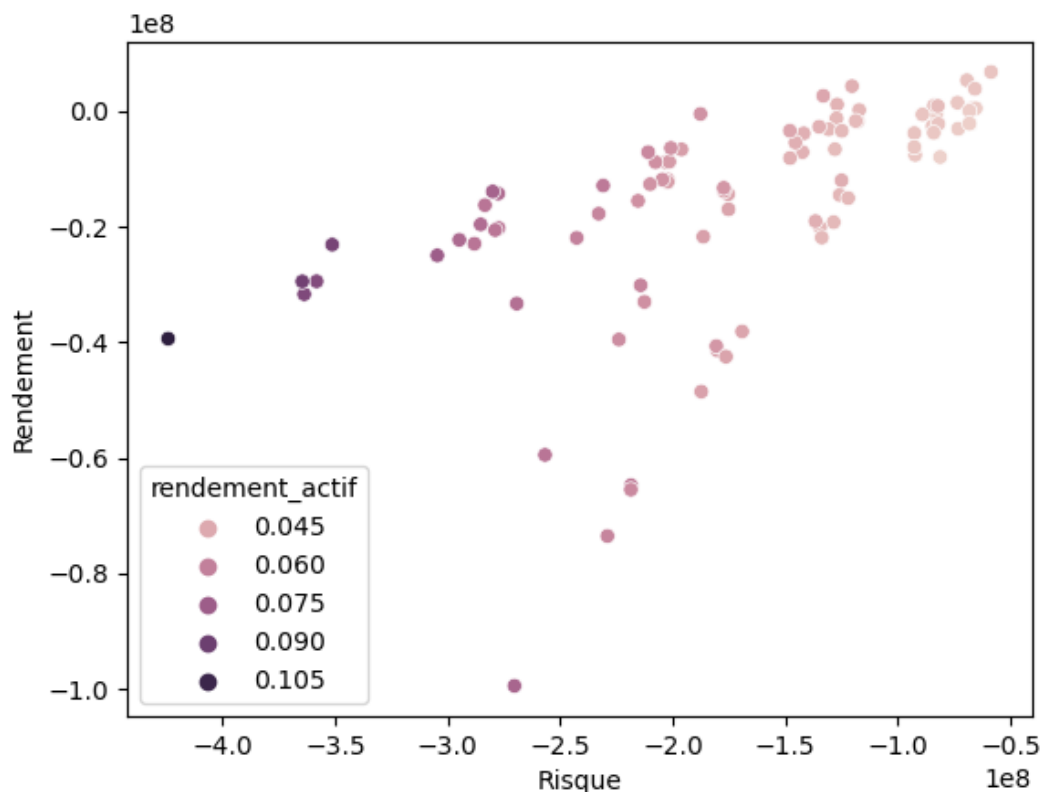


FIGURE 6.7 – Couples rendement/risque déclinés suivant le rendement net de l'actif.

L'analyse de la figure 6.7 indique logiquement que les allocations qui permettent d'obtenir les plus grands rendements de l'actif sont celles qui ont un critère de risque très faible (donc très risquées). Nous faisons un gros plan sur les allocations du quadrant IV que nous

présentons à la figure 6.8.

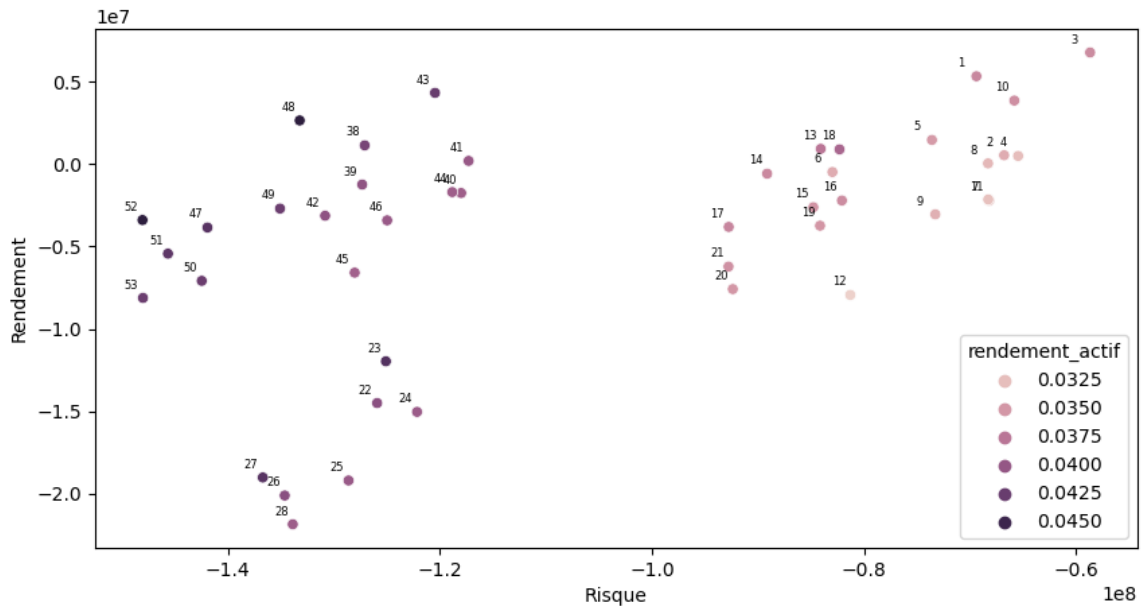


FIGURE 6.8 – Couples rendement/risque déclinés suivant le rendement net de l’actif pour le quadrant IV.

L’allocation 3 semblait être l’allocation optimale car elle permettait d’obtenir la plus grande valeur à la fois pour le critère de rendement et pour le critère de risque considérés. Cependant, pour cette allocation, le rendement moyen de l’actif est de 3.5%. Cette allocation permet d’assurer les niveaux minimum d’engagements de l’assureur à savoir le TMG. Mais elle peut ne pas offrir beaucoup de possibilités pour verser des prestations discrétionnaires aux assurés, qui pourraient racheter massivement leurs épargnes en guise de mécontentement.

L’assureur devra peut-être s’orienter vers des allocations jugées plus risquées mais qui lui permettraient d’assurer ses engagements contractuels, et de rémunérer en plus, l’investissement des assurés par la participation aux bénéfices.

Cette situation met en lumière le cadre spécifique de l’assurance où le choix de l’allocation optimale n’est pas uniquement le résultat d’un problème d’optimisation. Il prend en compte de nombreux paramètres tous en lien avec les stratégies financières de la compagnie, de l’appétence au risque et la capacité à supporter un coût d’immobilisation plus ou moins important de la charge en capital.

6.4 CONCLUSION

Ce chapitre a présenté la mise en œuvre de notre étude. La considération des réalités de l'assurance et des contraintes réglementaires a permis de réduire dans un premier temps l'ensemble admissible sur lequel la recherche de l'allocation optimale a été effectuée. La distribution de la richesse finale a ensuite été produite pour chacune des allocations, permettant de déterminer les critères de rendement et de risque, définis respectivement comme la moyenne empirique et la $Var_{98\%}$ de la richesse finale.

Une première appréciation des couples rendement/risque a permis d'observer que les portefeuilles optimaux ont tendance à être composés majoritairement d'obligations. Les options et garanties offertes aux assurés ne favorisent pas toujours l'investissement dans des actifs risqués contrairement à ce qu'on pouvait attendre. Les résultats obtenus et les analyses que nous en tirons sont étroitement liés aux choix des critères de rendement et de risque faits pour cette étude. Prendre comme mesure de risque un quantile de la distribution de la richesse finale, plutôt que la variance par exemple, contribue à inciter l'assureur à investir dans des actifs moins risqués.

Ensuite, il a été possible de prendre en compte dans cette étude la charge en capital qui pénalise davantage la richesse finale de l'assureur. Pour cela, les proxies du SCR calibrés ont permis de déterminer les charges en capital pour l'ensemble admissible d'allocations cibles et le coût de portage associé. La prise en compte du coût de portage a certes changé les niveaux des rendements et des risques des différentes allocations, mais la répartition du nuage de points est restée cohérente. Les modèles de régression calibrés se sont révélés efficaces malgré le peu de données à disposition.

L'étude a permis de définir alors pour chaque allocation les niveaux de rendement, de risque et de charge en capital associés. Le choix final de l'allocation finale revient à l'assureur. Il doit la définir selon les stratégies de la compagnie, son appétence au risque, et sa capacité à supporter le coût de portage ou d'immobilisation du SCR.

Conclusion générale

L'assurance-vie a un rôle important d'investissement de l'épargne des particuliers dans l'économie. Afin de ne pas mettre en péril les investissements des épargnants, l'activité de l'assurance-vie est très réglementée. L'actuaire se doit d'avoir une parfaite maîtrise de son activité. Cela revient à bien appréhender ses engagements au passif afin de définir les meilleures stratégies financières à l'actif.

Comme soulevé par notre problématique, l'une des stratégies importantes que doit mettre en oeuvre l'actuaire est sa stratégie d'allocation d'actifs. Tout au long de ce mémoire, nous avons défini les bases de mise en place de cette stratégie d'allocation d'actifs. Nous avons également mis en lumière les contraintes opérationnelles auxquelles sont confrontés les assureurs, limitant les tentatives d'études complètes d'allocation d'actif à proprement parler. Ces contraintes sont celles de ressources limitées et de puissance de calcul faible pour produire le SCR.

Ce projet s'est donné comme objectif de construire un proxy robuste du SCR en fonction de l'allocation d'actifs pour s'affranchir des limites citées. Pour ce faire, nous nous sommes concentrés uniquement sur le module de risque de marché. Cette hypothèse non réaliste est toujours la conséquence des difficultés opérationnelles pour produire la charge en capital S2. Cependant, il n'est pas totalement absurde de supposer que les modules de risque techniques sont faiblement sensibles aux variations de l'allocation d'actifs. La méthodologie d'approximation du SCR pour ce mémoire a consisté à approximer les charges en capital des différents sous-modules de risque de marché, et ce, en utilisant un échantillon d'apprentissage de petite taille.

Compte tenu de la nature de la problématique, nous avons opté pour des modèles simples pour éviter le risque de sur-apprentissage. Les modèles de régression alors testés sont la régression linéaire, le modèle linéaire généralisé gamma, et les arbres de décision. Ces trois modèles ont été calibrés sur un jeu de données qui a été produit de sorte à offrir une grande capacité d'apprentissage aux algorithmes. Des trois modèles, c'est le modèle GLM gamma que nous avons retenu pour approximer les charges en capital des différents sous-modules de risque de marché. Ce choix a été effectué en analysant conjointement les indicateurs de performance des algorithmes et la cohérence des coefficients estimés.

La détermination effective de l'allocation optimale a consisté à déterminer pour toutes les combinaisons possibles de portefeuille les métriques de rendement et de risque. Comme

le portefeuille d'actifs est composé de huit classes d'actifs, il aurait fallu déterminer ces indicateurs pour des milliers de portefeuilles. Cependant, en considérant les contraintes réglementaires liées à l'activité des assurances, il a été possible de réduire considérablement l'ensemble admissible d'allocations d'actifs à 92. Une projection de bilan en monde réel a permis de déterminer pour chacune des allocations admissibles, la distribution de la richesse finale définie pour cette étude. Il s'agit de la valeur actuelle des profits futurs et d'un critère de rentabilité du portefeuille actif/passif. Le critère de rendement a été défini comme la moyenne empirique de la richesse finale. Le critère de risque est défini comme le quantile de niveau 98% de la distribution finale.

L'analyse des couples rendement/risque obtenus a d'abord permis d'identifier que les allocations qui offrent les meilleurs rendements avec un critère de risque grand (donc les moins risquées) sont composées majoritairement d'obligations. Les résultats ont mis en exergue l'incitation faite aux compagnies d'assurance pour investir dans des obligations, plutôt que dans des actifs risqués. Les interactions actif/passif ne favorisent pas toujours l'investissement massif dans les actifs risqués, en quête de rendement. Cela montre une fois de plus comment l'activité de l'assurance-vie est complexe, et comment l'actuaire trouve sa place pour identifier, gérer et couvrir le risque.

Ensuite, au moyen de la méthode d'approximation mise en place, il a été possible de prendre en compte la charge en capital dans l'analyse des couples rendement/risque. Cela a consisté concrètement à pénaliser la distribution de la richesse finale obtenue pour chaque allocation du coût d'immobilisation de la charge en capital prédite. La prise en compte du SCR a, comme attendu, modifié les niveaux des critères de rendement et de risque. Cependant, il a été observé que la répartition des couples rendement/risque après prise en compte du coût de portage du SCR, reste stable. Ce résultat a contribué à valider la pertinence de la méthode d'approximation de SCR mise en place pour cette étude. Le choix final de l'allocation optimale reviendra à l'assureur et dépendra de son appétence au risque, et du niveau de charge en capital qu'il sera disposé à supporter. Ce choix devra également prendre en compte le rendement net de l'actif, lui offrant la possibilité de suivre sa politique pour verser les prestations discrétionnaires .

Notre étude offre différentes perspectives aux compagnies d'assurance pour mener des études d'allocation stratégique d'actifs en prenant en compte la charge en capital SCR. La méthodologie d'approximation mise en place pour cette étude s'est révélée efficace au vu des résultats. Nous sommes cependant conscients qu'en approximant uniquement la charge en capital au titre du risque de marché, les résultats de prédiction du SCR se retrouvent quelque peu biaisés. Il aurait donc fallu faire la même étude pour les autres modules de risque. Une extension de ce mémoire pourra consister en la mise en place d'algorithmes pour approximer également les charges en capital des autres modules de risque.

Bibliographie

- ACP Banque de France (2011), *Analyses et synthèses : Solvabilité 2 - Principaux enseignements de la cinquième étude quantitative d'impact (QIS5)*. Récupéré sur : https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/201103-acp-solvabilite-2-enseignements-de-qis5_0.pdf
- ACPR (2019), *Solvabilité II*. Récupéré sur : <https://acpr.banque-france.fr/europe-et-international/assurances/reglementation-europeenne/solvabilite-ii#:~:text=Entr%C3%A9%20en%20application%20le%201er,assurances%20dans%20l'Union%20europ%C3%A9enne>.
- ACPR (2020), *Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques*. Récupéré sur : https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20201204_article_gse_revue.pdf
- ACPR (2023), *Analyses et synthèses : La situation des assureurs soumis à Solvabilité II en France fin 2022*.
- ACPR (2023), *Analyses et synthèses : Le marché de l'assurance-vie en 2022*.
- Alexia JOLY (2022), *Taux bas, remontée des taux : quel avenir pour les fonds euros?*
- Arnak Dalalyan (2023), *Cours d'apprentissage statistique de 3ème année ENSAE Paris*.
- Assurancevie.com (2023), *Qu'est ce qu'un fonds en euros?*. Récupéré sur : <https://www.assurancevie.com/simulateurs-et-outils/fonds-en-euros/quest-ce-quun-fonds-euro.html>
- Bodie, Kane, Marcus, *Investments, Eleventh edition*.
- Bruno Dupray (2017), *Modèle de Markowitz : la frontière efficiente*. Récupéré sur : <https://www.centralcharts.com/fr/gm/1-apprendre/3-bourse/5-gestion-portefeuille/211-theorie-du-portefeuille-selon-markowitz>
- EIOPA (2014), *Technical Specification for the Preparatory Phase*.
- EIOPA (2021), *Calcul du capital de solvabilité requis*. Récupéré sur : https://www.eiopa.europa.eu/rulebook/solvency-ii/article-2324_en
- Fabrice BARBE (2019), *Préparation à la hausse des taux - Le cas d'une société d'assurance vie*
- Géraldine Vial (2016), *Les 3 piliers de Solvabilité 2 (Spécial Solvabilité 2)*. Récupéré sur : <https://www.argusdelassurance.com/acteurs/les-3-piliers-de-solvabilite-2-special-solva-2.109623>
- Guillaume Gillot (2021), *Générateur de scénarios économiques en monde réel : approche par Markov Switching*.

- Impots.gouv.fr (2023), *Épargne retraite*. Récupéré sur : <https://www.impots.gouv.fr/particulier/epargne-retraite>
- INSEE (2019), *Organisme de placement collectif en valeurs mobilières / OPCVM*. Récupéré sur : <https://www.insee.fr/fr/metadonnees/definition/c1589>
- Institut des Actuaires (2016), *Groupe de travail « Best Estimate Liabilities Vie » - Exemples de pratiques actuarielles applicables au marché français*. Récupéré sur : https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?news_link=2016110706_2016133822-npa4-1.pdf&fg=1
- Jonathan Rodriguez (2020), *Les grandes lignes de la réforme des assurances Solvabilité 2*. Récupéré sur : <https://www.lesfurets.com/assurance/actualites/reforme-assurances-solvabilite2>
- Journal du net(2019), *Assurance : définition, traduction*. Récupéré sur : <https://www.journaldunet.fr/business/dictionnaire-economique-et-financier/1198853-assurance-definition-traduction/>
- La finance pour tous (2022), *Qu'est-ce qu'une action?*. Récupéré sur : <https://www.lafinancepourtous.com/pratique/placements/actions-3/qu-est-ce-qu-une-action/>
- La finance pour tous (2023), *Qu'est-ce qu'une obligation?*. Récupéré sur : <https://www.lafinancepourtous.com/pratique/placements/obligations/qu-est-ce-qu-une-obligation/>
- Loïc Brach (2016), *Allocation d'actifs sous contrainte de SCR*.
- Maxence Pierrat (2017), *Allocation stratégique optimale d'actifs : une approche multi-objectifs et interactive*.
- Ooreka (2023), *Gestion actif-passif*. Récupéré sur : <https://comptabilite.ooreka.fr/astuce/voir/662859/gestion-actif-passif#:~:text=La%20gestion%20actif%20passif%20vise,liquidit%C3%A9%20de%20change%20etc.>
- P. Hagan & A. Lesniewski (2008), *Libor market model with SABR style stochastic volatility*. Récupéré sur : <https://lesniewski.us/papers/working/SABRLMM.pdf>
- Previssima (2023), *Qu'est-ce qu'une assurance-vie?*. Récupéré sur : <https://www.previssima.fr/question-pratique/quest-ce-qu-une-assurance-vie.html>
- Schroders (2022), *Financement des infrastructures*. Récupéré sur : <https://www.schroders.com/fr/ch/asset-management/strategic-capabilities/private-assets/infrastructure-finance/>
- Scikit Learn (2023), *Metrics and scoring : quantifying the quality of predictions*. Récupéré sur : https://scikit-learn.org/stable/modules/model_evaluation.html#
- The Geneva Association (2023), *The return of inflation : What it means for insurance?*
- Victoria Trivière (2021), *Modélisation du risque de crédit dans un modèle de projection Actif Passif*.

Table des matières

Sommaire	18
Liste des tableaux	20
Liste des graphiques	21
Introduction générale	22
1 Contexte et cadre de l'étude	24
1.1 Introduction	24
1.2 Gestion d'actifs et assurances	24
1.3 Environnement professionnel	26
1.4 Confidentialité des données	27
1.5 Conclusion	27
2 Solvabilité 2	28
2.1 Introduction	28
2.2 La norme Solvabilité 2	28
2.2.1 Pilier 1	29
2.2.2 Pilier 2	30
2.2.3 Pilier 3	31
2.3 Calcul du SCR par la formule standard	32
2.3.1 Risque de taux	34
2.3.2 Risque actions	35
2.3.3 Risque immobilier	36
2.3.4 Risque de spread	36
2.3.5 Risque de change	40
2.3.6 Risque de concentration	41
2.4 Conclusion	43
3 Assurance vie et modèle ALM	44
3.1 Introduction	44
3.2 Assurance vie et modèle ALM	44
3.3 Au passif	46
3.3.1 Produits d'épargne	46
3.3.2 Produits de retraite	50
3.3.3 Hypothèses techniques de projections	53

3.4	À l'actif	54
3.5	Stratégie de participation aux bénéficiaires - Crediting strategy	57
3.6	Stratégie d'investissement - Investment strategy	59
3.7	Scénarios économiques	60
	3.7.1 Scénarios risque neutre	61
	3.7.2 Scénarios monde réel	62
3.8	Conclusion	62
4	Allocation stratégique d'actifs	63
4.1	Introduction	63
4.2	Conséquences de Solvabilité 2 sur l'allocation d'actifs des assureurs	63
4.3	Théorie moderne du portefeuille	66
4.4	Allocation stratégique d'actif - vision ALM	75
4.5	Conclusion	79
5	Construction de proxy du SCR en fonction de l'allocation d'actif	80
5.1	Introduction	80
5.2	Méthodes d'approximation des SCR de marché	81
5.3	Description théorique des modèles d'apprentissage automatique utilisés	81
	5.3.1 Algorithme par apprentissage supervisé	82
	5.3.2 La régression linéaire	85
	5.3.3 Les modèles de régression linéaire généralisés	86
	5.3.4 Les arbres de décision	86
	5.3.5 Indicateurs de performance	88
5.4	Conclusion	90
6	Résultats et conclusions	91
6.1	Introduction	91
6.2	Calibration du proxy du SCR de marché	91
6.3	Détermination de l'allocation optimale	100
6.4	Conclusion	112
	Conclusion générale	113