

Mémoire présenté devant le CNAM pour l'obtention du Master
Droit Economie Gestion, mention Actuariat et l'admission à l'Institut des Actuares
le 22 novembre 2024

Par : Jean-Pierre CHAVAILLARD

Titre: Quelle allocation d'actifs pour un régime de retraite supplémentaire géré en extinction ?

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Président du Jury :
M. Stéphane LOISEL

signatures

Entreprise :
Nom : GALEA

*Membres présents du jury de
l'Institut des Actuares :*

M. Jean BRUNET

*Nom : Norbert GAUTRON
Maud VANNIER MOREAU*

M. Olivier RENAUDIN

Signatures :

*Membres présents du
jury du Cnam :*

M. Nathanaël ABECERA

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :

Bibliothèque :

Signature du candidat

TABLE DES MATIERES

Remerciements	5
Résumé	6
Abstract	7
Note de synthèse	8
Executive summary	22
Préambule	35
Introduction	41
1 Les ORPS (Organismes de Retraite Professionnelle Supplémentaire)	44
1.1 Les ORPS en France et leur environnement (sources : Banque de France et GALEA)	44
1.1.1 L'étude de la banque de France	44
1.1.2 L'étude de GALEA.....	45
1.2 Les placements des ORPS en 2021 et 2022 (sources : Banque de France et GALEA) et leurs SFCR 2022 et 2023 (source : GALEA)	46
1.3 Présentation du cadre législatif des ORPS	49
2 L'IRPS objet de l'étude	51
2.1 Présentation de l'IRPS	51
2.2 Le bilan simplifié du canton de l'IRPS et ses engagements	52
2.2.1 Le Bilan du canton de l'IRPS	52
2.2.2 Les Engagements du canton de l'IRPS.....	52
2.3 La gestion extinctive de l'IRPS.....	53
3 Le Pilotage financier de l'IRPS	56
3.1 Le pilotage financier d'un IRPS, une obligation ?	56
3.2 La mesure de la solvabilité d'un IRPS et les stress tests réglementaires.....	57
3.2.1 L'exigence minimale de marge de solvabilité	57
3.2.1 Les stress tests réglementaires	58
3.3 Comment modéliser le pilotage financier d'un IRPS ?.....	60
3.3.1 L'identification des classes d'actifs retenus et des risques associés	60
3.3.3 Les méthodes de valorisation des actifs et de mesure des rendements totaux.....	61
4 Modélisation du portefeuille, des instruments financiers et des flux totaux futurs	63
4.1 Modélisations des instruments financiers et de leurs risques	63
4.1.1 La poche actions et sa modélisation	63
4.1.1.1 L'approche historique	63
4.1.1.2 Les approches théoriques en loi Log-normale et avec le modèle de Hardy	64
4.1.2 Les obligations et leur modélisation.....	68
4.1.2.1 L'approche historique	69
4.1.2.1 L'approche des taux TEC 7 en taux à terme (forward)	69
4.1.2.3 La modélisation du taux TEC 7	70
4.1.2.4 Comparaison des modélisation du taux TEC 7	71
4.1.3 La modélisation de l'inflation	72

4.1.3.1 : L'Approche du taux d'inflation française YoY par sa chronique historique.....	72
4.1.3.2 : Approche du taux d'inflation française YoY comme une variable aléatoire.....	72
4.1.3.3 : Approche du taux d'inflation avec le modèle de Vasicek (source EIOPA)	73
4.1.3.4 : Quelques remarques	74
4.1.4 Les corrélations	74
4.1.5 Les mesures du taux réel et des rendements réels	78
4.2 Modélisations des règles de gestion du portefeuille financier et des flux futurs.....	79
4.2.1 Gestion de la poche action par son poids dans le portefeuille total	79
4.2.2 Modélisation de la gestion de la poche obligataire.....	80
4.2.3 Représentation des flux futurs et de leur revalorisations.....	80
5 Modélisation de la gestion ALM du canton et mesure de sa solvabilité	82
5.1 Modélisation des flux entrant, des flux sortant et des rebalancements	82
5.2 Les indicateurs de risques mesurant l'efficacité du pilotage	83
6 Simulations statique et historique	85
6.1 Adossement statique par des obligations à taux fixe (sans poche actions).....	85
6.2 Adossement statique uniquement par des obligations indexées sur l'inflation (sans poche actions).....	86
6.3 Simulations historiques du canton en comptabilité de caisse	87
6.3.1 Simulations historiques avec les risques financiers (risques actions et de taux d'intérêt) et le risque de revalorisation (risque inflation) : le cas de base	88
6.3.1.1 Description.....	88
6.3.1.2 Résultats avec les revalorisations indexées sur l'inflation	89
6.3.2 Simulations historiques de l'actif et du passif avec les risques financiers, le risque inflation et le risque de longévité	93
6.4. Discussion sur les sévérités respectives des quatre facteurs de risque	94
6.4.1 Premiers constats fondés sur les simulations historiques	94
6.4.2 Sensibilités aux facteurs de risque	96
7 Simulations par la méthode de Monte Carlo	99
7.1 Présentation de la méthode de Monte Carlo.....	99
7.2 Simulations de Monte Carlo avec revalorisations indexées sur le taux d'inflation et sans corrélations...	100
7.3 Comparaisons entre les simulations par Monte Carlo et les simulations historiques.....	105
7.4 Simulations de Monte Carlo avec revalorisation sur le maximum entre l'inflation et une fraction de la performance financière lissée	105
7.5 Sensibilités aux facteurs de risque en utilisant les simulations en Monte Carlo	108
7.5.1 Sensibilité au risque action	109
7.5.2 Sensibilité au risque de taux d'intérêt.....	110
7.5.3 Sensibilité au risque de taux d'inflation.....	111
7.5.4 Remarques sur les sensibilités au différents facteurs de risque.....	112
7.5.5 Sensibilité à l'horizon d'extinction (2097 et 2077) dans les simulations par Monte Carlo avec revalorisation sur l'inflation :	114
7.5.6 Sensibilité au pourcentage de la poche actions par simulations par Monte Carlo avec revalorisation sur l'inflation :	116

7.5.7 Sensibilité aux montant du portefeuille initial dans les simulations par Monte Carlo avec revalorisation sur l'inflation seule.....	117
7.6 Remarques et conclusions sur les simulations par Monte Carlo	118
8. Simulations avec le modèle de Hardy	120
8.1 Présentation de l'implémentation du risque action avec le modèle de Hardy.....	120
8.2 Résultats des simulations par Monte Carlo avec le modèle de Hardy et comparaison avec le modèle log-normal	124
9 Analyse des résultats des simulations en fonction du choix de pilotage de la poche actions	126
9.1 Sévérités relatives des quatre facteurs de risque et leurs sensibilités au type de simulation.....	126
9.2 Comment choisir le type de pilotage de la poche action : quelle dose de risque acceptable ?	128
9.3 L'émergence de nouveaux risques : comment les intégrer dans la gestion ?.....	130
CONCLUSION	131
Table des figures	132
Table des Tableaux	133
Bibliographie	135
Rapports publics :	136
Sites internet :	136
Table des acronymes	137
ANNEXE 1 : bibliographie	138
A.1 Deux articles européens traitant de la phase de décumulation.....	138
A.1.1 L'article de N. Gautron, F. Planchet et P. Therond	138
A.1.2 L'article de P. Battocchio, F. Menonchin et O. Scaillet.....	139
A.2 Livres, mémoires et article traitant de l'allocation d'actifs	140
A.2.1 L'ouvrage « Pilotage technique d'un régime de rentes viagères » de F. Planchet et P. Thérond.....	140
A.2.2 L'ouvrage « Advances in retirement investing » de L. Martellini et V. Milhau.....	143
A.2.3 Trois mémoires présentés pour l'admission à L'Institut des Actuaire et deux articles américains.....	144
ANNEXE 2 : La mesure de solvabilité d'un FRPS : le scenario central et les chocs appliqués (textes et commentaires)	148
ANNEXE 3 : Analyse de la mortalité du canton sur la décennie écoulée	153

REMERCIEMENTS

Ce mémoire est l'aboutissement de deux années d'enseignement réellement enrichissantes au CNAM, dont le corps professoral qui allie pédagogie et professionnalisme, sait être aussi à l'écoute de leurs élèves.

Je remercie tout d'abord le Professeur Stéphane Loisel, titulaire de la Chaire Actuariat et Science du Risque du CNAM, qui a accepté de diriger ce mémoire et qui m'a apporté conseils et suggestions.

Je remercie Maud Vannier Moreau, la Directrice Générale de Galéa et Norbert Gautron son Président d'avoir accepté d'être mes tuteurs professionnels. Depuis plusieurs années ils m'ont fait connaître et apprécier les arcanes de l'actuariat d'une caisse de retraite supplémentaire devenue récemment un fonds de pension à la française étant le seul IRPS agréé. Avec leurs collaborateurs ils m'ont permis d'affermir des connaissances plutôt empiriques et de les ordonner pour remplir la fonction-clé Actuariat pendant une huitaine d'années avant ce cursus au CNAM.

Je tiens aussi à remercier ici mes amis et collègues de l'Institution : son Président Pierre-Alain Rouy dont les connaissances dans les domaines de la retraite et de la prévoyance m'impressionnent toujours, Michel Texier qui m'a beaucoup appris dans ces domaines subtils et Vincent Gontier dont j'apprécie les réflexions tirées de sa longue expérience de la gestion d'actifs. Je remercie enfin Florent Vicaine, le Directeur Général Délégué de l'Institution, qui veille à la bonne marche de celle-ci et sur sa gestion paritaire.

Je n'oublie pas ma famille, mon épouse en particulier, dont la patience a été mise à rude épreuve pendant ces études tardives et pour laquelle les sujets d'actuariat n'ont désormais plus aucun secret...Et aussi mes -grands-enfants qui, eux aussi, ont écouté avec patience mes causeries sur ces sujets. Je pense à eux car ils se doutent bien que leur retraite sera à la fois tardive et surtout qu'elle ne sera pas à la hauteur (actuarielle) de ce qu'ils auront cotisé. Eux et ceux de leur génération devront songer à ouvrir et gérer habilement un PER en prévision de cette lointaine échéance : certains résultats de ce mémoire et quelques constats leurs seront peut-être utiles.

RESUME

Mots-clés : régime de retraite, FRPS, IRPS, Fonds de pension, IORP 2, allocation d'actifs, simulations historiques, simulations par Monte Carlo, CAC 40, pilotage d'une gestion en extinction, solvabilité, régime à prestations définies, modèle de Hardy

Ce mémoire porte sur l'allocation d'actifs d'un IRPS en phase d'extinction dont l'actif est constitué de 30 % d'actions et de 70 % d'obligations. Faut-il conserver cette exposition risquée à 30% jusqu'à la date d'extinction (cas Stable) ? la réduire (cas Prudent) ? ou bien l'augmenter (cas Dynamique) ? L'ALM de l'IRPS a été modélisé en comptabilité de caisse et l'évolution du portefeuille simulé avec les données historiques puis en Monte Carlo. Les facteurs de risque : action, TEC7 et inflation ont été modélisés par leurs séries historiques (de 1989 à 2023) puis comme des variables aléatoires normales ou log-normale et pour les actions selon le modèle de Hardy à deux états. Le risque de mortalité a également été simulé. Les indicateurs de risque sont le montant final moyen du portefeuille, son écart-type, la probabilité de ruine et le déficit en cas de ruine. Avec les simulations historiques aucune occurrence de ruine n'a été observée, alors qu'en Monte Carlo on obtient des probabilités de ruine faibles (toujours inférieures à 2,50%) avec des rentes revalorisées sur l'inflation. Elles augmentent légèrement à mesure que l'exposition moyenne aux actions croit, confirmant l'intuition. En stressant les couples rendement/risque des trois facteurs de risque on observe des probabilités excédant 5% et on remarque que la hiérarchie de ces couples influe notablement sur la solvabilité. Certaines configurations testées sont cependant extrêmement peu probables comme une inflation moyenne supérieure au rendement moyen total d'un indice actions sur long terme, confirmant le bien fondé d'exploiter le moteur de performance de la poche action dans une gestion sur la durée qui s'apparente à celle d'un CPPI. Plusieurs variantes ont été explorées : revalorisation sur une fraction de la performance financière et aussi influence de la date d'observation du montant final du portefeuille.

Ces conclusions dépendent de la solvabilité actuelle de l'IRPS, de la chronique des rentes et de la hiérarchie entre les moyennes du rendement des actions, du taux obligataire et de l'inflation. Une exposition à 30 % dans un indice actions diversifié et à 70 % dans des obligations d'Etat de maturité 7 ans détenues jusqu'à maturité permet à l'IRPS d'assurer le service des rentes jusqu'à son extinction. Réduire progressivement cette exposition aux actions n'apporte pas un surcroit de sécurité notable, l'augmenter n'est pas approprié puisque la solvabilité de l'IRPS est déjà satisfaisante. Le ratio de 30% constant semble donc le meilleur compromis.

ABSTRACT

Keywords : pension plan, FRPS, IRPS, pension fund, IORP 2, asset allocation, historical simulations, Monte Carlo simulations, CAC 40, extinction management, solvency, defined benefit plan, Hardy model

This essay focuses on the asset allocation of an IRPS in the extinction phase, whose assets consist of 30% equities and 70% bonds: should this risky exposure be maintained at 30% until the extinction date (Stable case)? should it be reduced (Prudent case)? or increased (Dynamic case)? The IRPS's ALM was modeled on a cash basis, and the evolution of the portfolio simulated with historical data, then in Monte Carlo. Several variants were explored: revaluation based on a fraction of financial performance, and the influence of the observation date on the final amount of the portfolio. Risk factors: equity, TEC7 and inflation were modeled using their historical series (from 1989 to 2023), then as normal or lognormal random variables, and for equities using the two-state Hardy model. Mortality risk was also simulated. The risk indicators are the average final portfolio amount, its standard deviation, the probability of ruin and the deficit in the event of ruin. With historical simulations, no ruin was observed, whereas with Monte Carlo simulations, low ruin probabilities (always below 2.50%) were obtained with inflation-adjusted pensions. These probabilities increase slightly as the average equity exposure grows, confirming the intuition. By stressing the risk/return pairs of the three risk factors, we observe probabilities in excess of 5%, and note that the hierarchy of these pairs has a strong influence on solvency. Some of the configurations tested, however, are extremely unlikely, such as average inflation exceeding the average total return of an equity index over the long term, confirming the validity of exploiting the performance engine of the equity pocket in a long-term management approach similar to that of a CPPI.

These conclusions depend on the IRPS's current solvency and the hierarchy between average equity returns, bond yields and inflation. With 30% exposure to a diversified equity index and 70% exposure to 7-year government bonds held to maturity, the IRPS will be able to pay pensions until it is extinguished. Gradually reducing this equity exposure does not provide any appreciable additional security, and increasing it is not appropriate since IRPS's solvency is already satisfactory. A 30% stable ratio seems to be the best compromise indeed.

NOTE DE SYNTHÈSE

Ce mémoire traite de l'allocation d'actifs d'un canton d'une IRPS gérant un régime de retraite supplémentaire mis en place en 1967. A l'origine c'était la caisse de retraite supplémentaire d'une Institution Financière Spécialisée, puis elle a adopté successivement différents statuts avant de se transformer en 2019 en IRPS, la variante des ORPS relevant du Code de la Sécurité Sociale. Le canton est en extinction car le régime est fermé depuis 1996 et sa disparition complète est estimée en 2097 (en allant jusqu'à la date de fermeture de la table).

On présente d'abord les Organismes de Retraite Professionnels supplémentaires (ORPS) français qui se répartissaient en vingt et un FRPS, un IRPS et un MRPS en 2023. Ces entités gèrent au total 174 Md€ de placements. Les ORPS ont été créés par la loi Pacte de 2019, qui a transposé le texte européen sur les institutions de retraite professionnelles gérant des engagements longs (directives « Institution for Occupational Retirement Provision 1 » de 2003 et IORP 2 de 2016). L'ordonnance de 2019 indique que le cadre des ORPS est : « ...propice à l'investissement de long terme, en actions, ou sous forme de financements en fonds propres, tout en étant favorable à un meilleur rendement pour l'épargnant ... », cette phrase souligne l'importance de l'investissement en actions dans les plans de retraite à horizon pluri-décennal et reconnue ici par les pouvoirs publics. En France les assurances-vie sont encore fortement investies dans des fonds euro eux-mêmes investis à hauteur de 70 % en obligations, la part des actions est proche de 15 % et les autres types d'actifs (immobilier, Private Equity, actifs réels et infrastructures) de 15% aussi. Les fonds euro représentent encore plus des deux tiers du total des fonds gérés même si la part des UC atteint 29 % fin 2023 et que celles-ci sont relativement plus investies en actions. Ces pourcentages sont pratiquement identiques dans les ORPS, la seule différence étant que les obligations ont des maturités moyennes plus longues que dans les portefeuilles d'assurance-vie. Les ORPS créés par le changement de statut de structures préexistantes n'ont pas modifié leur allocation d'actifs lors de ces créations et de leur passage de Solvabilité 2 à IORPS 2 : ils ont conservé une forte part d'obligations en portefeuille (et seulement augmenté leur maturité moyenne), la part en actions n'a pas augmenté lors de ces changements.

La situation du canton en phase d'extinction conduit à s'interroger sur l'évolution future du poids des actions dans le portefeuille. Depuis plus d'une trentaine d'années le canton est investi à hauteur de 30 % en actions de grandes et moyennes capitalisations françaises puis européennes et de 70 % en obligations Investment Grade dont la maturité moyenne est proche de 4 ans. Cette (relativement) forte exposition aux actions a permis au canton de consolider sa structure financière dans le passé et de traverser les crises financières sans avoir à infléchir ce choix. Le pilotage de la poche action en valeur de marché lui a permis de préserver les gains après les hausses des cours et d'investir dans les périodes de creux boursier (pour maintenir le ratio) à la manière d'un CPPI. La faible maturité de la poche obligataire est atypique puisque l'entité n'a jamais souhaité égaliser (ou même rapprocher) les durations de l'actif et du passif, cette dernière étant actuellement proche de quinze ans.

Cette stratégie d'allocation d'actifs était facile à tenir quand la structure relevait de Solvabilité 1, puisque l'investissement en actions n'était pas particulièrement pénalisé. Lorsque l'entité a été assujettie à Solvabilité 2, les contraintes pesant sur l'investissement en actions dans le calcul du SCR de marché ont pu être compensées par la faible durée des obligations (si celles-ci avaient été en phase avec celle du passif, il aurait fallu infléchir la stratégie soit en réduisant drastiquement la durée, soit plus probablement en réduisant la part investie en actions – plus facile à réaliser-, ce qui aurait été ex post « un mauvais choix »). Le passage sous Solvabilité 2 n'a pas obligé à modifier le mix 30%/70% heureusement. Cet exemple illustre le caractère inapproprié des règles de Solvabilité 2 à ce type d'entité, ce constat n'est pas original il a été formulé par de nombreux auteurs et se retrouve dans plusieurs mémoires de l'Institut des Actuaire.

Pour s'affranchir de la complexité de Solvabilité 2 et surtout de son inadaptation à s'appliquer à des entités gérant des engagements longs ou très longs, l'entité a décidé d'adopter la forme d'une IRPS dès que cela a été possible en 2019. Le passage sous IORP 2 a relaxé notablement les contraintes de Solvabilité 2 ; même si une partie des piliers 2 et 3 sont conservés, ils ne contraignent pas l'allocation d'actifs mais obligent à maintenir une certaine transparence et à examiner son évolution sur dix ans et aussi analyser sa résilience face aux risques.

Le canton gère un régime de retraite supplémentaire obligatoire d'une ancienne IFS devenue une banque à la suite de fusions/absorptions. Le régime est financé par les cotisations salariales et patronales des salariés et il est à prestations définies. Il est de type additionnel : la rente viagère est égale au produit du nombre d'années de travail dans l'entreprise, du dernier salaire et d'un pourcentage (modulé selon la situation familiale). La rente n'est pas conditionnée à la présence dans l'entreprise au moment de la liquidation des retraites des régimes généraux. L'effectif des pensionnés est de 1070 et leur âge moyen de 77,4 ans ; il y a 280 futurs allocataires d'âge moyen 62,6 ans (dont une trentaine est encore salariée de la banque et 250 radiés : tous bénéficieront d'une rente dans le futur). L'âge moyen pondéré est de 74,3 ans confirmant le caractère extinctif du canton et le plus jeune futur bénéficiaire est âgé de 53 ans. Le montant annuel des rentes versées avoisine 6 M€ en 2023 ; elles sont revalorisées annuellement par une combinaison des taux de la CNAVTS et de l'AGIRC/ARRCO.

Le total de bilan du canton s'élève à 160 M€ fin 2023. Son passif comptable se décompose en 15,5 M€ de fonds propres et 144,5 M€ de provisions techniques, qui se répartissent en 116,2 M€ de Fonds de Service des Rentes (FSR), 21,7 M€ de Fonds Collectif (FC) et 6,5 M€ de Provision pour participation aux Excédents (PPE). L'actif est investi à hauteur de 158,3 M€ dans un OPCVM dédié (160 M€ en valeur de marché) ; 1,6 M€ de trésorerie et de 0,2 M€ de créances diverses complètent l'actif.

L'Exigence Minimale de Solvabilité (EMS) du canton est de 5,5 M€ ; elle est couverte à hauteur de 281 % fin 2023.

Avant de relever de Solvabilité 2, puis de IORP 2, le canton était une Institution de Retraite Spécialisée (IRS) encadrée par un référentiel prudentiel ad hoc. Dans ce référentiel IRS, le calcul du FSR était identique à celui de IORP 2 actuel mais celui du FC était également calqué sur celui du FSR et n'était pas un solde comme dans IORP 2. Le calcul en vision IRS de la somme du FSR et de « l'équivalent FC » fournit une estimation réaliste et homogène des engagements totaux du canton en utilisant les tables TGH/TGF 2000-05, jusqu'à la date de fermeture et sans actualisation. Lorsque les dernières rentes auront été liquidées, seul subsistera le FSR et la vision IRS se confondra avec la vision IORP 2. Le montant actuel des engagements (hors frais) ainsi mesurés est de 148 M€ il sera de 1,7 M€ en 2060 et de 0,17 M€ en 2077 et quelques centaines d'euros en 2097 (montants en euros courants et non revalorisés).

Le cadre réglementaire des ORPS est également rappelé : des extraits du décret de 2017 précisant le niveau de la marge de solvabilité à hauteur de 4% des provisions mathématiques et les scénarios des stress tests obligatoires sont présentés et commentés.

L'analyse de la phase de décroissance du canton est ensuite menée : quelle est l'allocation d'actifs la plus adaptée à cette gestion extinctive ? Il existe plusieurs solutions : soit on adosse de manière statique les engagements avec un portefeuille d'OAT ou d'OAT i et €i, soit on conserve un portefeuille composé d'actions européennes et d'obligations Investment Grade dont la maturité moyenne est de 4 ans. Dans ce dernier cas se pose la question de la pondération future de la poche actions : faut-il la maintenir à 30% (cas Stable) ? Faut-il la diminuer graduellement par paliers jusqu'à 0% (cas Prudent) ? Faut-il l'augmenter graduellement par paliers jusqu'à 60 % (cas Dynamique) ? Le pas de variation retenu est de +/- 0,50 % par an ; et de -1% dans le cas SuperPrudent.

Le canton est exposé à quatre facteurs de risque : le risque action, le risque de taux obligataire, le risque de taux d'inflation (par les revalorisations) et le risque de mortalité. On a choisi de simuler l'évolution au cours du temps de l'actif du canton en comptabilité de caisse en intégrant l'ensemble des flux monétaires (rentes, frais et coupons) et les impacts monétaires ou de valorisation (pour la poche actions seule) de ces risques. Les simulations sont d'abord historiques, puis effectuées en Monte Carlo. On modélise les trois premiers risques comme des variables de marché dont les paramètres moyenne/écart-type sont extraits des séries historiques. On utilise l'indice CAC 40 TR, le taux TEC 7 et le taux d'inflation française (YoY). Les paramètres historiques sont également utilisés dans les Monte Carlo et les corrélations entre les trois facteurs de risque sont recherchées. Le risque de mortalité (ici longévité) est traité dans un second temps en modifiant la chronique des rentes futures.

Le sujet du « Pilotage technique d'un régime de rentes viagères » a déjà été traité au début des années 2000 dans un article (N. Gautron et al., 2003) et un livre (Planchet et Thérond, 2007). Il a aussi été traité de manière plus

globale, sur le cycle complet d'épargne puis de consommation d'un plan de retraite individuel avec modélisation du risque de mortalité par une loi de Weibull, dans un article contemporain (Battocchio et al, 2003).

Planchet et Thérond ont modélisé la gestion ALM d'un régime de rentes viagères en extinction ainsi que le risque inflation et les sauts boursiers. Ils ont montré que la probabilité de ruine augmentait avec la fraction initiale investie en actions (laissée ensuite fluctuante) et que cette probabilité diminuait relativement lorsque les rentes étaient revalorisées. Battocchio et al. ont conclu que la fraction investie en actions doit croître avec le temps dans la phase de consommation (decumulation) après avoir auparavant décliné pendant la phase d'épargne. Autant la décroissance de la part risquée pendant la phase d'épargne est largement admise, et même obligatoire dans les plans d'épargne-retraite gérés (PERCO et PER), autant l'augmentation de la part risquée pendant la retraite semble assez peu prudente. Leurs conclusions s'appliquaient à un plan individuel avec un risque de mortalité non mutualisé et modélisé en loi de Weibull. Pour un organisme collectif la contrainte de la « personne prudente » s'applique, ainsi que la mutualisation du risque de mortalité, et un niveau de solvabilité suffisant doit être maintenu en permanence. Parmi la littérature récente traitant de la consommation d'un plan d'épargne-retraite (collectif ou individuel) on a aussi retenu et résumé les conclusions de plusieurs mémoires publiés par l'Institut des Actuaire, de deux articles américains et du livre « Advances in retirement investing » de L. Martellini et V. Milhau, 2020.

La démarche de Gautron et al. est reprise ici dans ses grandes lignes : utilisation de la chronique des rentes futures probables, simulation du portefeuille financier et de leur interaction ALM, calculs d'indicateurs de la solvabilité au cours du temps et en particulier à la date d'extinction probable du régime.

Le canton doit rester solvable jusqu'à son extinction, c'est-à-dire qu'il doit pouvoir verser les rentes jusqu'à cette date aux bénéficiaires et à leurs réversataires éventuels. La solvabilité équivaut ici à détenir un portefeuille d'actifs financiers toujours positif permettant de verser les rentes, avec leurs revalorisations futures et de supporter les frais. C'est ce mécanisme ALM de balance entre la fructification/fluctuation du portefeuille et les prélèvements planifiés et revalorisés que l'on va simuler avec les quatre stratégies de pilotage de la poche actions. Il s'agit d'une solvabilité mesurée en comptabilité de caisse et non par le respect du ratio prudentiel, même si les deux contraintes doivent être respectées en permanence.

En réalité, si le portefeuille devient nul, l'employeur sera appelé pour payer les rentes (et même avant pour assurer le niveau minimal de solvabilité requis). Cette éventualité lointaine et faiblement probable découle du règlement du régime et de sa nature paritaire régie par le Code de la Sécurité Sociale. Dans le modèle simple utilisé ici on considère que si le portefeuille est épuisé, le canton s'endette jusqu'à la date d'extinction/observation et que l'employeur sera appelé à ce moment pour combler le déficit final global. Cette convention permet d'obtenir un solde final qui est soit positif : le canton est solvable jusqu'à son terme, soit négatif : il devient insolvable et doit appeler l'employeur in fine ; dans les simulations il s'endette et accumule un déficit global croissant incluant les frais financiers capitalisés. La distribution des soldes finaux simulés à la date d'observation retenue est la première mesure de solvabilité (ou de risque). On calcule leur moyenne et leur écart-type empirique sur l'ensemble des simulations ; les éventuelles valeurs négatives fournissent la probabilité de ruine (nombre de trajectoires avec un solde final négatif/nombre total de simulations) et le déficit moyen en cas de ruine. On fixe deux seuils acceptables pour la probabilité de ruine : 0,50 % (« rigoureux ») et 2,50% (« réaliste »).

Deux classes d'actifs financiers sont retenues dans les modélisations : un portefeuille diversifié d'actions françaises assimilées à l'indice CAC 40 TR et des obligations d'Etat à 7 ans caractérisées par le taux TEC 7. La modélisation du rendement de l'indice CAC 40 TR est faite à partir des valeurs historiques depuis 1988. On modélise l'indice comme une action ne distribuant pas de dividende avec le modèle log-normal classique. Les deux paramètres du modèle (drift et volatilité) sont déduits de la série historique commençant en 1988. On retient aussi le modèle de Hardy à deux états comme modèle alternatif.

La modélisation du taux TEC 7 est soit historique soit sous la forme d'une variable aléatoire normale dont les paramètres sont ceux déduits de la série historique des valeurs. Le modèle de Vasicek a été envisagé car c'est le modèle de taux le plus simple mais il n'a pas été utilisé car il repose sur des paramètres qui le calent sur la courbe des taux de l'instant et sont volatils comme le taux de retour à la moyenne et sa vitesse. Les modèles de taux sont bien adaptés à des problématiques de pricing, ce qui n'est pas le cas ici, mais ils sont fortement dépendants des

conditions de marché de l'instant : or la courbe des taux a drastiquement changé entre 2022 et 2023. Cette dépendance à la courbe actuelle se retrouve dans les taux à terme qui sont des estimateurs possibles également : l'adossement statique avec des OAT à taux fixe dont la maturité est calée sur la chronique des rentes équivaut à cette représentation déterministe par les taux à terme (il en est de même avec l'adossement statique par des OAT indexées sur l'inflation).

Les deux autres risques subis par le canton sont le risque d'inflation (on suppose que les rentes sont revalorisées sur ce taux) et celui de mortalité (de longévité en fait). Le taux d'inflation peut être modélisé comme le taux obligataire : soit en série historique, soit en variable aléatoire normale (avec les paramètres de la série historique) soit encore par le modèle de Vasicek comme le propose l'EIOPA et qui ne sera pas retenu ici également.

La simulation ALM du canton se fait en comptabilité de caisse : on connaît la chronique des rentes probables non revalorisées et on simule la valeur du portefeuille financier ainsi que la revalorisation des rentes. La poche actions fluctue avec les rendements futurs du CAC 40 TR simulés ou historiques. La poche obligataire est gérée en noria : on constitue sept lignes d'obligations de maturité 7 ans détenues jusqu'à échéance. En début de simulation on constitue sept lignes égales de maturités allant d'un à sept ans ; à chaque remboursement de ligne on constitue une nouvelle ligne de maturité sept ans pour finalement ne détenir que des obligations de cette maturité. Ce mécanisme permet de maintenir suffisamment longtemps la maturité moyenne de la poche obligataire proche de 4 ans. Cette poche est valorisée comme la somme des montants nominaux des lignes obligataires. La valeur totale du portefeuille (en euros courants) est la somme mixte de la valeur de marché des actions et de la valeur faciale des obligations. Le rapport entre la valeur de marché de la poche action et du portefeuille total est le ratio de pilotage. Les frais sont assis sur les rentes (3%) et sur la valeur (absolue) totale du portefeuille (0,50%).

Le portefeuille est progressivement consommé par les rentes à payer, les frais à régler et a contrario il est alimenté par les coupons obligataires. Sa valeur est soumise aussi aux variations annuelles de la valeur de la poche action. Pour respecter le pilotage du ratio on rebalance chaque fin d'année les deux poches du portefeuille.

Les trois premiers risques : action, taux TEC 7 et inflation sont toujours modélisés selon la même méthode dans les Monte Carlo : variable aléatoire suivant une loi normale pour les deux taux et modélisation du rendement de l'indice en loi log-normale. Les rentes sont revalorisées sur l'inflation et probabilisées avec la mortalité déduite des tables TGH/TGF 2000-05.

A partir des séries historiques annuelles utilisées on cherche les corrélations entre les trois premiers risques (considérés comme « de marché »). Le rendement arithmétique du CAC 40 TR, et le taux TEC 7 ne présentent pas de corrélation significative (le coefficient vaut + 0,09). Le constat est voisin avec la relation entre le taux d'intérêt et le taux d'inflation : la corrélation est un peu plus élevée à 0,23 mais faible dans l'absolu. Ce constat va à l'encontre d'idées reçues sur la corrélation entre les taux d'intérêt et le taux d'inflation généralement fondées sur la notion d'un taux réel stable dans le temps.

Ces constats quantitatifs sur un historique assez profond nous amènent à considérer comme indépendants ces trois risques dans les Monte Carlo. On effectue aussi des simulations en faisant varier (en doublant ou divisant par deux) les deux valeurs des couples (moyenne/écart-type) en paire ou séparément pour apprécier les sensibilités à ces facteurs et pour explorer des hiérarchies différentes entre ces trois classes de risque.

La quatrième classe de risque : la longévité, est traitée comme dans IORP 2 : en simulant le choc sur les taux de mortalité instantanée de -10% et ici par un proxy en appliquant un facteur multiplicatif de 1,05 aux rentes.

Après avoir défini les modélisations de l'évolution du portefeuille et de ses facteurs de risque, on va rechercher la stratégie d'allocation offrant le meilleur compromis entre le rendement et le risque dans la phase d'extinction. Cette phase se traduit par la décroissance continue des provisions mathématiques jusqu'au décès probabilisé du dernier bénéficiaire ou réversataire et par la consommation concomitante et progressive du portefeuille. Il faut aussi choisir la date d'observation correspondant à l'extinction : 2097 est la date ultime avec un cumul résiduel de rentes de quelques centaines d'euros, 2077 est une date plus réaliste avec un cumul résiduel inférieur à deux cent mille euros (la fermeture remonte à 1996) et 2060 est une date plus proche avec un cumul résiduel inférieur à deux millions d'euros (chiffres en euros 2024). Les premières simulations (historiques et Monte Carlo) ont été faites

jusqu'en 2097 dans un souci de rigueur pour s'assurer que les derniers bénéficiaires ne soient pas lésés. On se placera aussi en 2077 pour éviter que les vingt dernières années amplifient par capitalisation le solde intermédiaire de 2077 (positif ou négatif) et biaise l'analyse. Les simulations en comptabilité de caisse portant sur des euros courants, il est nécessaire de transformer ces montants futurs estimés en leurs équivalents en euros de 2024. Les premiers résultats obtenus, exprimés en euro de 209,7 sont très élevés et difficiles à apprécier : seule la hiérarchie entre les montants et leurs signes sont directement exploitables. Il faut les diviser par dix pour obtenir de euros de 2024.

Avant même d'effectuer les premières simulations, on recherche d'abord un adossement statique avec des OAT dont les remboursements in fine sont calés sur les tombées annuelles de rentes (chargées mais non revalorisées). En vendant les poches actions et obligations actuelles (161,6 M€) on finance l'achat de cette couverture (115 M€), un montant inférieur à l'engagement total mesuré en vision IRS de 148 M€. L'excédent disponible de 47,4 M€ permet d'assurer une revalorisation des rentes au taux moyen constant de 2,60 % (supérieur au point-mort inflation à 10 ans de juin 2024 valant 2,32%).

Le second adossement statique est effectué avec des OAT i et ϵ_i qui permettent de couvrir la chronique des rentes chargées et revalorisées sur l'inflation et dont le prix de revient s'élève à 160 M€ soit un montant pratiquement égal à la richesse du canton de fin 2023 (161,6 M€). Il est possible de mettre en place une couverture statique de la totalité des rentes futures avec des OAT indexées sur l'inflation garantissant les revalorisations indexées sur ses valeurs futures.

Ces deux adossements statiques réalisables confirment la solidité actuelle du canton, il est « équilibré », hors nouvelles charges imprévues ou dérapage de la mortalité. Il est possible de le gérer en run-off de cette manière. Ils posent aussi la question du maintien de la stratégie de placement actuel, ou de son évolution, avec les risques afférents.

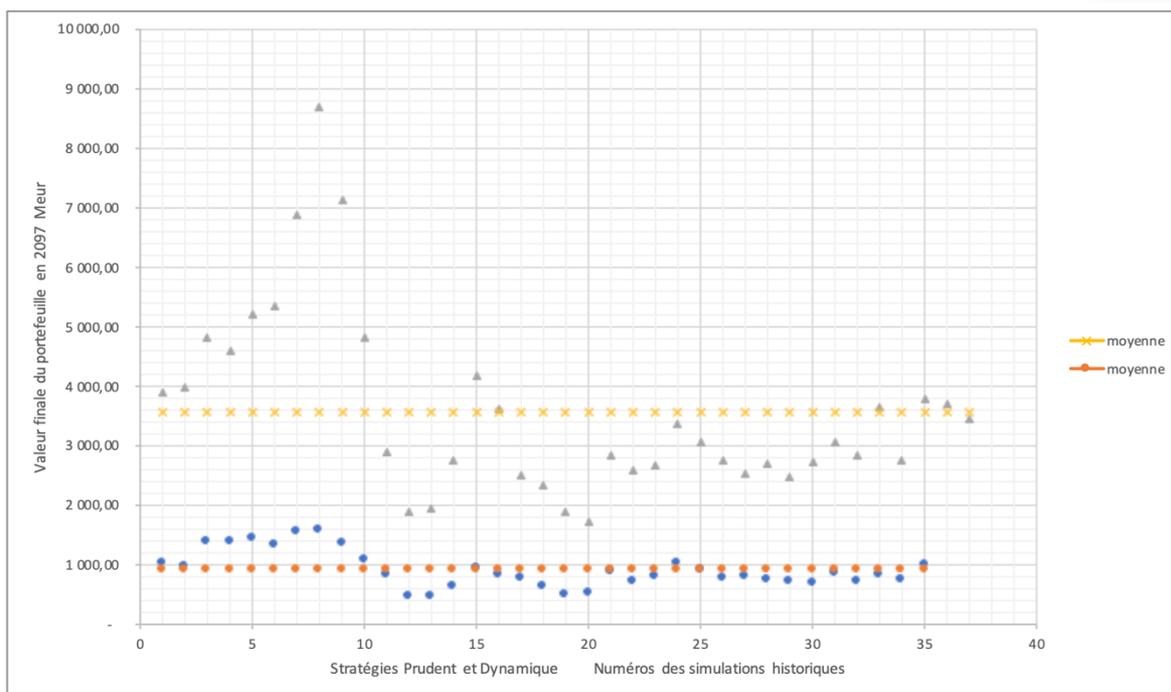
Après ces deux tests on effectue une analyse dynamique avec des simulations historiques. On utilise des grandeurs réellement observées (elles sont plausibles), leurs évolutions historiques (sont-elles cycliques ou non ?) et leur synchronisation (sont-elles corrélées ou non ?). On forme les séries commençant chacune par une année prise parmi les trente-cinq ans de l'historique et celles qui la suivent jusqu'à 2023 puis on concatène à la suite la même série historique, voire une seconde, pour couvrir toute la durée étudiée (la chronologie n'est rompue qu'aux points de jonction où on passe de 2023 à 1988).

Les résultats de ces simulations semblent irréalistes à première lecture puisque les soldes finaux moyens en euros de 2097 vont de 0,9 Md€ à 3,7 Md€ suivant les stratégies de pilotage.

Simulations Histo	Moyenne	Ecart-type	Maximum	Minimum
Cas Prudent	941 M€	306 M€	1583 M€	468 M€
Cas Stable	1962 M€	711 M€	3926 M€	1014 M€
Cas Dynamique	3666 M€	1577 M€	8707 M€	1736 M€

Ces chiffres deviennent plus un peu plus crédibles quand ils sont transformés en euros de 2024 avec un déflateur de 0,10 (obtenu avec un taux d'actualisation de 3,20 %). Malgré cette actualisation, les montants exprimés en euro 2024 restent encore élevés : ils sont comparables au montant du portefeuille actuel. Les soldes finaux des trois stratégies fournissent une première hiérarchie : la stratégie Dynamique, qui est la plus risquée en apparence, est aussi la plus efficiente, puisqu'elle ne conduit à aucune occurrence de ruine dans la trentaine de trajectoires historiques simulées (comme les deux autres stratégies moins risquées).

Le graphique suivant rassemble les valeurs finales (en 2097) du portefeuille dans les deux stratégies extrêmes (Prudent et Dynamique) obtenues avec les simulations historiques (et les deux moyennes). On remarque que ces valeurs dépendent fortement de la date de démarrage de la séquence des performances financières : séquence favorable commençant en 1996, ou séquences défavorables commençant en 2000, 2001 ou 2008. On retrouve les dates des années de boom ou de krach. La stratégie Dynamique est toujours supérieure à la stratégie Prudent car pour chaque simulation elle donne un solde final nettement supérieur et sa plus basse valeur est supérieure à la plus haute valeur de la stratégie Prudent.



L'influence de la mortalité a été recherchée avec les simulations historiques en choquant les taux instantanés de mortalité de - 10 % (choc de Solvabilité 1 applicable aux ORPS). On n'a pas recalculé la chronique des rentes avec la table modifiée mais appliqué un choc uniforme de 5 % à celle-ci car plusieurs études ont montré que l'impact du choc de 10% modifie la chronique des rentes de 3% environ (ce qui est peu significatif). Les impacts sur les soldes finaux moyens (et leurs écart-types) sont modestes : des baisses inférieures à 10 %.

A première vue, les simulations historiques ont plusieurs avantages : elles sont simples dans leur principe, faciles à comprendre, il n'y a aucune modélisation, juste des valeurs déjà observées, elles respectent les corrélations entre les variables et leurs chronologies. Mais même si la profondeur d'historique est suffisante, elles se chevauchent et ne permettent pas d'explorer une grande plage de configurations. Enfin elles dépendent directement de l'historique retenu avec le risque d'un changement de régime (on subira cette même contrainte avec les paramètres issus des séries historiques et utilisés dans le Monte Carlo).

Les résultats issus des simulations historiques dépendent de la position de la séquence appliquée : lorsque le début de la chronique est une période faste l'évolution du portefeuille est portée par les performances qui sont ensuite en partie protégées par la gestion de type CPPI qui engrange une partie des gains et investit relativement plus dans les périodes creuses. Lorsqu'à contrario le début de la chronique est une période déprimée, le portefeuille a plus de difficultés à se maintenir et à rebondir.

Avant de réaliser les simulations en Monte Carlo on applique à la modélisation de l'ALM du canton des valeurs fixes de la performance du portefeuille et de l'inflation jusqu'à extinction. On fait varier le rendement global du portefeuille et le taux d'inflation entre 0% et 5 %. On construit la matrice donnant le solde final du portefeuille en fonction des 36 couples possibles. Cette approche simplifiée ignore la volatilité des facteurs de risque en se fondant sur les seules moyennes.

On constate que si la performance moyenne du portefeuille est supérieure à l'inflation moyenne le solde final est positif voir fortement positif. La réciproque est également vraie : une inflation supérieure au rendement entraîne l'insolvabilité de manière certaine. Lorsque les deux taux sont égaux le solde final est proche de zéro en 2097, c'est la confirmation de l'équilibre du canton en 2024. Les impacts sur le solde final d'une hausse de 1% du rendement financier ou du taux de revalorisation sont différents et on ne peut pas calculer une sensibilité (quasi) constante pour tous les taux. Le comportement du solde est comparable à celui du prix d'une option, il est non linéaire (ou convexe).

Solde final en 2097	Revalo 0%	Revalo 1%	Revalo 2%	Revalo 3%	Revalo 4%	Revalo 5%
Rendit financier 0 %	-2 M€	-21 M€	-45 M€	-74 M€	-112 M€	-159 M€
Rendit financier 1 %	+27 M€	-4 M€	-44 M€	-92 M€	-153 M€	-230 M€
Rendit financier 2 %	+111 M€	+57 M€	-9 M€	-90 M€	-190 M€	-314 M€
Rendit financier 3 %	+320 M€	+228 M€	+117 M€	-18 M€	-183 M€	-386 M€
Rendit financier 4 %	+809 M€	+652 M€	+464 M€	+238 M€	-35 M€	-369 M€
Rendit financier 5 %	+1909 M€	+1639 M€	+1320 M€	+939 M€	+483 M€	-69 M€

Après ces simulations simples on conserve la modélisation de l'ALM du canton pour estimer la valeur finale de son portefeuille et on génère les valeurs des trois facteurs de risque en effectuant des tirages aléatoires. L'indice actions est modélisé par la loi log-normale classique (Black et Scholes) et les deux taux par des lois normales. Les paramètres de ces trois lois sont déduits des séries historiques déjà utilisées. On effectue dix jeux d'un millier de trajectoires et l'on calcule les valeurs moyennes et les écart-types des indicateurs de solvabilité retenus.

Les simulations en Monte Carlo ont plusieurs avantages : elles sont faciles à mettre en place et à expliquer dans le cas de risques traités comme des variables aléatoires. On compare d'abord les résultats obtenus avec les deux types de simulation et 2097 comme date d'observation, l'accord est satisfaisant dans les trois stratégies mais se dégrade cependant à mesure que les stratégies deviennent plus risquées.

Simulations Histo vs MC	Moyenne Histo	Ecart-type Histo	Moyenne MC	Ecart-type MC
Cas Stable	1906 M€	711 M€	1383 M€	1135 M€
Cas Prudent	911 M€	306 M€	784 M€	506 M€
Cas Dynamique	3570 M€	1577 M€	2300 M€	2758 M€

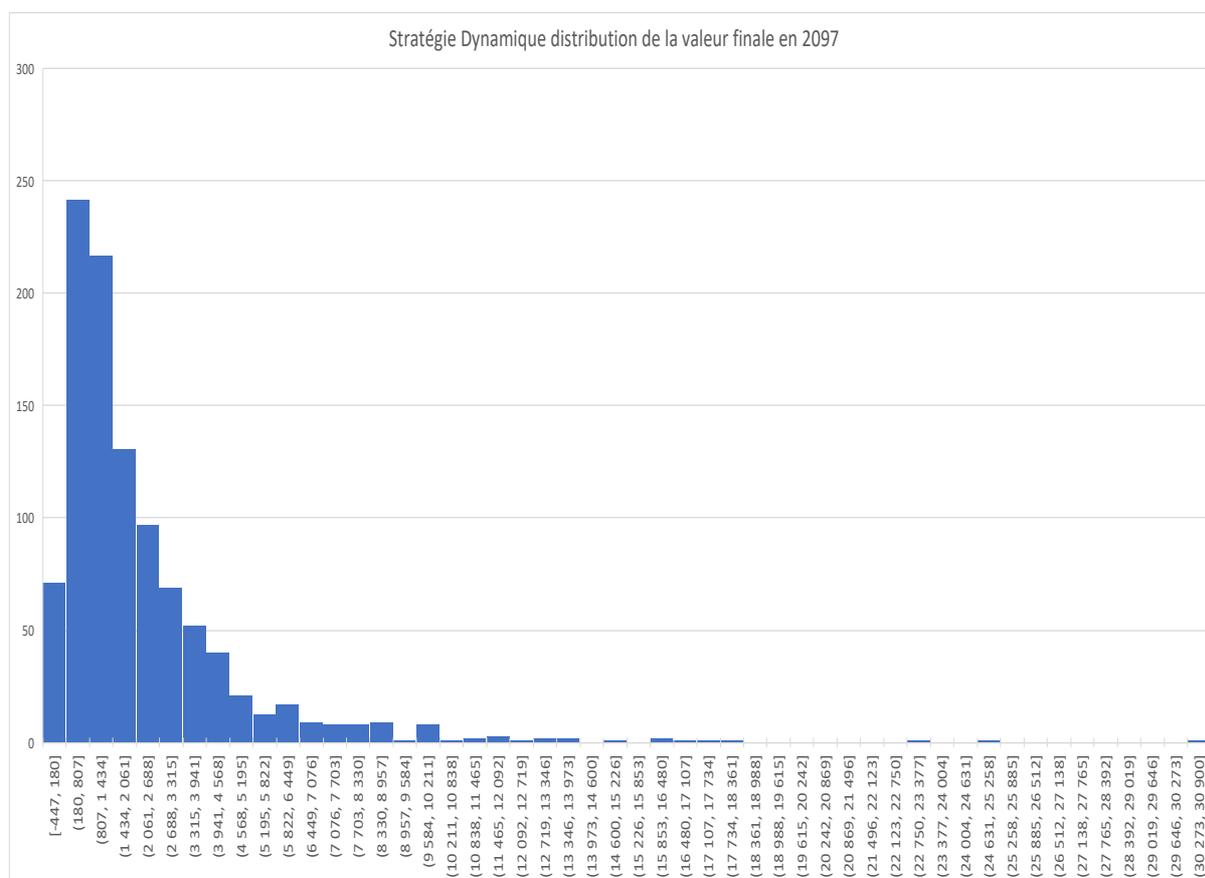
Les moyennes du solde final obtenus dans les simulations historiques sont toujours supérieures à celles provenant des simulations par Monte Carlo. Les écart-types du solde final obtenus dans les simulations historiques sont toujours notablement inférieurs à ceux provenant des simulations par Monte Carlo, avec des écarts relatifs compris entre 60 % et 75 %. Ces deux constats ne sont pas surprenants car les simulations en Monte Carlo permettent d'explorer plus de possibilités (ici plus de dix milles trajectoires indépendantes, avec des corrélations nulles) que les simulations historiques et elles fournissent des montants extrêmes plus dispersés (l'intervalle croissant avec le nombre de simulations évidemment). L'emploi des corrélations réelles (et non nulles) et les simulations avec la chronologie observée des performances/taux (et non d'une chronologie aléatoire) peuvent aussi expliquer une partie des différences.

Les simulations en Monte Carlo fournissent toujours des couples plus conservatifs (moyennes inférieures et écart-type supérieurs) : pour cette raison et pour les constats présentés précédemment nous utiliserons uniquement les simulations en Monte Carlo dans la suite du mémoire.

Dans les simulations par Monte Carlo et quelle que soit la stratégie adoptée, la probabilité de ruine est inférieure au seuil réaliste de 2,50 %, mais supérieure au seuil rigoureux de 0,50%. La hiérarchie des probabilités est conforme à celle de la prise de risque reflétée par l'exposition moyenne aux actions et elle est conforme à l'intuition. Les soldes finaux moyens et leurs écart-types progressent avec le risque et les indicateurs sont homothétiques. Plus le portefeuille est risqué, plus il fructifie mais avec une plus grande dispersion ; cependant les cas de ruine augmentent relativement moins vite. Ces valeurs sont affectées d'une incertitude non négligeable (mesurée par les écart-types sur un millier de trajectoires) : 0,40% sur la probabilité de ruine (pour les quatre stratégies) et entre 15 et 25 M€ pour les déficits en cas de ruine selon les stratégies.

Monte Carlo 2097	Solde final moyen en M€	Ecart-type en M€	Probabilité de ruine en %	Ratio Ecart-Type /solde final moyen	Solde négatif moyen en cas de ruine M€	Solde négatif inconditionnel M€
SuperPrudent	622	386	1,56%	0,62	-88	-1,37
Prudent	784	506	1,61%	0,65	-109	-1,75
Stable	1383	1135	1,72%	0,82	-101	-1,73
Dynamique	2300	2758	2,11%	1,20	-118	-2,49

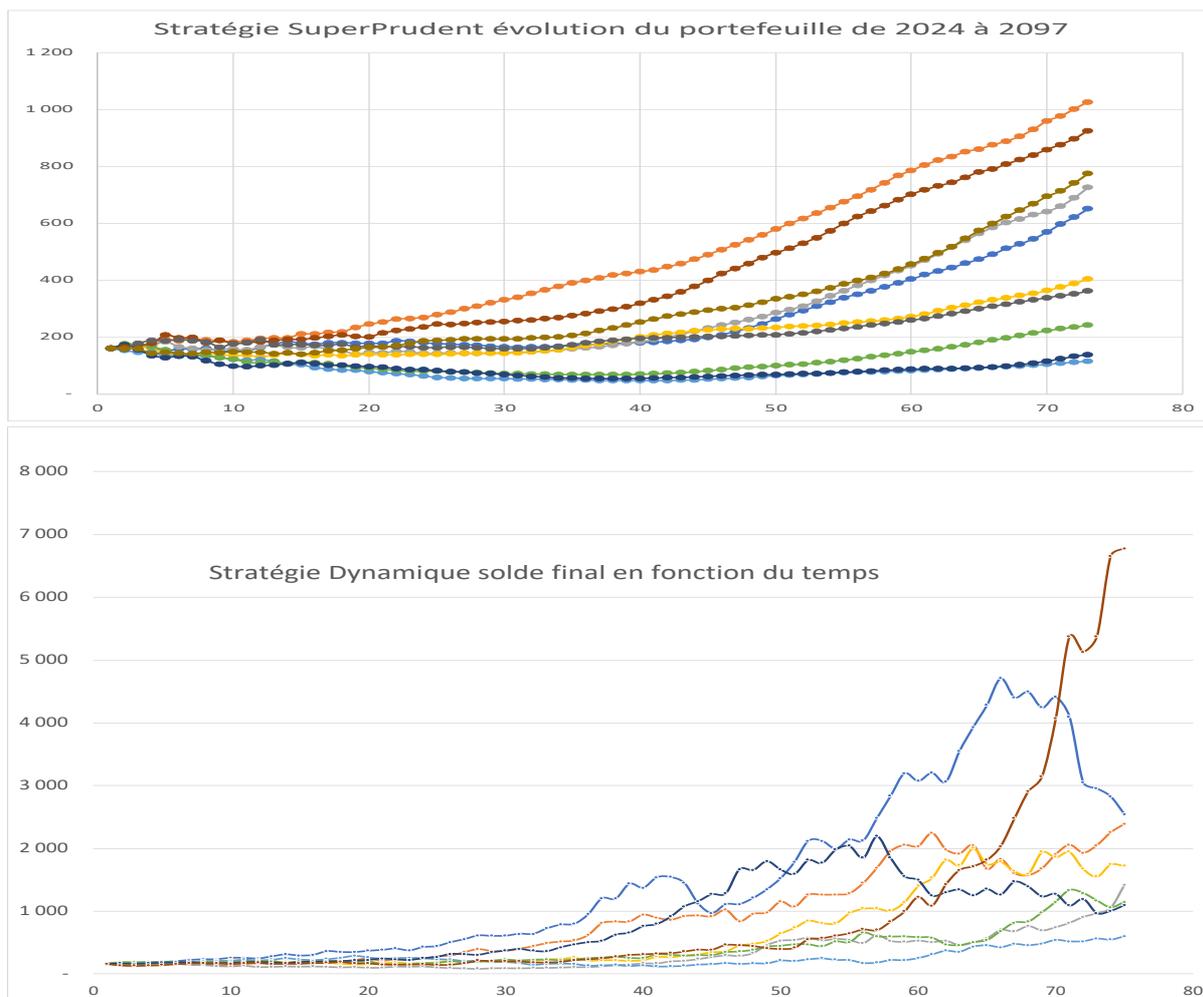
Les distributions empiriques des valeurs finales présentent l'apparence d'une loi log-normale avec une dissymétrie favorable. Le graphique suivant donne l'histogramme de 1073 trajectoires dans le cas Dynamique, les revalorisations sont calculées sur l'inflation seule et la date d'observation est 2097. Les trajectoires et leur dispersion traduisent la compétition entre la fructification et les prélèvements.



Les deux figures suivantes rassemblent dix trajectoires jusqu'en 2097 des deux stratégies extrêmes : SuperPrudent et Dynamique.

Les échelles du solde final sont très différentes (1,2 Md€ vs 8 Md€) et la capitalisation sur les trente dernières années est bien visible pour la stratégie Dynamique. Aucune occurrence de ruine n'est observée sur ces deux échantillons (trop) réduits : il faudrait une centaine de trajectoires pour en observer une éventuellement.

Deux variantes pour obtenir des soldes finaux nominaux moins élevés ont été explorées avec les Monte Carlo : revaloriser les rentes sur le maximum entre l'inflation et un pourcentage (à déterminer) de la performance lissée financière du portefeuille ou positionner la date d'observation à une date plus proche : 2077 voire 2060.



L'indexation des rentes sur la performance lissée du portefeuille permet de l'épuiser plus rapidement par le mécanisme cliquet des revalorisations : elles sont définitivement acquises, contrairement à la valeur de la poche action qui peut refluer d'une année sur l'autre, avant tout rebalancement. Ce mécanisme est voisin de la participation aux bénéfices de l'assurance-vie mais il est en diffère à cause de l'effet cliquet d'une part et aussi parce que la participation aux bénéfices reflète le résultat de l'exercice (possiblement lissé par le mécanisme des provisions et du pilotage). La performance lissée du portefeuille est la moyenne sur huit ans des performances des deux poches pondérées par leurs montants de l'année de la revalorisation. Celle-ci est faite sur le maximum entre une fraction de cette performance et le taux d'inflation (qui est toujours le taux plancher positif ou nul). Même avec un pourcentage de 50 % toutes les stratégies présentent des pourcentages de ruine excédant le seuil réaliste de 2,50 %. C'est pourquoi dans la suite on indexera toujours les rentes sur l'inflation sans se référer aux performances passées du portefeuille. Même avec la stratégie SuperPrudent (celle où le ratio de la poche actions diminue de 1% par an) on dépasse ce seuil de 2,50%. On note que la hiérarchie des risques se transpose dans celle de la probabilité de ruine et celle des pertes moyennes en cas de ruine ; alors que celle des soldes finaux moyens et de leur écart-type est inversée. La durée de vie moyenne en cas de ruine est assez insensible en revanche.

Stratégie (2007) % de Participation	Solde final moyen en M€	Ecart-type en M€	Probabilité de ruine	Déficit moyen en cas de ruine en M€	Durée moyenne avant ruine ans
SuperPrudent 50 %	450	302	3,17%	-99	34
Prudent 50 %	575	412	3,28%	-115	33
Stable 50 %	982	859	3,95%	-136	32
Dynamique 50 %	2078	3161	6,26%	-149	33

L'autre manière de réduire les montants des soldes finaux est de retenir une date d'observation/extinction plus proche. Toujours avec des revalorisations sur l'inflation on compare les indicateurs de risque retenus aux trois dates pour la stratégie Stable.

Stable revalorisation sur l'inflation en 2097 et 2077	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Stable 2097	1383	1135	1,72%	-101	33
Stable 2077	568	421	1,71%	-47	33
Stable 2060	271	181	1,61%	-23	30

La probabilité de ruine n'augmente quasiment pas lorsqu'on passe de 2060 à 2097, alors la moyenne et l'écart-type du montant du portefeuille progressent notablement. Pour ramener les soldes exprimés en euros courants aux trois dates d'observation à leurs valeurs déflatées en 2024 on applique les coefficients diviseurs de 10 pour 2097, de 5,3 pour 2077 et de 3 pour 2060. Les soldes actualisés en euros de 2024 doublent en passant d'une date d'extinction à la suivante. On cherche les taux de capitalisation qui font passer le montant moyen de 2060 à ceux de 2077 et 2097 et l'on obtient 6,04 % et 6,68 % respectivement. Ces deux taux sont voisins du taux moyen de performance du portefeuille avec une poche action stable à 30 % en retenant les valeurs moyennes de rendement de 10% pour celles-ci et de 3,15% pour la poche obligataire, soit un taux pondéré de 5,20%. Entre 2060 et 2097 les dernières rentes versées sont faibles devant les montants du portefeuille : la capitalisation du solde entre deux dates d'observation est dominante. Cette capitalisation ultime brouille l'analyse, nous retiendrons dans les analyses ultérieures soit la date de 2077 finalement plus représentative soit 2097 (la date d'extinction rigoureuse probable) mais pas 2060 qui est (relativement) trop proche.

Les sensibilités du solde moyen final en 2097 (afin d'observer des comportements extrêmes) aux couples de paramètres représentatifs des trois facteurs de risque ont été recherchées en les multipliant ou les divisant par deux. Nous ne les faisons pas varier de manière incrémentale à cause du caractère non linéaire du solde final et de la forte sensibilité des dérivées premières aux niveaux des variables. Cette démarche s'apparente plus à une approche en stress tests qu'à un calcul classique de sensibilités.

Le risque action est intrinsèquement le plus élevé, en comparaison des risques sur les deux taux (intérêt et inflation), mais le poids moyen de la poche action reste relativement minoritaire dans les quatre stratégies en se situant entre 15 % et 45 %.

Stratégie et couple Rendement/Risque Action	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Stable (10% ; 20%) Base	1383	1135	1,72%	-101	33
Stable (5% ; 10%)	475	271	0,82%	-57	36
Stable (5% ; 20%)	271	362	16,38%	-143	31
Stable (10% ; 40%)	126	845	43,74%	-334	25
Stable (20% ; 40%)	3930	6560	9,02%	-256	27

La division par deux du couple rendement/risque se traduit par une baisse de tous les indicateurs de risque qui sont nettement meilleurs que ceux de la stratégie SuperPrudent. Ce couple n'est pas caractéristique d'un indice actions mais plutôt de celui d'un indice obligataire High Yield. La division par deux du rendement de 10% à 5% à volatilité fixée (20%) est nettement plus pénalisante : la volatilité valant le quadruple du rendement mène à une probabilité de ruine inacceptable. Ce sont à la fois les montants absolus des deux paramètres et leur ratio (ici 4) qui expliquent ce constat. La pénalisation est encore plus sévère lorsque que la volatilité est doublée à 40 % alors que le rendement est conservé à 10 % (toujours le ratio de 4) : il y a une chance sur deux pour devenir insolvable, c'est une situation inenvisageable car la volatilité extrême obère fortement le rendement moyen. Enfin le doublement du couple rendement/volatilité initial des actions conduit à des multiplications par trois du solde moyen final et par six de sa dispersion mais aussi de la probabilité de ruine. Ces résultats sont instructifs mais il faut les relativiser car observer ces couples avec des valeurs atypiques sur plusieurs décennies est assez improbable : il peut arriver des périodes de haute volatilité (absolue ou relative) mais elles ne perdurent généralement pas.

On calcule l'expression $(\mu - \sigma^2/2)$ pour ces couples : on obtient 9,50 % pour le couple (10 % ; 20 %) ; 4,50 % pour le couple (5 % ; 10 %) ; 3,00 % pour le couple (5 % ; 20 %) ; 2,00 % pour le couple (10 % ; 40%) et 12,00 % pour le couple (20 % ; 40 %). Cet indicateur unique englobant les deux paramètres fait perdre de l'information et ne peut pas servir de mesure synthétique : sa hiérarchie n'est pas strictement identique à celle observée : il faut connaître à la fois le rendement et sa dispersion pour évaluer le risque total de la poche action. Les cas les plus pénalisants sont représentatifs de situations hautement improbables, mais ils ont été explorés ici.

On procède de même avec le couple taux moyen/volatilité du TEC 7.

Stratégie et couple Rendement/Risque TEC	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Stable (3,8% ; 3,1%) Base	1383	1135	1,72%	-101	33
Stable (7,5% ; 6,3%)	12960	9853	0,01%	SO	SO
Stable (1,9% ; 1,6%)	350	392	12,08%	-31	124
Stable (3,8% ; 6,3%)	1433	1420	3,20%	-153	31

Le doublement du couple rendement/risque de la poche obligataire (généralement majoritaire) a ici l'effet inverse : la solvabilité est très nettement améliorée : la ruine est quasiment totalement impossible. Ce n'est pas surprenant car le rendement du portefeuille devient très largement supérieur à l'inflation et l'effet capitalisation du solde jusqu'en 2097 joue à plein (le chiffre 13 Milliards est exact..., il équivaut encore à 1,3 milliards en euros 2024 ce qui est extravagant mais illustre l'effet exponentiel d'une capitalisation à 7,50% pendant plusieurs décennies), et la volatilité du taux n'est pas trop pénalisante. Il est hautement improbable qu'un tel niveau moyen de taux d'intérêt coexiste durablement avec une inflation moyenne inférieure à 2%.

C'est la limite de l'exercice consistant à raisonner « toutes choses égales par ailleurs » ; faire varier en même temps tous les facteurs de risque est plus réaliste mais conduit rapidement à une myriade de configurations difficiles à ordonnancer. A contrario diviser par deux le couple rendement/risque de la poche obligataire rend le canton trop souvent insolvable (une fois sur huit) car dans ce cas le rendement est juste un peu au-dessus du niveau de l'inflation (1,90 % vs 1,80 %) mais sa volatilité plus forte aussi (1,60 % vs 1,15%). On retrouve encore la conclusion assez intuitive : c'est la hiérarchie entre le rendement du portefeuille et l'inflation qui dans le cas présent (canton « à l'équilibre » en 2024) détermine le maintien ou non d'une solvabilité satisfaisante. Enfin doubler la volatilité du taux de rendement à moyenne maintenue dégrade la solvabilité parce qu'elle dégrade finalement le rendement corrigé (même si la valeur finale moyenne et sa dispersion sont peu affectés).

On termine cette exploration avec le couple taux moyen/volatilité de l'inflation qui est le dual du taux obligataire.

Stratégie et couple Rendement/Risque Inflation	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine
Stable (1,8% ; 1,15%)	1383	1135	1,72%	-101	33
Stable (3,6% ; 2,3%)	636	940	23,82%	-284	30
Stable (0,9% ; 0,6%)	1650	1206	0,17%	-52	34
Stable (1,8% ; 2,3%)	1276	1106	3,32%	-150	32

Le doublement du couple rendement/risque du taux d'inflation précipite l'insolvabilité : celle-ci devient inacceptable avec la ruine une fois sur quatre, car l'inflation est durablement supérieure au taux de rendement du portefeuille et le consomme en totalité et au-delà. Symétriquement diviser par deux le couple rendement/risque améliore nettement la solvabilité, car le rendement est alors toujours supérieur à l'inflation. Enfin multiplier par deux la volatilité double la probabilité de ruine par rapport au cas de base (alors que le solde final et son écart-type varient peu), l'asymétrie des revalorisations opérant puisque seules les inflations positives sont retenues.

Dans la stratégie Dynamique on a appliqué les deux configurations du couple des paramètres action les plus adverses et on constate que la probabilité de ruine et le déficit en cas de ruine ne sont pratiquement pas affectés par la stratégie, la dégradation est modeste par rapport à la stratégie Stable.

En conclusion, il n'y a pas un facteur de risque qui est nettement plus critique que les autres, les risques sur les taux obligataires et d'inflation sont finalement aussi potentiellement dangereux que celui sur les actions parce que les assiettes en risque sont plus importantes : la poche obligataire est en moyenne deux fois plus grosse que la poche action et la provision mathématique est pratiquement égale à leur somme avec en plus l'effet cliquet.

On termine l'exploration des possibilités avec les simulations en Monte Carlo, en reprenant l'hypothèse de Planchet et Théron sur les différents pourcentages initiaux de la poche action, qui sont toujours maintenus ensuite à ce niveau sur la durée. La date d'observation est 2077 ici. On retrouve comme ces auteurs que la probabilité de ruine augmente avec le pourcentage initial en actif risqué, ce qui est conforme à l'intuition.

Pourcentage poche actions fixe 2077 Indexation inflation	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Stable 10 %	289	133	0,14%	-22	36
Stable 30 % Base	568	421	1,71%	-47	33
Stable 50 %	1006	1149	6,24%	-95	28
Stable 70 %	1811	3064	11,16%	-137	25
Stable 0 %	195	92	0,26%	-14	39
Markowitz 7 %	260	115	0,11%	-26	35
Stable 20 %	411	237	0,55%	-40	33

On se borne à 70 % d'actions qui conduit à une probabilité de ruine trop élevée, comme avec 50% d'ailleurs. Il faut se situer à 30 % (la stratégie Stable) pour rester à un niveau acceptable inférieur au seuil réaliste de 2,50% ; celui-ci est atteint pour 35%. Ce ratio fixe de 35% avait été déjà obtenue par C.L Walle dans son mémoire publié par l'Institut des Actuaire de 2017 sur une entité aux caractéristiques très voisines du canton étudié ici et en utilisant un générateur de scénarios économiques. Ce ratio est également le niveau maximum observé en France sur des entités plus jeunes et qui souhaitent générer de la richesse pour le futur lorsqu'ils entreront en phase de consommation (par exemple le RAFP à 40%), sans évoquer les fonds de pension US ou britanniques les plus dynamiques qui montent jusqu'à 70% qui semble être la borne maximale (70 % est aussi le pourcentage investi en actions internationales du fonds souverain norvégien mi 2024 dont l'horizon est nettement plus long). Dans l'approche de Markowitz c'est le portefeuille contenant 7% d'actions qui est le plus efficace (maximisation du rendement vs le risque/volatilité) ; et on obtient une probabilité moyenne de ruine de 0,11% (qui est bien le niveau le plus bas : le portefeuille optimal l'est également avec la chronique de rentes du canton. C'est la stratégie la moins risquée avec un solde final moyen et un écart-type compris entre ceux des stratégies à 0% et à 10%. Avec 20 % d'actions en permanence la probabilité moyenne de ruine de situe à 0,55% (juste au-dessus du seuil strict de 0,50% qui est égal au seuil en VaR de Solvabilité 2 mais sur un horizon totalement différent).

A chaque accroissement de 20% de la poche actions, le solde final moyen double pratiquement et son écart-type triple de son côté. La probabilité de ruine augmente relativement plus aux faibles pourcentages. Passer le ratio de 30% à 50% se révèle peu attractif puisque le solde moyen double mais la probabilité est multipliée par quatre et l'écart-type par trois ; les indicateurs de risque se dégradent relativement plus que l'espérance de richesse finale.

Les actions sont généralement présentées comme le moteur de performance d'un régime de retraite par capitalisation (ou d'un PER) car il y a une quasi-certitude qu'un indice action sera toujours le plus performant dans le long terme. Ce présupposé est largement partagé et il est vérifié sur les marchés US et européens sur de longues périodes contenant des crises et des rebonds. Le Nikkei 225 sur la période 1980 à 2023 est en quelque sorte l'exception qui confirme la règle puisque l'indice a d'abord chuté de 39 000 en 1989 à 7 800 en 2003 puis est revenu à 7 500 en 2009 et a rebondi depuis pour atteindre 40 000 en mars 2024. Il aura donc fallu trente-cinq ans pour retrouver le niveau de 1989 (exprimé en devise courante comme tous les indices d'ailleurs...). Ce contre-exemple observé sur une place boursière de l'OCDE (mais particulière à certains égards de gouvernance ou de politique monétaire/financière) et représentative d'une longue période montre la possibilité d'avoir un marché boursier national durablement déprimé. Pour éviter cet écueil, la meilleure solution est d'adopter une diversification mondiale, comme en investissant dans l'indice MSCI World, en accord avec la théorie du portefeuille de marché de Markowitz.

Nous n'avons pas utilisé le modèle de Vasicek pour les deux taux, en revanche pour l'indice action nous avons utilisé à côté de la modélisation par le modèle log-normal le modèle de Hardy à deux états. Ce modèle suppose que l'indice suit plusieurs régimes log-normaux, ici deux (calme et crise) et que le passage de l'un à l'autre est une chaîne de Markov. Pour deux états il y a six paramètres : deux couple rendement/volatilité et deux probabilités de passage. L'obtention de ces paramètres s'effectue par optimisation globale par le maximum de la log-vraisemblance. En utilisant le mécanisme du modèle on peut alors générer des valeurs futures de l'indice avec ces paramètres. On constate que le modèle de Hardy est conservatif car il fournit des distributions légèrement plus épaisses pour les faibles valeurs que le modèle log-normal classique, ce qui avait été souligné dans l'article en 2000. Il est bien adapté à une utilisation en suivi de la solvabilité (ou du risque) mais l'obtention des paramètres est assez délicate et certains comme les probabilités de passage sont entachées d'une incertitude non négligeable. Le modèle de Hardy estime avec une bonne précision le rendement moyen mensuel (ce qui est attendu puisqu'ils ont servi à son étalonnage) et leurs valeurs extrêmes mais il tend à sous-estimer la volatilité observée. Ce point nécessite d'être approfondi par des travaux supplémentaires.

Lorsque les couples sont homogènes entre les deux modèles, le modèle de Hardy fournit des indicateurs de solvabilité/risque plus conservatifs. Le tableau suivant les rassemble avec ceux obtenus avec le modèle log-normal pour la stratégie Stable et une date d'observation en 2077 donne les résultats suivants.

Stable revalorisation inflation en 2077 Hardy et B&S	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine
Hardy Moyennes	281	174	1,10%	-26	36
Hardy Ecart-types	9	14	0,26%	11	3
Log-Normal Moyennes	355	206	0,72%	-30	35
Log-Normal Ecart-types	7	11	0,31%	10	2

En conclusion, après avoir utilisé deux types de simulations (historiques et par Monte Carlo), deux modèles pour générer les rendements futurs de l'indice actions (log-normal et modèle à deux états de Hardy) et des données historiques couvrant presque quarante ans (injectées dans les simulations historiques ou pour les calibrer les modèles), on peut répondre à la question qui constitue le titre de ce mémoire : « Quelle allocation d'actifs pour un régime de retraite supplémentaire géré en extinction ? » et tirer quelques enseignements.

Tout d'abord on a constaté que les simulations historiques ne sont pas adaptées, elles ne sont pas conservatives et trop limitées malgré leur caractère simple et aisément compréhensible. Seules les simulations en Monte Carlo permettent d'explorer un très grand nombre de configurations et de faire apparaître quelques cas de ruine. Elles sont également flexibles pour effectuer des analyses de sensibilité proches de stress tests. Enfin il n'est pas nécessaire de simuler l'ALM du canton jusqu'à la date ultime de 2097 pour calculer les indicateurs de risque/solvabilité, 2077 est une date d'observation satisfaisante.

Pour répondre à la question principale et même si ces conclusions dépendent des caractéristiques du canton étudié et ne doivent pas être extrapolées, certains principes généraux restent valides :

Concernant le canton de l'IRPS étudié, on peut conserver le ratio de la poche actions à 30% de la valeur totale du portefeuille jusqu'à l'extinction. De la sorte on suit le principe de la « personne prudente » qui se traduit ici par une probabilité de ruine de 1,7% inférieure au seuil réaliste de probabilité de ruine de 2,50 % (« une ruine tous les quarante ans»). Le maintien de cette poche de performance à 30 % est possible à quelques conditions : gestion du ratio avec la valeur de marché de cette poche dans une gestion de type CPPI anticyclique (« acheter bas et vendre haut »), maintien sur longue période de la hiérarchie « naturelle » entre le rendement d'un indice action bien diversifié, le taux d'Etat à moyen terme et enfin le taux d'inflation domestique YoY,. Cette hiérarchie repose à la fois sur l'observation des marchés financiers de l'OCDE sur près d'un siècle (et les crises ne la contredisent pas, elles produisent des périodes de retracement/rebond) et sur des théories économiques assez peu contestées. Le contre-exemple du Nikkei 225 semble être unique avec une quarantaine d'années pour revenir à son niveau de départ ; même dans ce cas les entrées et sorties aux niveaux de l'instant modèrent le constat sur le seul niveau

absolu de l'indice (effet CPPI ou d'option sur moyenne). Enfin il est souhaitable de diversifier encore plus la poche action (sur les marchés US et internationaux) pour améliorer le couple rendement/risque

La stratégie Prudente est facialement moins risquée avec une probabilité moyenne de ruine de 1,6 % mais elle ne permet pas d'avoir de marges de sécurité avec un portefeuille qui fructifie relativement moins. La choisir par imitation avec la contrainte de préserver un capital à une date donnée (comme au terme de la phase d'épargne d'un plan de retraite) est une erreur de raisonnement doublée d'arguments de prudence mal comprise.

La stratégie Dynamique est marginalement plus risquée avec une probabilité moyenne de ruine de 2,1 % mais dégage des excédents moyens nettement supérieurs aux deux autres. Une stratégie consistant à augmenter le poids de la poche actions est bien adaptée à la gestion d'un plan de retraite individuel en phase de consommation, lorsque la consommation de l'épargne accumulée ne constitue pas la totalité de la retraite du titulaire mais une fraction pouvant atteindre 50% (comme dans les pays où les fonds de pension sont développés). Dans ce cas ce capital doit continuer à fructifier au sein d'une enveloppe fiscalement avantageuse. L'appétence au risque est différente, les prélèvements peuvent être éventuellement modulés et le solde résiduel au décès peut être transmis et non mutualisé ou revenir à l'employeur. Dans d'autres pays (USA, Grande Bretagne) des réflexions ont été menées sur l'allocation d'actifs d'un plan de retraité en phase de consommation ; avec l'avènement des PER et bientôt de leur consommation il serait nécessaire qu'une démarche analogue soit entreprise et que des allocations-types soient proposées comme dans la phase d'épargne.

EXECUTIVE SUMMARY

This essay deals with the asset allocation of an IRPS managing a supplementary pension scheme set up in 1967. It was originally the supplementary pension fund of a Specialized Financial Institution, then successively adopted different statutes before transforming itself in 2019 into an IRPS, the variant of ORPS falling under the Social Security Code. The canton is in extinction, as the scheme has been closed since 1996, and its complete disappearance is estimated in 2097 (going by the date of the table's closure).

First, we present the French Organismes de Retraite Professionnels supplémentaires (ORPS), which are split into twenty-one FRPS, one IRPS and one MRPS in 2023. These entities manage a total of €174 billion in investments. The ORPSs were created by the 2019 Pacte law, which transposed the European text on institutions for occupational retirement provision managing long-term commitments (2003 “Institution for Occupational Retirement Provision 1” and 2016 IORP 2 directives). The 2019 ordinance states that the ORPS framework is: “...conducive to long-term investment, in equities or in the form of equity financing, while at the same time favoring a better return for savers ...”, this sentence underlines the importance of equity investment in retirement plans with a multi-decade horizon recognized here by the public authorities. In France, life insurance policies are still heavily invested in euro funds, which are themselves 70% invested in bonds. The share of equities is close to 15%, while other types of assets (real estate, private equity, real assets and infrastructure) also account for 15%. Euro funds still account for more than two-thirds of total funds under management, even though the proportion of unit-linked products will reach 29% by the end of 2023, and these are relatively more heavily invested in equities. These percentages are virtually identical in the ORPSs, the only difference being that bonds have longer average maturities than in life insurance portfolios. The ORPSs created by changing the status of pre-existing structures did not change their asset allocation when they were created or when they switched from Solvency 2 to IORPS 2: they kept a high proportion of bonds in their portfolios (and only increased their average maturity), while the proportion in equities did not increase during these changes.

The situation of the canton in the extinction phase raises questions about the future evolution of the weight of equities in the portfolio. For more than thirty years, the canton has been invested in French and then European large- and mid-cap equities with a proportion of 30%, and the remaining 70% in Investment Grade bonds with an average maturity of close to 4 years. This (relatively) high exposure to equities has enabled the canton to consolidate its financial structure in the past, and to weather financial crises without having to change this choice. Managing the equity portfolio at market value has enabled it to preserve gains after price rises and to invest in periods of stock market troughs (to maintain the ratio) in the manner of a CPPI. The low maturity of the bond portfolio is atypical, as the entity has never wished to equalize (or even bring closer together) the durations of assets and liabilities, the latter currently being close to fifteen years.

This asset allocation strategy was easy to maintain when the structure was subject to Solvency 1, since investment in equities was not particularly penalized. When the entity came under Solvency 2, the constraints on equity investment in the calculation of the market SCR have been offset by the low duration of the bonds (if these had been in line with the duration of the liabilities, the strategy would have had to be modified, either by drastically reducing the duration, or more probably by reducing the proportion invested in equities - easier to achieve -, which would have been ex post “a bad choice”). Fortunately, the transition to Solvency 2 did not force the entity to change the 30%/70% mix. This example illustrates the inappropriateness of the Solvency 2 rules for this type of entity. This observation is not original; it has been made by numerous authors and can be found in several Institut des Actuaire's essays.

To free itself from the complexity of Solvency 2 and above all its unsuitability for entities managing long or very long commitments, the entity decided to adopt the form of an IRPS as soon as this was possible in 2019. The transition to IORP 2 has significantly relaxed the constraints of Solvency 2; although part of pillars 2 and 3 are retained, they do not constrain asset allocation, but oblige to maintain a degree of transparency and to examine its evolution over ten years, as well as analyze its resilience in the face of risk.

The canton manages a compulsory supplementary pension scheme for a former IFS which became a bank following mergers and absorptions. The plan is financed by employee and employer contributions, and is a defined-benefit scheme. It is of the additional type: the life annuity is equal to the product of the number of years worked in the company, the last salary and a percentage (modulated according to family situation). The annuity is not conditional on presence in the company at the time of liquidation of general scheme pensions. The number of pensioners is 1,070, with an average age of 77.4; there are 280 future beneficiaries, with an average age of 62.6 (of whom around 30 are still employed by the bank and 250 have been struck off: all will receive a pension in the future). The weighted average age is 74.3, confirming the extinctive nature of the canton, and the youngest future beneficiary is 53. The annual amount of annuities paid is around €6 million in 2023; they are revalued annually by a combination of CNAVTS and AGIRC/ARRCO rates.

The canton's balance sheet total amounts to 160 M€ at the end of 2023. Its book liabilities break down into €15.5 million in shareholders' equity and €144.5 million in technical provisions, broken down into €116.2 million in Fonds de Service des Rentes (FSR), €21.7 million in Fonds Collectif (FC) and €6.5 million in Provision pour Participation aux Excédents (PPE). A total of 158.3 M€ is invested in a dedicated mutual fund (160 M€ at market value); 1.6 M€ in cash and 0.2 M€ in miscellaneous receivables complete the assets.

The canton's Minimum Solvency Requirement (MSR) is 5.5 M€, and is 281% covered at the end of 2023.

Before coming under Solvency 2 and then IORP 2, the canton was a Specialized Retirement Institution (IRS) governed by an ad hoc prudential framework. In this IRS framework, the calculation of the FSR was identical to that of the current IORP 2, but the calculation of the FC was also based on that of the FSR, and was not a balance as in IORP 2. The IRS vision calculation of the sum of the FSR and the "FC equivalent" provides a realistic and homogeneous estimate of the canton's total liabilities, using the TGH/TGF 2000-05 tables, up to the closure date and without discounting. Once the last pensions have been settled, only the FSR will remain, and the IRS vision will merge with the IORP 2 vision. The current amount of commitments (excluding expenses) measured in this way is €148 million; it will be €1.7 million in 2060, €0.17 million in 2077 and a few hundred euros in 2097 (amounts in current, non-updated euros).

The ORPS regulatory framework is also recalled: extracts from the 2017 decree specifying the level of the solvency margin at 4% of mathematical reserves and the mandatory stress test scenarios are presented and commented on.

The analysis of the canton's decline phase is then carried out: what asset allocation is best suited to this extinctive management? There are several solutions: either we statically back the liabilities with a portfolio of OATs or OAT i and €i, or we maintain a portfolio composed of European equities and Investment Grade bonds with an average maturity of 4 years. In the latter case, the question arises as to the future weighting of the equity portfolio: should it be maintained at 30% (Stable case)? Should it be gradually reduced to 0% (Prudent case)? Should it be gradually increased in stages to 60% (Dynamic case)? The variation step used is +/- 0.50% per year; and -1% in the SuperPrudent case.

The canton is exposed to four risk factors: equity risk, bond rate risk, inflation rate risk (through revaluations) and mortality risk. We have chosen to simulate the evolution over time of the canton's assets on a cash basis, integrating all cash flows (annuities, fees and coupons) and the monetary or valuation impacts (for the equity pocket alone) of these risks. Simulations are first historical, then Monte Carlo. The first three risks are modeled as market variables whose mean/standard deviation parameters are extracted from historical series. We use the CAC 40 TR index, the TEC 7 rate and the French inflation rate (YoY). The historical parameters are also used in Monte Carlo runs, and correlations between the three risk factors are sought. Mortality risk (in this case, longevity) is addressed in a second step, by modifying the chronicle of future annuities.

The subject of "Pilotage technique d'un régime de rentes viagères" has already been covered in the early 2000s in an article by N. Gautron et al. 2003 and a book by Planchet and P. Thérond, 2007. It has also been dealt with in a more comprehensive way, on the complete cycle of savings and then consumption of an individual retirement plan with modeling of mortality risk by a Weibull distribution, in a contemporary article by P. Battocchio et al, 2003.

Planchet and Thérond have modeled the ALM management of a life annuity plan in extinction, as well as the risk of inflation and stock market jumps. They showed that the probability of ruin increased with the initial fraction invested in equities (subsequently left to fluctuate) and that this probability decreased relatively when annuities were revalued. Battocchio et al. concluded that the fraction invested in equities must increase over time in the consumption phase (decumulation), after having previously decreased during the savings phase. While the decrease in the risky portion during the savings phase is widely accepted, and even mandatory in managed retirement savings plans (PERCO and PER), the increase in the risky portion during retirement seems rather unwise. Their conclusions applied to an individual plan with a non-mutualized mortality risk modeled using Weibull's law. For a group scheme, the “prudent person” constraint applies, as does the mutualization of mortality risk, and a sufficient level of solvency must be maintained at all times. Among the recent literature dealing with the consumption of a retirement savings plan (collective or individual), we have also retained and summarized the conclusions of several Institut des Actuaire essays, two American articles and the book “Advances in retirement investing” by L. Martellini and V. Milhau, 2020.

Gautron et al.'s approach is broadly repeated here: use of the chronicle of probable future annuities, simulation of the financial portfolio and their ALM interaction, calculation of solvency indicators over time and in particular at the probable extinction date of the plan.

The canton must remain solvent until it is extinguished: it must be able to pay pensions up to that date to the beneficiaries and any reversionaries. Solvency here means holding a portfolio of financial assets that is always positive, enabling it to pay out pensions and their future increases in value, and to bear costs. We will simulate this ALM mechanism of balance between portfolio growth/fluctuation and planned withdrawals with revaluations and expenses, using the four strategies for managing the equity portfolio. Solvency is measured on a cash basis and not by compliance with the prudential ratio, even though both constraints must be respected at all times.

In reality, if the portfolio becomes zero, the employer will be called upon to pay the pensions (and even before, to ensure the minimum level of solvency required). This remote and unlikely eventuality stems from the plan's regulations and its parity-based nature, governed by the French Social Security Code. The simple model used here assumes that, if the portfolio is exhausted, the canton will be in debt until the extinction/observation date, at which point the employer will be called upon to make up the overall final deficit. This convention results in a final balance that is either positive: the canton is solvent until its maturity date, or negative: it becomes insolvent and must call the employer in fine; in the simulations, it goes into debt and accumulates a growing overall deficit including capitalized financial expenses. The distribution of simulated final balances at the chosen observation date is the first measure of solvency (or risk). Their mean and empirical standard deviation over all simulations are calculated; any negative values provide the probability of failure (number of trajectories with a negative final balance/total number of simulations) and the average deficit in the event of bankruptcy. Two acceptable thresholds are set for the probability of failure: 0.50% (“rigorous”) and 2.50% (“realistic”).

Two classes of financial assets are used in the models: a diversified portfolio of French equities assimilated to the CAC 40 TR index, and 7-year government bonds characterized by the TEC 7 rate. CAC 40 TR index returns are modeled on the basis of historical values since 1988. The index is modeled as a non-dividend-paying stock, using the classic log-normal model. The two model parameters (drift and volatility) are deduced from the historical series starting in 1988. We also use the two-state Hardy model as an alternative.

The modeling of the TEC 7 rate is either historical or in the form of a normal random variable whose parameters are those deduced from the historical series of values. The Vasicek model was considered, as it is the simplest rate model, but was not used, as it relies on volatile parameters such as the mean reversion rate and its speed, which align it with the current yield curve. Rate models are well-suited to pricing issues, which is not the case here, but they are highly dependent on current market conditions: the yield curve has changed drastically between 2022 and 2023. This dependence on the current curve is also reflected in forward rates, which are also possible estimators: static backing with fixed-rate OATs whose maturities are matched to the annuity history is equivalent to this deterministic representation by forward rates (the same applies to static backing with inflation-indexed OATs).

The two other risks to which the canton is exposed are inflation (it is assumed that annuities are revalued at this rate) and mortality (longevity, in fact). The inflation rate can be modeled in the same way as the bond rate: either as a historical series, or as a normal random variable (with the parameters of the historical series), or using the Vasicek model as proposed by EIOPA, which will not be used here either.

The ALM simulation of the canton is carried out on a cash basis: we know the chronicle of probable annuities that have not been revalued, and we simulate the value of the financial portfolio and the revaluation of annuities. The equities portfolio fluctuates with simulated or historical CAC 40 TR returns. The bond portfolio is managed on a “noria” basis: seven lines of 7-year bonds are set up and held to maturity. At the start of the simulation, seven equal lines are set up, with maturities ranging from one to seven years; each time a line is redeemed, a new line is set up, with a maturity of seven years, to finally hold only bonds of this maturity. This mechanism ensures that the average maturity of the bond portfolio remains close to 4 years. This pocket is valued as the sum of the nominal amounts of the bond lines. The total value of the portfolio (in current euros) is the combined sum of the market value of the equities and the face value of the bonds. The ratio between the market value of the equity portfolio and the total portfolio is the steering ratio. Fees are based on annuities (3%) and on the total (absolute) value of the portfolio (0.50%).

The portfolio is progressively consumed by annuities to be paid, expenses to be settled and, conversely, it is fed by bond coupons. Its value is also subject to annual variations in the value of the equity pocket. In order to respect the ratio control, the two pockets of the portfolio are rebalanced at the end of each year.

The first three risks: equity, TEC 7 rate and inflation are always modeled using the same Monte Carlo method: random variable following a normal distribution for the two rates, and modeling of the index return using a lognormal distribution. Annuities are adjusted for inflation and probabilized for mortality using the TGH/TGF 2000-05 tables.

The correlations between the first three risks (considered to be “market” risks) are determined on the basis of the annual historical series used. The performance rate of the CAC 40 TR and the TEC 7 rate show no significant correlation (the coefficient is + 0.09). The relationship between the interest rate and the inflation rate is similar: the correlation is slightly higher at + 0.23, but low in absolute terms. This finding runs counter to conventional wisdom on the correlation between interest rates and the inflation rate, which is generally based on the notion of a stable real rate over time.

These quantitative findings, based on a fairly long history, lead us to consider these three risks as independent in Monte Carlo simulations. We also run simulations by varying (doubling or halving) the two values of the pairs (mean/standard deviation) in pairs or separately, to assess sensitivities to these factors and to explore different hierarchies between these three risk classes.

The fourth risk class, longevity, is treated in the same way as in IORP 2: by simulating the shock to instantaneous mortality rates of -10%, and here by a proxy applying a multiplicative factor of 1.05 to annuities.

Having defined the models for the evolution of the portfolio and its risk factors, we now look for the allocation strategy offering the best compromise between return and risk in the extinction phase. This phase is characterized by a continuous decrease in mathematical reserves until the probable death of the last beneficiary or reversionary, and by the concomitant gradual consumption of the portfolio. We also need to choose the observation date corresponding to extinction: 2097 is the ultimate date with a residual annuity accumulation of a few hundred euros, 2077 is a more realistic date with a residual accumulation of less than two hundred thousand euros (closure dates back to 1996) and 2060 is a closer date with a residual accumulation of less than two million euros (figures in euros 2024). The first simulations (historical and Monte Carlo) were carried out up to 2097 to ensure that the last beneficiaries would not be adversely affected. We will also go as far back as 2077 to avoid the last twenty years amplifying the 2077 intermediate balance (positive or negative) by capitalization, thus skewing the analysis. As the cash accounting simulations are based on current euros, it is necessary to transform these estimated future amounts into their equivalents in 2024 euros. The first results obtained, expressed in 209.7 euros, are very high

and difficult to assess: only the hierarchy between the amounts and their signs are directly exploitable. They need to be divided by ten to obtain 2024 euros.

Even before carrying out the first simulations, we first look for a static backing with OATs whose repayments at maturity are based on the annual annuity payments (loaded but not revalued). By selling the current equity and bond pockets (€161.6 million), we are financing the purchase of this hedge (€115 million), an amount lower than the total commitment of €148 million measured in IRS vision. The available surplus of 47.4 M€ is used to ensure that annuities are reset at a constant average rate of 2.60% (higher than the 10-year inflation break-even point of 2.32% in June 2024).

The second static backing is made up of OAT i and €i bonds, which cover the chronicle of annuities including fees and revalued in line with inflation, with a cost price of 160 M€, an amount practically equal to the wealth of the canton at the end of 2023 (161.6 M€). All future annuities can be statically hedged with inflation-indexed OATs, guaranteeing indexed increases in future values.

These two feasible static hedges confirm the canton's current solidity: it is “balanced”, barring unforeseen new expenses or mortality slippage. It is possible to manage it in run-off in this way. They also raise the question of whether the current investment strategy should be maintained, or whether it should be modified, with the attached risks.

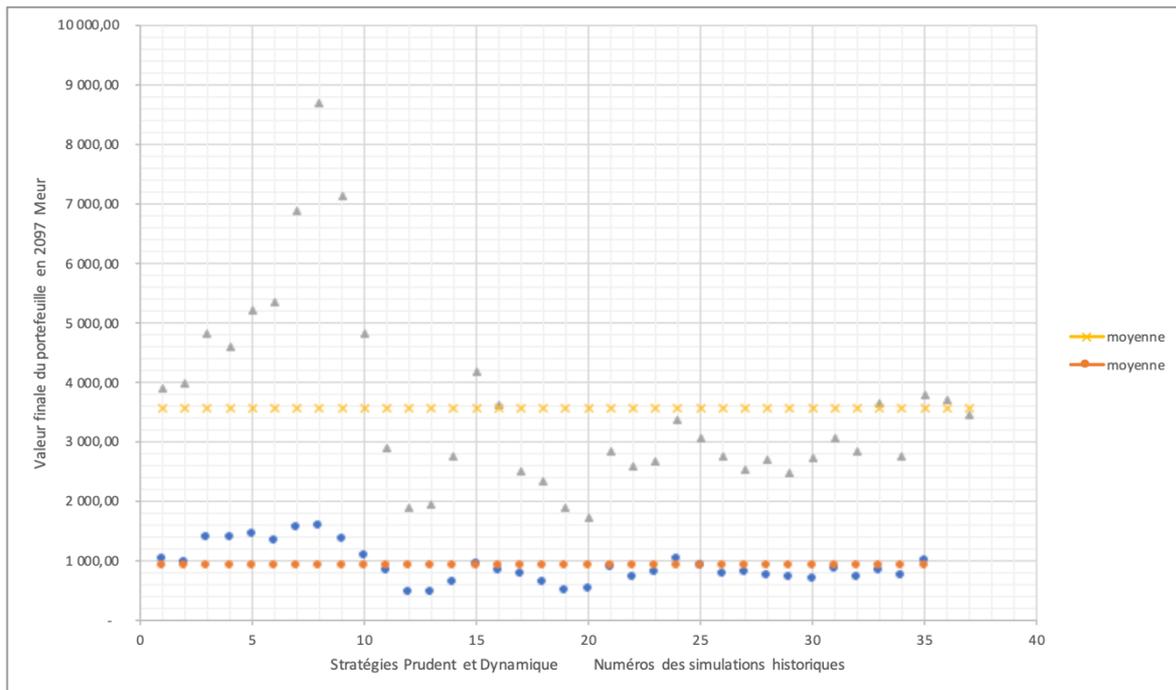
After these two tests, we carry out a dynamic analysis using historical simulations. We use quantities actually observed (they are plausible), their historical evolution (are they cyclical or not?) and their synchronization (are they correlated or not?). Series are formed, each beginning with a year taken from the thirty-five years of history and those that follow until 2023, then the same historical series, or even a second one, is concatenated to cover the entire period studied (the chronology is only broken at the junction points where we go from 2023 to 1988).

The results of these simulations seem unrealistic at first glance, since the average final balances in euros in 2097 range from €0.9 bn to €3.7 bn, depending on the steering strategy.

Simulations Histo	Moyenne	Ecart-type	Maximum	Minimum
Cas Prudent	941 M€	306 M€	1583 M€	468 M€
Cas Stable	1962 M€	711 M€	3926 M€	1014 M€
Cas Dynamique	3666 M€	1577 M€	8707 M€	1736 M€

These figures become a little more credible when transformed into 2024 euros with a deflator of 0.10 (obtained with a discount rate of 3.20%). Despite this discounting, the amounts expressed in 2024 euros are still high: they are comparable to the amount of the current portfolio. The final balances of the three strategies provide an initial hierarchy: the Dynamic strategy, which is the riskiest in appearance, is also the most efficient, since it leads to no instances of ruin in the thirty or so historical trajectories simulated (like the other two less risky strategies).

The following graph shows the final values (in 2097) of the portfolio in the two extreme strategies (Prudent and Dynamic) obtained with the historical simulations (and their two averages). It can be seen that these values are highly dependent on the start date of the sequence of financial performances: favorable sequence starting in 1996, or unfavorable sequences starting in 2000, 2001 or 2008. These are the dates of the boom and crash years. The Dynamic strategy is always superior to the Prudent strategy, since for each simulation it gives a significantly higher final balance, and its lowest value is higher than the highest value of the Prudent strategy.



The influence of mortality was sought using historical simulations, by shocking instantaneous mortality rates by -10% (Solvency 1 shock applicable to ORPS). We did not recalculate the annuity history with the modified table, but applied a uniform shock of 5% to it, as several studies have shown that the impact of the 10% shock modifies the annuity history by around 3% (which is not very significant). The impact on average final balances (and their standard deviations) is modest: decreases of less than 10%.

At first glance, historical simulations have several advantages: they are simple in principle, easy to understand, there is no modeling, just values already observed, and they respect the correlations between variables and their chronologies. But even if the depth of history is sufficient, they overlap and don't allow you to explore a wide range of configurations. Finally, they are directly dependent on the historical series selected, with the risk of a regime change (the same constraint applies to parameters derived from historical series and used in Monte Carlo).

The results obtained from historical simulations depend on the position of the sequence applied: when the beginning of the chronicle is a good period, the portfolio's evolution is driven by performance, which is then partly protected by CPPI-type management, which reaps part of the gains and invests relatively more in slack periods. When, on the other hand, the beginning of the chronicle is a depressed period, the portfolio finds it harder to maintain and rebound.

Before running Monte Carlo simulations, we apply fixed values of portfolio performance and inflation to the township's ALM model until extinction. The total portfolio return and the inflation rate are varied between 0% and 5%. We construct the matrix giving the final portfolio balance as a function of the 36 possible pairs. This simplified approach ignores the volatility of risk factors by relying solely on averages.

We can see that if average portfolio performance is higher than average inflation, the final balance is positive or even strongly positive. The converse is also true: if inflation exceeds return, insolvency is a certainty. When the two rates are equal, the final balance is close to zero in 2097, confirming the canton's equilibrium in 2024. The impact on the final balance of a 1% increase in the financial yield or the revaluation rate is different, and it is not possible to calculate an (almost) constant sensitivity for all rates. The behavior of the balance is comparable to that of the price of an option, and is non-linear (or convex).

Solde final en 2097	Revalo 0%	Revalo 1%	Revalo 2%	Revalo 3%	Revalo 4%	Revalo 5%
Rendit financier 0 %	-2 M€	-21 M€	-45 M€	-74 M€	-112 M€	-159 M€
Rendit financier 1 %	+27 M€	-4 M€	-44 M€	-92 M€	-153 M€	-230 M€
Rendit financier 2 %	+111 M€	+57 M€	-9 M€	-90 M€	-190 M€	-314 M€
Rendit financier 3 %	+320 M€	+228 M€	+117 M€	-18 M€	-183 M€	-386 M€
Rendit financier 4 %	+809 M€	+652 M€	+464 M€	+238 M€	-35 M€	-369 M€
Rendit financier 5 %	+1909 M€	+1639 M€	+1320 M€	+939 M€	+483 M€	-69 M€

After these simple simulations, we retain the entity's ALM model to estimate the final value of its portfolio, and we generate the values of the three risk factors by performing random draws. The equity index is modeled by the classic lognormal distribution (Black & Scholes) and the two interest rates by normal distributions. The parameters of these three laws are deduced from the historical series already used. Ten sets of a thousand trajectories are run, and the mean values and standard deviations of the selected solvency indicators are calculated.

Monte Carlo simulations have a number of advantages: they are easy to set up and to explain in the case of risks treated as random variables. We first compare the results obtained with the two types of simulation and 2097 as the observation date. Agreement is satisfactory for all three strategies, but deteriorates as the strategies become riskier.

Simulations Histo vs MC	Moyenne Histo	Ecart-type Histo	Moyenne MC	Ecart-type MC
Cas Stable	1906 M€	711 M€	1383 M€	1135 M€
Cas Prudent	911 M€	306 M€	784 M€	506 M€
Cas Dynamique	3570 M€	1577 M€	2300 M€	2758 M€

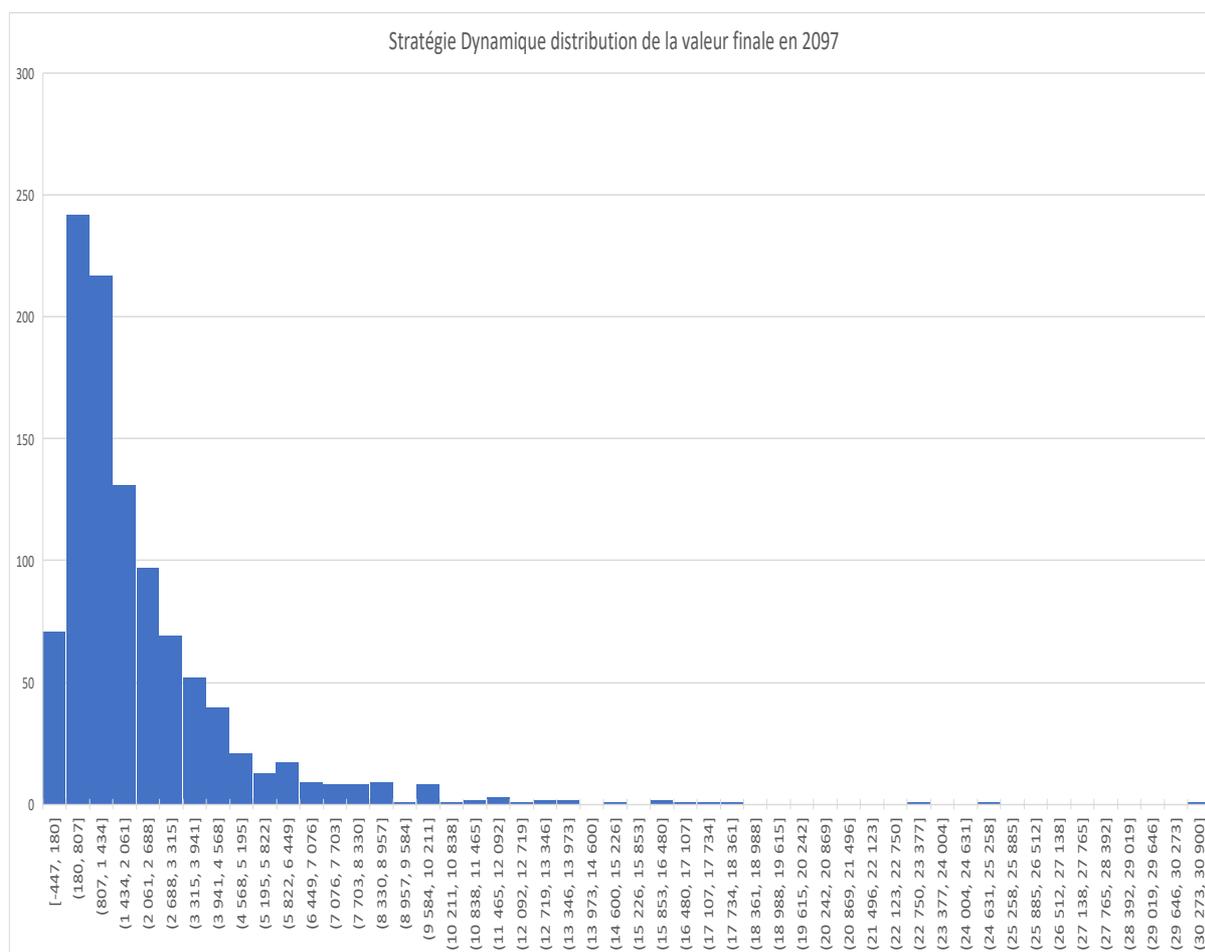
The final balance averages obtained in historical simulations are always higher than those derived from Monte Carlo simulations. The standard deviations of the final balance obtained in historical simulations are always significantly lower than those from Monte Carlo simulations, with relative deviations of between 60% and 75%. These two findings are not surprising, since Monte Carlo simulations allow us to explore more possibilities (in this case, more than ten thousand independent trajectories, with zero correlations) than historical simulations, and they provide more widely dispersed extreme amounts (the range increasing with the number of simulations, of course). The use of real (and non-zero) correlations and simulations with the observed chronology of performance/rates (and not a random chronology) may also explain some of the differences.

Monte Carlo simulations always provide more conservative pairs (lower means and higher standard deviations): for this reason, and for the findings presented above, we will only use Monte Carlo simulations in the remainder of this essay.

In Monte Carlo simulations, whatever the strategy adopted, the probability of failure is below the realistic threshold of 2.50%, but above the rigorous threshold of 0.50%. The hierarchy of probabilities is in line with that of risk-taking reflected by average equity exposure, and is intuitively consistent. The average final balances and their standard deviations increase with risk, and the indicators are homothetic. The riskier the portfolio, the higher its returns, but with greater dispersion; however, cases of ruin increase relatively less rapidly. These values are subject to significant uncertainty (measured by standard deviations over a thousand trajectories): 0.40% for the probability of failure (for the four strategies) and between €15 and €25 million for losses in the event of failure, depending on the strategy.

Monte Carlo 2097	Solde final moyen en M€	Ecart-type en M€	Probabilité de ruine en %	Ratio Ecart-Type /solde final moyen	Solde négatif moyen en cas de ruine M€	Solde négatif inconditionnel M€
SuperPrudent	622	386	1,56%	0,62	-88	-1,37
Prudent	784	506	1,61%	0,65	-109	-1,75
Stable	1383	1135	1,72%	0,82	-101	-1,73
Dynamique	2300	2758	2,11%	1,20	-118	-2,49

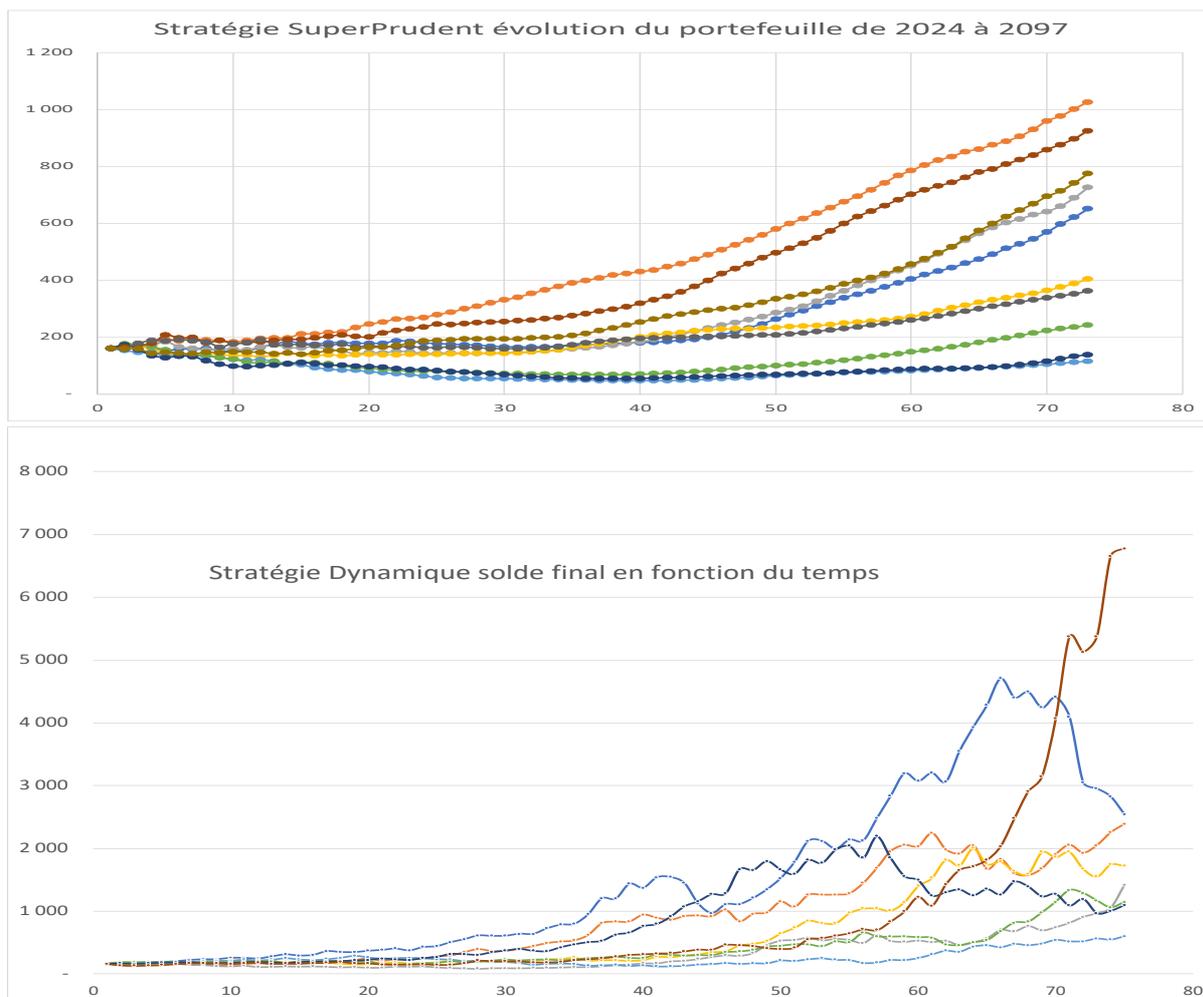
The empirical distributions of the final values have the appearance of a lognormal distribution with a favorable skewness. The following graph shows the histogram of 1,073 trajectories in the Dynamic case, with revaluations calculated on inflation alone and an observation date of 2097. The trajectories and their dispersion reflect the competition between fruiting and harvesting.



The following two figures show ten trajectories up to 2097 for the two extreme strategies: SuperPrudent and Dynamic.

The scales of the final balance are very different (€1.2 bn vs. €8 bn), and the capitalization over the last thirty years is clearly visible for the Dynamic strategy. No instances of ruin are observed in these two (too) small samples: we would need a hundred or so trajectories to observe any.

Two variants for obtaining lower nominal final balances have been explored with Monte Carlo: revaluing annuities on the maximum between inflation and a percentage (to be determined) of the portfolio's smoothed financial performance, or positioning the observation date closer to 2077 or even 2060.



By indexing annuities to the portfolio's smoothed performance, we are able to deplete it more rapidly, thanks to the ratchet mechanism of revalorizations: they are definitively acquired, unlike the value of the share pocket, which can decline from one year to the next, before any rebalancing. This mechanism is similar to life insurance profit-sharing, but differs from it because of the ratchet effect on the one hand, and because profit-sharing reflects the result for the year (possibly smoothed by the mechanism of provisions and piloting) on the other. The portfolio's smoothed performance is the eight-year average of the performances of the two pockets, weighted by their amounts in the year of revaluation. The revaluation is based on the maximum between a fraction of this performance and the inflation rate (which is always the positive or zero floor rate). Even with a percentage of 50%, all the strategies show percentages of ruin exceeding the realistic threshold of 2.50%. For this reason, we will always revalue annuities to inflation without reference to past portfolio performance. Even with the SuperPrudent strategy (where the ratio of the equity portfolio decreases by 1% per annum), this 2.50% threshold is exceeded. Note that the hierarchy of risks is transposed into that of the probability of ruin and that of average losses in the event of ruin; while that of average final balances and their standard deviation is reversed. On the other hand, the average life expectancy in the event of bankruptcy is fairly insensitive.

Stratégie (2097) % de Participation	Solde final moyen en M€	Ecart-type en M€	Probabilité de ruine	Déficit moyen en cas de ruine en M€	Durée moyenne avant ruine ans
SuperPrudent 50 %	450	302	3,17%	-99	34
Prudent 50 %	575	412	3,28%	-115	33
Stable 50 %	982	859	3,95%	-136	32
Dynamique 50 %	2078	3161	6,26%	-149	33

The other way of reducing the final balance amounts is to select an earlier observation/termination date. Still using inflation adjustments, we compare the risk indicators used at the three dates for the Stable strategy.

Stable revalorisation sur l'inflation en 2097 et 2077	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Stable 2097	1383	1135	1,72%	-101	33
Stable 2077	568	421	1,71%	-47	33
Stable 2060	271	181	1,61%	-23	30

The probability of ruin hardly increases when moving from 2060 to 2097, while the mean and standard deviation of the portfolio amount more than double at each step. To reduce the balances expressed in current euros at the three observation dates to their deflated values in 2024, we apply divisor coefficients of 10 for 2097, 5.3 for 2077 and 3 for 2060. The discounted balances in euros in 2024 double from one extinction date to the next. We look for the capitalization rates that bring the average amount for 2060 to those for 2077 and 2097, and obtain 6.04% and 6.68% respectively. These two rates are close to the average rate of return of the portfolio, with a stable equity portfolio at 30%, based on average return values of 10% for equities and 3.15% for bonds, i.e. a weighted rate of 5.20%. Between 2060 and 2097, the last annuities paid are lower than the portfolio amounts: the capitalization of the balance between two observation dates is dominant. This ultimate capitalization blurs the analysis, and in subsequent analyses we will use either the 2077 date, which is ultimately more representative, or 2097 (the probable rigorous extinction date), but not 2060, which is (relatively) too close.

The sensitivities of the final average balance in 2097 (in order to observe extreme behavior) to pairs of parameters representative of the three risk factors have been sought by multiplying or dividing them by two. We do not vary them incrementally, due to the non-linear nature of the final balance and the high sensitivity of first derivatives to variable levels. This is more akin to a stress-testing approach than to a conventional calculation of sensitivities.

Equity risk is intrinsically the highest, compared with risks on the two interest rates (interest and inflation), but the average weighting of the equity pocket remains relatively minor in the four strategies, ranging between 15% and 45%.

Stratégie et couple Rendement/Risque Action	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Stable (10% ; 20%) Base	1383	1135	1,72%	-101	33
Stable (5% ; 10%)	475	271	0,82%	-57	36
Stable (5% ; 20%)	271	362	16,38%	-143	31
Stable (10% ; 40%)	126	845	43,74%	-334	25
Stable (20% ; 40%)	3930	6560	9,02%	-256	27

The halving of the risk/return ratio translates into a drop in all risk indicators, which are significantly better than those of the SuperPrudent strategy. This pairing is not typical of an equity index, but rather of a High Yield bond index. Halving the yield from 10% to 5% at a fixed volatility (20%) is far more penalizing: volatility worth four times the yield leads to an unacceptable probability of ruin. Both the absolute amounts of the two parameters and their ratio (here 4) explain this observation. The penalty is even more severe when volatility is doubled to 40%, while yield is maintained at 10% (still the ratio of 4): there's a 50/50 chance of insolvency, an unthinkable situation as extreme volatility severely compromises average yield. Finally, doubling the initial yield/volatility ratio for equities leads to a threefold increase in the final average balance and a sixfold increase in its dispersion, but also in the probability of ruin. These results are instructive, but they need to be put into perspective, as it's quite unlikely that we'll see these couples with "atypical" values over several decades: periods of high volatility (absolute or relative) may occur, but they generally don't last.

We calculate the expression $(\mu - \sigma^2/2)$ for these pairs: we obtain 9.50% for the pair (10%; 20%); 4.50% for the pair (5%; 10%); 3.00% for the pair (5%; 20%); 2.00% for the pair (10%; 40%) and 12.00% for the pair (20%; 40%). This single indicator encompassing both parameters loses information and cannot be used as a synthetic measure: its hierarchy is not strictly identical to that observed: you need to know both the return and its dispersion to assess the total risk of the equity pocket. The most penalizing cases are representative of highly improbable situations, but they have been explored here.

We proceed in the same way with the TEC 7 average rate/volatility pair.

Stratégie et couple Rendement/Risque TEC	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Stable (3,8% ; 3,1%) Base	1383	1135	1,72%	-101	33
Stable (7,5% ; 6,3%)	12960	9853	0,01%	SO	SO
Stable (1,9% ; 1,6%)	350	392	12,08%	-31	124
Stable (3,8% ; 6,3%)	1433	1420	3,20%	-153	31

In this case, doubling the risk/return ratio of the bond portfolio (which is generally in the majority) has the opposite effect: solvency is significantly improved, and ruin is virtually impossible. This is not surprising, since the portfolio's yield far exceeds inflation, and the capitalization effect of the balance until 2097 is fully in play (the figure of 13 billion is correct..., it is still equivalent to 1.3 billion in euros in 2024, which is extravagant but illustrates the exponential effect of capitalization at 7.50% for several decades), and the volatility of the rate is not too penalizing. It is highly unlikely that such an average level of interest rates will coexist durably with average inflation of less than 2%.

This is the limit of reasoning “all things being equal”; varying all risk factors at the same time is more realistic, but quickly leads to a myriad of configurations that are difficult to order. On the other hand, halving the risk/return ratio of the bond portfolio makes the canton too often insolvent (one time out of eight), since in this case the yield is just a little above the level of inflation (1.90% vs. 1.80%), but its volatility is also higher (1.60% vs. 1.15%). Once again, we come to the intuitive conclusion that it is the hierarchy between portfolio's performance and inflation which, in the present case (“balanced” canton in 2024), determines whether or not satisfactory solvency is maintained. Finally, doubling the volatility of the rate of return on a sustained average degrades solvency because it ultimately degrades the corrected return (even if the average final value and its dispersion are little affected).

We end this exploration with the average rate/inflation volatility pair, which is the dual of the bond rate.

Stratégie et couple Rendement/Risque Inflation	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine
Stable (1,8% ; 1,15%)	1383	1135	1,72%	-101	33
Stable (3,6% ; 2,3%)	636	940	23,82%	-284	30
Stable (0,9% ; 0,6%)	1650	1206	0,17%	-52	34
Stable (1,8% ; 2,3%)	1276	1106	3,32%	-150	32

Doubling the risk/return ratio of the inflation rate precipitates insolvency: this becomes unacceptable, with ruin one time out of four, as inflation is permanently higher than the portfolio's rate of return, consuming it in its entirety and beyond. Symmetrically, halving the risk/return ratio significantly improves solvency, since the return is always higher than inflation. Finally, doubling volatility doubles the probability of ruin compared to the base case (even though the final balance and its standard deviation vary little), since only positive inflation is taken into account.

In the Dynamic strategy, we have applied the two most adverse configurations of the pair of action parameters, and we find that the probability of ruin and the deficit in the event of ruin are practically unaffected by the strategy; the deterioration is modest compared with the Stable strategy.

In conclusion, there is no single risk factor that is clearly more critical than the others. In the end, bond and inflation rate risks are just as potentially dangerous as equity risks, because the risk bases are larger: the bond portfolio is on average twice as large as the equity portfolio, and the mathematical reserve is practically equal to the sum of the two, with the added benefit of the ratchet effect.

We end our exploration of possibilities with Monte Carlo simulations, using Planchet and Thérond's hypothesis on the various initial percentages of the share pocket, which are then always maintained at this level over time. The observation date here is 2077. Like these authors, we find that the probability of ruin increases with the initial percentage of risky assets, which is in line with intuition.

Pourcentage poche actions fixe 2077 Indexation inflation	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Stable 10 %	289	133	0,14%	-22	36
Stable 30 % Base	568	421	1,71%	-47	33
Stable 50 %	1006	1149	6,24%	-95	28
Stable 70 %	1811	3064	11,16%	-137	25
Stable 0 %	195	92	0,26%	-14	39
Markowitz 7 %	260	115	0,11%	-26	35
Stable 20 %	411	237	0,55%	-40	33

We limit ourselves to 70% of shares, which leads to too high a probability of ruin, as is the case with 50%. We need 30% (the Stable strategy) to remain at an acceptable level below the realistic threshold of 2.50% which is reached for a ratio of 35%. This fixed ratio of 35% had already been obtained by C.L Walle in his 2017 dissertation published by the Institut des Actuaire on an entity with very similar characteristics to the canton studied here, using an economic scenario generator. This ratio is near the maximum level observed in France for younger entities wishing to generate wealth for the future when they enter the consumption phase (for example, the RAFP at 40%), not to mention the most dynamic US or British pension funds, which go as high as 70%, which seems to be the maximum limit (70% is also the percentage invested in international equities in the Norwegian sovereign wealth fund in mid-2024, whose horizon is much longer). In Markowitz's approach, the portfolio containing 7% equities is the most efficient (maximization of return vs. risk/volatility); and we obtain an average probability of ruin of 0.11% (which is indeed the lowest level: the optimal portfolio is also optimal with the canton's chronicle of annuities). This is the least risky strategy, with an average final balance and standard deviation between those of the 0% and 10% strategies. With 20% equities at all times, the average probability of ruin is 0.55% (just above the strict 0.50% threshold, which is equal to the Solvency 2 VaR threshold, but on a totally different time horizon).

For every 20% increase in the equity portfolio, the average final balance practically doubles, while its standard deviation triples. The probability of ruin increases relatively more at lower percentages. Increasing the ratio from 30% to 50% proves unattractive, since the average balance doubles, but the probability is multiplied by four and the standard deviation by three; risk indicators deteriorate relatively more than final wealth expectancy.

Equities are generally presented as the driving force behind the performance of a funded pension plan (or PER), as there is a virtual certainty that an equity index will always be the best performer over the long term. This presupposition is widely shared, and has been verified on the US and European markets over long periods containing crises and rebounds. The Nikkei 225 over the period 1980 to 2023 is, in a way, the exception that proves the rule, since the index first fell from 39,000 in 1989 to 7,800 in 2003, then returned to 7,500 in 2009 and has since rebounded to reach 40,000 in March 2024. It will therefore have taken thirty-five years to return to the 1989 level (expressed in current currency, like all indices, by the way...). This counter-example, observed on an OECD stock market (but peculiar in certain respects of governance or monetary/financial policy) and representative of a long period, shows the possibility of having a national stock market that is durably depressed. To avoid this pitfall, the best solution is to adopt global diversification, such as investing in the MSCI World index, in line with Markowitz's market portfolio theory.

We have not used the Vasicek model for the two rates, but for the equity index we have used the two-state Hardy model alongside the lognormal model. This model assumes that the index follows several lognormal regimes, in this case two (calm and crisis), and that the transition from one to the other is a Markov chain. For two states, there are six parameters: two yield/volatility pairs and two transition probabilities. These parameters are obtained by global maximum log-likelihood optimization. Using the model's mechanism, we can then generate future index values with these parameters. The Hardy model is found to be conservative, as it provides slightly thicker distributions for low values than the classical lognormal model, a point highlighted in the 2001 paper. It is well-suited to use in credit (or risk) monitoring, but obtaining the parameters is rather tricky, and some of them, such as the transition's probabilities, are subject to non-negligible uncertainty. Hardy's model estimates average monthly returns (which is to be expected, since they were used to calibrate the model) and their extreme values with good accuracy, but tends to underestimate observed volatility. This is a point that requires further work.

When couples are homogeneous between the two models, the Hardy model provides more conservative solvency/risk indicators. The following table brings them together with those obtained with the log-normal model for the Stable strategy and 2097 as observation date.

Stable revalorisation inflation en 2077 Hardy et B&S	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Duréemoyenne avant ruine
Hardy Moyennes	281	174	1,10%	-26	36
Hardy Ecart-types	9	14	0,26%	11	3
Log-Normal Moyennes	355	206	0,72%	-30	35
Log-Normal Ecart-types	7	11	0,31%	10	2

In conclusion, having used two types of simulations (historical and Monte Carlo), two models to generate future returns on the equity index (log-normal and Hardy's two-state model) and historical data covering almost forty years (injected into the historical simulations or used to calibrate the models), we can answer the question that forms the title of this thesis: “What asset allocation for a supplementary pension scheme managed in extinction?” and draw a few lessons.

First of all, we have found that historical simulations are unsuitable, unconservative and too limited in scope, despite their simple, easy-to-understand nature. Only Monte Carlo simulations allow us to explore a very large number of configurations, and to reveal a few cases of ruin. They are also flexible enough to perform sensitivity analyses akin to stress tests. Finally, it is not necessary to simulate the entity's ALM up to the ultimate date of 2097 to calculate the risk/solvency indicators. 2077 is a satisfactory observation date.

To answer the main question, and even if these conclusions depend on the characteristics of the canton studied and should not be extrapolated, certain general principles remain valid:

For the IRPS canton studied, we can keep the equity ratio at 30% of total portfolio value until extinction. In this way, we follow the “prudent person” principle, which translates here into a probability of ruin of 1.7% below the realistic probability of ruin threshold of 2.50% (“one ruin every forty years”). Maintaining this performance pocket at 30% is possible under a few conditions: managing the ratio with the market value of this pocket in a counter-cyclical CPPI-type management (“buy low and sell high”), maintaining over the long term the “natural” hierarchy between the yield of a well-diversified equity index, the medium-term government rate and finally the YoY domestic inflation rate. This hierarchy is based both on the observation of OECD financial markets over almost a century (and crises do not contradict it; they produce periods of retracement/rebound) and on fairly uncontroversial economic theories. The counter-example of the Nikkei 225 seems to be unique, taking some forty years to return to its starting level; even in this case, entries and exits at current levels moderate the observation on the absolute level of the index alone (CPPI or average option effect). Finally, it is advisable to further diversify the equity portfolio (on US and international markets) to improve the risk/return ratio.

The Prudent strategy is facially less risky, with an average probability of ruin of 1.6%, but it doesn't provide a margin of safety with a portfolio that is yielding relatively less. Choosing it by imitation, with the constraint of preserving capital at a given date (as at the end of the savings phase of a retirement plan), is an error of reasoning coupled with misunderstood arguments of prudence.

The Dynamic strategy is marginally riskier, with an average probability of ruin of 2.1%, but generates significantly higher average surpluses than the other two. A strategy based on increasing the weight of the equity component is well suited to managing an individual pension plan in the consumption phase, when the consumption of accumulated savings does not constitute the holder's entire pension, but a fraction of up to 50% (as in countries where pension funds are well developed). In this case, the capital can continue to grow within a tax-advantaged envelope. Risk appetite is different, deductions may be modulated and the residual balance at death may be passed to heirs rather than pooled, or reverted to the employer. In other countries (USA, Great Britain), studies have been conducted on the asset allocation during the consumption-phase of a pension plan. With the advent of PER's and soon of their consumption, it would be necessary for a similar approach to be taken and for standard allocations to be proposed, as in the savings phase.

PREAMBULE

L'avenir des régimes obligatoires de retraite gérés par répartition intéresse les Français chaque fois qu'une nouvelle réforme est annoncée. Cet intérêt se manifeste aussi lorsque les actifs les plus âgés consultent leur relevé de carrière pour connaître le montant estimé de leur retraite. Cet intérêt personnel et les débats publics autour des réformes sont compréhensibles : la plupart des adultes sont concernés car ils sont soit déjà retraités (et surveillent les revalorisations) soit de futurs retraités qui s'interrogent sur le montant futur perçu. Tous perçoivent, plus ou moins clairement, que l'équilibre à long terme de ces régimes se dégrade continûment, qu'ils cotiseront un peu plus pour percevoir un peu moins...

Face à ce problème identifié depuis des décennies, les pouvoirs publics introduisent régulièrement des réformes plus ou moins ambitieuses qui visent à infléchir cette trajectoire. Selon les cas, la réforme introduit des mesures visibles présentées comme volontaristes, ou se contente de procéder à des ajustements paramétriques moins spectaculaires mais probablement aussi efficaces car mieux acceptés (et probablement moins bien compris). La dernière réforme votée mi 2023 a été présentée comme ambitieuse car elle mettait l'accent sur le repoussement de l'âge de la retraite et sur l'allongement des durées de cotisation ainsi que la fermeture de la plupart des régimes spéciaux. Les deux premières mesures visent à améliorer à moyen /long terme l'équilibre des systèmes par répartition. Ceux-ci sont fragilisés par le déséquilibre démographique tendanciel, le recul de l'âge moyen d'entrée dans la vie active et aussi par des carrières professionnelles moins régulières avec des périodes de faibles cotisations plus fréquentes. Cette réforme, la cinquième depuis trente ans (1993, 2003, 2010, 2014), marque la poursuite du durcissement des paramètres de calcul (tels que la durée de cotisation et l'âge de départ minimal) après la phase d'allègement des vingt années précédant le virage de 1993 et qui avait culminé avec l'instauration de la retraite à soixante ans au début des années 80. L'actualité politique de 2024 remet cette dernière réforme en question et cristallise des visions opposées de la situation et des mesures correctrices à apporter.

La question des retraites est souvent au centre de débats où s'affrontent des positions de principe face à des arguments plus techniques, au milieu de querelles de chiffres souvent confuses. Une première difficulté est de rendre la technicité du sujet le plus possible accessible, jusqu'à un certain point car le sujet n'est pas simple. L'autre est d'éviter de considérer que la situation n'est pas vraiment critique et de repousser les mesures d'austérité aux générations suivantes, une tentation entretenue par l'éventail des scénarios présentés comme dans le rapport du COR de 2023. Le revirement du COR avec l'adoption d'un scénario central dans son rapport 2024 marque le changement opéré vers une plus grande lisibilité et la mise en évidence d'un problème bien réel et non seulement possible selon le scénario choisi. Le parallèle avec la dégradation simultanée des finances publiques est à méditer.

Les analyses ou interprétations divergentes faites à partir des simulations du Conseil d'Orientation des Retraites (COR) jusqu'à son rapport 2023 ne contribuaient pas à éclairer les débats, car l'éventail des hypothèses et la dispersion des résultats obtenus entretenaient le doute chez les lecteurs et a fortiori les commentateurs qui rejetaient la version qui cadrait avec leurs a prioris. Le rapport du COR qui « fait foi » est souvent commenté sous l'angle de la sensibilité à quelques hypothèses (taux de croissance, de chômage, ...). Celui publié mi 2023 tablait en particulier sur l'hypothèse d'un retour au « plein emploi » avec un taux de chômage de 5 % en 2027 puis de 4,5 % au-delà, une projection volontariste fournie par les pouvoirs publics ; d'autres hypothèses également optimistes comme les taux de croissance futurs (ou celui des gains de productivité) pouvaient également être questionnées en regard de leurs dernières valeurs mesurées.

Le rapport annuel 2024 du COR revient à un scénario unique (comme entre 2001 et 2007) et livre un constat assez pessimiste, alors même qu'il intègre complètement dans ses projections les effets correcteurs de la réforme votée en 2023. Le COR indique que dans son scénario central « ...le solde du système de retraite, excédentaire en 2023, serait de nouveau en déficit dès 2024et resterait déficitaire sur l'ensemble de la période de projection... » (soit jusqu'en 2070, le terme de celles-ci). Ce constat n'est pas vraiment rassurant, et même si certaines hypothèses trop optimistes ont été revues à la baisse, d'autres sont encore volontaristes comme le taux de chômage qui devrait passer d'un peu plus de 7% en 2023 à 5% en 2030 et s'y maintenir ensuite jusqu'en 2070 (il faut souligner que ce taux a fluctué entre 7 % et 10,5% de 1982 à 2022 et n'est jamais passé en-dessous de 7%). Deux variantes moins

optimistes du taux de chômage : un taux constant égal à 7% ou à 10 % entre 2024 et 2070 ont aussi été explorées. La lecture de ce rapport fournit également de nombreuses informations : économiques, financières, démographiques, ... indispensables dans l'analyse prospective d'un système par répartition et utiles au citoyen.

Les Français sont attachés aux régimes de retraite par répartition créés après 1945 car c'est le système qui a permis aux générations actives des « trente glorieuses » de bénéficier de retraites décentes, qui sont devenues relativement confortables, alors même que l'espérance de vie en bonne santé augmentait. Ils ont également constaté que le système par répartition a traversé sans encombre les crises financières de la fin du vingtième siècle : les deux chocs pétroliers et les différentes crises financières jusqu'à celles de 2008 et de 2014.

Les Français sont en même temps conscients du déséquilibre croissant des systèmes de retraite par répartition dont l'équilibre repose sur le rapport entre les effectifs des actifs et des retraités (et surtout des masses financières attachées), et que ce ratio décroît inéluctablement. La persistance d'un chômage élevé, des carrières moins linéaires ou moins génératrices de cotisations, et des allègements de charges sociales génèrent tendanciellement moins de cotisations. Les gains de productivité, qui étaient le moteur de performance pendant les « trente glorieuses », sont désormais durablement faibles. Enfin l'entrée dans la vie active est de plus en plus tardive, pour tous les types de populations : ce constat couplé à la nécessité de l'allongement de la durée de cotisation repousse mécaniquement l'âge moyen de départ en retraite. Le montant moyen des retraites risque également d'être affecté : le taux de remplacement moyen continuera à se réduire par rapport à son niveau actuel.

Depuis plusieurs décennies, certaines branches professionnelles offrent à leurs salariés des régimes de retraite supplémentaires gérés en capitalisation pour compléter les rentes qui seront versées par les régimes obligatoires de retraite par répartition de la CNAVTS et les retraites complémentaires par répartition de l'ARRCO/AGIRC. Ce troisième pilier recouvre plusieurs types de régimes, à côté des « articles 39 » et « article 83 » souvent qualifiés de retraites « chapeau » et réservés à des populations assez restreintes. D'autres régimes concernent des effectifs plus nombreux (PREFON, retraite mutualiste du combattant, régimes supplémentaires des élus locaux, retraite additionnelle de la Fonction Publique). Au total près de 3 millions de personnes (soit 12% des retraités) perçoivent des prestations de ces régimes (dont 2,4 millions des rentes viagères), en incluant les PERP.

Dans le débat sur l'avenir des retraites, le recours progressif au système par capitalisation a été présenté par certains comme la solution de bon sens, voire comme celle qui résoudra le problème sans trop d'effort, en citant l'expérience d'autres pays. Des considérations comme le financement des entreprises moyennes et petites et de la transition écologique sont également avancées par les pouvoirs publics pour parfaire l'argumentaire et vouloir diriger une fraction de l'épargne-retraite future vers ces axes jugés prioritaires.

Les partisans des fonds de pension citent les avantages de la capitalisation par rapport à la répartition, en particulier la quasi-certitude de retrouver ses versements et de bénéficier de leur fructification. Ils oublient généralement de mentionner, par ignorance ou à dessein, que cette certitude n'est pas absolue et que les crises sévères et l'inflation peuvent réduire drastiquement le pouvoir d'achat de l'épargne accumulée. Certaines catégories de salariés français (désormais décédés) qui avaient cotisé à des régimes de retraite par capitalisation dans l'entre-deux guerres ont vu leurs pensions réduites presque à néant avec le passage de la crise des années trente puis de la forte inflation de la seconde guerre et des quelques années suivantes, une période assez sombre il est vrai. Ces générations éprouvées ont bénéficié de la mise en place du système des retraites par répartition de l'après-guerre et de la solidarité intergénérationnelle grâce aux cotisations des jeunes actifs de l'époque et de dotations de droits gratuits. C'est la solidarité intergénérationnelle qui a financé leurs pensions : leur situation personnelle n'a pas été catastrophique finalement et les systèmes par capitalisation -défaillants- n'ont pas été stigmatisés par cet échec dû à des causes exceptionnelles et qui n'a pas eu de conséquences visibles.

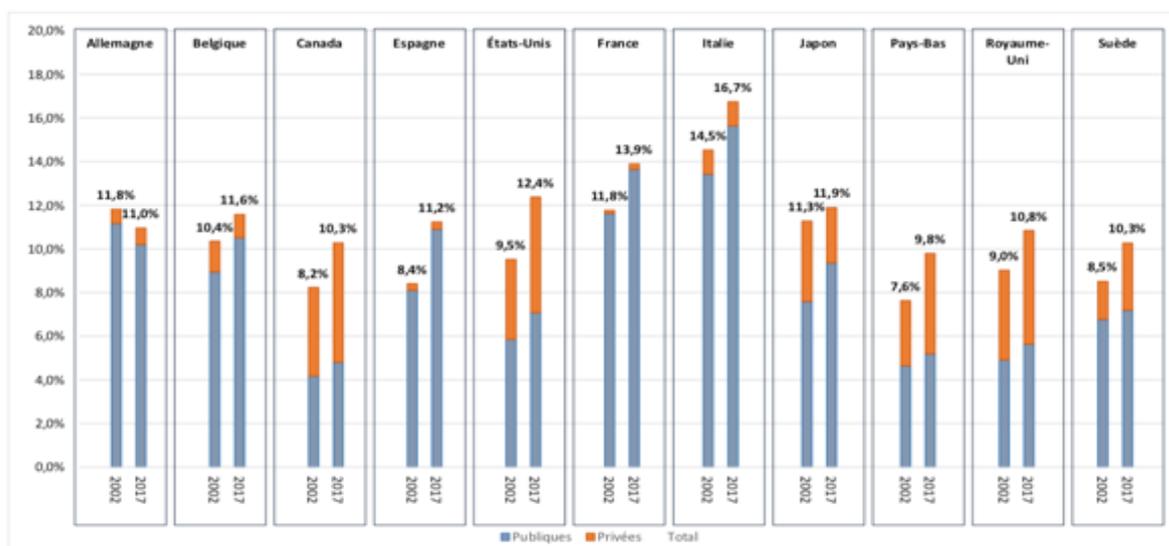
Dans les pays anglo-saxons et scandinaves, les fonds de pension par capitalisation sont un élément important, mais pas dominant généralement, des systèmes de retraite. Ces systèmes coexistent toujours à côté d'un système étatique de type Beveridgien qui sert de filet social.

L'avis publié en 2023 par Comité de Suivi des Retraites (CSR) sur le rapport du COR 2023 présentait les pourcentages de PIB respectifs des systèmes de retraite « public » et « privé » dans plusieurs pays de l'OCDE en

2002 et en 2017, cf la figure 1 infra. Dans quatre pays, les systèmes « privés » (qui sont assimilables aux fonds de pension) représentent en 2017 presque la moitié de l'ensemble des retraites en pourcentage : 53 % au Canada, 48 % au Royaume Uni, 47 % aux Pays Bas, 43% aux Etats-Unis. Les trois pays du sud de l'Europe se situent à l'autre extrémité, la France occupant la dernière place avec moins de 4 %, l'Italie en tête avec 7%.

Les évolutions 2002/2017 sont également intéressantes : il y a eu recul en Allemagne et forte croissance en Espagne (33 %), aux USA (30 %), aux Pays Bas (29 %), au Canada (26 %), en Suède (21 %) et en France (18 %). Ces fortes progressions sont observées aussi bien dans des pays avec un fort taux de retraite par capitalisation, (probablement par effet de base) que dans ceux en queue de peloton : l'Espagne et la France se situent dans ce groupe de forte croissance des dépenses privées et se placent également en tête du niveau des dépenses totales pour la retraite rapportées au PIB.

Le ratio des dépenses de retraite (publiques et privées) par rapport au PIB est l'indicateur approprié dans les comparaisons entre pays : l'Italie et la France se situent sensiblement au-dessus des autres nations comparables. Ce sont aussi deux pays « vieux » en termes démographiques : la population des plus de 65 ans y atteint respectivement 23,8 % et 21% (la moyenne européenne est de 21 %). Les autres pays « vieux » sont le Portugal avec 23,7% et la Grèce 22,7 % ; la Finlande est le seul pays scandinave à être au-dessus de la moyenne de l'Europe avec 23,1 %, enfin de manière assez surprenante le pays le plus « jeune » est le Luxembourg avec 14,8 % de la population âgée de plus de 65 ans (les expatriés – non nationaux- travaillant au Luxembourg ou certains nationaux échappent probablement à la statistique en prenant leur retraite dans leurs pays d'origine ou loin du Grand Duché).

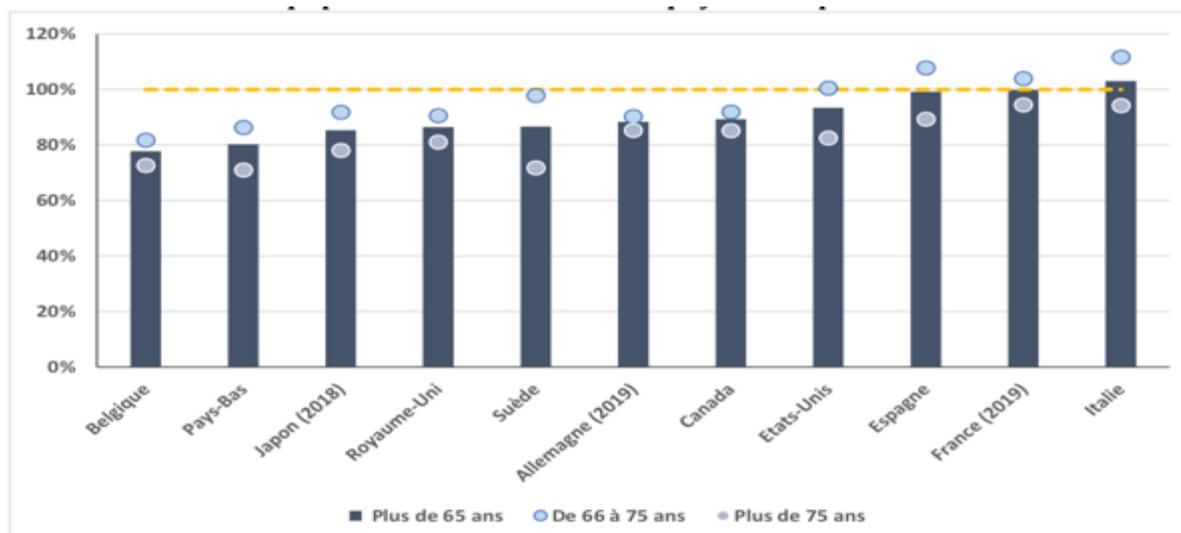


Sources : calculs SG-COR à partir de la base de données des dépenses sociales de l'OCDE (SOCX)

Figure 1 : Part des dépenses (publiques et privées) dans le PIB en 2002 et 2017 (Avis du CSR 2022 - juillet 2023)

Le graphique de la figure 1 (avec les chiffres OCDE de 2019) figure aussi dans la synthèse du rapport du rapport annuel du COR 2024, les ratios 2019 sont tous en hausse par rapport à ceux de 2017, ils traduisent le vieillissement de ces populations et la dérive des régimes.

Le graphique de la figure 2 extrait de l'avis du CSR de 2023, donne le « niveau de vie moyen des seniors rapporté au niveau de vie moyen de la population en 2020 ». En France, celui-ci s'établissait à 105 % en 2020, un chiffre qui avait fait l'objet de nombreux commentaires lorsqu'il avait été diffusé en 2022 par l'INSEE. Ce ratio supérieur à 100% avait aussi été évoqué lors des discussions et du débat sur la réforme des retraites à l'Assemblée Nationale en 2023. En 2020 le montant total versé au titre de retraites était de 332 Md€, soit 14,4% du PIB de l'année (supérieur au 13,9% de 2017 de la figure 1).



Source : base de données Distribution des revenus de l'OCDE, 2023.

Figure 2 : Niveau de vie moyen des seniors OCDE rapporté au niveau de vie de la population en 2020 (Avis du CSR 2022 - juillet 2023)

Mais l'histoire ne s'arrête pas là et illustre la difficulté à réaliser des statistiques neutres. Le rapport 2024 du COR revient sur l'évolution historique de ce pourcentage et indique que la méthode de prise en compte de la composition des ménages (en particulier ceux où cohabitent un actif avec un retraité) a changé en 2021. Avec cette correction/convention modifiée, le ratio (re) passe finalement sous la barre des 100 % pour s'établir à 98,7 % en 2021, figure 3, et surtout il va baisser continûment jusqu'à 83% en 2070. A ce propos on peut rappeler la phrase que Mark Twain a attribué à Disraeli : « Lies, damned lies and statistics », peu connue en France mais d'une certaine actualité ici.

Niveau de vie moyen des retraités rapporté à celui de l'ensemble de la population observé et projeté dans le scénario de référence

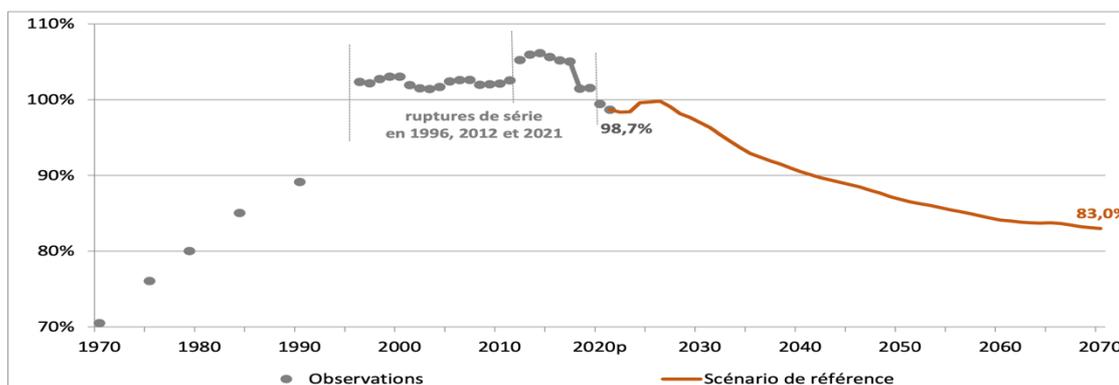


Figure 3 : Niveau de vie moyen des seniors français rapporté au niveau de vie de la population de 1970 à 2070 (Rapport du COR 2024 - juin 2024)

L'avis du CSR publié en 2023 fournissait aussi le niveau de vie moyen des seniors dans les grands pays de l'OCDE en 2020, figure 2 supra. On remarque que c'est dans les trois pays dans lesquels les systèmes par capitalisation sont quasiment inexistantes que les seniors bénéficient du niveau de vie le plus élevé par rapport à l'ensemble de la population.

Ce constat peut être analysé de trois façons selon le biais d'interprétation du commentateur :

- Les systèmes par répartition sont les plus efficaces car ils procurent le meilleur taux de remplacement,

- Les systèmes par répartition sont inégaux car ils favorisent les retraités au détriment des actifs,
- Les systèmes par capitalisation ne sont finalement pas aussi rentables que promis.

La conclusion n'est pas unique car la cause ne l'est pas. On peut soutenir que les systèmes par capitalisation dépendent des valorisations des marchés financiers, que les niveaux de revenus sont proportionnels aux taux de cotisation des employeurs et des salariés, que les ratios entre les nombres d'actifs et de retraités ne sont pas identiques selon les pays, ...donc les comparaisons sont hasardeuses. En France par exemple, l'assurance-vie (gérée en capitalisation individuelle) est à prendre en compte dans la frontière du problème, c'est le quatrième pilier de la retraite.

Toute conclusion trop tranchée est illusoire, mais reste le constat que les retraités français actuels ont une situation assez enviable par rapport à leurs homologues des grands pays de l'OCDE en 2023. Les « jeunes seniors » de 65 à 75 ans sont toujours plus favorisés que les plus âgés (au-delà de 75 ans), quels que soient les pays, avec un écart faible en Allemagne et sensiblement marqué en Suède.

Les pays dans lesquels les fonds de pension occupent une place significative sont généralement ceux dont les habitants possèdent une culture financière plus développée et ont une appétence marquée pour les actions. La plupart de ces pays n'ont pas connu de guerres sur leur territoire, ni de périodes de forte inflation au XX^{ème} siècle. Ils n'ont pas connu de période de quasi faillite nationale et ont une tradition favorable au capitalisme et à la libre entreprise. Les Etats-Unis et le Canada, même s'ils ont été frappés durement par la crise de 1929, ont rebondi à partir des années quarante ; la Grande Bretagne et l'ensemble des pays européens continentaux ont aussi effacé la première moitié du vingtième siècle et ses deux guerres, mais ils ont subi des périodes de guerre et d'inflation nettement plus sévères.

En France, on distingue trois niveaux de régimes pour la retraite des salariés du secteur privé : le régime de base ou régime obligatoire (CNAVTS), les régimes complémentaires (désormais unifié AGIRC et ARRCO) et enfin les régimes supplémentaires ou sur-complémentaires (collectifs d'entreprise ou individuels). Les deux premiers niveaux sont gérés en répartition pure, les derniers sont généralement gérés en capitalisation. A ces trois niveaux on y ajoute parfois un quatrième complètement individuel, l'assurance-vie et plus largement les autres formes d'investissement (PEA, immobilier de rapport, ...). On se limite ici aux régimes de retraite des travailleurs salariés.

Enfin les PER introduits par la loi PACTE de 2019 s'apparentent aux régimes supplémentaires et reposent sur la capitalisation individuelle, ils tendent à généraliser les systèmes supplémentaires qui n'étaient ouverts qu'à des populations restreintes de salariés. La loi PACTE a mis en place un nouveau cadre destiné à favoriser l'épargne financière pour la retraite qui vient s'ajouter (ou se substituer) à des dispositifs plus anciens transformables ou en extinction. La création de trois types de Plan d'Epargne Retraite : le PER individuel ou PERIN, le PER d'Entreprise Collectif ou PERECO et le PER Obligatoire ou PERO, illustre la volonté des pouvoirs publics d'augmenter la part des retraites par capitalisation, avec une plus grande portabilité, un régime fiscal relativement favorable pour constituer un capital au cours de la vie active, éventuellement abondé par l'employeur (PERECO et PERO), et le choix entre versement de ce capital (éventuellement fractionné) ou sa transformation en rente viagère à l'âge de la retraite. Ces mesures sont en partie la transposition en droit français des textes européens, sur la portabilité par exemple et sur le cadre prudentiel.

Les Français n'ont pas attendu que le système actuel des retraites devienne de moins en moins favorable pour constituer une épargne de précaution destinée à leur vieillesse. Le constat que l'espérance de vie augmente, mais aussi qu'elle s'achève de plus en plus vers une situation de perte d'autonomie, renforce le besoin de préparer cette fin de vie. En outre, le désir de laisser un héritage est également présent chez certains. Pour ces raisons ils investissent de manière permanente et significative dans des produits d'assurance-vie (souvent désignée comme « le placement favori des français ») qui bénéficient d'un régime fiscal favorable et qui sont simples (fonds euro et unités de compte). Une fiscalité relativement avantageuse est également un des arguments mis en avant pour l'assurance-vie.

L'introduction des PER rappelle l'importance de la gestion financière des régimes en capitalisation sur longue durée car elle est plus complexe que celle des régimes par répartition. Ces derniers gèrent uniquement leur équilibre

à court terme et leurs liquidités, même s'ils projettent leur équilibre à moyen terme pour piloter la trajectoire des cotisations. Leur horizon de gestion est de quelques mois alors que celui des régimes par capitalisation couvre plusieurs décennies. Cette différence majeure implique que la gestion des régimes par capitalisation est proche de celle de l'assurance-vie (avec un horizon moyen d'une décennie ou plus du fait de l'inertie des capitaux confiés) ou de la gestion de patrimoine et qu'elle utilise les outils et techniques de ces domaines.

La gestion d'actifs est le moteur de performance : le choix des classes d'actifs et leurs pondérations doivent être rationnels après avoir fixé les objectifs et les contraintes, ainsi que la frontière du problème : c'est-à-dire l'horizon temporel total convenu entre les parties et l'importance de la rente attendue par rapport à l'ensemble des autres revenus (voire la composition du patrimoine éventuellement).

Certains assureurs gèrent déjà des fonds de retraite supplémentaire (Article 39, FRPS, ...). Dans ce cadre ils respectent les niveaux réglementaires de solvabilité qui imposent des contraintes sur la répartition entre une poche risquée investie en actions et une poche peu risquée investie en titres obligataires de bonne qualité. La poche actions génère un rendement supérieur sur moyenne période, mais elle est plus risquée, et elle protège mieux de l'inflation. Cette poche risquée peut présenter de fortes chutes mais aussi des périodes de rebond : sa valeur liquidative à une date quelconque est aléatoire par comparaison aux autres poches moins risquées. L'expérience sur longue période montre que les actions sont le support qui permet de maintenir le pouvoir d'achat des versements, dès lors que l'horizon de liquidation est suffisamment éloigné et que les versements et les retraits sont réguliers sur de longues périodes (et non concentrés sur quelques points d'entrée ou de sortie), la volatilité est amortie sous ces deux conditions réunies dans les régimes supplémentaires gérés en capitalisation et avec sortie obligatoire en rente.

Cet argument de la supériorité de l'investissement en actions, souvent formulé comme une évidence, nécessite d'être mesuré afin d'être soutenu. Des articles et travaux universitaires sur ce sujet ont été consultés pour s'assurer que cet argument est solide, ou qu'il faut le nuancer. Nous nous plaçons d'abord dans le cadre du marché français et utiliserons le rendement total du CAC 40 dont l'historique est assez profond, ainsi que les séries historiques des taux TEC et du taux d'inflation français publié par l'INSEE. Ces grandeurs seront utilisées dans les simulations de consommation graduelle du portefeuille, et non avec un désinvestissement en un flux unique : se focaliser sur la performance pendant une période donnée est inadapté ici. Les simulations avec la chronique des flux de rentes sont indispensables.

L'horizon de gestion et l'évolution de l'allocation entre les différentes poches lors de la phase de constitution de l'épargne sont des concepts utilisés dans les PERCO et les PER. Leur application se traduit par une allocation dans la poche action qui diminue au cours du temps alors qu'augmente celle dans la poche obligataire considérée comme moins risquée puis dans la poche monétaire enfin. Le législateur a prévu que ce mode de gestion doit être appliqué par défaut pour les PER obligatoires ou collectifs. En revanche la gestion financière en phase de restitution est laissée à la discrétion des bénéficiaires, lorsqu'ils ne souhaitent pas sortir en rente. Assez logiquement cette période de consommation de l'épargne devrait être gérée de manière dynamique également sauf si l'on a choisi de sortir en rente et que c'est l'assureur qui est en charge de cette gestion.

INTRODUCTION

Ce mémoire porte sur un régime de retraite supplémentaire désormais fermé, géré en capitalisation au sein d'une IRPS, et plus particulièrement sur son allocation d'actifs en période d'extinction progressive. On cherche la stratégie d'allocation offrant le meilleur compromis rendement/risque pour la soixantaine d'années à venir. Le paramètre de pilotage est le ratio entre le montant de la poche actions et celui de la poche obligataire (considérée sans risque). Il faut fixer ex ante l'évolution de ce ratio pendant la phase de restitution qui se caractérise par la décroissance continue des provisions mathématiques jusqu'à atteindre zéro au décès du dernier bénéficiaire. Ce choix de l'allocation d'actifs doit être suffisamment prudent pour satisfaire cette contrainte tout en respectant les exigences de solvabilité propres à une IRPS.

La structure étudiée est un des deux cantons d'une IRPS qui gère le régime de retraite supplémentaire mis en place par une caisse de retraite créée en 1967 par une Institution Financière. Cette caisse a relevé de plusieurs statuts avant de se transformer en IRPS en 2019. Le canton est en quasi extinction car le régime est fermé depuis 1996 et sa décroissance s'étalera jusqu'en 2080/90 jusqu'à son extinction. Une trentaine de salariés cotisent encore pour un effectif total de bénéficiaires et de radiés qui dépasse mille trois cent ; les dernières rentes seront liquidées pendant les dix années à venir puis le canton sera géré en extinction pure. L'autre canton de l'IRPS est complètement fermé depuis 1993.

A côté du risque financier à l'actif, on étudiera aussi le risque de mortalité (ici longévité). Le canton utilise les tables de mortalité TGH/TGF 2005 pour calculer ses engagements et on va vérifier si sa population est correctement décrite par ces tables. On s'assurera (ou non) qu'il y a une mutualisation suffisante compte tenu de la taille de la population du régime qui est de l'ordre du millier de personnes et qu'il n'y a pas un biais de sous-mortalité car la population est constituée d'anciens salariés du secteur bancaire.

L'analyse de l'évolution du canton sera faite en comptabilité de caisse à partir des flux de rentes estimés et de la simulation de la gestion du portefeuille de placements. Le risque d'inflation sera également pris en compte explicitement car les rentes sont indexées sur celles des régimes généraux (que l'on supposera revalorisées au taux d'inflation).

Avant de décrire la formalisation du problème, puis les stratégies possibles d'allocation d'actifs ainsi que leur quantification selon plusieurs critères d'efficacité, nous allons présenter le canton de l'IRPS, son bilan et son niveau de solvabilité ainsi que la règle de calcul des rentes.

Le régime de retraite supplémentaire géré par le canton est à prestations définies et il est alimenté par des cotisations obligatoires des salariés et de l'employeur. La rente servie est proportionnelle au nombre d'années de présence au sein de l'entreprise et du dernier salaire et n'est pas conditionnée à la présence au sein de l'entreprise à la liquidation des retraites des régimes généraux.

La contrainte de servir des prestations définies implique que toute insuffisance de financement éventuelle devra être comblée par une contribution de l'employeur à ce moment. Les cotisations restant à collecter sont négligeables, le stock de richesse à distribuer est majoritairement constitué par le portefeuille actuel des placements qui va être consommé avec le temps tout en procurant des fruits et fluctuera selon ses plus ou moins-values éventuelles.

On n'appliquera pas de contrainte sur le niveau minimal de solvabilité au cours du temps, l'indicateur suivi est la consommation du portefeuille et sa capacité - ou non - à servir les rentes projetées jusqu'au décès du dernier bénéficiaire mesuré par la probabilité de ruine (classique en assurance) ainsi que par d'autres indicateurs calculés sur le solde final du portefeuille.

Dans toutes les simulations on appliquera les revalorisations assimilées ici à l'inflation à partir de la chronique des rentes ; dans un second temps on introduira le risque de sous-mortalité.

Les simulations seront faites en comptabilité de caisse avec un pas annuel, correspondant au rythme de présentation des états de gestion et des comptes. Ce pas annuel est également adapté à l'horizon long et à la gestion financière prudente qui ne nécessite pas des réaménagements de portefeuille trop fréquents.

La simulation de l'actif financier du canton sera conduite selon plusieurs méthodes, de plus en plus complexes. Des simulations historiques et des simulations par Monte Carlo seront effectuées. Les premières sont simples à mettre en place et ont un rôle pédagogique. Les secondes permettent d'obtenir plusieurs mesures de risque pour suivre le pilotage de la fraction risquée du portefeuille (la poche actions ; la poche obligataire étant considérée sans risque, cf infra) grâce à un nombre élevé de trajectoires et la possibilité de modifier les paramètres des facteurs de risque.

On cherchera d'abord si le portefeuille de placement actuel est suffisant pour servir la totalité des flux futurs non revalorisés, avec des hypothèses de frais réalistes. Pour cela on va supposer que l'on vend le portefeuille à sa valeur de marché le 1/1/2024 et que l'on investit le montant obtenu dans l'achat d'obligations sans risque (OAT). On adossera ligne à ligne les flux futurs annuels de rentes par des d'obligations zéro-coupon (OAT ZC) de même montant. Après ce premier test de solvabilité, on adossera les flux futurs de rentes à des OAT i ou €i selon la même logique : en ajustant leurs nominaux actuels aux flux futurs de rente non revalorisées (l'indexation des obligations et des rentes sera parallèle). Cet adossement permet de garantir les revalorisations par l'inflation sur les horizons de remboursement des titres indexés. Les coupons intermédiaires ainsi que les frais sont pris en compte.

Après ces deux tests d'adossement statique par des OAT ou des OAT i et €i, on étudiera les stratégies d'allocation d'actifs toujours avec la même chronique de rentes futures. On partira de l'allocation actuelle du canton qui utilise uniquement deux types d'actifs : une poche actions « large et mid cap » européennes (de l'univers Eurostoxx 600) mais que l'on assimilera à l'indice CAC 40 TR (du fait de son historique plus profond principalement) et une poche d'obligations à moyen terme dont la maturité moyenne est voisine de 4 ans.

On obtient cette maturité moyenne de 4 ans en simulant une détention des titres gérés en noria au moyen de sept lignes de montants faciaux égaux de titres de maturité 7 ans (caractérisées par le taux TEC 7) détenus jusqu'à remboursement. Cette dernière poche sera considérée comme un actif sans risque avec cette contrainte de détention et dans une valorisation comptable (et non en valorisation de marché comme pour la poche action).

Pour les deux poches, on simulera les coupons obligataires perçus et les rendements totaux annuels (dividendes réinvestis et variation annuelle du cours) en probabilité historique et non en probabilité risque neutre. Il n'est pas nécessaire ici de se placer en probabilité risque-neutre comme dans Solvabilité 2. Les placements du canton ne sont pas complexes et il n'y a pas de produits dérivés.

Les simulations en probabilité historique sont faciles à mettre en place et à expliquer à des non-spécialistes. Les simulations seront faites à partir des séries historiques du CAC 40 TR, des taux TEC 7 et du taux d'inflation sur plus d'une trentaine d'années, faute d'un historique français homogène plus profond.

Après les simulations historiques, des simulations de Monte Carlo sont effectuées pour obtenir des trajectoires plus extrêmes et observer la sensibilité des résultats aux paramètres de rendement et de volatilité des actions et des obligations et aussi de l'inflation. Les simulations par Monte Carlo sont effectuées avec les paramètres déduits des historiques et de leurs corrélations. Elles utilisent les modèles les plus simples : Black et Scholes pour l'indice actions, loi normale pour le taux d'intérêt et le taux d'inflation. On utilisera également le modèle de Hardy à deux états pour l'indice actions. Le modèle de Vasicek sera présenté et on expliquera pourquoi il n'est pas utilisé.

Le pilotage de l'allocation est mesuré par le ratio entre la valeur de marché de la poche action et la valeur totale du portefeuille (somme de la valeur de marché de la poche action et de la somme des valeurs nominales des obligations). Ce ratio est piloté par des rebalancements effectués chaque fin d'année afin qu'il évolue en fonction du temps selon une loi simple : ratio constant de 30 %, ratio croissant ou décroissant linéairement de 0,50% par an à partir de cette valeur jusqu'à 60 % ou 0%.

La mesure de l'efficacité des stratégies sera effectuée avec des indicateurs utilisés dans le cadre de la théorie de la ruine, propre au risque assurantiel. Cette approche est assez voisine des indicateurs utilisés en finance de marché

comme la VaR (historique ou par Monte Carlo). D'autres indicateurs comme la valeur moyenne du portefeuille à la date d'observation et son écart-type empirique ainsi que le déficit moyen en cas de ruine seront calculés.

A côté des deux risques de marché : actions et taux, le canton est exposé au risque d'inflation car les rentes sont revalorisées comme les retraites du régime général. Les revalorisations des deux régimes (CNAVTS et AGIRC/ARRCO) se situent depuis un certain temps en-dessous du taux d'inflation mais en 2022 et 2023 cette pratique a été abandonnée et le taux d'inflation a été utilisé sans correction en 2024 (mais pas en 2025). Par commodité on assimile le taux de revalorisation des rentes au taux annuel d'inflation français (YoY) de l'année précédente (cette mesure fondée sur le rapport des deux indices séparés d'un an est également utilisée dans les calculs effectués pour les OAT i).

Le dernier risque est celui de sous-mortalité qui est traité en choquant les taux de mortalité à la baisse selon la norme IORP 2 (-10%).

Dans les simulations par Monte Carlo il est nécessaire d'utiliser les paramètres les plus représentatifs possibles. On retient les paramètres issus des valeurs historiques des variables de marché sur une profondeur de presque quarante ans. Depuis une vingtaine d'années les valeurs quotidiennes des taux d'intérêt (TEC) sont publiées par la BdF ; on dispose également des valeurs du taux d'Etat à 10 ans et de l'inflation française sur un historique plus profond identique à celui du CAC 40 TR. A partir de ces trois séries de données on extrait les grandeurs statistiques classiques (moyenne et écart-type) et leurs corrélations historiques.

En faisant varier les couples (rendement/volatilité) de ces trois variables aléatoires à partir de leurs valeurs historiques, on recherche les sensibilités de la probabilité de ruine et du solde final à ces couples de paramètres pour analyser les facteurs les plus significatifs.

On ne projettera pas les bilans comptables et prudentiels, ni les mesures de solvabilité réglementaires. Il faudrait reconstituer les deux bilans chaque année à partir des flux monétaires et effectuer des retraitements pour obtenir les postes comptables du portefeuille. La solvabilité sera appréciée uniquement à un horizon éloigné par la probabilité de ruine et la valeur du solde final de trésorerie et son écart-type empirique. En réalité l'IRPS devra respecter l'Exigence Minimale de Solvabilité en permanence et modifier son allocation d'actif en conséquence pour la respecter.

Dans l'étude bibliographique nous présenterons les articles et ouvrages publiés sur le sujet de la « decumulation » (la consommation en français) chez les anglo-saxons, les méthodes utilisées et leurs principales conclusions. Le sujet a également été traité en France et en Europe, dans des articles, des mémoires publiés par l'Institut des Actuaire et deux livres.

1 LES ORPS (ORGANISMES DE RETRAITE PROFESSIONNELLE SUPPLEMENTAIRE)

1.1 LES ORPS EN FRANCE ET LEUR ENVIRONNEMENT (SOURCES : BANQUE DE FRANCE ET GALEA)

1.1.1 L'ETUDE DE LA BANQUE DE FRANCE

Une étude de la Banque de France sur les ORPS : « Les organismes de retraite professionnelle supplémentaire : un nouvel acteur pour l'épargne retraite des Français » Bulletin de la Banque de France novembre/décembre 2022 ; Frédéric Ahado et al., fournit de nombreuses informations et statistiques dont certaines seront reprises ici. Une partie de ces chiffres provient du rapport « Les retraites et les retraités » publié chaque année par la DREES. Les chiffres cités plus bas sont extraits de ses éditions 2022 et 2023.

L'étude de la BdF rappelle que les ORPS ont été créés en 2019 par la loi PACTE (avec le PER et ses déclinaisons) dans un environnement où coexistaient déjà d'autres systèmes d'épargne pour la retraite. L'encours total des régimes de retraite supplémentaires et des PERCO atteignait 250 Md € fin 2020. Elle souligne également que les régimes obligatoires gérés par répartition servent 98 % des prestations (totalisant 338 Md€ en 2021) et recueillent 95 % des cotisations, illustrant leur caractère dominant et aussi la place marginale des produits de retraite supplémentaires (hors assurance-vie) mais en phase de croissance.

Il y avait en France dix ORPS agréés fin 2021. La somme de leurs bilans atteignait 48,5 Md€, dont 45,5 Md€ de portefeuilles financiers et de 36,3 Md€ de provisions techniques. Ces deux derniers chiffres montrent une solvabilité globalement élevée avec des fonds propres comptables cumulés de l'ordre de la dizaine de milliards d'euros. Ces ORPS couvraient près de 1,7 millions de membres, l'effectif total des retraités (droits directs et dérivés) étant de 18 millions.

La valeur totale des portefeuilles des dix ORPS atteignait 45,5 Md€ fin 2021, à comparer aux 250 Md€ de l'épargne retraite en France (à fin 2020), et seulement 4% de l'épargne financière totale des Français fin 2021.

L'étude analyse ensuite la composition moyenne des portefeuilles de placement des ORPS, ce point sera présenté en détail au §1.2.

L'étude rappelle le cadre juridique européen des ORPS avec l'introduction de la directive 2003/41/CE pour encadrer l'activité et la surveillance des institutions de retraite professionnelle (IRP), Institution for Occupational Retirement Provisions ou « IORP 1 », puis d'une seconde en 2016 « IORP 2 » qui instaurait des règles minimales de gestion. En France, la loi Sapin 2 et l'ordonnance de 2017 ont créé les ORPS et la directive IORP 2 a été transposée en droit français par une ordonnance en 2019. Les articles correspondants du Code des Assurances seront rappelés au paragraphe suivant.

L'étude cite un extrait de l'ordonnance de 2019, soulignant en particulier que le cadre des ORPS est « propice à l'investissement de long terme, en actions, ou sous forme de financements en fonds propres, tout en étant favorable à un meilleur rendement pour l'épargnant ». Les actions cotées, ou non, sont identifiées comme des sources de « meilleur rendement pour l'épargnant », confirmant implicitement le postulat qu'elles sont le placement le plus rémunérateur sur le long terme. Cette incitation au financement des entreprises et plus récemment à celui de la transition écologique est rappelée de manière récurrente par les pouvoirs publics, qu'elle soit effectuée de manière directe par les particuliers ou bien mutualisée par les assureurs et les organismes de gestion de l'épargne salariale.

Les auteurs de l'étude soulignent que les exigences prudentielles quantitatives sont moins contraignantes que dans le cadre de Solvabilité 2, aussi bien pour la valorisation des actifs (en valeur comptable et non de marché) qu'au niveau minimum de solvabilité requis. L'horizon de calcul est également plus adapté : dix ans au lieu d'un an dans

Solvabilité 2. Une autre facilité offerte est la possibilité de distribuer sur quinze ans (et non huit ans) les montants dotés à la provision pour participation aux bénéficiaires (ou participation aux excédents).

Le texte fournit ensuite des statistiques européenne et mondiale qui confirment le faible niveau de développement des fonds de pension et assimilés en France. La première comparaison internationale donne le poids des actifs financiers de ces fonds en pourcentage des PIB nationaux (et leurs valeurs entre parenthèse) : ceux des USA représentent environ 100 % (à 22 599 Md \$), ceux des Pays bas sont de loin les plus importants (en termes relatifs) dans le monde avec 211 % du PIB (à 2043 Md \$), ceux du Royaume Uni 123 % du PIB (à 3573 Md \$), ceux de l’Australie 145 % du PIB (à 2273 Md \$) et ceux de la Suisse 159 % du PIB (à 1165 Md \$). Ces montants sont extraits de statistiques 2021 de l’OCDE.

Ces chiffres de stock (rapportés au PIB) peuvent être rapprochés des chiffres de flux : les retraites versées chaque année rapportées au PIB qui ont été données dans le préambule. Les pays dont les retraites provenant des fonds de pension représentent près de 5% du PIB correspondent à ceux dont les encours se situent à 100 % et au-dessus (ces deux pourcentages correspondant à un rendement du régime de 5%). Le cas des Pays bas est particulier c’est le pays qui est le plus avancé dans le système de retraite par capitalisation, devançant même les pays anglo-saxons considérés pourtant comme les pionniers de ces systèmes.

Dans les autres pays européens continentaux, les actifs gérés exprimés en pourcentages de PIB sont tous inférieurs à 10 %. Les montants vont de 314 Md \$ en Allemagne à 77 Md \$ en France (seuls les PERCO et les ORPS sont retenus par l’OCDE, contrairement aux statistiques des administrations françaises), l’Italie et l’Espagne se situent entre les deux extrêmes à 195 Md \$ et 143 Md \$ respectivement.

En considérant la valeur totale des actifs gérés par les fonds de pension en Europe (2712 Md € fin 2021, source EIOPA), les Pays Bas représentent 68 % de ce total, suivis par l’Allemagne avec 10%, la Suède avec 8% ; l’Italie avec 7 % et la France avec 1% (toujours PERCO et ORPS uniquement). Ces chiffres sont en ligne avec ceux présentés par le CSR en 2023 qui sont extraits de statistiques de l’OCDE.

NB : On conserve les montants exprimés en US dollar provenant de l’OCDE et ceux en Euro provenant de l’EIOPA ; la parité \$/€ étant proche de l’unité on peut comparer les chiffres sans contre-valoriser les montants.

La première partie de l’étude souligne que les régimes par capitalisation dans des fonds de pension de type ORPS ne sont pas les seuls acteurs de ce système car ils sont de création très récente et coexistent avec d’autres gestionnaires en capitalisation établis depuis longtemps comme les assureurs et certaines structures dédiées (Préfon, RAFP, ...). Cette précision rappelle l’importance de fixer la frontière du problème (en fait la définition des produits retenus dans le périmètre) car si l’on retient les chiffres publiés par le Ministère des Finances le total de l’épargne-retraite des Français avoisine actuellement 250 Md€ soit presque 10% du total européen. Ce pourcentage augmenterait fortement si l’on incluait aussi les encours d’assurance-vie (1920 Md€ et le grand total de 2170 Md€ représenterait 82 % du PIB 2022, un ratio finalement en ligne avec les chiffres présentés plus haut).

1.1.2 L’ETUDE DE GALEA

GALEA a publié sur son site internet en juillet 2023 une note « Analyse des rapports SFCR des ORPS au 31/12/2022 : bilan post agréments dans un contexte de hausse des taux » qui analyse l’impact de la crise de 2022 sur la solvabilité des ORPS et compare la précision des informations figurant dans ces rapports assez standardisés. En juillet 2024 GALEA a reconduit cet exercice, ses constats et conclusions sont détaillés plus loin et ses statistiques actualisent les données de l’article de la BdF aussi.

La note de GALEA de 2023 actualise la liste des ORPS à fin 2022 de la BdF et souligne l’accélération observée au second semestre 2022 (il y avait quinze ORPS agréés mi-octobre 2022, vingt-deux fin 2022 - et vingt-trois fin 2023-) juste avant la fin de la période de transfert de portefeuilles de retraite supplémentaire vers un ORPS existant. Parmi ces ORPS, vingt et un entrent dans la catégorie FRPS (relevant du code des assurances), un dans la catégorie

IRPS (relevant du code de la sécurité sociale) et un dans la catégorie MRPS (relevant du code de la mutualité). Cette vingtaine d'ORPS gère un cumul de plus de 160 Md euros d'encours de placements fin 2022, un montant sensiblement supérieur au total de 45 Md euros fin 2021 pour la dizaine d'ORPS agréés analysés dans l'étude de la Banque de France ; cette forte progression traduit l'accélération des demandes d'agrément par de grands institutionnels en 2022 transférant des portefeuilles significatifs.

1.2 LES PLACEMENTS DES ORPS EN 2021 ET 2022 (SOURCES : BANQUE DE FRANCE ET GALEA) ET LEURS SFCR 2022 ET 2023 (SOURCE : GALEA)

L'étude de la Banque de France analyse ensuite l'allocation d'actif des ORPS. Le cadre prudentiel étant plus favorable à des placements plus risqués, on aurait pu s'attendre à observer des pourcentages d'allocation en actions plus forts. Le constat est que les allocations d'actifs des portefeuilles des ORPS sont pratiquement identiques à ceux des assureurs-vie et mixtes. La part des obligations est de 71 % pour les ORPS à comparer à 68% pour les assureurs-vie et mixte, celle des actions est de 15 % pour les ORPS (à comparer à 16%) et enfin de 14 % en OPC (à comparer à 16 %). Les écarts entre ces pourcentages sont minimes, les obligations représentent toujours plus des deux tiers des placements (voire plus car les OPC mixtes ou non ne sont pas analysés par transparence).

La répartition entre les catégories d'émetteurs fait ressortir un plus fort investissement des ORPS sur les administrations publiques : 45 % (resp. 28 %), en revanche les répartitions par zones géographique sont voisines : la France représentant environ 70 % pour les ORPS et pour les assureurs-vie et mixte (avec mise en transparence des OPC), alors que la zone Euro et reste du monde (hors Europe) représentent dans les deux cas 15 % chacun.

Les ORPS n'ont pas mis à profit le cadre réglementaire IORP 2 plus favorable aux actions pour adopter une allocation d'actifs plus risquée mais potentiellement plus rentable sur le long terme, ils ont conservé une forte exposition en obligations.

Cette allocation d'actifs massive sur les obligations contraste avec celles de leurs homologues européens qui sont relativement plus investis en actions : 35 % en moyenne contre 14 % pour les ORPS français (les OPC étant ici analysés en transparence) et en immobilier : à 9 % en moyenne contre 1 % pour les ORPS. Corrélativement les ORPS sont investis à hauteur de 69 % en titres de créances (obligations et assimilées) contre 48 % pour leurs homologues européens. Ces ratios proviennent de l'EIOPA, de l'ACPR et de la Banque de France, ils peuvent différer parfois du fait de différences méthodologiques (transparence ou non des OPCVM mixtes par exemple).

La seule différence notable entre les portefeuilles des ORPS et ceux des assureurs-vie et mixtes est la maturité résiduelle médiane des obligations : 11 ans pour les ORPS et 6,5 ans pour les assureurs-vie et mixte. Un second indicateur est le pourcentage d'obligations dont la maturité résiduelle est supérieure à 25 ans : elle est de 16 % pour les ORPS contre 7 % pour les assureurs-vie et mixte (corrélativement la part des maturités inférieures à 10 ans est de 45 % pour les ORPS et de 71 % pour les assureurs-vie et mixte).

Cette analyse montre que les ORPS ont choisi d'investir fortement en obligations à longue maturité dans une logique d'immunisation des durations du passif et de l'actif plutôt que d'augmenter la part des actions. Ce choix fait dans une période de taux extrêmement bas (à partir de 2019 jusqu'en 2021) posera dans le futur le problème de rendements moyen des portefeuilles durablement faibles (il faudrait connaître le taux moyen de coupon des portefeuilles ou leurs compositions plus détaillées). La valorisation des portefeuilles en valeur comptable ne permet pas de détecter facilement ces coupons faibles, seuls les rendements moyens et les niveaux de bénéfice les révéleront sur la durée.

L'étude de la Banque de France se termine sur une analyse détaillée de la composition des portefeuilles d'actions des ORPS et de ceux des assureurs-vie et mixte. En première analyse les deux types de structures ont des profils voisins avec une plus grande ouverture internationale chez les ORPS : 70 % de valeurs étrangères contre 46 % pour les assureurs-vie et mixte. Les actions cotées (en majorité détenues via des OPC et non en direct) représentent

83 % des portefeuilles actions des ORPS, la part du Private Equity (et des actifs réels et assimilés) est de l'ordre de 15 %. Les ORPS privilégient les grosses capitalisations et ils sont plus investis à l'international (USA principalement). C'est un point positif car les particuliers ont peu accès à ces marchés, ils les connaissent peu ou en sont exclus de facto, comme dans les PEA (sauf via des ETF ou des OPCVM internationaux).

L'étude constate aussi que plusieurs ORPS sont issus de transferts de portefeuilles d'organismes d'assurance, ce qui peut expliquer les faibles écarts entre leurs répartitions entre les catégories d'actifs ; la seule différence notable portant sur la maturité des obligations.

Il est probable que les compositions des portefeuilles ORPS n'ont pas été choisies uniquement avec une logique ALM mais en conservant la même pondération entre les actions et les obligations (sans augmenter la part relative des actions). Les organismes qui ont opéré les transferts ont sélectionné de préférence les obligations à long et très long terme. Un choix qui peut s'expliquer soit par une volonté d'adossement en durée, soit par le souhait de ne pas conserver cette fraction longue de placements à faible coupon (voire nul) dans leurs portefeuilles d'assurance-vie avec une pénalisation durable sur le taux de rendement (un instrument de communication obligatoire mais aussi publicitaire et surtout de fidélisation de la clientèle et de maintien des encours). Comme il n'y a pas eu une création ex nihilo des ORPS mais transferts d'actifs et de passifs par les entités gestionnaires, il n'a pas été possible de choisir librement l'allocation la plus efficiente au démarrage, sauf à concrétiser des moins-values dès l'origine.

La publication de GALEA en 2023 portant sur les SFCR des ORPS publiés sur l'exercice 2022 montre que la structure de leurs placements est assez stable entre 2021 et 2022 : elle constate que les obligations représentent 70 % des placements (vs 71 % Banque de France 2021), les actions 13 % (vs 15 % Banque de France 2021), les autres placements (pas analysés par transparence) 8 %, l'immobilier 6% et le monétaire 3 %. Ces pourcentages sont des moyennes pondérées par les encours ou « moyennes globales » et non des moyennes de moyennes.

Dans son étude, GALEA souligne que les maturités moyennes des poches obligataires ne sont généralement pas disponibles et que les valorisations en valeurs de marché sont rarement présentées. Seules les variations d'un exercice à l'autre des plus ou moins-values donnent une indication sur la dégradation des portefeuilles obligataires entre 2021 et 2022. En référentiel Solvabilité 2 la baisse de l'actif et du passif aurait été plus visible, comme on a pu le constater dans les montants des engagements sociaux aux normes comptables internationales figurant dans les documents de référence des groupes cotés. La chute des marchés en 2022 est également visible dans la baisse du taux de rendement comptable moyen : 2,7 % en 2022 (vs 3,4 % en 2021). Le passage de la crise se traduit quantitativement par la chute spectaculaire du ratio de solvabilité moyen de l'échantillon qui est passé de 600 % à 256 %. Cette division par plus de deux est le seul signe visible de l'ampleur de la crise de fin 2022, et confirme l'importance de ce ratio (alors même que son mode de calcul est favorable aux ORPS).

GALEA remarque qu'une analyse plus fine révèle des disparités dans l'utilisation des règles prudentielles pour calculer ce ratio, et constate que les comparaisons entre les structures ne sont pas facilitées. Les ratios de solvabilité maximaux (intégrant les plus-values latentes et les dettes subordonnées) vont de 105% à 517 %, les FRPS des sociétés d'assurance présentant les plus faibles ratios. GALEA souligne enfin « ...un grand nombre d'acteurs indiquant avoir obtenu l'accord de l'ACPR pour couvrir l'EMS (« Exigence Minimale de Solvabilité ») avec des plus-values non exceptionnelles, révèle que plusieurs ORPS ont constaté des moins-values latentes nettes sur leurs placements à fin 2022. Cette situation a pu conduire à la dotation d'une provision pour risque d'exigibilité (PRE) bien que très peu d'ORPS ont communiqué le montant de celle-ci dans leur rapport SFCR..... ».

Ce dernier commentaire soulève deux points d'attention :

- L'information financière fournie dans les SFCR n'est pas toujours suffisamment complète puisque l'on ne dispose généralement pas de la valeur de marché des portefeuilles de manière claire, ni de la durée du portefeuille obligataire, ni de la PRE dans certains cas. Finalement la structure normalisée et assez formelle des SFCR ne fournit pas une information synthétique, complète et pertinente. Seuls des spécialistes peuvent affiner en partie les analyses à l'aide des états réglementaires figurant dans leurs annexes. On peut donc s'interroger sur le respect de l'esprit du pilier 2 de Solvabilité 2.

- Le constat de la disparition des plus-values latentes confirme à nouveau la durée élevée des poches obligataires des ORPS (mesurée dans l'étude de la Banque de France) et le poids probable des obligations à faible coupon (voir nul ou même négatif, donc des « quasi zéro-coupons » de durée maximale...) qui risquent de peser durablement sur les rendements futurs de ces portefeuilles.

Les compositions des portefeuilles des ORPS sont marquées par les transferts effectués récemment ; il est encore trop tôt pour observer l'évolution des allocations d'actifs qui se rapprocheraient de celles des fonds de pension européens ou mondiaux sensiblement plus investis en actions. Il reviendra aux actifs cotisants de choisir les fonds les mieux adaptés à leurs besoins ou de peser sur les choix d'allocation d'actifs dans leurs instances.

GALEA relève également que « ...la large majorité des ORPS ne communique pas sur les résultats des stress tests de résistance réglementaires dans le SFCR à fin 2022 bien que ces tests fassent partie intégrante du pilier quantitatif du régime..... ». GALEA rappelle que ces tests de résistance constituent une spécificité du cadre ORPS introduit en 2017, car ils donnent une vision prospective de la solvabilité en situation de stress (d'autant plus que la sévérité de ces stress est sensiblement moindre que les chocs du référentiel Solvabilité 2).

Ces constats montrent que la communication obligatoire des ORPS peut encore être améliorée dans le sens d'une plus grande transparence ; les particuliers participants à ces régimes et lisant le SFCR de leur gestionnaire de plan n'ont probablement pas eu conscience de la crise des marchés de fin 2022. Autant Solvabilité 2 mettait l'accent sur un horizon à un an et sur la valeur de marché, inadaptés aux horizons longs des ORPS, et pouvait susciter des craintes en partie infondées lorsque l'on comparait des exercices successifs, autant les présentations d'une « large majorité des ORPS » dans leurs SFCR sont muettes sur l'impact de la crise « silencieuse » de 2022. Entre ces deux extrêmes il est souhaitable de trouver une communication adaptée qui informe à la fois sur la solvabilité à horizon moyen terme et aussi sur la situation (réelle) en fin d'exercice tout en soulignant son caractère volatil : vérifié ici puisque la crise observée fin 2022 a été pratiquement effacée fin 2023.

En 2024 GALEA a reconduit son analyse des rapports SFCR des ORPS (« Analyse des rapports SFCR des ORPS au 31/12/2023 : Bilan post agrément dans un contexte de taux et d'inflation élevés »). La structure des placements a peu évolué entre 2021, 2022 et 2023 : les actions représentent 11% des portefeuilles (comme les « autres ») et les obligations 69 % (73 % en 2021), le reliquat est en monétaire. Le taux de rendement comptable s'établit à 3,30% (3,00 % en 2022 et 3,40 % en 2021) ; il n'intègre pas les éventuelles plus ou moins-values latentes et la PPE moyenne représente 4% des provisions mathématiques (divisé par 15 ans, durée maximale d'étalement, on obtiendrait un surplus de rendement annuel de 0,27 % environ).

Le nombre d'ORPS s'est stabilisé à 23 en 2023 : 21 FRPS, 1 IRPS et 1 MRPS. Le total de leurs encours s'élève à 174 Md€ (43% en retraite collective et 57 % en retraite individuelle) correspondant à un chiffre d'affaires de 11,8 Md€ (soit 60 % des cotisations totales du marché de l'épargne-retraite). Les encours sont répartis à hauteur de 62,5 % dans des fonds en euro, de 20 % en UC et de 15 % en régimes type Branche 26. Cette répartition varie selon le type d'ORPS (bancassureur, assureur, institution, organisme de retraite, ...).

En 2022 la chute des marchés actions et celle des prix des obligations (de près de 15 % pour les deux) s'était traduit par la division par 2,4 du ratio de solvabilité moyen de l'échantillon (de 600 % en 2021 à 256 % en 2022). Les valeurs de marché des portefeuilles se sont redressées à la suite du rebond du marché action et avec le léger reflux des taux d'intérêt ; cette amélioration s'est traduite en 2023 par une amélioration modeste du ratio de solvabilité moyen de l'échantillon qui est passé de 256 % à 273 % (la médiane est à 223 % et les valeurs extrêmes sont comprises entre 111% et 659 %). Le ratio s'est amélioré pour tous les ORPS mais sa hausse n'est pas spectaculaire confirmant implicitement son caractère lissé. D'autres facteurs sont à prendre en compte pour une analyse fine : l'intégration, ou non, des plus-values latentes, et la présence éventuelle de dettes subordonnées. Les ratios publiés intègrent tous ces éléments et GALEA en fournit le détail. Les entités assurantielles présentent les plus faibles ratios, leur appartenance à un groupe consolidant pouvant expliquer ce fait.

Les SFCR 2023 fournissent un peu plus d'information que ceux de 2022, en particulier sur le risque de durabilité (une demande du régulateur), mais il manque encore des données importantes : résultats des stress tests

réglementaires, vision détaillée des placements par la transposition systématique des « autres placements » et détail des maturités des obligations principalement et de leur taux de coupon moyen.

1.3 PRESENTATION DU CADRE LEGISLATIF DES ORPS

Nous rappelons d'abord les textes qui régissent les Organismes de Retraite Professionnelle Supplémentaires. Ils fixent les caractéristiques de leurs structures, et les contraintes qui s'appliquent, s'inscrivant dans la continuité de celles relatives aux compagnies d'assurance sur la vie ou de capitalisation. Les Institutions de Retraite Professionnelle Supplémentaires (IRPS) sont une sous classe des ORPS qui relèvent du Code de la Sécurité Sociale, les articles les concernant renvoient au Code des Assurances qui concerne les FRPS en premier lieu.

Les FRPS ne relèvent ni de Solvabilité 1, ni de Solvabilité 2, même si leur cadre prudentiel est plus proche du premier que du second et sont régis par les articles L 381-1 à L 385-10 du Code des Assurances. L'article 381 contient les Dispositions Générales sur leur forme, leur domaine de compétence, leur assujettissement à plusieurs dispositions applicables aux entreprises d'assurance sur la vie et d'autres mesures générales.

L'article L. 381-4 est rédigé ainsi :

« Les dispositions des titres Ier, III, IV et VI du livre Ier et du chapitre Ier du titre IV du livre IV applicables aux entreprises d'assurance sur la vie ou de capitalisation sont applicables aux contrats souscrits par les fonds de retraite professionnelle supplémentaire. Pour l'application de ces dispositions, les fonds de retraite professionnelle supplémentaire sont assimilés à des entreprises d'assurance sur la vie ou de capitalisation. »

- L'article 382 traite de leur obligation d'agrément, l'article 383 traite du retrait d'agrément.
- L'article 384 traite des transferts de portefeuille.
- L'article 385 traite des règles financières et prudentielles ; il est rédigé ainsi :

« Section 1 : Valorisation (Article L385-1)

- Article L385-1

Aux fins de la vérification du respect des exigences prévues à la section 2 du présent chapitre, les fonds de retraite professionnelle supplémentaire se fondent sur les comptes établis conformément à l'article L. 381-6.

Section 2 : Exigences de solvabilité (Articles L385-2 à L385-3)

- Article L385-2

Les fonds de retraite professionnelle supplémentaire doivent à tout moment respecter une marge de solvabilité calculée selon des modalités définies par voie réglementaire.

- Article L385-3

Les fonds de retraite professionnelle supplémentaire effectuent chaque année un test de résistance destiné à évaluer leur capacité à faire face à leurs engagements à l'égard de leurs assurés, membres, adhérents et participants, notamment dans certains scénarios représentant des conditions détériorées de marché.

Section 3 : Investissements (Article L385-4)

- Article L385-4

Les fonds de retraite professionnelle supplémentaire investissent l'ensemble de leurs actifs conformément au principe de la « personne prudente », dans les conditions fixées à l'article L. 353-1 et sous réserve d'adaptations précisées par voie réglementaire.

Ces articles dressent les principes généraux et il faut se référer aux textes des Arrêtés pour obtenir des indications plus opérationnelles, en particulier sur la conduite des tests de résistance, qui sont fournies dans l'Annexe 2.

Même si les ORPS ne relèvent pas de Solvabilité 2, ils doivent respecter appliquer une partie des principes des piliers 2 et 3 de celle-ci. Au-delà des exigences forfaitaires simples de Solvabilité 1 ils doivent effectuer des stress-tests (cf Annexe 2). Leur cadre prudentiel se situe donc entre Solvabilité 1 et Solvabilité 2 ; ce positionnement intermédiaire reflète également le niveau quantitatif intermédiaire de solvabilité requis. Les stress tests ne sont pas trop sévères et reposent soit sur des hypothèses plus favorable (par exemple le choc de mortalité) soit sur une approche en valeur comptable et en flux plutôt qu'en valeur de marché nettement plus fluctuante et potentiellement pénalisante.

2 L'IRPS OBJET DE L'ETUDE

2.1 PRESENTATION DE L'IRPS

Le régime de rentes viagères analysé dans ce mémoire est géré par l'un des deux cantons de l'IRPS. Chaque canton de l'IRPS gère un régime de retraite supplémentaire bancaire particulier ayant chacun des caractéristiques différentes, ils ne peuvent pas fusionner. Le cantonnement est complet, il porte donc à la fois sur le passif et sur l'actif.

L'origine du régime étudié remonte à 1969 lorsqu'une Société Financière Spécialisée (SFS) a créé une caisse de retraite supplémentaire pour ses salariés dans un contexte d'évolution majeure des régimes de retraite. Cette caisse s'est adaptée aux changements réglementaires successifs en modifiant sa forme et ses statuts, elle est devenue une Institution de Retraite Supplémentaire (IRS), puis une Institution de Prévoyance (IP) et finalement une IRPS (regroupant deux cantons, le second provenant d'une banque AFB qui avait été acquise en 1996, et avait été fermé en 1993).

Le canton a été fermé en 1996 : c'est une « petite fermeture » puisqu'il n'accepte plus de nouveaux bénéficiaires mais continue à recevoir les cotisations des derniers salariés encore en activité dans la banque venue à la suite de la SFS après plusieurs fusions. Le canton est géré en quasi-extinction depuis 1996 ; les cotisations perçus représentent actuellement environ 3% des rentes servies et la somme des cotisations futures est estimée à 1,2 M€.

Entre 2016 et 2019 les comptes prudentiels de l'Institution ont été établis dans le référentiel Solvabilité 2. A partir de 2020 avec sa transformation en IRPS, ils ont été établis dans le référentiel prudentiel IORP 2.

Le passage en IRPS a été décidé en 2019 car ce nouveau type de structure était jugé mieux adapté à la nature de l'entité et à ses engagements longs. Ce passage lui permettait aussi de revenir à une approche plus simple pour calculer ses engagements et évaluer ses actifs financiers selon des principes comptables et prudentiels moins complexes et moins contraignants que ceux de Solvabilité 2.

Le canton analysé gère uniquement ce régime de retraite additionnelle à prestations définies mis en place par des accords d'entreprise. Ce régime est à la fois à cotisations définies et à prestations définies, un mécanisme courant lors de sa création (les régimes par répartition le sont également). Il est considéré comme un régime de type « article 83 du CGI » (adhésion obligatoire des salariés, cotisations partagées entre employeur et salarié, fiscalité favorable pour les deux parties, ...). Les deux contraintes d'être à la fois à cotisations et à prestations définies peuvent coexister car l'employeur est engagé à assurer l'équilibre financier du régime, ce qui peut générer un passif social dans ses comptes IFRS. Le caractère paritaire du régime le place dans le champ du Code de la Sécurité Sociale qui fait bénéficier aux salariés ses dispositions assez protectrices. Enfin le régime relève de la branche 20, il y a mutualisation des actifs financiers entre les bénéficiaires et ce n'est pas un régime en points.

Le risque de mortalité est mutualisé et les tables TGH et TGF 2000-05 sont utilisées. La population est uniquement constituée d'employés et de cadres bancaires, c'est pourquoi on a vérifié depuis une quinzaine d'années que leur mortalité était prudemment estimée par ces tables en comparant chaque année la mortalité observée à la mortalité théorique déduite de celles-ci. On n'a pas décelé jusqu'à présent de dérive par rapport à ces tables, compte tenu de l'amplitude théorique des fluctuations statistiques entre les décès probables et ceux constatés, qui sont fonction de la taille de la population analysée (ici de l'ordre du millier de personnes) et donc non négligeables. Ces statistiques sont présentées en annexe 3 et montrent des oscillations entre les deux mesures sans biais décelable.

Le canton sert une rente viagère à chaque ancien salarié lorsqu'il liquide ses retraites du régime général, qu'il soit resté jusqu'à cette date en activité dans la banque (ayant repris les engagements de l'employeur initial) ou non (dans ce dernier cas il est considéré comme « radié »). Le régime ne conditionne pas le bénéfice de la rente à la présence dans l'entreprise au moment de la liquidation, car il est obligatoire et financé par à la fois par des cotisations salariales et patronales. Le montant de la rente est proportionnel au nombre d'années passées au sein

de l'entreprise (et donc cotisées) et du salaire au moment du départ de l'entreprise (actualisé via une indexation en points et borné). Des majorations pour enfants ou pour maternité sont pris en compte dans le calcul.

Le nombre des bénéficiaires de droits directs et indirects du canton est de 1070 personnes (leur âge moyen est 77,4 ans) et il y a 280 futurs allocataires (leur âge moyen est 62,6 ans) dont une trentaine sont encore salariés de la banque (les 250 autres sont des radiés). L'âge moyen pondéré de l'ensemble ressort à 74,3 ans confirmant le caractère extinctif de l'entité. Les dernières rentes seront liquidées sur les dix ans à venir (le plus jeune radié est actuellement âgé de 52 ans), l'extinction probable du canton se situe dans soixante ans environs (la somme totale des rentes probables restant à verser s'élèvera à 1,7 M€ en 2060 et à 0,17 M€ en 2077). Un salarié entré à l'âge de vingt-trois ans en 1996 aura cent ans en 2073 : 2077 est une date d'extinction raisonnable ; et cent-vingt ans en 2093 : 2097 est la date ultime d'extinction (avec le /la réversataire plus jeune de trois ans).

2.2 LE BILAN SIMPLIFIÉ DU CANTON DE L'IRPS ET SES ENGAGEMENTS

2.2.1 LE BILAN DU CANTON DE L'IRPS

Les documents obligatoires de l'IRPS : SFCR, comptes annuels, règlements des régimes sont déposés chaque année sur son site internet, ces données publiques fournissent les chiffres et statistiques nécessaires aux analyses.

Le total du bilan comptable du canton est de 160,2 M€. La valeur comptable du portefeuille de placement s'élève à 158,3 M€ (sa valeur de marché est de 160 M€) et celle de sa trésorerie est 1,6 M€, soit une valeur comptable totale de 159,9 M€ (et de 161,6 M€ en valeur de marché).

Les placements sont uniquement constitués des parts d'un OPCVM dédié diversifié investi à hauteur de 30 % en actions européennes cotées (de l'univers Eurostoxx 600) et à hauteur de 70 % en titres obligataires de qualité (« Investment Grade », majoritairement des titres d'Etat) et de faible maturité : la durée moyenne de la poche obligataire est proche de 4 ans. Depuis la création du régime il n'y a jamais eu d'investissements directs ou indirects en immobilier, ni en infrastructures ou en Private Equity. Il n'y a pas non plus de poche monétaire (au sens habituel) : la trésorerie courante est logée dans des comptes bancaires et éventuellement dans des dépôts à terme. La détention des actifs au travers des parts d'un OPCVM dédié géré par une filiale d'un grand institutionnel est une pratique ancienne. Le traitement comptable des parts est celui des actifs « non amortissables ».

Le passif du canton se décompose en 15,5 M€ de fonds propres et 144,5 M€ de provisions techniques brutes : le Fonds de Service des Rentes s'élève à 116,2 M€, le Fonds Collectif à 21,7 M€ et la Provision pour Participation aux Excédents à 6,5 M€. Les « autres actifs » et les « autres passifs » sont négligeables totalisant chacun 0,2 M€.

Le canton couvre son Exigence Minimale de Solvabilité (qui vaut 5,5 M€) à hauteur de 281 %, légèrement au-dessus du ratio moyen des ORPS (273 % en 2023), cf §1.2.

2.2.2 LES ENGAGEMENTS DU CANTON DE L'IRPS

On souhaite connaître le montant total estimé des engagements du canton dans une approche symétrique à l'approche en comptabilité de caisse de son actif, or les provisions comptables et prudentielles ne fournissent pas cette information. C'est possible toutefois en se plaçant dans le référentiel prudentiel IRS qui n'est plus utilisé dans les publications obligatoires car ce statut a disparu et qu'il a perdu son caractère normatif réglementaire. En revanche on peut toujours utiliser sa logique actuarielle et son homogénéité de traitement. En vision IRS on calcule les engagements sur la population des bénéficiaires actuels (et de leurs réversataires) et ceux sur la population des futurs bénéficiaires (et de leurs réversataires) en utilisant les mêmes conventions actuarielles.

Dans le référentiel IORP 2 s'appliquant à l'IRPS, c'est l'engagement juridique de l'entité fixe qui la frontière du problème : on distingue le Fonds de Service des Rentes, sur lequel l'IRPS est engagé, et le Fonds Collectifs qui est un montant résiduel calculé par récurrence et que l'employeur (« le souscripteur ») devra abonder en cas d'insuffisance de ce dernier. Lorsque les dernières liquidations auront été faites, le souscripteur restera encore engagé sur les revalorisations futures en cas d'insuffisance. Sous IORP 2 et IRS, aucune revalorisation future n'est estimée, sauf celle connue pendant l'exercice et qui s'applique à l'année suivante (puis est ensuite maintenue).

Dans le référentiel IRS, les engagements correspondants aux futurs bénéficiaires (qui correspond à la population correspondant au Fonds Collectif) sont calculés avec les mêmes règles que celles utilisées pour le FSR. Le montant obtenu est une estimation cohérente des engagements probables sur cette population du périmètre du Fonds Collectif. Comparer ce montant en vision IRS à la somme du Fonds Collectif IORP 2, et des proratas correspondant de la PPE et des fonds propres peut renseigner sur la capacité du canton à servir toutes les rentes futures et son niveau de solvabilité réel.

Le calcul du Fonds de Service des Rentes ne change pas entre IORP 2 et IRS. C'est sur le périmètre correspondant au Fonds Collectif qu'il y a divergence : l'équivalent IRS du Fonds Collectif est estimé en adoptant les mêmes méthodes et conventions actuarielles que celles du FSR pour évaluer les engagements au titre des futurs bénéficiaires (moyennant quelques hypothèses sur la fin de carrière de la trentaine de salariés ; la situation des radiés est gelée). Dans le calcul global en vision IRS de la somme du FSR et de l'équivalent IRS du Fonds Collectif, donc sur l'ensemble des bénéficiaires présents et futurs, on estime tous les flux futurs probables du canton avec les tables de mortalité TGF et TGH 00-05 et un taux technique unique de 0%. Les rentes étant réversibles sans condition, on applique le coefficient de 60 % aux rentes pour les réversataires éventuels.

Dans cette « vision IRS » (hors frais) on obtient 112,8 M€ pour le périmètre du Fonds de Service des Rentes (identique au FSR comptable) et 35,8 M€ pour « l'équivalent Fonds Collectif » à comparer à 24 M€ pour le Fonds Collectif dans les comptes prudentiels. La somme des engagements totaux hors frais en vision IRS s'établit à 148,6 M€ un montant proche de celui des provisions techniques brutes de 144,5 M€ et inférieur à la valeur de marché du portefeuille de 161,6 M€ fin 2023.

Ces montants n'incluent pas les frais, or ils sont inévitables. Il faut les estimer pour obtenir le montant probable total (actualisé au taux 0%) que devra déboursier le canton jusqu'à son extinction, toujours sans les revalorisations futures inconnues. L'estimation forfaitaire totale actualisée des frais s'élève à 10 % des engagements (dans les simulations on les calculera rigoureusement), faisant passer l'engagement total IRS avec frais à 163,5 M€, un montant légèrement supérieur à la valeur de marché des actifs financiers du canton (161,6 M€).

Ces montants confirment que la solvabilité actuelle du canton est convenable dans une évaluation faite avec des hypothèses prudentes, mais qui n'intègre ni les revalorisations futures inconnues ni les fruits futurs également inconnus des actifs financiers. Seules les simulations de ces deux flux aléatoires opposés sous des hypothèses réalistes permettront de mieux apprécier sa solvabilité dans le futur et d'affiner ce premier constat.

Le canton étant à l'équilibre actuellement (provisions avec charges face aux actifs financiers), on peut avancer que si les rendements financiers futurs sont durablement supérieurs aux revalorisations futures sa solvabilité sera conservée : il pourra servir les rentes de manière autonome sans avoir à solliciter l'employeur. C'est la balance entre le poids des prélèvements pour servir les rentes revalorisés (avec effet cumulatif) et celui des produits financiers perçus à partir de ce capital initial progressivement consommé qui va déterminer la trajectoire de solvabilité du canton.

2.3 LA GESTION EXTINCTIVE DE L'IRPS

La gestion en extinction du canton consiste à régler les pensions et à instruire les derniers dossiers de liquidation, de réversion et de clôture ainsi qu'à assurer le suivi de la gestion financière et à remplir les obligations légales, fiscales et règlementaires. Une équipe réduite effectue ces tâches sous la direction du Président du Conseil

d'Administration et du Directeur Général. La Commission Paritaire joue le rôle d'une assemblée générale, elle décide des grandes orientations selon les règles du paritarisme figurant dans le Code de la Sécurité Sociale.

La gestion tactique du portefeuille financier est confiée à une société de gestion d'actifs alors que l'allocation stratégique incombe aux instances dirigeantes de l'IRPS. L'allocation stratégique recouvre principalement la répartition entre la poche actions et la poche obligations, la durée moyenne de la poche obligataire et les types de titres financiers autorisés : elle est en grande partie héritée des règles anciennes de gestion du portefeuille de placement du fonds de roulement de l'AGIRC. L'allocation actuelle peut être infléchie si nécessaire car elle doit s'adapter à la décroissance de l'IRPS : celui-ci devra puiser dans ses actifs financiers et leurs fruits (tous deux déclinants) pour servir les rentes sur plusieurs décennies.

La phase de décroissance peut être traitée de deux façons :

- Soit un adossement statique est mis en place (si le montant du portefeuille initial est suffisant),
- Soit une gestion active est adoptée pour continuer à gérer les réinvestissements partiels des placements et conserver une poche risquée source potentielle de sur-performance, sous la contrainte de servir les rentes jusqu'à extinction totale de l'IRPS, puisqu'un aléa de marché est subi.

La modélisation ALM du canton en extinction est simple (côté passif) car il verse uniquement des rentes dont la chronique est d'abord considérée comme déterministe : c'est la donnée d'entrée du problème (les dernières cotisations à recevoir sur la décennie à venir sont faibles et ne seront pas prises en compte). On intégrera dans un second temps les deux aléas pesant sur cette chronique : les revalorisations au taux d'inflation et le risque de sous mortalité.

La chronique des rentes probables futures est obtenue en multipliant chaque rente en cours de service, ainsi que chaque rente future estimée (à sa date de liquidation estimée) par la probabilité de survie conditionnelle de son titulaire (direct puis éventuellement indirect) extraite des tables TGF/TGH 00 05. La consolidation de ces flux individuels probables positionnés chaque année donne la chronique des flux annuels probables. C'est l'évaluation des engagements du canton dans la vision IRS qui donne les estimations des rentes annuelles probabilisées en valeur faciale. Ces valeurs faciales seront revalorisées de manière cumulative pour fournir les flux futurs payés (en comptabilité de caisse).

Aux flux annuels de rentes brutes on ajoute les frais de gestion et d'administration annuels estimés à 3% des rentes et à 0,50% du montant du portefeuille (en valeur absolue). Un calcul simplifié utilisant la durée du profil d'écoulement voisine de 14 ans donne un montant total flat de $3\% + (0,50\% * 14) = 10\%$ des engagements (soit environ le montant des fonds propres actuels du canton).

La modélisation ALM (côté actif) est celle des actifs financiers, faite avec la même périodicité annuelle. On adopte une approche comptable mixte en retenant la valeur nominale des obligations car elles sont conservées jusqu'à maturité et la valeur de marché des actions qui fluctue. On se situe ainsi entre une valorisation comptable prudente et une pure valorisation de marché (considérée comme plus proche de la réalité mais assez volatile et finalement peu adaptée à une gestion à long terme d'attrition progressive du portefeuille). Alors que les rentes peuvent être considérées en première approximation comme déterministes, la valeur totale du portefeuille financier est toujours aléatoire.

On n'utilisera pas de taux technique (taux d'actualisation) dans ces simulations car on se place en comptabilité de caisse et non en VAN. On simule les évolutions du portefeuille année après année, sans chercher à obtenir leur valeur actuelle, pour mesurer la valeur terminale moyenne du portefeuille (obtenue en euros courants). On évite de réduire artificiellement le poids des flux futurs par l'actualisation, et on ne cherche pas non plus à exprimer les montants en euros constants (nécessitant de choisir un taux de déflation).

NB : On dérogera à cette règle lorsque l'on traduira en euros de 2024 les montants finaux moyens probables obtenus en 2097 (ainsi qu'en 2060 et 2077) dans les simulations pour relativiser leur magnitude et pour permettre les comparaisons sur une unité commune.

Les trois graphiques suivants (figures 4 à 6) présentent :

- La chronique des rentes futures (sans frais et sans revalorisation soit en « pieds de rente ») de 2024 jusqu'en 2072 (l'extinction absolue est estimée en 2097, la somme des rentes annuelles passant sous 200 €) ;
- L'évolution de la provision mathématique en vision IRS (cumul des rentes annuelles non actualisées, non revalorisées, sans frais) ; la durée de Macaulay de ce profil d'engagement vaut 13,7 ans.
- Le ratio rentes/provision qui croît continûment. Les deux termes du ratio diminuent mais la hausse du ratio traduit la consommation progressive des actifs jusqu'à leur épuisement (il n'est tenu compte ni des produits financiers ni des revalorisations ici) résultant de la fermeture du canton.

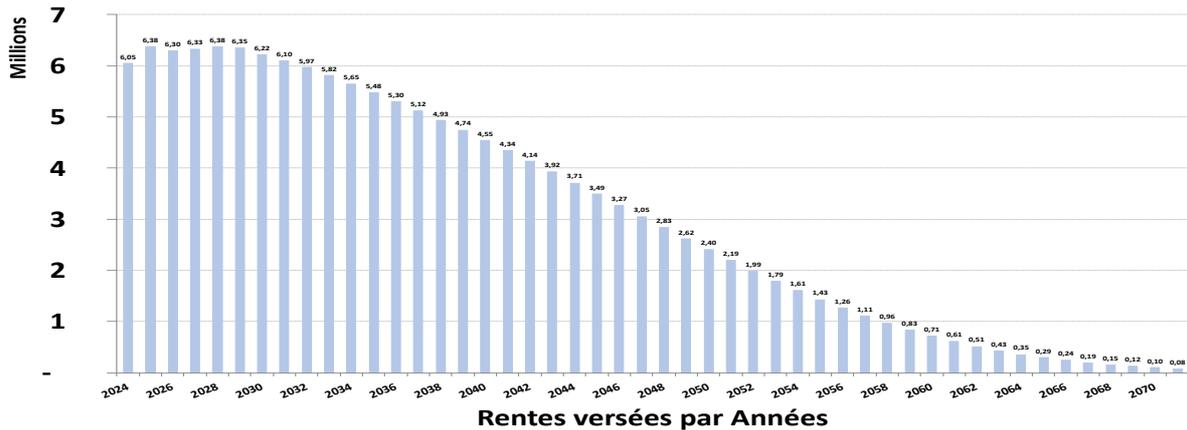


Figure 4 : Rentes futures probables en vision IRS (hors frais et sans revalorisations)

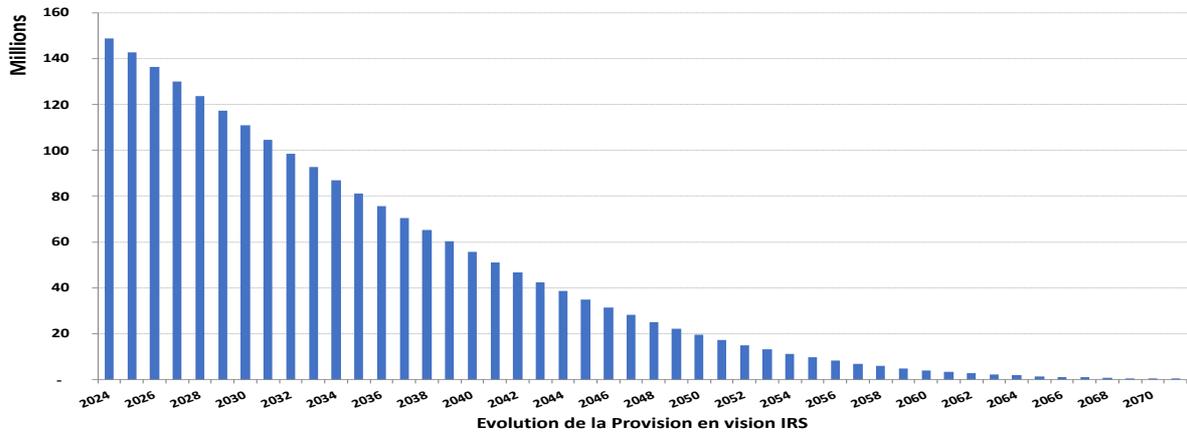


Figure 5 : Evolution de la provision mathématique en vision IRS (hors frais et sans revalorisations)

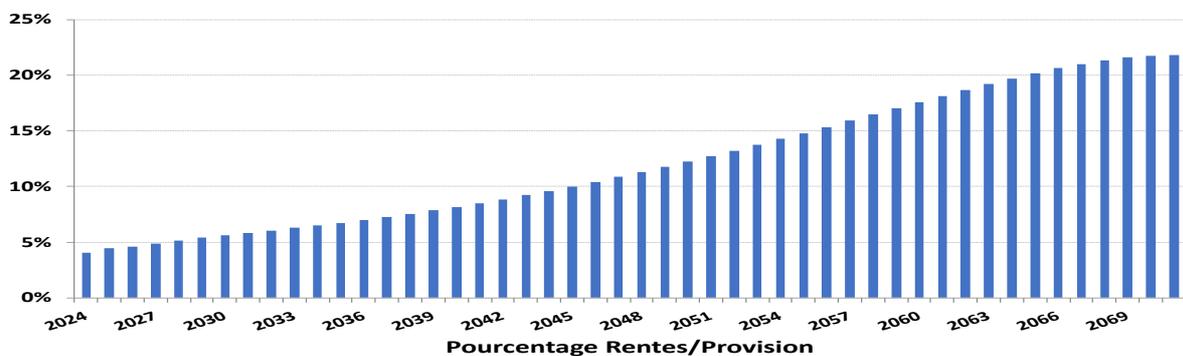


Figure 6 : Ratio rente annuelle / provision mathématique restante en vision IRS (hors frais et sans revalorisations)

3 LE PILOTAGE FINANCIER DE L'IRPS

3.1 LE PILOTAGE FINANCIER D'UN IRPS, UNE OBLIGATION ?

Un IRPS en régime permanent et en capitalisation doit gérer ses actifs financiers pendant presque cent ans si l'on considère la période totale d'épargne et de consommation d'un adhérent entrant dans le régime à vingt-cinq ans, prenant sa retraite à soixante-cinq ans, décédant à quatre-vingt-cinq ans et ayant une/un réversataire vingt ans plus jeune que lui, qui décède à quatre-vingt-dix ans : soit une durée totale de quatre-vingt-cinq ans, avec deux sous-périodes de durées presque égales. La date ultime de 2097 est d'ailleurs postérieure de cent ans à celle de fermeture.

Le canton de l'IRPS est fermé et il doit encore servir des rentes sur un horizon de plusieurs décennies aux bénéficiaires directs et indirects. Sur cette durée il faudra appliquer une politique de gestion des actifs financiers définie ex ante suivie de manière automatique et corrigée uniquement en cas de survenance d'évènement adverse majeur comme le non-respect de l'Exigence Minimale de Solvabilité (quelle que soit sa cause) ou avant cela de dégradation persistante. Cette politique de gestion se traduit par le pilotage de la répartition des actifs financiers entre une poche actions et une poche obligations sur un horizon long.

Selon l'article L 385-4 : « les fonds de retraite professionnelle supplémentaire investissent l'ensemble de leurs actifs conformément au principe de la “ personne prudente ” » : cette injonction du législateur dérive du texte européen. Il fait aussi écho à l'esprit de Solvabilité 2 qui laisse une certaine liberté dans les investissements : il n'y a plus d'obligations de forme sur les types de support à utiliser et leurs pondérations comme dans Solvabilité 1, mais il pose une contrainte de fonds car il faut pouvoir justifier, expliquer et mesurer les risques encourus et aussi respecter les exigences de solvabilité minimales (comme dans Solvabilité 1 et avant).

Pour un IRPS, suivre le principe de la « personne prudente » ce serait principalement diversifier ses placements entre plusieurs compartiments : actions, obligations, immobilier, private equity, monétaire, infrastructures et aussi à l'intérieur de chacun d'entre eux et aussi de détenir les actifs les moins risqués possibles dans ces classes. La diversification est appliquée depuis longtemps par les gestionnaires d'actifs et les investisseurs institutionnels car la réduction du risque spécifique qu'elle apporte a été démontrée par des études académiques et aussi vérifiée en pratique. Suivre le principe de la « personne prudente » c'est aussi dimensionner convenablement la poche risquée au sein de l'actif financier pour que l'exposition totale reste prudente.

La démarche commence par le choix des compartiments qui seront retenus, puis de leurs pondérations. Les cinq compartiments précédemment cités sont utilisés par les institutionnels, en gestion directe ou déléguée ou à travers des fonds collectifs. Les deux autres contraintes à observer sont que la somme des coefficients ne doit pas excéder 100 % (pas de recours à l'emprunt, i.e. le levier d'endettement, cf infra sa relaxation motivée dans les simulations) et que ceux-ci doivent être positifs : pas de ventes à découvert ou de positions long/short (deux stratégies plutôt réservées aux Hedge Funds). Les investissements sont effectués uniquement sur des supports libellés en euro pour éviter le risque de change.

Plusieurs articles et ouvrages traitant de la stratégie de gestion des actifs d'un fonds de pension par capitalisation en phase de consommation de l'épargne ont été rédigés par des auteurs anglo-saxons car c'est un sujet important dans ces pays où une part significative des retraites est servie par ces régimes. En France le sujet de la liquidation progressive de l'épargne constituée au préalable a été rarement abordé sauf dans quelques textes et dans un ouvrage qui seront présentés plus loin.

La restriction à deux classes d'actifs : actions et obligations simplifie le problème et correspond à la réalité de l'IRPS. Le pilotage va consister à fixer le pourcentage de la poche actions considérée comme « risquée », alors que la poche obligation sera considérée comme « sans risque ».

Un placement en actions est considéré comme rentable si la durée de détention est suffisamment longue, ce constat est rappelé dans les DIC et par le législateur (cf. au § 1.1.1 la référence à l'ordonnance de 2019), mais on sait bien que sa valeur peut fluctuer fortement dans certaines périodes.

Ces deux notions se retrouvent dans la modélisation classique du prix d'une action et indirectement de son rendement. Celui-ci peut être séparé en une partie aléatoire risquée et une partie de dérive pure. De manière approchée, la partie risquée évolue comme produit de la volatilité par la racine carrée du temps de détention alors que la progression moyenne est le produit de la dérive (le « drift ») par le temps. Le ratio rendement/risque aléatoire est en première approximation proportionnel à la racine carrée du temps et fonction du ratio des deux mesures (dérive et volatilité) ; il s'améliore avec l'allongement de la durée de détention. Ce comportement est utilisé dans certains types de placement structuré, il est aussi mis en avant de manière plus empirique par les tenants de l'investissement en actions qui soulignent la nécessité de les détenir sur longue période et de manière assez statique : le constat empirique rejoint ici la théorie (le contraire aurait été gênant...).

Pour un ORPS (ou un plan de retraite individuel), l'autre avantage relatif de détenir des actions est que les achats dans la phase d'épargne et les ventes dans la phase de consommation sont répartis régulièrement au cours du temps. Contrairement à des investissements et désinvestissements ponctuels, le risque de subir un cours pénalisant (sur la totalité de l'assiette) à un instant donné est notablement réduit car les points d'entrée et de sortie sont multiples et sur des assiettes relativement modestes. Il y a un effet d'échantillonnage sur des montants assez proches dans les deux phases et les valeurs d'entrée et de sortie moyennes subies sont plus proches des moyennes des cours (comme dans une option asiatique) que des cours spot (comme dans une option européenne).

La gestion pilotée (avec les modes de valorisation des actions et des obligations retenus ici) permet de préserver les gains : en cas de hausse des actions le ratio actions/portefeuille augmente et pour le maintenir à son niveau choisi il faut vendre une partie des actions et investir le montant obtenu en obligations (pour sécuriser le gain) et a contrario d'investir en période de cours bas (le mécanisme symétrique : on espère acheter « à bon compte »). Cette gestion en ratio-cible est courante en gestion d'actifs, elle repose également en partie sur la notion de retour à la moyenne qui se fonde en partie sur l'espérance d'un rebond après une chute souvent observé mais pas de manière systématique. Enfin le retour à la moyenne repose sur la notion même de moyenne : des valeurs basses doivent être compensées par des valeurs hautes pour obtenir précisément la valeur moyenne intermédiaire. Une approche asymétrique plus prudente consisterait à ne conserver que les gains et à accepter que les pertes réduisent graduellement la fraction investie en actions, ce pilotage dissymétrique ne sera pas étudié ici car c'est déjà une gestion quasi-discrétionnaire et il n'est pas certain qu'elle soit efficace (avec les modélisations on pourra la tester ultérieurement).

Le mécanisme symétrique utilisé ici s'apparente à celui d'un CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance), une méthode de gestion d'actifs introduite en 1986 par A.F. Perold, F. Black et al. qui est couramment utilisée dans des produits moyennement structurés pour les particuliers.

3.2 LA MESURE DE LA SOLVABILITE D'UN IRPS ET LES STRESS TESTS REGLEMENTAIRES

3.2.1 L'EXIGENCE MINIMALE DE MARGE DE SOLVABILITE

Le niveau d'exigence minimale de marge de solvabilité figure dans l'article R. 385-2-1 du décret FRPS de 2017. La marge de solvabilité minimale est de 4% des provisions mathématiques comme dans le référentiel Solvabilité1. Ce ratio peut sembler assez faible. Le passage de Solvabilité 1 à Solvabilité 2 avait implicitement notablement durci l'exigence de fonds propres et entraîné de facto un quasi doublement de ceux-ci (toutes choses égales par ailleurs, cf plusieurs mémoires publiés par l'Institut des Actuariers). Adopter le statut d'IRPS permet de faire une économie substantielle de fonds propres et ce bénéfice peut expliquer une partie du succès de ce type de structure.

Sous Solvabilité 2 le mode de calcul du SCR de marché est analogue à une mesure en VaR, ce qui pénalise fortement les investissements en actions (avec un choc de 39%, sans introduire ici les mesures d'atténuation temporaire ni l'introduction récente d'un traitement plus favorable à 21 % pour les actions détenues de manière durable). Plusieurs études et article ont souligné que Solvabilité 2 pénalisait fortement les entités gérant des engagements longs et en particulier leurs investissements en actions, avec pour corollaire une réduction de leur poids et donc une allocation sous-optimale qui pénalise finalement les épargnants.

En Europe le constat que Solvabilité 2 n'était pas adapté aux entités portant des engagements longs (voir très longs) a permis de les sortir de ce cadre trop contraignant. Les instances européennes ont introduit depuis 2003 un cadre spécifique (IORP) pour ces entités gérant des engagements longs et leurs contraintes particulières. Actuellement elles relèvent d'IORP 2 dont la transposition en France en 2017 a permis à certaines d'entre elles de se transformer en ORPS. Cette transformation les place dans un cadre prudentiel mieux adapté et surtout elles échappent aux exigences de Solvabilité 2. Sous IORP 2 l'Exigence de Marge de Solvabilité (EMS) s'élève à 4% des provisions mathématiques et le Fonds de Garantie qui représente les fonds propres minimaux qu'un ORPS doit détenir est égal au tiers de l'EMS, sans toutefois être inférieur à 3,7 M€.

Le ratio de Solvabilité mesure le ratio entre les fonds propres et l'EMS (il est généralement sensiblement supérieur à 200% mais peut fluctuer et se rapprocher de 100%, par exemple entre 2021 et 2022 pour certaines entités, cf. les deux publications de GALEA citées au § 1.2).

3.2.1 LES STRESS TESTS REGLEMENTAIRES

Les exigences de solvabilité : EMS, Fonds de Garantie et ratio de solvabilité sont calculées d'abord dans le scénario central qui correspond à la situation actuelle et à son évolution anticipée. Pour prendre en compte l'horizon long des ORPS on part de la situation à la clôture de l'exercice et on simule sur les dix prochains exercices le bilan prudentiel de l'entité : l'actif et le passif sont « écoulés » pendant dix ans avec des hypothèses simples : cristallisation des taux d'intérêt à leur niveau actuel, paiement des rentes...

Chaque année le bilan est établi et les indicateurs de solvabilité sont calculés et comparés aux niveaux requis. L'approche est voisine de celle d'une comptabilité de caisse (mais pas identique) : elle porte sur des flux et utilise les valeurs des provisions (actualisées) et la valeur des actifs restant qui sont évalués en valeur comptable (éventuellement avec une provision pour dépréciation) et non en valeurs de marché comme dans Solvabilité 2. L'horizon retenu ne se limite pas à un an, qui est un horizon inadapté ici, il est étendu à la décennie à venir qui est un horizon de planification réaliste pour de telles entités.

A partir de ce cas de base (ou scénario central) des stress tests règlementaires sont appliqués selon trois scénarios disjoints : baisse des taux d'intérêt, baisse du rendement des actions et baisse des taux de mortalité.

- Le scénario de baisse des taux d'intérêt impacte le niveau des coupons perçus dans le futur provenant des réinvestissements des tombées obligataire dans de nouvelles obligations (de même maturité) et avec les taux de l'instant cristallisés (et non les taux à terme qui auraient pu être utilisés comme estimateurs des taux futurs). Cette baisse affecte les recettes de l'entité, sans modifier la valeur de l'actif autrement que par les soldes des sommes des valeurs nominales des obligations (et la constitution éventuelle de provisions pour risque d'exigibilité). La baisse de taux agit aussi sur le montant des provisions mathématiques car le taux d'actualisation retenu dans leur évaluation intègre cette baisse (ce taux ne peut devenir négatif toutefois). Cette approche mixte mêle des flux à l'actif (et au compte de résultat) et un stock actualisé au passif.

Le choc à la baisse du taux est le « ... maximum entre une baisse relative de 40% et une baisse absolue de 0,75 % » sans que le taux résultant ne puisse « être inférieur à 0% ou supérieur à 3,50 % ».

La sévérité de ce choc est comparable voire plus forte que celle de Solvabilité 2 (il est actuellement révisé pour les taux d'intérêt négatifs alors même que ceux sont repassés en zone nettement positive depuis fin 2022). Le principe d'un choc exprimé en valeur relative et en valeur absolue est courant : il est utilisé dans la réglementation Bâle 3 pour les banques. Avec le niveau des taux de 2024, c'est le choc relatif qui s'applique. Le choc à la baisse augmente les provisions mathématiques (avant toute érosion de celles-ci par le passage du temps) et diminue les ressources futures par la baisse des coupons : il n'y a pas de compensation entre l'actif et le passif comme dans Solvabilité 2 (ou en IRFS) où l'effet d'un choc de taux opère dans le même sens à l'actif et au passif via l'actualisation. L'actif ne bénéficie pas ici de la hausse de sa valeur de marché dans le stress de baisse des taux.

Le choc de taux est finalement assez sévère car il ne permet pas de compenser ses effets à l'actif et au passif comme dans l'approche en valeur de marché de Solvabilité 2. Il est d'autant plus sévère qu'il porte sur plus des trois quarts du bilan des entités et cristallise les taux actuels pendant dix ans.

Il confirme également que les coupons sont les principales ressources (quasi certaines) d'une entité gérant des engagements longs.

- Le scénario de baisse des rendements financiers porte sur les actifs non amortissables (les actions) : c'est une baisse de 30% ; on le nomme ici « choc actions ». Le texte de l'article R 385-2-1 du décret de 2017 est concis, on suppose qu'il s'agit du taux de rendement. L'article R 340-10 précise : « les valeurs non amortissables ...gènèrent un rendement annuel égal à la moyenne annuelle, sur l'exercice précédent le test, du niveau du taux moyen d'Etat français augmenté d'une prime de risque de 250 points de base ». Cette approche normative fixe un rendement conventionnel des actions et du choc à appliquer qui est corrélé au taux TME. Ce rendement égal à un taux d'intérêt à long terme majoré de 2,50 % est - de facto - toujours positif (le TME devrait être inférieur à -2,50 %, sa valeur la plus négative a été de -0,29 %), même après le choc il reste positif (même pendant la période des taux longs négatifs). Ce stress ne conduit jamais à des rendements négatifs pour les actions, ni a fortiori de chute brutale de leur valeur de marché (puisque celle-ci n'est pas utilisée et que la valeur comptable est plus stable, sauf en cas de constitution de provision pour dépréciation durable). On se situe à l'opposé du traitement pénalisant des actions dans Solvabilité 2 ; ici elles sont considérées comme des placements de long terme dont le rendement moyen est positif (et supérieur aux taux d'intérêt long). Ce traitement ignore en grande partie la volatilité de la valeur de marché des actions (à la PDD près) : leur mesure de risque se limite à réduire leur rendement moyen, ce qui est peu pénalisant.

NB : On comparera les valeurs historiques du taux de rendement des actions françaises (CAC 40) et celles du taux TME pour retrouver, ou non, cette prime de risque de 250bp (notamment inférieure aux valeurs calculées par Damodaran sur les actions US et même sur celle que l'on peut déduire du CAC 40).

En conclusion, le choc action IORP 2 est nettement moins sévère que celui de Solvabilité 2 car il ne s'applique pas à la valeur de marché du portefeuille actions, mais à son rendement total sur une décennie ce qui est moins pénalisant. Il s'applique aussi à une fraction du bilan qui est également plus faible.

- Le scénario de choc de mortalité est une baisse du taux de mortalité de 10% à tout âge ; il est analogue dans sa forme au choc de mortalité de Solvabilité 2, mais deux fois moins sévère.

Les résultats du scénario central et des stress test figurent dans le Rapport au Contrôleur et dans le rapport d'Evaluation des Risques et de la Solvabilité (ERS ou ORSA) qui ne sont pas publics. Ils ne figurent généralement pas dans le Rapport sur la Solvabilité et la Situation Financière (SFCR) qui est public en revanche (cf. § 1.1.2).

La réglementation IORP 2 applicable aux ORPS pénalise peu leur poche actions. Ce traitement favorable est en ligne avec la volonté des instances européennes et nationales d'inciter les entités gérant des engagements longs à

investir fortement dans les actions qui fournissent de la surperformance par rapport aux obligations sur des durées de détention longues.

Ces stress tests ne couvrent pas le cas d'une crise ou catastrophe mondiale majeure où aucun compartiment financier n'est épargné. Ces événements extrêmes peuvent être l'objet de stress tests discrétionnaires, qui sont plutôt réservés aux entités de grande taille et dont les résultats ne sont pas publiés généralement.

3.3 COMMENT MODELISER LE PILOTAGE FINANCIER D'UN IRPS ?

3.3.1 L'IDENTIFICATION DES CLASSES D'ACTIFS RETENUS ET DES RISQUES ASSOCIES

Pour modéliser le pilotage financier on procède par étapes :

L'IRPS doit d'abord choisir les classes d'actifs qu'il souhaite utiliser : ce choix peut être guidé par la pratique d'autres entités similaires ou par celle des assureurs. La caisse de retraite à l'origine du canton a suivi les règles d'investissement de la trésorerie de l'AGIRC datant des années 90 qui étaient assez prudentes (elles ont été mises à jour en 2022 et certaines contraintes ont été relaxées, cf la possibilité d'acquérir des CoCo's). Le canton a toujours restreint son univers d'investissement à deux classes d'actifs simples : des actions françaises puis européennes « Large Cap », du périmètre SBF 120 puis de celui de l'Eurostoxx 600 et des obligations à taux fixe émises par des Etats européens et marginalement des entreprises Investment Grade, en limitant la maturité moyenne de cette poche à 4 ans.

La seconde étape consiste à identifier les facteurs de risque qui pèsent sur l'actif et le passif du bilan et leur interaction (analyse ALM) sachant qu'ils peuvent agir sur les flux ou sur les stocks. Schématiquement les risques sur l'actifs sont majoritairement de type financier (risque actions et risque de taux d'intérêt) et relèvent de la finance de marché et de la gestion de portefeuille. Les risques sur le passif sont l'inflation et la longévité.

Même si l'IRPS ne relève plus de Solvabilité 2, nous nous inspirons de la méthodologie de calcul du SCR de marché pour segmenter les classes de risque : action, taux, spread, change, immobilier, concentration. Seules les deux premières classes sont pertinentes ici. Les autres risques sont absents et les risques de contrepartie et de concentration ne sont pas traités car ils sont mineurs.

Le risque action recouvre les actions cotées et non cotées (le Private Equity, inexistant ici) et il est significatif.

Le risque de taux est lié aux obligations d'Etat et c'est l'autre risque de marché majeur subi par l'IRPS et il est inévitable. Il se matérialise par les fluctuations des taux obligataires dans le futur (mais pas dans le prix des obligations ici). Le risque de spread ne sera pas traité ici, il est du second ordre.

Le dernier risque est le risque inflation. Au passif il est indirect et porte sur les revalorisations des rentes et c'est sur ce poste principalement qu'il sera analysé. A l'actif il est lié directement aux obligations indexées et dans ce cas ce serait un risque analogue à un risque de taux (l'inflation s'exprime comme un taux d'intérêt) mais n'est pas explicitement traité dans le SCR Marché. Il serait également présent indirectement à l'actif si l'on souhaitait se placer en monnaie constante. Ce n'est pas le cas ici pour trois raisons : les modélisations de produits financiers sont faites en monnaie courante, on a choisi de se placer en comptabilité de caisse donc en euros courants et il n'y a pas d'obligations indexées sur l'inflation dans le portefeuille actuel du canton.

Le risque inflation est important car il s'applique à la totalité du passif via l'indexation des rentes avec un effet cumulatif positif (ou cliquet) puisque les taux d'inflation négatifs ne sont pas pris en compte (ce risque est minime car l'inflation n'a été négative à -0,02% qu'une seule année depuis des décennies) et que seules les augmentations consécutives à des inflations positives sont acquises et cumulées.

Ces trois risques sont assimilables à des risques financiers et sont potentiellement corrélés entre eux.

A l'issue de cette première étape d'identification des risques, on les modélise dans les postes de bilan ou dans les flux qu'ils affectent et dont on va suivre les évolutions à partir des montants actuels et de la chronique des rentes. On utilise les modèles classiques et les méthodes de mesures de performance et de risque courantes pour les risques financiers purs à l'actif.

La troisième étape consiste à introduire le risque intrinsèque de tout régime de rente viagère : le risque de longévité. Il pèse sur l'équilibre et donc sur le pilotage financier. On estime son impact sur la chronique des rentes initiale et on le considère comme indépendant des risques financiers.

3.3.3 LES METHODES DE VALORISATION DES ACTIFS ET DE MESURE DES RENDEMENTS TOTAUX

Les facteurs de risque des actifs financiers ayant été identifiés, il faut mesurer leurs performances. Une mesure de performance s'appuie sur la variation relative de deux valorisations successives sur un intervalle de temps les séparant, ici l'année. Pour obtenir le rendement total annuel (Total Return) on inclut les dividendes distribués (réinvestis) et les plus ou moins-values éventuelles latentes constatées. Cette mesure est la norme, elle doit être précisée par sa méthode de calcul : variation arithmétique ou logarithmique.

L'utilisation d'un rendement total est logique pour la poche action, même si encore un trop grand nombre de publications se focalisent sur la seule valeur des indices boursiers (ou des cours boursiers) - après versement des dividendes - qui sont largement diffusés. La prise en compte des dividendes n'est pas directe car il faut intégrer la chronique de leurs distributions (sans évoquer la distinction juridique sur les rachats d'actions et le traitement des dividendes exceptionnels). La plupart des analyses portant sur les indices boursiers et destinées au grand public ignorent dans un premier temps les dividendes, ils sont traités à part et finalement un peu oubliés au fil du temps. Ces présentations destinées aux non-spécialistes contribuent à accréditer l'idée - fautive - qu'un portefeuille boursier génère du rendement essentiellement par les plus-values (ou plutôt par l'accroissement de sa valeur sur moyenne période). La segmentation entre rendement du cours boursier seul (ex dividende) et taux de dividende complique les analyses, même si on peut sommer ces deux taux en première approximation. La focalisation sur la performance de l'indice « nu » tend à négliger les dividendes (dont le taux moyen est compris entre 2 et 3% en Europe) parfois présentés comme accessoires à côté de l'autre source de richesse. Or sur moyenne période le taux de dividende moyen est comparable au taux coupon des obligations qui est la principale source de rendement de celles-ci en contrepartie de leur caractère de placement peu risqué. Le taux de dividende est également assez stable contrairement à la composante plus ou moins-value.

NB : Les frais de gestion des OPCVM actions destinés aux particuliers sont de l'ordre de la moitié du taux de dividendes : les épargnants en sont pratiquement privés et ne sont exposés qu'à la partie risquée : les plus ou moins-values. C'est également le cas dans les produits structurés sur indices actions qui sont référencés sur l'indice boursier « nu », la fraction de rendement venant des dividendes de la couverture en delta est utilisée par le fournisseur du produit financier structuré pour financer en partie le budget d'achat d'option et/ou les frottements sa couverture dynamique et aussi constituer une partie de sa marge.

Nous utiliserons dans les simulations uniquement les rendements totaux et des indices boursiers calculés en rendement total (TR) (sauf celles faites avec le modèle de Hardy où nous utiliserons le CAC 40).

Pour la poche obligataire la situation est inverse, son rendement total est généralement assimilé par simplicité au seul taux du coupon. Cette conception est acceptable et même exacte dans l'hypothèse où les obligations sont conservées jusqu'à l'échéance et qu'elles ne présentent pas de risque de crédit. Ce n'est pas le cas dans une gestion active d'un portefeuille obligataire qui ne cherche pas systématiquement à attendre la maturité mais cherche à réaliser des plus-values pour augmenter le rendement total. Dans la gestion modélisée du canton de l'IRPS ce type de gestion active de la poche obligataire est bannie : les obligations sont détenues jusqu'à maturité.

La mesure du rendement est liée au mode de valorisation. Pour la poche obligataire (comme pour la poche actions) il faut choisir entre la valeur de marché (performance totale) et la valeur comptable (rendement comptable). Lorsque qu'une obligation peut être vendue à tout moment, seule sa valorisation de marché est pertinente et il est nécessaire de considérer les performances annuelles totales (coupon et plus ou moins-value) pour le valoriser. Lorsqu'une obligation est considérée comme détenue jusqu'à échéance, sa valeur de remboursement (généralement le pair) est constante et les coupons sont des flux certains.

La valorisation des actions peut être faite soit en valeur de marché, soit en valeur comptable. Cette dernière valorisation est assez lourde à mettre en œuvre et surtout inutile dans une approche en comptabilité de caisse et de gestion de portefeuille avec des rebalancements.

L'horizon de l'IRPS est long, c'est pourquoi on a choisi l'année comme pas de temps pour positionner les flux, appliquer les performances estimées des compartiments et valoriser le portefeuille. Même si les rentes sont versées mensuellement on se cale sur le rythme annuel des exercices comptable et prudentiel. C'est aussi celui de l'analyse des performances de l'IRPS, de la mesure de sa solvabilité et de sa trajectoire enfin ; c'est également la périodicité des marchés financiers pour les investisseurs institutionnels et leurs comptes annuels.

Aucune contrainte n'est fixée sur l'origine des montants et leur utilisation, il y a fongibilité totale et aucun cantonnement entre les flux annuels successifs de rentes : des compensations entre exercices successifs peuvent s'opérer jusqu'à la consommation totale - ou non - des actifs financiers.

La fiscalité est ignorée ici, ce qui évite de devoir suivre les valeurs d'achat et de cession des actifs financiers.

4 MODELISATION DU PORTEFEUILLE, DES INSTRUMENTS FINANCIERS ET DES FLUX TOTAUX FUTURS

4.1 MODELISATIONS DES INSTRUMENTS FINANCIERS ET DE LEURS RISQUES

4.1.1 LA POCHE ACTIONS ET SA MODELISATION

4.1.1.1 L'APPROCHE HISTORIQUE

L'approche historique utilise la chronique des rendements passés en respectant leur ordre. Il n'est pas nécessaire de modéliser l'instrument financier, il faut connaître ses rendements annuels sur la profondeur historique choisie. Plus l'historique est profond, plus on est en mesure de capter des mouvements extrêmes déjà réalisés, mais qui pourront être encore plus extrêmes dans le futur. A contrario on intègre des environnements et des conditions de marché, des situations économiques et financières qui ne reflètent peut-être plus les conditions actuelles et sont devenues obsolètes, posant la question de leur représentativité.

L'approche historique fournit également des paramètres statistiques (rendement et volatilité) « réalistes » qui seront utilisés directement dans des simulations par Monte Carlo. Ces paramètres pourront être stressés à leur tour pour tester les stratégies et estimer leurs sensibilités aux différents facteurs de risque.

Les scénarios de performance figurant dans le Document d'Information Clés (DIC), qui a remplacé le DICI, sont construits en partie sur les performances passées de l'OPCVM (ou de l'indice de référence) alors même qu'elles ne sont plus explicitement rappelées. L'AMF insère l'avertissement suivant dans les DIC :

« Attention, les simulations présentées se basent sur le comportement du même placement les années précédentes. Or, les performances passées ne préjugent pas des performances futures, qui sont impossibles à prévoir en pratique. Les simulations présentées dans le DIC ne constituent donc pas une prévision. Ainsi, même lorsque le scénario défavorable indique une performance positive, la valeur du placement pourra baisser. »

Ces caveats illustrent clairement la difficulté de la prévision (sa quasi impossibilité de facto...) mais le texte souligne la nécessité de pouvoir « estimer » et « classer ». Des changements de paradigme/régime ont régulièrement été observés et les crises passées visibles dans les séries historiques peuvent donner une indication des mouvements futurs sans que l'on soit certain qu'ils ne puissent pas être encore plus violents. Actuellement les craintes liées au changement climatique, à ses conséquences et au financement de celui-ci sont un exemple de changement de paradigme, sans évoquer les risques géopolitiques. Dans le passé, la crise pétrolière des années 1970, celle des DotCom des années 2000 et enfin celle des Subprimes en 2008, et la crise Grecque de 2014 en Europe, avec leurs conséquences étaient déjà des crises sévères, sans parler de la crise mondiale de 1929 un peu ancienne désormais et des deux guerres mondiales ou plus récemment du bref krach observé au début du Covid.

Les simulations historiques sont simples à implémenter puisque l'on applique les performances passées dans leur ordre chronologique sur les assiettes en risque et en utilisant les règles de gestion choisies. On conserve l'ordre chronologique pour deux raisons : les assiettes varient au cours du temps du fait des flux de paiement et de la règle de gestion (il n'y a pas commutativité comme avec une assiette constante). Dans l'hypothèse où les performances ne sont pas indépendantes et présentent un retour à la moyenne assez rapide (rebond immédiat après une baisse) il est nécessaire de respecter l'ordre chronologique des performances ; enfin si l'on est exposé à plusieurs facteurs de risque on conserve les corrélations réelles entre ceux-ci.

Une variante de la méthode historique est la simulation par bootstrapping à partir des rendements passés qui sont tirés au hasard, avec ou sans remise, donc sans respecter la chronologie. Nous n'utiliserons pas cette méthode qui

s'apparente à une simulation par Monte Carlo et repose sur un nombre limité de données source. Elle ne respecte pas les corrélations observées si plusieurs facteurs de risque sont traités indépendamment et non groupés.

On retient la chronique des performances commençant par chaque année depuis 1988. Pour couvrir un intervalle constant (ici 73 ans de 2024 à 2097), on complète la série en répétant à sa suite la chronique complète commençant en 1988 (toujours dans l'ordre chronologique). La jonction des deux mêmes séries est le seul saut chronologique car on passe de 2023 à 1988.

Un avantage évident de l'utilisation des séries historiques est son caractère réaliste puisque les données appliquées ont déjà été observées, alors que les simulations par Monte Carlo supposent des modélisations théoriques plus ou moins complexe des facteurs de risque. La moins complexe étant l'élargissement de l'ensemble des valeurs observées en utilisant une loi normale dont les deux premiers moments sont ceux de la série historique. Les praticiens américains privilégient les séries historiques brutes car elles sont faciles à comprendre par des non-spécialistes : possibilité d'utiliser un historique profond, pas de modélisation complexe ni de paramètres à extraire d'un historique sélectionné.

La principale faiblesse de la méthode historique sur des fenêtres longues est le recouvrement (décroissant) des échantillons utilisés, les simulations sont partiellement corrélées. Multiplier le nombre de simulations permet ici d'appliquer les données sur des montants différents. Par exemple une simulation qui commence sur une période de crise capte la forte perte de richesse initiale comme dans le cas d'un CPPI qui commence sur une forte chute de l'actif risqué.

4.1.1.2 LES APPROCHES THEORIQUES EN LOI LOG-NORMALE ET AVEC LE MODELE DE HARDY

A) Le modèle Log-normal

La poche actions est modélisée comme une ligne de N actions S (ou parts d'ETF) identiques qui répliquent un indice européen Large Cap (ici le CAC 40 TR) avec ses paramètres de dérive et de volatilité. On assimilera la valeur de S, exprimée en euros courants (soit le même numéraire que celui des obligations) à celle de l'indice Total Return du sous-jacent exprimé en points (car il est libellé en euros).

Dans ce qui suit nous nous référons à l'ouvrage « Finance de marché » R. Portrait et P. Poncet, 2nde édition Dalloz, 2009, et reprenons les expressions et les conventions de notations utilisées pour la modélisation d'une action.

Nous utilisons le modèle utilisé par Black et Scholes, à volatilité constante dans sa forme log-normale.

On rappelle d'abord l'expression de la variation infinitésimale en temps continu puis les intermédiaires de calcul pour obtenir l'expression de S en fonction de t et des paramètres de dérive μ et de volatilité σ :

$$dS_t / S_t = \mu dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

- S_t : valeur de l'indice à la date t,
- μ : dérive de l'indice (NB : μ est égal au taux sans risque r sous la probabilité risque neutre),
- σ : volatilité du rendement de l'indice S,
- W_t : mouvement brownien standard.

En passant par le logarithme népérien et en utilisant le lemme d'Ito on obtient l'expression de S au temps t1 en fonction de S au temps t0 et des deux paramètres μ et σ caractérisant l'évolution de S au cours du temps.

$$S_{t1} = S_{t0} * (\exp((\mu - \sigma^2/2) * (t1 - t0) + (\sigma * (W_{t1} - 0)))) \quad (2)$$

On exprime la valeur de S en t2 à partir de t1 par la formule suivante (où t2 remplace t1 et t1 remplace t0).

$$S_{t2} = S_{t1} * (\exp((\mu - \sigma^2/2) * (t2 - t1) + (\sigma * (W_{t2} - W_{t1})))) \quad (3)$$

L'accroissement du Brownien standard est de la forme : $(W_{t_2} - W_{t_1})$ qui est approximé par $N(0, t_2 - t_1)$, la loi normale centrée dont la variance est égale à la durée séparant les instants t_1 et t_2 .

A partir de cette présentation classique nous passons à la formule discrétisée pour un pas de temps annuel, $(t_2 - t_1)$ vaut 1 (an) et la part aléatoire est le produit de la loi normale centrée réduite et de la volatilité annuelle. Cette fonction sera approximée par la fonction aléa d'excel (nous n'utilisons pas d'autre générateur de nombres aléatoires).

Nous pouvons également nous placer en modèle log-gaussien en temps discret (cf « Finance de Marché », chapitre 8) en choisissant comme pas de temps toujours l'année, ce qui donne l'expression suivante :

$$\ln(S + \Delta t) - \ln(S) = \ln((S + \Delta t) / S) = \Delta \ln(S) = (m * \Delta t) + (\sigma * dW_t) \quad (4)$$

La constante m est la moyenne empirique des variations logarithmiques annuelles de S (indice CAC 40 TR).

En prenant l'exponentielle des deux termes de l'expression (4) on retrouve l'expression (3) et on en déduit que $m = (\mu - \sigma^2/2)$.

L'approche en temps continu pour obtenir l'expression de l'action/indice a été présentée plus haut, elle est :

$$S_t = S_0 * (\exp((\mu - \sigma^2/2) * t + (\sigma * W_t))), \text{ avec } m = (\mu - \sigma^2/2) \quad (5)$$

Qui s'écrit aussi pour deux valeurs annuelles consécutives :

$$S_t = S_{t-1} * (\exp((\mu - \sigma^2/2) * 1 + (\sigma * N(0, 1)))) \quad (6)$$

Et en passant au logarithme népérien :

$$\ln(S_t / S_{t-1}) = (\mu - \sigma^2/2) + (\sigma * N(0, 1)) = N((\mu - \sigma^2/2), \sigma^2) \quad (7)$$

$N((\mu - \sigma^2/2), \sigma^2)$ est la loi normale de moyenne $(\mu - \sigma^2/2)$ et de variance égale au carré de la volatilité ; ici la durée est de 1 an et toutes les grandeurs sont exprimées en base annuelle.

Nous retenons la volatilité calculée directement sur les données annuelles et non pas celle obtenue par le produit de la volatilité quotidienne multipliée par racine carré de 256 (ou mensuelle avec racine carré de 12).

Le modèle initial de Black et Scholes suppose que l'action modélisée ne distribue pas de dividende, simplifiant la modélisation d'une stratégie autofinancée : il est parfaitement adapté à un indice boursier avec dividendes réinvestis comme le CAC TR.

B) Le modèle de Hardy

Mary Hardy a publié un article : « A regime-switching model of long-term stock return » North American Actuarial Journal, April 2001 qui décrit un modèle de comportement plurimodal appliqué à un indice actions. Ce modèle suppose l'alternance aléatoire de phases de calme (état 1 avec volatilité basse) et de phases de crise (état 2 avec volatilité haute), dans sa version à deux états, chacun étant modélisé avec le modèle log-normal, dont c'est une extension pour capter les périodes de crise et une alternative possible au modèle de Merton avec sauts.

M.R. Hardy rappelle que les premières modélisations de ce type ont été proposées par Hamilton en 1989 ; en 1994 celui-ci a élargi le modèle à plus de deux régimes avec plusieurs types de modélisation possible. M.R. Hardy retient le modèle avec deux états et le compare à d'autres modèles (log-normal, autorégressifs de type ARCH, GARCH, ...) selon plusieurs critères de sélection. Ce modèle suppose que les périodes de crise (chute soudaine ou rebond violent) sont décrites par un modèle log-normal avec un rendement moyen (faible ou négatif) et une forte volatilité et que les périodes calmes sont également décrites par un modèle log-normal avec un rendement moyen positif et une volatilité plus faible. Les possibilités de passer d'un état à l'autre, ou de rester dans son état, sont caractérisées par deux paires de probabilité de passage et sont nommées $p_{1 \rightarrow 2}$; $p_{2 \rightarrow 1}$; $p_{1 \rightarrow 1}$; $p_{2 \rightarrow 2}$ (avec par construction $p_{1 \rightarrow 2} + p_{1 \rightarrow 1} = 1$ et $p_{2 \rightarrow 1} + p_{2 \rightarrow 2} = 1$) soit finalement deux probabilités inconnues. On reconnaît le principe d'une chaîne de Markov.

Pour extraire les six paramètres du modèle à partir des performances mensuelles, Hardy utilise la méthode du maximum de log-vraisemblance. Elle calcule le logarithme de la vraisemblance comme la somme (pour les quatre possibilités) des log-vraisemblances de la fonction de densité de probabilité des rendements successifs conditionnellement à leurs prédécesseurs, en utilisant leurs probabilités conditionnelles. Le calcul s'effectue par récurrence à partir de la première observation qui peut être dans l'état 1 ou 2. Elle applique au rendement de la première observation la fonction de densité de la loi normale avec les paramètres μ et σ (indexés 1 ou 2) avec la probabilité correspondant d'être dans l'état 1 ou 2. Pour les observations suivantes il y a quatre cas possibles : changement de régime à partir de 1 ou 2, maintien dans le régime 1 ou 2, chacun étant le produit de la probabilité de transition, de la fonction de densité de la loi normale avec les paramètres μ et σ indexés dans l'état 1 ou 2 et de la probabilité correspondant d'être dans l'état 1 ou 2 à l'étape précédente. La principale difficulté réside dans l'optimisation simultanée des six paramètres.

M.R. Hardy fournit les résultats obtenus sur les deux indices nord-américains (S&P 500 TR et TSE TR). Nous nous limitons à présenter ceux du S&P 500 TR mensuel. Elle obtient les couples suivants d'estimateur de rendement μ et de volatilité σ , et de la probabilité de transition vers l'autre régime (leurs écart-types estimés figurent entre parenthèses).

Pour le régime 1 (basse volatilité) :

$\mu = +1,26\%$ (0,20%) ; $\sigma = 3,50\%$ (0,10%) ; Probabilité de passer du régime 1 vers le 2 : 4 % (1,5%).

Et pour le régime 2 (haute volatilité), les paramètres correspondants :

$\mu = -1,85\%$ (1,40%) ; $\sigma = 7,50\%$ (0,90%) ; Probabilité de passer du régime 2 vers le 1 : 38 % (12%).

Elle rappelle que le rendement logarithmique mensuel moyen total du S&P sur la même période est de + 0,90%, soit un rendement annuel arithmétique équivalent de 10,85 %, et sa volatilité annualisée de 15,6% (soit un équivalent mensuel de 4,50 % en racine carrée). Les volatilités annualisées équivalentes des deux régimes sont respectivement égales à 12,1 % et 26 %. Elle montre que le temps de passage moyen dans l'état 2 (haute volatilité) est l'inverse de la probabilité de passage de l'état 1 vers l'état 2, soit 2,6 mois ou 22% du temps.

On remarque que l'incertitude sur la valeur du rendement en régime 2 est élevée : l'écart-type du rendement est de 1,40 % pour -1,85%, et celui de la probabilité de passage du régime 2 vers le régime 1 est de 12% pour 38%. Les incertitudes sur les autres paramètres du régime 1 sont petites devant les valeurs obtenues. Mais les incertitudes sur les deux probabilités de passage valent chacune le tiers de ces probabilités respectivement, c'est un point à souligner.

La forte incertitude relative sur le rendement moyen du régime 2 réside dans son calcul qui doit intégrer à la fois des mouvements de forte hausse et de forte baisse plus rares et plus violents. Comparativement l'incertitude relative sur cette volatilité est moyenne : 0,90 % pour 7,50 % soit 12%. M.R. Hardy souligne que le rendement moyen du régime 2 est négatif, ce qui indique que les chutes l'emportent sur les rebonds : les fortes volatilités sont observées plus fréquemment dans des périodes de krach que de rebond (même si les deux valeurs extrêmes mensuelles sont égales en valeur absolue). L'autre constat est que les volatilités mensuelles valent entre 2,8 fois (régime 1) et 4 fois les rendements mensuels (en valeur absolue), des multiples en ligne avec les ratios sur les valeurs en base annuelle pour un régime unique.

M.R. Hardy soulève une autre faiblesse relative du modèle : les calculs ne portent que sur une donnée unique, la log-vraisemblance d'un indicateur construit sur l'ensemble des rendements de la période entière. Elle remarque que ce ne sont pas 527 observations indépendantes mais une seule et que l'écart-type estimé n'est pas comparable à un écart-type habituel déduit d'un grand nombre d'observations.

Le modèle est assez bien décrit dans l'article et en particulier la chaîne de Markov (ou processus sans mémoire) ; Hardy fournit la plupart des expressions et laisse au lecteur le soin de poser les équations. L'implémentation dans une feuille Excel est relativement intuitive, on calcule la log-vraisemblance sur 6 onglets, chacun pour un paramètre et on teste d'abord une dizaine de valeurs cibles, puis on optimise manuellement de manière circulaire

(et en s'aidant des graphiques) pour converger vers le sextuplet optimal. Avec les données mensuelles de l'indice S&P 5600 TR de 1966 à 1999 on obtient les trois paramètres suivants pour l'état 1 (la ligne suivante en italique contient les paramètres d'Hardy pour la période 1956 à 1999 et leur incertitude d'un EC) :

$\mu = +1,25\%$; $\sigma = 2,75\%$; Probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 : 6 %
 $\mu = +1,26\%$ (0,20%) ; $\sigma = 3,50\%$ (0,10%) ; Probabilité de passer du régime 1 vers le 2 : 4 % (1,5%)

Et pour l'état 2 les trois autres :

$\mu = 0\%$; $\sigma = 6\%$; Probabilité de passer de l'état 2 à l'état 1 : 30 %
 $\mu = -1,85\%$ (1,40%) ; $\sigma = 7,50\%$ (0,90%) ; Probabilité de passer du régime 1 vers le 2 : 38 % (12%)

Même si les deux périodes d'analyse ne sont pas identiques (44 et 34 ans de profondeurs), on remarque que les paramètres des régimes 1 et 2 sont assez proches (sauf le rendement de l'état 2 qui est à 1,3 EC).

Après cette première vérification de l'implémentation correcte du modèle dans Excel, on l'applique aux performances mensuelles de l'indice CAC 40 sur la période 1990 à 2024. Les paramètres (arrondis) obtenus avec la feuille Excel sont les suivants pour les deux états 1 et 2 :

$\mu = +1,00\%$; $\sigma = 3,25\%$; Probabilité de passer du régime 1 vers le 2 : 6 %
 $\mu = -0,50\%$; $\sigma = 6,50\%$; Probabilité de passer du régime 2 vers le 1 : 6 %

E. Raynal qui travaille sur le Reinforcement Learning en allocation d'actifs m'a communiqué les six paramètres représentatifs du CAC 40 qu'il a obtenus sur la période allant de mars 1990 à mai 2024 avec un programme packagé plus robuste qu'une feuille Excel. Je le remercie ici de m'avoir permis de comparer les paramètres que j'ai obtenus avec la feuille Excel avec les siens, comme j'avais pu le faire avec les données publiées par Hardy sur le S&P 500 TR.

Le tableau 1 contient les six paramètres obtenus sur le CAC 40 (entre 1990 et 2024) avec la feuille Excel et ceux communiquées par E. Raynal sur le même historique du CAC 40.

CAC 40	Rendement régime calme	Volatilité régime calme	Passage de calme à crise	Rendement régime crise	Volatilité régime crise	Passage de crise à calme
Calculs Excel	+1,00 %	+3,25 %	6,00 %	- 0,50 %	+6,50 %	6, 00 %
Source E. Raynal	+1,10 %	+3,32 %	6,54 %	- 0,37 %	+6,63 %	6, 35 %

Tableau 1 : Paramètres du modèle de Hardy du CAC 40 (source calculs Excel et E. Raynal mars 1990 - mai 2024)

Les deux séries de résultats sont en bon accord (bien centrées sur les moyennes). La méthode manuelle d'optimisation utilisée dans Excel et les représentations graphiques montrent que l'optimum est aplati ce qui explique les incertitudes (que Raynal a pu estimer).

Si l'on compare les indices S&P 500 et CAC 40 on remarque que la différence notable porte sur la probabilité de passage de l'état 2 à l'état 1, mais les deux périodes sont assez différentes : les vingt-cinq dernières années manquent sur l'indice S&P 500 (l'historique reflète la seconde moitié du siècle dernier...) et d'autres facteurs fondamentaux influent aussi comme la différence entre la profondeur des deux indices et surtout leurs constituants.

Après la phase d'extraction des paramètres, on les utilise ensuite pour simuler des trajectoires possibles en appliquant le mécanisme du modèle.

Avec les paramètres du CAC 40 on peut obtenir comme Hardy les probabilités de séjour dans chaque régime : elle est de 6 % pour le régime 2 (volatilité haute) et 6 % pour le régime 1 (régime calme) ; les durées de séjour dans les deux régimes sont égales et la durée moyenne de passage dans le régime 2 vaut 15,7 mois. Ces résultats se

démarquent de ceux de Hardy sur les deux indices nord-américains (mais sur un historique d'une cinquantaine d'années se terminant en 1999 et qu'ici on commence en 1990) ; Les probabilités de séjour dans le régime de crise étaient de 10 % pour le S&P 500 et 16 % pour le TSE 300 et les durées moyennes de 2,6 et 4,8 mois respectivement.

On a souligné que le régime de crise recouvre à la fois des fortes variations positives ou négatives ; le calcul du rendement de crise moyen est entaché d'une forte incertitude, contrairement à celui du régime calme. Le modèle log-normal doit modéliser à la fois les mouvements de hausse et de baisse : il n'existe pas de modèle simple qui ségrégerait en deux régimes distincts les fortes hausses et les fortes baisses (en les sélectionnant par leur signe). Il existe un indicateur de risque : le ratio de Sortino utilisé pour caractériser le risque asymétrique dans les Hedge Funds qui applique ce principe pour caractériser uniquement les mouvements adverses, sans prendre en compte les fortes hausses. C'est un indicateur construit à partir des données observées et pas un modèle spécifique qui serait difficile à construire. Utiliser un modèle à trois états n'apporte pas de précision supplémentaire appréciable

4.1.2 LES OBLIGATIONS ET LEUR MODELISATION

La modélisation des obligations peut être faite de deux manières : soit « en taux coupon » (analogue à une valorisation en « cash flow hedge » en comptabilité de couverture), soit en « en prix » (analogue à une valorisation en « market value hedge »).

On n'utilisera que la modélisation du taux coupon, car la poche obligataire n'est jamais valorisée en prix. Elle est constituée de sept lignes de titres de maturité 7 ans égales et décalées d'un an, détenues jusqu'à maturité et on ne considère que les coupons perçus et le nominal remboursé (les rendements totaux annuels ne sont pas utilisés). Au début de la simulation en 2024 on liquide le portefeuille obligataire actuel et on le réinvestit en sept lignes d'OAT de montant égal ayant des maturités allant de 1 à 7 ans (avec les taux TEC de 1 à 7 de fin 2023) puis à mesure de leurs remboursements on achète à l'émission des OAT de maturité 7 ans uniquement qui permettent d'équilibrer le portefeuille et de maintenir sa maturité moyenne autour de 4 ans (assez longtemps cf infra).

On peut estimer de plusieurs façons les valeurs futures du taux TEC 7 qui caractérisent les obligations nouvelles remplaçant chaque année la ligne venant à échéance. La maturité 7 ans est considérée comme du moyen terme sur la courbe des taux.

La figure 7 rassemble l'historique des courbes (françaises) EIOPA sur les maturités inférieures à trente ans depuis fin 2021 illustrant le changement de régime depuis cette date (ou le retour à la situation antérieure ?).

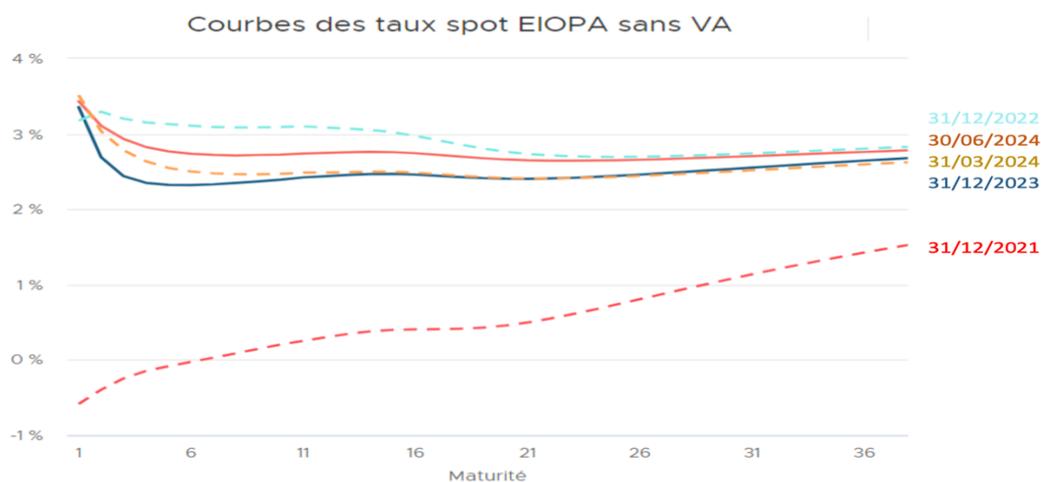


Figure 7 : Courbe des taux EIOPA du 31/12/2021 au 30/06/2024 (sans ajustement de volatilité) (Source GALEA)

4.1.2.1 L'APPROCHE HISTORIQUE

On utilise la chronique historique des valeurs de fin d'année du taux TEC 7 qui est le taux interpolé linéairement à partir des taux de rendement de deux OAT dont la maturité résiduelle encadre 7 ans. Il est calculé et publié quotidiennement par la Banque de France, mais on dispose de son historique quotidien seulement à partir de fin 2004 (sur une fenêtre glissante d'une vingtaine d'années).

Il est donc nécessaire de reconstituer ce taux entre 1988 et 2004 en utilisant le taux TEC 10 ou le TME (un taux moyen dont la maturité est proche de 10 ans) et leurs évolutions historiques respectives ultérieures. En prenant la vingtaine de valeurs des taux TEC 7 et TME constatés en fin d'année depuis 2004, on cherche l'expression du taux TEC 7 comme la somme du taux TME et d'une constante (a priori négative). La moyenne des écarts observés est de -0,44% (et l'écart-type est de 0,22% ce qui reste acceptable). Cette approximation est en ligne avec la pente modérée généralement observée entre ces deux maturités proches (les deux exceptions notables sont en 2006 avec une pente (TME -TEC 7) légèrement négative à - 0,08% et en 2012 la pente la plus marquée à + 0,79%).

On retiendra comme estimateur du taux TEC 7 sur toute les périodes la valeur TME - 0,45% (ou TEC 10 - 0,40% puisque la BdF estime le TME en ajoutant 0,05% au taux TEC 10). La série ainsi reconstituée des taux TEC 7 de fin d'année à partir de 1988 sera utilisée dans les simulations historiques, avec la série synchrone des performances annuelles du CAC 40 TR. Ces paires de données sont appliquées sur les années futures, avec le principe de concaténation de la même série temporelle déjà décrite. En utilisant les couples de valeurs mesurées les mêmes années on conserve les coïncidences observées entre les marchés actions et taux et on n'a pas besoin d'utiliser une corrélation moyenne mesurée.

4.1.2.1 L'APPROCHE DES TAUX TEC 7 EN TAUX A TERME (FORWARD)

Dans le même esprit qu'un adossement statique en montants, on peut aussi adosser les taux futurs en utilisant les taux à terme (ou forward) déduits de la courbe des taux de l'instant. On calcule de manière déterministe les taux à terme 7 ans sur une cinquantaine d'années (43 ans avec les OAT et plus avec la courbe EIOPA). Ces taux à terme, des « 7 ans dans X ans » peuvent être concrétisés en contractant une suite de swaps 7 ans à départ décalé de gré à gré pour couvrir des placements futurs à taux variable ESTER sur les montants notionnels estimés. A l'instant actuel on ne connaît pas exactement les montants à couvrir (les assiettes de ces swaps potentiels) et c'est une couverture imparfaite à la fois difficilement réalisable pour une petite entité et difficile à justifier et expliquer aux parties prenantes.

Les taux à terme sont seulement des estimateurs réalistes des taux futurs déduits de la courbe actuelle. Ces estimateurs varient mécaniquement avec la courbe : ainsi les calculs effectués fin 2021 donnaient des taux à terme bien différents de ceux obtenus début 2024 (cf figure 7 les courbes EIOPA spot à ces dates). On comprend mieux le risque qu'il y a à couvrir des expositions sur des échéances éloignées plutôt que de subir/suivre les taux d'intérêt au fil du temps. Pour le canton il est souhaitable de suivre les mouvements de taux d'intérêt qui sont plus ou moins corrélés au taux d'inflation, et de ne pas essayer de « couvrir le risque de taux » avec des instruments dérivés, qui relèvent de la spéculation.

On n'utilisera pas les taux à terme déduits de la courbe actuelle dans les simulations car il est à la fois plus simple et plus direct de simuler l'adossement statique total avec des OAT (cf.§ 6.1), le nouveau portefeuille étant dans ce cas sans poche actions. Cet adossement est identique dans son principe à l'utilisation de taux forward et dépend aussi de la courbe des taux de l'instant, soit les cotations des OAT à une date donnée, il est détaillé au § 6.1.

4.1.2.3 LA MODELISATION DU TAUX TEC 7

Les simulations utilisant les historiques de taux et les taux à termes sont déterministes et ne nécessitent pratiquement pas de calculs. Comme pour toute variable financière le recours à une modélisation permet d'explorer des plages de valeur plus larges et d'étudier les sensibilités de la grandeur de sortie aux paramètres du modèle.

Deux modélisations sont envisagées ici :

- La première simule le taux TEC 7 comme une variable aléatoire normale décrite par sa valeur moyenne et sa volatilité. Les paramètres obtenus sur l'historique sont exploités dans les simulations par Monte Carlo. En faisant varier arbitrairement ces paramètres on peut observer leur influence sur la grandeur finale mesurée et on peut analyser des configurations de marché inobservées ou volontairement adverses.
- La seconde utilise le modèle de taux le plus simple, celui de Vasicek qui suppose que le taux court est une variable aléatoire avec un retour à la moyenne sur une valeur fixée (à horizon lointain : taux asymptotique). Le taux d'équilibre à long terme, la vitesse de retour et la volatilité du taux sont les trois paramètres du modèle.

Le taux TEC 7 modélisé comme une variable aléatoire :

On considère que le taux TEC 7 est une variable de marché aléatoire. A partir de la série historique reconstituée des taux TEC 7 de fin d'année on extrait la moyenne et la volatilité empiriques que l'on utilise dans sa simulation par une loi normale dans l'évolution du portefeuille du canton par Monte Carlo. Cette approche simple ne cherche pas à modéliser le taux d'intérêt mais à générer des valeurs sur un intervalle de valeurs possibles plus large que l'échantillon historique ayant fourni les deux premiers moments.

Lorsque l'on utilise conjointement ce type de simulation sur le CAC 40 TR et sur le taux TEC 7 il faut faire une hypothèse sur leur corrélation. On considère dans un premier temps que les deux variables aléatoires sont indépendantes. Dans un second temps on introduit leur corrélation historique, si elle est significative. C'est la corrélation entre deux taux annuels : le taux représentatif du CAC40 TR est un rendement total sur un an et le taux TEC 7 est à la fois le taux facial/coupon et le taux de rendement actuariel annuel à l'émission s'appliquant à une période de 7 ans (toute cession avant cette durée donne un taux actuariel inconnu qui dépend de la courbe des taux à la date de cession et de la durée de détention, introduisant deux nouveaux aléas difficilement modélisables).

Le taux TEC 7 représenté par le modèle de Vasicek :

La modélisation d'un taux d'intérêt est plus complexe que celui d'une action, a fortiori le taux correspondant à une maturité longue. La modélisation la plus simple est celle d'un taux court (jusqu'à un an). Pour des maturités excédant l'année on modélise la totalité de la courbe des taux sous la contrainte d'absence d'opportunité d'arbitrage. Les taux obtenus sont utilisés pour calculer le prix des obligations zéro-coupon de toutes les maturités.

Nous nous limitons ici à la maturité 7 ans, nous devons obtenir la courbe des taux jusqu'à cette durée, à partir de l'estimation du taux court aux différentes dates. Parmi les modèles théoriques de taux court, on retient le modèle de Vasicek qui est le plus simple et suit un processus d'Orstein-Uhlenbeck (le taux court suit un brownien avec retour à la moyenne à l'infini). Il permet d'obtenir le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité quelconque à n'importe quelle date. Le processus de calcul est classique ; il est détaillé dans la littérature et dans plusieurs mémoires d'actuariat comme celui de Ziyati déjà cité. C'est le modèle de taux le plus simple mais qui nécessite un calibrage précis pour retrouver la courbe des taux de l'instant.

4.1.2.4 COMPARAISON DES MODELISATION DU TAUX TEC 7

Quatre approches sont possibles : taux historiques, taux forward, taux modélisé en variable aléatoire normale, taux obtenu avec le modèle de Vasicek. Elles sont comparées et examinées avant de retenir celle utilisée dans les simulations.

- L'approche historique est utilisée uniquement dans les simulations historiques.
- L'approche par les taux à terme est uniquement utilisée implicitement dans l'adossement statique par des OAT répliquant les flux futurs (cf § 6.1)
- L'approche du TEC 7 en variable aléatoire sera utilisée dans les simulations par Monte Carlo (6 §) car elle est logique dans ce type de simulations.
- L'approche du TEC 7 par le modèle de Vasicek ne sera pas utilisée ici car sa complexité n'apporte pas d'avantage majeur dans l'estimation des taux futurs pour les simulations. La sensibilité des résultats au paramétrage initial est le point saillant. Le calage sur la courbe des taux de l'instant est obligatoire pour un effectuer un pricing qui évolue chaque jour. Pour estimer des valeurs futures probables sur longue période on dépend trop des conditions de marché de l'instant et on doit actualiser les estimations lorsque la courbe change notablement comme cela s'est passé entre 2021 et 2022.

La forte sensibilité d'une modélisation aux données de l'instant est dangereuse lorsqu'on établit des projections à long terme et que l'on établit une stratégie en conséquence. Cette situation est assez analogue à la logique de Solvabilité 2 qui mesure la solvabilité à chaque clôture d'exercice avec les données de marché et que celle-ci peut varier sensiblement d'un exercice à l'autre en fonction de celles-ci. Au contraire, l'approche de Solvabilité 1 privilégie une vision plus stable utilisant le bilan comptable (mais une cristallisation des taux de l'instant par commodité cependant).

Pour les taux d'inflation et d'intérêt nous nous plaçons dans une logique différente de celle de Solvabilité 1 et 2 puisque nous retiendrons la tendance longue (fondée sur la moyenne historique longue) en lissant les fluctuations (modérées en général ; sauf en 2022) et conserverons l'approche « de marché » pour les actions (dont le rapport volatilité/rendement est notablement plus élevé que ceux des deux taux).

Nous privilégions les approches simples par rapport à des méthodes plus complexes. La difficulté d'utilisation d'un modèle réside dans la qualité des paramètres utilisés et de leur stabilité, ou non. Plus un modèle est complexe, plus la détermination de ses paramètres est difficile et entachée d'incertitude. M.R. Hardy l'a d'ailleurs souligné dans son article, alors qu'elle n'avait retenu que deux régimes d'états conduisant à déterminer six paramètres. La situation est identique avec le modèle de Vasicek : le choix de la valeur du taux court ultime et celui de la vitesse de retour à la moyenne sont déterminants. La contrainte de se caler sur la courbe des taux de l'instant limite en grande partie sa flexibilité : les estimations sont dépendantes de la courbe actuelle. L'intérêt d'un modèle simple est la possibilité de faire varier ses paramètres à partir de leurs valeurs pivot (historiques en fait) et d'observer les sensibilités à ceux-ci.

En résumé : on ne cherche pas ici à effectuer un pricing et être cohérent avec les conditions de marché de l'instant mais à obtenir des estimations plausibles du TEC 7 sur plusieurs décennies.

4.1.3 LA MODELISATION DE L'INFLATION

Le taux annuel d'inflation s'exprime comme un taux d'intérêt en base annuelle. Le taux d'inflation YoY (pour year on year) est la variation relative de l'indice des prix à partir de ses deux valeurs successives séparées d'un an ; c'est le taux qui est utilisé dans les OAT i. Ce taux ignore la forme de l'évolution de l'indice pendant l'année. Pour mesurer plus finement cet effet on peut calculer un taux d'inflation en moyenne annuel intégrant cette évolution comme l'intégrale sous la courbe de l'indice sur un an normalisée par sa valeur initiale. Dans la suite on utilisera toujours l'indice YoY (ces deux mesures fournissent des valeurs qui convergent sur moyenne période).

Lorsque l'on se place dans une approche en pouvoir d'achat (ou en monnaie constante) on utilise le taux d'inflation pour calculer le taux d'intérêt réel en le soustrayant au taux d'intérêt nominal (ou en le déflatant). Ce dernier doit être précisé car on compare un taux d'inflation sur un an (celui de l'année précédente qui est connu) avec un taux (annuel) qui peut porter sur une maturité excédant largement l'année. Rigoureusement on doit utiliser une maturité identique pour le taux d'intérêt et le taux d'inflation afin de calculer le taux d'intérêt réel de l'unique maturité utilisée. Pour les maturités supérieures à un an il faut utiliser le taux d'inflation anticipé sur la maturité de l'obligation. Celui-ci se déduit des cotations des obligations indexées sur l'inflation (OAT i et OAT €i) ou des swaps inflation (eux-mêmes arbitrés/couverts avec/par ces titres) : c'est finalement un « taux de marché » aussi et non un taux constaté afin que la méthode de calcul soit rigoureuse. On introduit un nouvel aléa car le taux anticipé n'est qu'un estimateur et ne sera pas forcément le taux réellement réalisé sur la période.

Le caractère aléatoire de l'inflation a donné lieu à des modélisations de son taux à l'instar d'un taux d'intérêt. Nous n'utiliserons pas ces modèles ici, même si dans son projet de reporting normalisé pour les PEEP l'EIOPA préconise d'utiliser le modèle de Vasicek.

4.1.3.1 : L'APPROCHE DU TAUX D'INFLATION FRANÇAISE YOY PAR SA CHRONIQUE HISTORIQUE

La série historique des taux d'inflation française depuis 1949 est disponible sur le site de l'INSEE. On utilise les séries synchrones des taux d'intérêt TEC 7 et des taux d'inflation YoY de 1988 à 2023 pour conserver la simultanéité de ces deux taux (sans avoir à utiliser leur corrélation historique). La moyenne des taux d'inflation sur cette période de plusieurs décennies ressort à 1,82 % et couvre une période relativement homogène. Le taux le plus élevé de la période est celui de 2022 à 5,85 % et le plus bas celui de 2020 à -0,02 %. Les forts taux d'inflation français sont en dehors de l'historique retenu car ils datent du début de la décennie 80 avec 13,74 % en 1981 et 13,89 % en 1982, puis 9,69% en 1983 et 9,29 % en 1984. En 2022 l'inflation était passée largement au-dessus de 2% (à 5,85%) et elle a commencé à refluer en 2023 à 2,5 % et encore en 2024.

On a souligné l'effet cumulatif des revalorisations sur les engagements du canton et par conséquent sur sa solvabilité dans le futur. On remarque qu'un taux de revalorisation de rente est l'inverse d'un taux d'actualisation (comme le taux technique). La sensibilité des engagements (la provision mathématique) à ce taux est celle de la sensibilité du profil d'écoulement de la provision (sa duration est proche de 14 ans). On vérifiera que les résultats des simulations sont en ligne avec les valeurs obtenues par un calcul avec la duration.

4.1.3.2 : APPROCHE DU TAUX D'INFLATION FRANÇAISE YOY COMME UNE VARIABLE ALEATOIRE

On va considérer ici que le taux annuel d'inflation est une variable aléatoire normale caractérisée par les deux estimateurs empiriques extraits de la série historique retenue (commençant en 1988 comme l'indice CAC 40) ; on obtient une moyenne de 1,82 % et un écart-type empirique de 1,15 %.

Dans un premier temps on considère que le taux d'inflation est indépendant des autres variables de marché (CAC 40 TR et taux d'intérêt TEC 7) dans les simulations par Monte Carlo. Dans un second temps et intuitivement on peut avancer que le niveau des taux d'intérêt et celui du taux d'inflation sont partiellement liés (donc corrélés). Ce lien suppose que les taux réels évoluent dans un intervalle plus étroit que les deux autres. Toujours intuitivement on suppose que la corrélation est plus forte lorsque les deux taux portent sur la même maturité (un an) et la même période (donc que l'on utilise le taux d'intérêt à un an observé au début de la période de mesure de l'inflation annuelle comme l'EIOPA). Avec ces deux conventions on recherchera le coefficient de corrélation historique entre les deux taux ; s'il est significatif on l'utilisera dans les simulations par Monte Carlo (cf.§ 4.2.4).

Jusqu'à 2021 l'hypothèse que le taux d'inflation suit une loi normale était assez plausible. La moyenne des variations annuelles de l'indice des prix à la consommation entre 2000 et 2020 s'élevait à 1,4 %. En 2022 et 2023 ces variations ont atteint 5,2 % et 4,9 % (en Europe IPCH était encore élevé). L'hypothèse de normalité est moins tenable avec ces deux exceptions successives (plus de trois écart-types) : soit on intègre une modélisation de ces sauts, soit retient des paramètres plus élevés que ceux extraits des séries historiques commençant en 1988.

Nous utiliserons seulement l'approche historique et celle en variable aléatoire normale pour estimer le taux d'inflation YoY servant à revaloriser les rentes.

4.1.3.3 : APPROCHE DU TAUX D'INFLATION AVEC LE MODELE DE VASICEK (SOURCE EIOPA)

L'EIOPA applique le modèle de Vasicek au taux d'inflation européen dans son document " PEPP : EIOPA's stochastic model for a holistic assessment of the risk profile and potential performance " 14 August 2020. Les trois paramètres du modèle sont la volatilité du taux euro HICP sur la période 1999 à 2020, le taux cible de 2% de la BCE qui sont fournis mais la vitesse de retour à la moyenne n'est pas fournie car elle doit être déterminée à « dire d'expert ». La figure 8 suivante fournit l'évolution du taux médian et des enveloppes des déciles 50 % et 90 % sur les quarante ans à venir (à partir de 2020 et d'un taux spot de 0,8 %).

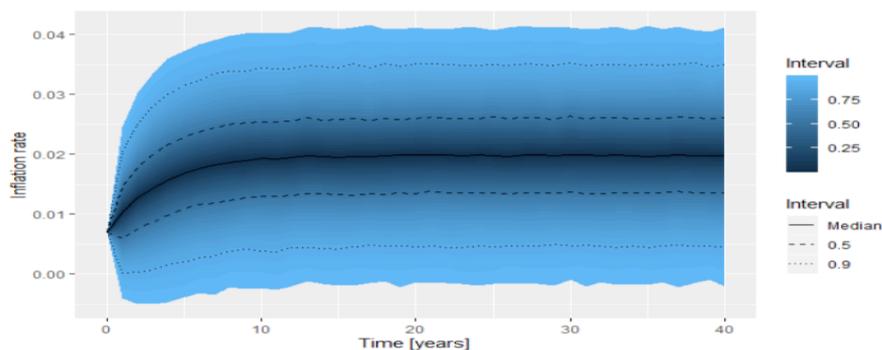


Figure 8 : Distribution des valeurs de l'estimation du taux d'inflation Euro HICP (source EIOPA 2020)

Plusieurs constats peuvent être faits à partir du graphique de la figure 8 :

- Le point de départ à 0,80 % est représentatif de 2020 (soit la fin de la période de faible inflation) ;
- Le taux médian projeté en 2025 vaut 1,7% ; 50 % des projections sont dans l'intervalle : 1% - 2,2% ;
- 50 % des projections à horizon 10 ans et au-delà se situent dans la bande 1,2% - 2,5 % ;
- Le taux médian à horizon 40 ans vaut 2% (le taux d'équilibre à long terme injecté)

Rétrospectivement étant donné le niveau actuel de l'index Euro HICP : 2,29 % (avril 23/avril 24) la prévision se révèle convenable. Ce constat n'aurait pas pu être fait en décembre 2002 lorsque le taux annuel atteignait 9,37

% (ni même en décembre 2021 avec 5,04%). Il faudra attendre encore quelques années pour savoir si l'inflation s'éloignera durablement de la zone 0% à 1% de la dernière décennie et si elle évoluera dans une zone centrée sur le taux cible de 2 % (maintenu à ce niveau par la BCE en 2024).

Le niveau de l'inflation européenne en 2022 supérieur à 9% est totalement en dehors du cône de diffusion publié par l'EIOPA en 2020 (la borne haute de 2023 se situe à 3,5%, cf figure 8), ce qui montre les limites de l'utilisation du modèle de Vasicek pour le taux d'inflation qui comme la modélisation en loi normale n'arrive pas, ou difficilement, à générer ces sauts. Si l'EIOPA avait publié l'estimation de l'indice HICP en 2022 le cône d'évolution aurait eu un aspect bien différent : il serait parti d'un point haut proche de 8 % et l'enveloppe aurait eu une pente négative convergeant vers le taux cible de 2% dans plusieurs décennies (dépendant de la vitesse de retour à la moyenne déterminée « à dure d'expert » selon l'EIOPA).

L'observation de la forte hausse de l'inflation en 2022 et 2023 (de 5% en France et de 8%/9% en Allemagne où il n'y avait pas de bouclier tarifaire sur l'énergie) après une période bi-décennale dont le taux moyen était de 1% environ ne milite pas pour ce type de modèle (en fait il est fortement sensible au niveau spot comme la plupart des modèles). Il faudrait utiliser un modèle mixte en diffusion et avec des sauts pour capter cette situation réelle.

On n'utilisera pas le modèle de Vasicek pour modéliser le taux d'inflation car il ne semble pas plus précis ou plus prédictif que la modélisation de ce taux par une variable aléatoire normale.

4.1.3.4 : QUELQUES REMARQUES

Une contrainte pour des entités avec des expositions couvrant plusieurs décennies est de disposer d'un estimateur du taux d'inflation qui ne soit pas la cristallisation de valeurs anormalement basses ou élevées (qui sont d'habitude transitoires et cohérentes avec un modèle de retour à la moyenne). Le point mort d'inflation actuel voisin de 2,50 % ou le taux cible de la BCE de 2% sont des estimateurs réalistes ; ils peuvent être associés à une volatilité égale à celle observée sur les taux constatés sur un horizon de deux ou trois décennies, voire supérieure.

Ce constat peut s'appliquer aux deux taux utilisés dans les simulations qui ont été « anormalement bas » pendant plus d'une dizaine d'années : les taux d'intérêt long ont été négatifs pendant plusieurs années et les taux d'inflation proches de zéro dans la même période, alors que les performances des indices boursiers fluctuaient fortement dans la même période.

Ces constats montrent que les projections peuvent être fortement influencées par les conditions de marché du moment car la plupart des modèles se calent sur celles-ci (les taux à terme ou les taux futurs sont complètement dépendant des taux de l'instant). Même avec des modélisations simples on est aussi dépendant des conditions actuelles : dans ce cas les moyennes observées l'historique des trente dernières années. Comme il n'est pas possible de s'abstraire de ce fait, il est nécessaire que des scénarios alternatifs établis à partir de données arbitraires, mais réalistes, complètent les simulations sous la forme de stress adverses (comme pour une VaR bancaire).

4.1.4 LES CORRELATIONS

L'utilisation de corrélations entre les facteurs de risque de marché est habituelle depuis leur introduction dans la VaR de marché au début des années 1990. Elles ont été adoptées quasi systématiquement depuis que la VaR est devenue une mesure de risque standardisée puis adoptée par les régulateurs bancaires. Les corrélations sont également à l'origine des produits dérivés « de corrélation » introduits dans les années 2000.

Même s'ils ne peuvent pas être utilisés directement on s'intéresse aux coefficients de corrélation utilisés dans le calcul du SCR qui portent sur des VaR partielles et pas sur des variables de marché (comme un taux ou le niveau d'un indice boursier). On peut se faire une première opinion sur les relations entre ces classes de risque.

Le calcul par la formule standard du SCR de marché de Solvabilité 2 utilise une mesure de risque de marché de type VaR (à horizon d'un an et au seuil de 99,50%). Le texte réglementaire fournit la matrice des corrélations (en fait deux) à utiliser sur les classes de risque conventionnels standardisés : ici les risques action et taux d'intérêt. Le régulateur fournit deux matrices différentes de corrélations, selon que le choc sur les taux d'intérêt soit appliqué à la hausse : corrélation nulle ou bien à la baisse : corrélation de 0,50. Ces corrélations s'appliquent aux montants des VaR propres à chaque facteur, cette différence de nature interdit l'emploi direct de ces nombres. Les deux valeurs possibles (0 et 0,50) reflètent à la fois une corrélation moyenne entre ces facteurs de risque et une dissymétrie qui est antinomique avec une corrélation (unique et non dépendante du sens) entre ces deux paramètres. Enfin le risque sur le taux d'inflation n'est pas traité dans le SCR de Marché mais dans le SCR de souscription Vie (révision).

Le risque de longévité est présent dans le SCR Vie avec une corrélation non nulle (0,25) avec celui de révision (via les résultats des chocs exprimés en montants monétaires), il est supposé indépendant des risques de marché, ce qui conforme à l'intuition.

En conclusion, on ne peut pas utiliser les valeurs des corrélations entre les VaR action et VaR taux d'intérêt pour deux raisons : leur dissymétrie et la valeur de leur moyenne (0,25) laissent supposer que leur corrélation (au sens classique) est faible, et surtout elles portent sur des Var et pas sur les variables sources. On montrera plus loin que le coefficient de corrélation entre le rendement annuel du CAC 40 TR et le taux coupon TEC 7 approximé par TME -0,50% vaut + 0,10, ce qui est faible.

La corrélation entre le taux d'inflation et les deux autres risques financiers ne peut pas être obtenue avec la matrice de Solvabilité 2, qui utilise deux SCR partiels différents : SCR Marché et SCR Vie. On montrera plus loin que le coefficient de corrélation entre le taux d'inflation et le TEC 7 calculé à partir des données historiques vaut + 0,23, ce qui reste faible mais cependant conforme à l'intuition.

Nous recherchons les corrélations entre ces trois taux à partir des séries historiques commençant en 1988 (ou en 1996 faute de données sur le TEC 7). Avant de réaliser ces calculs, représentons d'abord graphiquement deux paires de valeurs correspondant à leurs profondeurs d'historique communes.

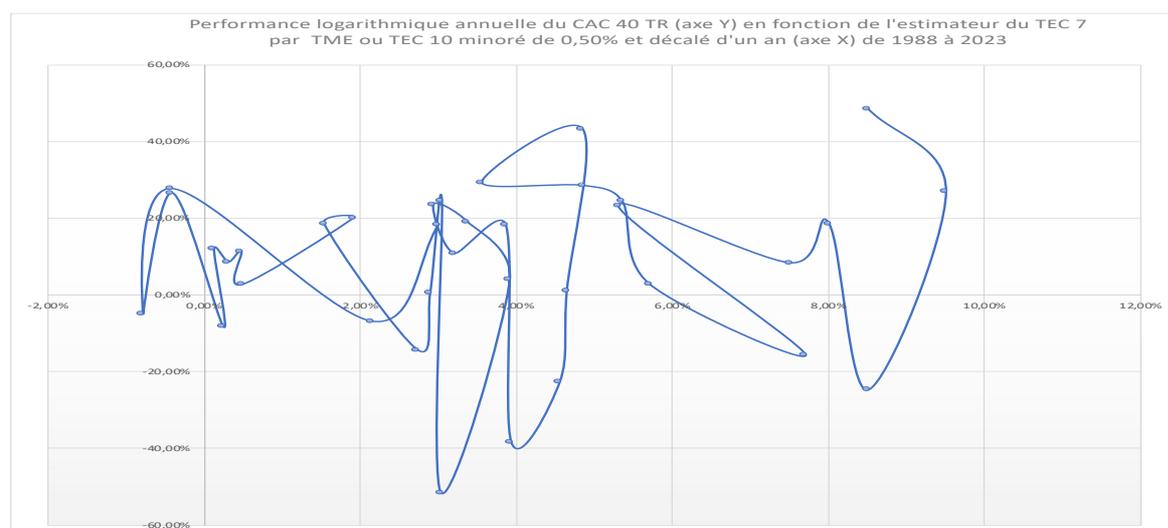


Figure 9 : Performance annuelle logarithmique du CAC40 TR en fonction du TEC 7 (estimé par TME – 0,50%) de 1988 à 2023

La figure 9 rassemble les valeurs annuelles de la performance de l'indice actions (rendement logarithmique du CAC 40 TR) et du taux d'intérêt TEC 7 (approximé par le TME minoré de 0,50%). Le point correspondant à l'année 1988 se situe à droite du graphique, la courbe liant les points se dirige vers la gauche jusqu'aux valeurs négatives de TME - 0,50% (en 2020) et repart vers le centre du graphique. On ne distingue pas visuellement de tendance nette : les rendements du CAC 40 TR peuvent être fortement positifs ou négatifs (attention aux échelles très différentes) quelque soient les valeurs de l'approximation du TEC 7 par le taux TME - 0,50%. En choisissant des intervalles identiques pour les deux axes on aurait un nuage de points compris sur une bande large de 100 % (de -50 % à +50 %) et une bande large de 10 % (de -0,50% à +9,50 %) et sans lien visible : un taux TEC voisin de 4% peut être contemporain de rendements valant + 40 % ou - 40 %. Le coefficient de corrélation ressort à 0,098 ; il est représentatif d'une faible corrélation confirmant l'allure de la figure 9.

Nous n'utiliserons pas le coefficient de corrélation de + 0,10 entre le rendement total du CAC 40 et le taux TEC7 : on constate seulement que lorsque le TEC 7 est faible (<2%) les rendements restent relativement modérés (entre -10% et +30%), lorsque le TEC 7 est compris entre 3% et 10% les rendements peuvent se situer entre -50 % et +50%. On considérera ces deux facteurs de risque comme non corrélés.

Ce constat sur le marché français est conforté par une étude récente de l'EDHEC-Risk Climate Impact Institute qui contient le graphique suivant (figure 10) donnant la corrélation entre les taux annuels (sur 12 mois glissants) des US Treasury et les rendements annuels du S&P 500 de 1985 à 2022. La corrélation entre ces deux variables financières n'est pas stable, elle bascule d'un régime à son opposé (elle débute à +0,6 et descend jusqu'à -0,8 pour remonter à +0,2) ; sa moyenne sur toute la période est légèrement négative. Cet exemple pris sur le marché US n'est pas transposable strictement au marché européen mais il confirme l'absence de corrélation stable entre ces deux classes d'actifs aux USA au moins (ce qui doit probablement être également le cas dans les autres marchés financiers de l'OCDE).

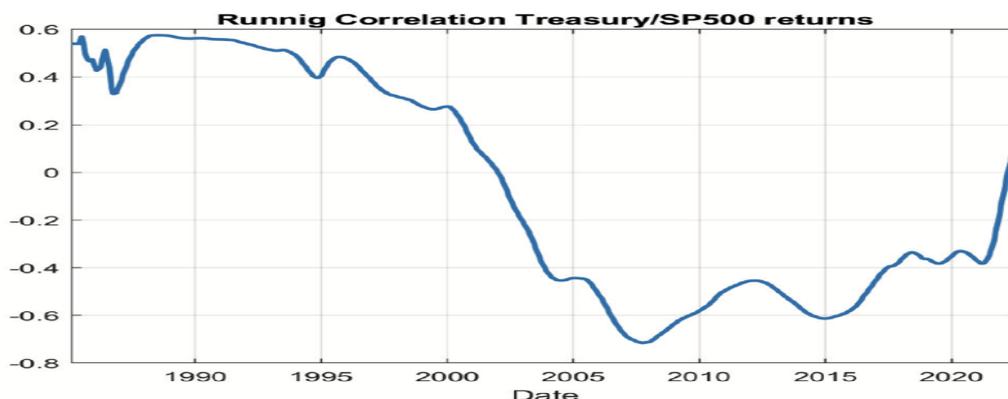


Figure 10 : Corrélation entre les rendements annuels des US Treasury et le rendement du S&P 500 TR de 1985 à 2022 (Source EDHEC- Risk Climate Impact Institute juillet 2024)

On recherche ensuite la corrélation entre le taux d'intérêt et le taux d'inflation. Les évolutions de ces deux taux devraient être, a priori, plus proches du fait de leur relation qui donne par convention le taux d'intérêt réel, et qui est généralement considéré comme plus stable au cours du temps.

Les points du graphique suivant (figure 11) représentent les couples de valeur du taux TEC 7 (exprimé ici comme TME-0,50%) et le taux d'inflation française YoY synchrones. Le coefficient de corrélation entre les deux taux ressort à + 0,23 sur la période 1996 à 2023 (la pente est de 0,79 et l'intersection sur l'axe vertical à 1,18%). Le coefficient de corrélation est faible, la figure11 le confirme, même si les plages de variations des deux axes sont d'amplitudes comparables : ici 5% et 6 % respectivement. Les deux derniers points représentatifs (2022 et 2023) se situent à droite du graphique avec un taux d'inflation dans la zone 4% à 5% et un taux d'intérêt TME - 0,50 % compris entre 2% et 3%. Les points correspondant aux années 1996 à 2021 se situent dans un domaine d'inflation

faible comprise entre 0% et un peu moins de 3 % (autour ou en deçà de l'objectif de 2% de la BCE) et dans une zone de taux d'intérêt plus étendue allant de -0,79 % (le taux TEC 7 exact étant égal à -0,54 %) à un maximum proche de 5%. La dispersion des taux d'intérêt est donc plus forte que celle des taux d'inflation sur cette période.

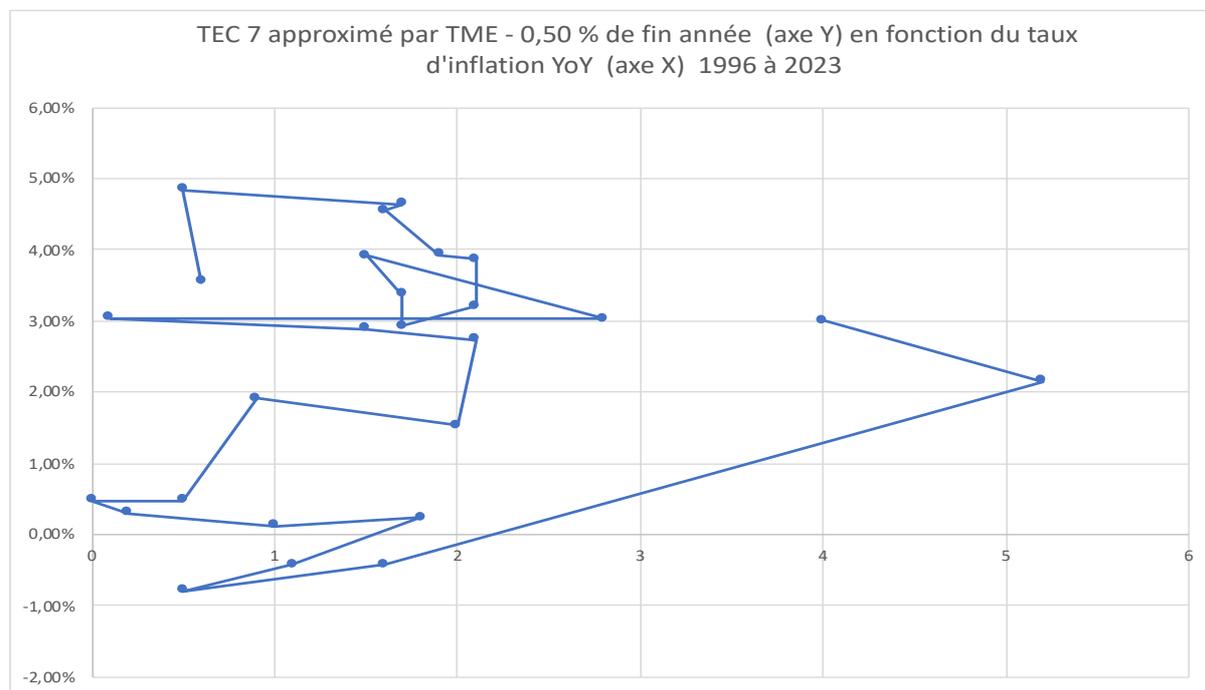


Figure 11 : TEC 7 (estimé par TME – 0,50%) en fonction du taux d'inflation YoY français de 1996 à 2023

Le coefficient de corrélation entre le taux d'inflation et le taux TEC7 est de + 0,23, mais on considérera ces deux facteurs de risque comme non corrélés.

On constate que le TEC 7 a évolué entre - 1% et + 5% alors que l'inflation était relativement modérée évoluant entre 0% et + 2,8%. Les deux taux d'inflation élevés (4 % et 5,2%) ont été observés lorsque le TEC 7 était compris entre 2% et 3%.

Seules les deux dernières années montrent des évolutions assez similaires entre les deux taux ; sur la longue période qui précède les taux d'intérêt TEC 7 (et le TME) sont sensiblement plus volatils que le taux d'inflation qui est assez stable.

On notera que le taux d'inflation français de 2022 qui valait 5,20% (bénéficiant de la décision politique du « bouclier tarifaire ») était notablement inférieur au taux d'inflation européen (HICP All items - excluding tobacco) qui valait 9,37% la même année (révisé à 8,7 % l'année suivante). De ce fait les OAT indexées sur l'inflation européenne (calculé par Eurostat et publié sur le site de la BCE), et qui représentent la majeure partie du stock d'OAT indexées sur l'inflation, ont subi un effet de base notable (et positive) pour un détenteur français en 2022 ; cette base est volatile, elle pourra s'inverser dans le futur ou revenir vers zéro.

On avait supposé que ces deux taux étaient a priori assez bien corrélés (à cause de la stabilité supposée du taux réel selon loi de Fisher), mais la faible valeur du coefficient de corrélation obtenu et son instabilité dans le temps semblent invalider cette hypothèse et donc l'utilisation de ce coefficient. On supposera dans les simulations que le taux d'inflation n'est pas corrélé au taux d'intérêt, ni a fortiori au rendement du CAC 40 TR.

En conclusion, les faibles valeurs des coefficients de corrélations (0,10 et 0,23 et du troisième qui en résulte) nous conduisent à considérer que les trois facteurs de risque comme tous indépendants entre eux dans les simulations en Monte Carlo.

4.1.5 LES MESURES DU TAUX REEL ET DES RENDEMENTS REELS

L'EIOPA utilise la notion de taux réel pour établir une méthode de calcul du taux forward ultime (UFR) qui permet de fermer la courbe de taux sur la maturité centenaire. Pour ce faire l'EIOPA a calculé le taux réel (moyen européen) entre 1961 et 2023 comme la différence entre le taux d'intérêt à 3 mois et le taux d'inflation de l'année. Le taux réel ainsi calculé fluctue avec des périodes alternativement positives et négatives et ses valeurs extrêmes se situent entre - 6,55% et + 5,83 %. La moyenne arithmétique équipondérée sur toute la période ressort à 1,25%. Le tableau de l'EIOPA reproduit ci-dessous confirme que la notion même d'un taux réel positif et relativement stable n'est pas observée et que l'hypothèse d'une corrélation stable entre les taux d'inflation et d'intérêt (court terme ici) est difficile à soutenir (même s'ils fluctuent dans des corridors voisins et ont tendance à évoluer dans le même sens comme en France sur une période plus courte).

On constate dans le tableau 3 qu'un placement monétaire (taux à 3 mois) ne protège pas contre l'inflation une année sur trois (il y a 19 taux réels négatifs sur 63) même si en moyenne le taux réel (leur différence) vaut 1,25%.

Il serait intéressant de recalculer ce taux réel en utilisant un taux long (10 ans) comme taux facial, même si les deux maturités ne coïncident plus. Les sites de l'OCDE et de l'INSEE fournissent des historiques du taux long et du taux d'inflation depuis les années cinquante. Nous avons retenu 1961 et 2023 également comme dates bornes et calculé leur différence considérée comme le taux réel « vs taux long ». Sa moyenne ressort à 2,41 % et les valeurs extrêmes sont -4,85 % et + 7,36 %. En comparaison avec le taux réel « court » de l'EIOPA, le taux réel « vs taux long » est décalé vers les valeurs positives (entre 1,00 % à 1,70 % ; et de 1,16 % pour la moyenne). Le taux réel « vs taux long » est négatif une année sur six en moyenne : une fréquence plus faible qu'avec le taux réel « court ». Ces chiffres confirment qu'un placement obligataire long offre une meilleure protection contre l'inflation qu'un placement monétaire, à condition de conserver les titres jusqu'à maturité. On retrouve la hiérarchie classique de rendement entre ces deux maturités obligataires.

The following table sets out the time series of real rates used for the calculation of the expected real rate. Real rates in the table are rounded to two decimal digits for presentational reasons.

Year	Real rates	Year	Real rates	Year	Real rates
1961	1.58%	1989	5.66%	2018	-1.65%
1962	0.09%	1990	5.61%	2019	-1.32%
1963	0.01%	1991	4.87%	2020	-0.89%
1964	0.46%	1992	5.53%	2021	-2.98%
1965	1.09%	1993	3.90%	2022*	-6.55%
1966	1.64%	1994	3.11%	2023	-1.04%
1967	1.89%	1995	3.56%		
1968	1.82%	1996	2.25%		
1969	2.08%	1997	2.73%		
1970	2.50%	1998	3.12%		
1971	-0.23%	1999	2.23%		
1972	-0.91%	2000	2.74%		
1973	0.81%	2001	1.77%		
1974	-1.11%	2002	1.21%		
1975	-4.82%	2003	0.49%		
1976	-0.94%	2004	0.47%		
1977	-1.66%	2005	0.57%		
1978	0.78%	2006	1.61%		
1979	1.45%	2007	2.58%		
1980	1.05%	2008	1.18%		
1981	3.71%	2009	0.58%		
1982	3.34%	2010	-0.94%		
1983	3.48%	2011	-1.61%		
1984	4.35%	2012	-1.79%		
1985	4.48%	2013	-1.28%		
1986	5.83%	2014	-0.60%		
1987	5.01%	2015	-0.21%		
1988	4.74%	2016	-0.74%		

Tableau 3 : Taux réels européens de 1961 à 2023 (Source EIOPA)

On va effectuer les mêmes calculs en retranchant aux performances annuelles du CAC 40 TR les taux d'inflation annuelle contemporains pour obtenir son rendement net, mais sur un historique plus court (commençant en 1988).

La valeur moyenne du rendement net TR (corrigé de l'inflation de l'année) ressort à 9,62 % et les valeurs extrêmes sont -40,57 % et + 59,23 %. Le rendement réel est négatif dix années sur trente-six ans, une fréquence observée qui est en bon accord avec la probabilité de 30 % pour un seuil à demi écart-type de la moyenne d'une loi normale de moyenne 10% et d'écart-type 20%.

A la lecture de ces chiffres, un placement en actions Large cap diversifiées offre une meilleure protection contre l'inflation qu'un placement obligataire mais au prix d'une volatilité sensiblement plus élevée (le pourcentage d'années à rendement négatif est le double que pour un placement obligataire long). On retrouve à nouveau la hiérarchie entre les rendements réels des actions et des obligations, souvent formulée de manière intuitive et vérifiée sur les marchés financiers de l'OCDE, en particulier aux USA (avec de nombreuses études effectuées sur un historique plus profond, cf. Damodaran, 2024).

4.2 MODELISATIONS DES REGLES DE GESTION DU PORTEFEUILLE FINANCIER ET DES FLUX FUTURS

4.2.1 GESTION DE LA POCHE ACTION PAR SON POIDS DANS LE PORTEFEUILLE TOTAL

La modélisation de la gestion de la poche action est simple car elle n'est pas sujette à l'amortissement des titres comme la poche obligataire. La poche action peut être constituée de parts d'un ETF répliquant un indice actions (qui ne vieillit pas), seul son cours unitaire change ou bien le nombre de parts lors des rebalancements. Même si la composition de l'indice boursier change, la valeur de l'ETF n'est pas affectée par ce changement, il en est de même pour un OPCVM actions lorsque la composition du portefeuille est modifiée.

Le paramètre de gestion est le ratio entre la valeur de marché de la poche action et la valeur totale du portefeuille calculée comme la somme de la valeur de marché de la poche action et de la somme des valeurs nominales des obligations. Comme déjà indiqué, on n'utilise pas la valeur de marché des obligations car elles sont détenues jusqu'à maturité : il n'y a pas d'incertitude sur les montants remboursés, ni sur les coupons puisque le risque de crédit est supposé nul. On mélange deux conventions de valorisation différentes sans introduire d'approximation.

La poche action est valorisée en fin d'année en appliquant à sa valeur initiale le rendement annuel historique ou simulé du CAC 40 TR, et ce processus est répété chaque année. On utilise les rendements exprimés par leur pourcentage d'accroissement. La valeur de marché de cette poche est sa valeur en trésorerie (l'euro est le numéraire) ainsi qu'en comptabilité de caisse.

Ce ratio sera piloté dans le temps selon trois stratégies :

- La stratégie Stable conserve le niveau actuel du ratio, 30 % début 2024, jusqu'à extinction.
- La stratégie « Prudent » avec une décroissance continue du ratio initial de 30 % par pas de - 0.50% par an pendant 60 ans puis maintenu à zéro ensuite. Une variante « SuperPrudent » utilisera un pas annuel de -1% pendant 30 ans conduisant à 0% en 2055 et au-delà.
- La stratégie « Dynamique » avec une croissance continue du ratio initial de 30 % par pas annuel de + 0.50% pendant 60 ans puis maintenu à 60% ensuite car on ne souhaite pas dépasser ce plafond.

4.2.2 MODELISATION DE LA GESTION DE LA POCHE OBLIGATAIRE

Contrairement à une action (et a fortiori un indice actions), une obligation a une durée de vie limitée, étant remboursée à son échéance à sa valeur nominale (pour les titres d'Etat on suppose qu'il n'y pas de risque de crédit). La poche obligataire est gérée en fonction de ces amortissements et des prélèvements globaux opérés pour payer les rentes tout en respectant le ratio de pilotage.

Pour maintenir la maturité moyenne de la poche obligataire la plus constante possible autour de 4 ans (mesurée chaque fin d'année) on gère cette érosion par les seules tombées à échéance des lignes obligataires.

La modélisation de la gestion de la poche obligataire consiste à construire un portefeuille de maturité moyenne quasi constante de 4 ans en « noria ». On utilise N lignes de même montant nominal de maturité initiale N ans (ici $N=7$). Cette modélisation est représentative d'une gestion qui impose la détention jusqu'à maturité pour la poche obligataire afin que les comptabilités sociale/prudentielle et de caisse coïncident. Ce mécanisme est indépendant de l'estimation des taux d'intérêt futurs de ces obligations : on sépare les variables taux et assiette.

On suppose qu'à l'origine le portefeuille obligataire est constitué de N lignes de même montant nominal et de maturité résiduelle comprises entre 7 ans et 1 an : la maturité moyenne est égale à 4 ans ($(N*(N+1) / 2*N)=(N+1) / 2 = 4$). Lorsque la ligne de maturité la plus courte est remboursée au pair, une fraction de ce montant et de la totalité des coupons perçus et une fraction de la poche action financent le versement des rentes de l'année. Le reliquat et le montant algébrique du rebalancement de l'année financent l'achat de la nouvelle ligne obligataire de maturité 7 ans. On remarque que tous ces montants sont consolidés, il n'y a pas de fléchage des flux mais sanctuarisation des lignes ne venant pas échéance dans l'année. Graduellement les montants des lignes deviennent différents et on mesure en permanence la maturité moyenne de la poche ; on constatera que celle-ci reste dans la fourchette 3-4 ans aussi longtemps que le canton est solvable (cf infra).

Lorsque le portefeuille est entièrement consommé (cas de ruine), on emprunte au taux TEC 7 pour combler le déficit et la poche action reste nulle définitivement. Le canton est « en ruine » et ce mécanisme de comblement par emprunt permet de poursuivre les simulations jusqu'à la date d'observation choisie et d'obtenir la partie négative de la distribution des valeurs finales du portefeuille.

4.2.3 REPRESENTATION DES FLUX FUTURS ET DE LEUR REVALORISATIONS

Les flux futurs de rente hors revalorisation et sans frais (en « pieds de coupon ») estimés dans la vision IRS sont les données d'entrée de la simulation. Chaque flux annuel estimé est la somme des flux futurs probables des rentes déjà liquidées et de celles restant encore à liquider mais qui l'auront été à la date de ce flux futur.

Cette évaluation globale (sans se limiter aux engagements juridiques) lorsqu'elle intègre aussi les revalorisations probables et les frais forfaitaires estimés se rapproche de la vision en Best Estimate de Solvabilité 2. La différence majeure est que le Best Estimate est une VAN calculée avec la courbe des taux de la valorisation : ce sont seulement les flux bruts générant cette VAN qui sont comparables.

La notion même de taux technique n'est pas pertinente ici car on se place en comptabilité de caisse et non en évaluation en valeur actuelle nette. Les profils des rentes et de cet engagement ont été présentés au §2.3 aux figures 4 et 5 (ces deux graphiques n'intègrent que la revalorisation certaine appliquée en 2024), aucune revalorisation inconnue à ce jour n'est intégrée. Les engagements au titre des réversataires sont également intégrés dans les flux futurs probables des deux périmètres calculés avec les tables de mortalité TGH et TGF 05-00.

Comme dans l'approche en Best Estimate on prend en compte dans les simulations les revalorisations futures qui sont prévues dans le règlement du régime et supposées indexées sur le taux d'inflation français YoY. On intègre aussi les frais comme dans le Best Estimate.

On aurait pu retenir dans le cas de base un taux d'inflation constant de 2% qui est le taux cible de la BCE (pour l'inflation européenne). On aurait pu également cristalliser le dernier taux connu soit 2,2% en mai 2024, c'est une méthode naïve car elle dépend trop de la conjoncture : ce taux aurait été de 5,1% en mai 2023. Enfin une approche « de marché » consisterait à utiliser le taux de « point mort inflation » calculé par l'AFT qui ressort à 2,32 % début juin 2024 (sur la plus longue maturité soit 10 ans), mais ce taux varie avec les cotations des OAT i (i.e. les anticipations des intervenants sur les marchés).

On a retenu une approche simple du taux d'inflation comme une variable aléatoire suivant la loi normale et dont les deux paramètres (moyenne et écart-type) sont ceux extraits de son historique depuis 1987.

Plutôt que d'appliquer des modèles trop sensibles aux conditions du moment (à l'exception du taux cible BCE), on simulera le caractère aléatoire du taux d'inflation avec une modélisation analogue à celle des deux autres facteurs de risque financiers pour être homogène.

5 MODELISATION DE LA GESTION ALM DU CANTON ET MESURE DE SA SOLVABILITE

5.1 MODELISATION DES FLUX ENTRANT, DES FLUX SORTANT ET DES REBALANCEMENTS

- Les flux entrants mesurés en comptabilité de caisse sont uniquement constitués des coupons perçus et des remboursements d'obligations à échéance (on ignore les dernières cotisations à percevoir qui sont marginales). En utilisant l'indice CAC 40 TR il n'y a aucun dividende perçu.

Les coupons provenant de la poche obligataire sont calculés comme le produit du taux coupon de chaque ligne par son montant nominal. On utilisera d'abord les sept taux TEC de TEC 1 à TEC 7 de fin 2023 sur le portefeuille de départ puis le taux coupon de chaque nouvelle ligne qui est celui du TEC 7 de sa date d'achat provenant de la modélisation retenue.

L'autre flux positif annuel est celui du remboursement de la ligne d'obligations venant à échéance, dans la modélisation du portefeuille géré en noria, et dans les simulations en Monte Carlo le réajustement de la poche obligataire totale pour respecter le ratio de pilotage.

Tous les montants sont perçus en fin d'année. Même s'ils ne sont pas de même nature comptable (produits financiers d'une part, remboursement de capital d'autre part), ils sont agrégés comme des flux de caisse et non traités selon leur catégorie comptable puisque la fiscalité et la comptabilité sont ignorées.

- Les flux sortants ont deux composantes : les rentes qui sont les flux futurs décrits au § 6.3.4. d'une part et les frais d'autre part, on ignore les autres prélèvements éventuels (impôts, taxes)

Les frais et charges sont estimés comme la somme d'un prélèvement de 3% sur les rentes versées et de 0,50% sur la valeur totale du portefeuille de début d'année. Les rentes et les frais sont supposées être versées en fin d'année : on ignore l'actualisation intra annuelle de rentes mensuelles qui est négligeable devant les fluctuations aléatoires.

Les simulations sont effectuées de 2024 (inclus) jusqu'à 2097 la date ultime d'extinction.

L'examen de la feuille Excel facilite la compréhension des flux :

- La valeur de marché de la poche action de chaque début d'année est multipliée par $(1 + \text{taux Total Return arithmétique de l'année})$ pour fournir la valeur de marché de la poche action de fin d'année avant tout rebalancement.
- Le montant du flux net annuel est égal à la somme algébrique des remboursements d'obligations, des coupons, des rentes versées et des frais supportés.
- La somme de ces deux montants est le total disponible en fin d'année qui est alors reventilé en appliquant le ratio de pilotage correspondant à l'année suivante. Il y a réajustement de la poche action par le rebalancement et le montant restant est investi dans la nouvelle ligne obligataire.
- Ce mécanisme ne garantit pas que la maturité moyenne de la poche obligataire reste strictement égale à 4. Dans les simulations on calcule chaque année la maturité moyenne qui fluctue autour de 4 ans pendant les trente premières années puis devient irrégulière ensuite.

Le pilotage du ratio a été décrit au § 4.3.1. La gestion de la poche obligataire a été décrite au § 4.3.2.

Les équations de récurrence donnant les valeurs des deux poches à partir des flux et des rebalancements sont implémentées dans des feuilles Excel qui assez faciles à vérifier.

5.2 LES INDICATEURS DE RISQUES MESURANT L'EFFICACITE DU PILOTAGE

Comme tout régime de retraite par capitalisation et mutualisé, le risque principal est l'impossibilité de servir la totalité des rentes à tous les bénéficiaires directs et indirects. C'est le risque d'insolvabilité ou de ruine. Dans le cas présent on analyse la capacité du canton à y parvenir seul à partir de sa richesse initiale (et éventuellement par emprunt, cf infra). Dans la réalité, et contractuellement, l'employeur est obligé à combler les déficits éventuels futurs. Cette hypothèse pourrait rendre inutile le suivi de la solvabilité du fait de ce filet de sécurité, mais il n'est pas certain que l'employeur soit capable de remplir cet engagement qui pourra apparaître tardivement. On va apprécier ici la solvabilité du canton sans subvention et toutes les simulations seront menées à terme, même celles qui s'achèvent avec une trésorerie négative (constituée par les emprunts souscrits pour payer les rentes, les frais et les frais financiers des emprunts éventuels).

On ne simulera pas le bilan prudentiel du canton et on ne calculera pas non plus son ratio prudentiel de solvabilité chaque année. On estime directement sa solvabilité par le montant des fonds disponibles chaque fin d'année pour servir les rentes de l'année, jusqu'au terme choisi. Si avant 2097 ce montant devient négatif on poursuit la simulation jusqu'en 2097 ; le solde final négatif est égal au montant des emprunts, de leurs intérêts capitalisés et des rentes chargées versées depuis le passage en territoire négatif. Les montants finaux de la trésorerie négatifs à la date d'observation sont inclus dans le calcul de la moyenne générale et servent à calculer la perte moyenne en cas de ruine. La durée moyenne des périodes solvables en cas de ruine est la « durée de vie avant ruine » (moyenne calculée uniquement sur les cas de ruine).

Les simulations sont toutes conduites jusqu'en 2097 et on constate le montant final du portefeuille financier à cette date (le solde final) :

- Si ce montant est positif, le canton a rempli l'ensemble de ses engagements pour la simulation donnée et cette simulation correspond à une trajectoire du canton considéré comme « solvable ».
- Si ce montant est négatif, le canton est devenu insolvable car il n'a pas pu remplir seul l'ensemble de ses engagements a dû s'endetter (et devra faire appel ensuite à l'employeur pour rembourser ce déficit final).

Le montant final (algébrique) du portefeuille financier est l'indicateur monétaire issu des simulations historiques ou par Monte Carlo qui est le plus facile à comprendre et à exploiter, c'est la richesse finale du canton (ou son déficit cumulé). La position de sa moyenne par rapport à zéro ainsi que l'étendue des deux branches de sa distribution par rapport à la moyenne, évaluée par l'écart-type empirique sont les deux premiers indicateurs.

La probabilité de ruine est le pourcentage de simulations s'achevant en 2097 sur un solde de final négatif. Cet indicateur propre au secteur de l'assurance sera privilégié car il renseigne sur la fréquence de défaut et peut être encadré par une limite adimensionnelle (symétrique du seuil de confiance de Solvabilité 2). Cette probabilité ne renseigne pas sur la sévérité de l'insuffisance de ressources exprimée en montant, c'est pourquoi on calcule le déficit moyen en cas de ruine (c'est l'Expected Shortfall des mesures de VaR). On complète cette mesure par la perte inconditionnelle qui est le produit de la perte moyenne en cas de ruine par la probabilité de ruine et qui estime le risque moyen encouru par l'employeur (exprimé en euros de 2097, donc non actualisés).

On retient le seuil à 2,5% pour la probabilité de ruine caractérisant une stratégie de pilotage acceptable pour deux raisons :

- Les 2,5 occurrences sur cent où le canton ne peut assurer seul le service des rentes est souvent traduit par « une ruine tous les 40 ans », même si cette expression est critiquable. La durée de 40 ans est un horizon voisin de la durée de vie restante raisonnable du canton.
- Cette probabilité de 2,5 % est suffisamment faible pour que le canton ne soit quasiment jamais obligé de solliciter l'employeur pour combler des déficits et soit pratiquement toujours solvable seul.

C'est un seuil suffisamment strict (il engloberait 95 % des observations si la distribution était symétrique, et correspond à plus ou moins deux écart-type si elle suivait une loi normale). Un seuil rigoureux de 0,50 % a été envisagé : on a constaté qu'il n'est pratiquement jamais respecté dans les simulations en Monte Carlo. Finalement il est trop rigoureux et il est comparable au degré de précision des simulations (même sur dix mille trajectoires), donc moyennement robuste en termes de critère discriminant. Comme pour les modèles, il est préférable de retenir une borne réaliste plutôt qu'un niveau irréaliste (et situé dans la bande d'incertitude des résultats).

Une autre mesure est la durée moyenne avant le passage en zone négative mais c'est une quantification moins courante même si elle renseigne sur la résilience du canton.

Ces indicateurs permettront de répondre aux questions : quelle est la probabilité de ruine ? quelle est le déficit moyen alors subi ? quelle est le risque moyen subi par l'employeur ? quelle est la durée moyenne de survie avant ruine (si celle-ci apparaît) ?

6 SIMULATIONS STATIQUE ET HISTORIQUE

6.1 ADOSSEMENT STATIQUE PAR DES OBLIGATIONS A TAUX FIXE (SANS POCHE ACTIONS)

Avant de simuler le pilotage de la poche actions du portefeuille financier du canton, on vérifie d'abord s'il peut servir la totalité des rentes futures jusqu'à l'extinction avec un adossement statique constitué uniquement d'obligations sous des hypothèses simples :

- Rentes versées sans aucune revalorisation,
- Frais de 3% sur rentes et de 0,50 % sur l'engagement total (cumul des rentes futures)

Dans cet adossement simple, on considère qu'il n'y a pas de poche actions (celle qui existait a été cédée à sa valeur de marché pour être totalement réinvestie en obligations) sachant que la valeur de marché du portefeuille début 2024 est de 161,6 M€ (intégrant la trésorerie courante). A chaque montant annuel de rentes (sans revalorisations futures mais avec les frais) on adosse un zéro-coupon déduit de la courbe des taux zéro-coupon CNO de fin avril 2024 publiée par la Banque de France, en supposant que tous les flux sont positionnés en fin d'année.

On aurait pu utiliser uniquement les souches d'OAT existantes, mais elles ne couvrent pas l'ensemble des échéances, en particulier pour les échéances les plus éloignées. Dans ce cas on doit regrouper les rentes de plusieurs années sur la souche la plus rapprochée (avec une gestion à court terme de l'excédent sur les années suivantes), c'est ce qui sera fait avec les OAT i et OAT €i (cf le § 6.2).

Le tableau 4 rassemble les flux annuels totaux, les taux des zéro-coupon, leurs prix égaux aux coefficients d'actualisation et les montants à investir à l'origine pour couvrir les flux actuels sur les dix prochaines années (le tableau complet couvre soixante-douze ans). Le montant total à investir atteint 115 M€, une somme bien inférieure à la valeur comptable de l'actif de 161,6 M€. On vérifie par un calcul approché et en retenant un taux moyen de taux ZC de 2,50 % (sur l'ensemble des soixante-douze échéances) que l'écart relatif entre l'engagement de 163,8 M€ et le total de 115 M€ donne une durée de 17 ans qui est proche de celle du profil (14,5 ans). L'utilisation d'un taux moyen est une approximation acceptable puisque la courbe est assez plate actuellement.

Maturité	flux annuel total avec frais	Taux ZC (%) avril 2024	Coefficient d'actualisation	VAN des ZC
	163 865 623 €	2,47		115 280 806 €
1	6 977 097	3,684340217	0,964465799	6 729 171
2	7 284 524	4,797289279	0,910541829	6 632 863
3	7 171 045	3,150212601	0,911149451	6 533 894
4	7 168 257	3,02103037	0,887761779	6 363 704
5	7 184 314	2,936405907	0,865276677	6 216 419
6	7 121 759	2,887344363	0,843001318	6 003 652
7	6 962 808	2,859173483	0,820916128	5 715 882
8	6 808 466	2,846212558	0,798902126	5 439 298
9	6 641 522	2,841291236	0,777127563	5 161 310
10	6 454 510	2,842532467	0,755565945	4 876 808

Tableau 4 : Adossement statique avec des obligations Zéro coupon OAT théoriques, détail dix premières années

Cette première vérification statique confirme que le canton est suffisamment solvable pour verser les rentes futures chargées en l'absence de revalorisations futures. Or celles-ci sont inévitables (car statutaires) et pour les couvrir il dispose d'un coussin s'élevant à une cinquantaine de millions d'euros qui est suffisant pour assurer des revalorisations faites avec un taux constant d'au moins 2,50 % par an, un taux acceptable dans la conjoncture

actuelle. Le taux de revalorisation constant qui consomme la totalité de l'actif en titres zéro-coupons ressort à 2,60 %, niveau un peu supérieur au taux point-mort d'inflation à 10 ans à 2,32 % début juin 2024.

6.2 ADOSSEMENT STATIQUE UNIQUEMENT PAR DES OBLIGATIONS INDEXEES SUR L'INFLATION (SANS POCHE ACTIONS)

La seconde simulation d'adossement statique intègre explicitement les revalorisations futures sur l'inflation et on utilise uniquement des OAT indexées sur l'inflation (française ou européenne). Cet adossement permet de neutraliser quasiment parfaitement ce risque puisque les revalorisations seront faites avec les taux futurs réalisés et non un taux constant anticipé ou tout autre estimation ex ante.

On adosse les montants des flux futurs sans revalorisation (pieds de rente) avec des OAT indexées acquises au prix actuel. Puisque le montant de capital remboursé est indexé on est certain qu'à l'échéance le remboursement du nominal indexé correspondra au flux de rente revalorisé sur l'inflation réelle qui sera observée entre la date actuelle et la date de remboursement. Les coupons indexés perçus dans l'intervalle sont également pris en compte.

Le tableau 5 rassemble la totalité des souches d'OAT i et €i disponibles (un Bund €i complète le panier ; les échéances manquantes auraient pu être remplies par des BTP italiens indexés inflation qui sont exclus ici à cause du risque de crédit). Le nombre de souches disponibles étant réduit, on doit couvrir les flux de rentes au-delà des dix premières années par des regroupements en blocs et non plus de manière granulaire par année. Ces blocs pourront être subdivisés à mesure que de nouvelles souches seront créées dans le futur.

La colonne de droite contient les montants cumulés des coupons bruts (les valeurs des taux faciaux sont fournies, la plupart valant 0,10 %), on retient les montants faciaux (ni actualisés, ni indexés) et leur somme atteint 15,5 M€, c'est l'estimation basse des excédents disponibles (les frais et les revalorisations sont déjà pris en compte). Le cumul de 13,82 M€ positionné en 2053 couvre l'ensemble des rentes jusqu'à extinction visée en 2097. L'adossement est bien complet.

Avec ce mode d'adossement le canton peut assurer les revalorisations futures sur les taux d'inflation (européens, donc avec un risque de base modéré), supporter les frais forfaitaires et conserver même un surplus de l'ordre de 10 % des engagements qui est supérieur à l'exigence minimale de solvabilité.

Cet adossement statique fait avec les prix de marché de mai 2024 montre de manière rigoureuse que le canton dispose de suffisamment de ressources en 2024 pour servir les rentes indexées sur l'inflation jusqu'à son extinction sans avoir à appeler l'employeur. Le canton dispose même d'un excédent de ressources constitué par les coupons indexés qui peut servir à faire face au paiement des impôts ou à une dégradation future comme la dérive de la mortalité. Cette situation d'équilibre satisfaisant à l'origine est une donnée du problème : les résultats obtenus reflètent à la fois cette solidité initiale du canton et les paramètres retenus caractérisant les variables de marché. On reviendra sur ces deux éléments structurants plus loin.

Le site de l'AFT décrit le mécanisme d'indexation des coupons et du montant de capital remboursé des OAT i ou OAT €i. Le prix des OAT indexées dépend de deux courbes de taux : celle des OAT à taux fixe (du même émetteur) et celle de l'inflation anticipée (française ou européenne). Cette dernière courbe est moins bien définie/liquide/traitée car elle se déduit de l'offre et de la demande sur les différentes maturités de ces titres. L'AFT fournit deux taux moyens d'inflation à 5 et 10 ans (« point-mort inflation €i »). Cette double dépendance à une courbe d'indexation et à une courbe d'actualisation est caractéristique d'un produit de spread qui est relativement difficile à évaluer et qui peut présenter de fortes variations de prix, notamment sur les échéances longues (s'expliquant par les mouvements respectifs des deux courbes et par l'effet de la durée).

Année	Obligation	Date maturité	taux coupon facial	taux coupon inflaté	prix	Flux en Meur	Flux consolidés	Montant de titre acheté pour	coupons faciaux perçus
					20 MAI 2024 FRANCFORT Bourse	avec frais	cumul jusqu'à prochain titre inflation	en valeur spot Meur	ni réinvestis, ni inflatés
								160,47	15,5
2 024	OAT€i	juil-24	0,25%	0,311%	100,42	6,98	6,98	7,01	0,018
2 025	OATi	mars-25	0,10%	0,114%	98,47	7,28	7,28	7,17	0,014
2 026	OAT€i	mars-26	0,20%	0,118%	98,35	7,17	7,17	7,05	0,042
2 027	OAT€i	juil-27	1,85%	2,420%	102,76	7,17	7,17	7,37	0,545
2 028	OATi	mars-28	0,10%	0,114%	96,7	7,18	7,18	6,95	0,035
2 029	OAT€i	mars-29	0,10%	0,116%	97,185	7,12	7,12	6,92	0,042
2 030	OAT€i	juil-30	0,70%	0,860%	100,52	6,96	6,96	7,00	0,343
2 031	OAT€i	juil-31	0,10%	0,117%	95,13	6,81	6,81	6,48	0,052
2 032	OAT€i	juil-32	3,15%	4,774%	119,54	6,64	6,64	7,94	2,251
2 033	BUND€i	mai-33	0,115%	0,118%	96,59	6,45	6,45	6,23	0,072
2 034	OAT€i	juil-34	0,60%	0,64%	96,43	6,25	12,30	11,86	0,783
2 035						6,05		0,00	0,000
2 036	OAT€i	juil-36	0,10%	0,121%	91,74	5,84	11,46	10,51	0,137
2 037						5,62		0,00	0,000
2 038	OAT€i	juil-38	0,10%	0,115%	90,1	5,41	10,59	9,54	0,143
2 039						5,19		0,00	0,000
2 040	OAT€i	juil-40	1,80%	2,527%	113,63	4,96	29,75	33,81	10,345
2 041						4,73		0,00	0,000
2 042						4,49		0,00	0,000
2 043						4,26		0,00	0,000
2 044						4,01		0,00	0,000
2 045						3,77		0,00	0,000
2 046						3,53		0,00	0,000
2 047	OAT€i	juil-47	0,10%	0,122%	83,12	3,28	16,17	13,44	0,323
2 048						3,04		0,00	0,000
2 049						2,80		0,00	0,000
2 050						2,57		0,00	0,000
2 051						2,34		0,00	0,000
2 052						2,12		0,00	0,000
2 053	OAT€i	juil-53	0,10%	0,115%	81	1,91	13,82	11,19	0,336
2 054						1,71			0,000
2 055						1,52			0,000
2 056						1,34			0,000
2 057						1,17			0,000

Tableau 5 : Adossement statique complet avec des OAT indexées sur l'inflation française ou européenne

6.3 SIMULATIONS HISTORIQUES DU CANTON EN COMPTABILITE DE CAISSE

Après ces deux tests d'adossements statiques utilisant des OAT, nous allons effectuer des simulations de la gestion dynamique du canton en comptabilité de caisse qui se rapproche le plus possible des conditions réelles. Le portefeuille sera composé de deux poches : actions et obligations, comme dans la situation actuelle, et on testera les trois stratégies envisagées : Stable, Dynamique et Prudente. Les rentes sont déduites des projections actuelles, et on les revalorise sur l'inflation. Dans la suite on n'effectuera plus de simulations sans revalorisations car elles ne traduisent pas la réalité et fournissent des résultats trop optimistes (cf. l'adossement statique avec des OAT) et qui nécessite ensuite d'estimer l'impact des revalorisations.

6.3.1 SIMULATIONS HISTORIQUES AVEC LES RISQUES FINANCIERS (RISQUES ACTIONS ET DE TAUX D'INTERET) ET LE RISQUE DE REVALORISATION (RISQUE INFLATION) : LE CAS DE BASE

6.3.1.1 DESCRIPTION

Les simulations historiques utilisent les trois séries synchrones commençant en 1988 du rendement du CAC 40 TR, le taux TEC7 (de 2004 à 2024 et avant 2004 on utilise comme approximation le taux TME minoré d'une constante) et le taux d'inflation YoY de l'année considérée.

La profondeur de l'historique de trente-six ans est doublée/triplée en répétant à la suite de l'année 2023 l'année 1988 : cette juxtaposition conserve la chronologie des deux mêmes séquences mais introduit une discontinuité (dans l'hypothèse où les données sont corrélées avec l'année précédente). Partout ailleurs la chronologie réelle est conservée ; pour conserver cette continuité temporelle on n'a pas procédé avec un bootstrapping en tirant au hasard soixante-douze fois des triplets de valeurs observées. On réalise les trente-six simulations de soixante-douze ans en décalant chaque fois la première année de la séquence. Les trajectoires sont glissantes (donc non indépendantes) mais elles s'appliquent à des montants différents ce qui introduit une relative variabilité.

On extrait de ces simulations les valeurs finales du portefeuille du canton (positive ou négative) et leurs statistiques descriptives : la moyenne et l'écart-type empiriques et les valeurs extrêmes. On utilise aussi les mesures de risque retenues : probabilité de ruine, perte moyenne en cas de ruine et durée moyenne avant ruine.

On rappelle dans le tableau 6 les paramètres caractéristiques des trois séries de données : leurs moyennes arithmétiques et leurs dispersions respectives : écart-type empirique ainsi que valeurs extrêmes sur la période.

Période 1988 - 2023	CAC 40 TR	TEC 7 et son approximation	Inflation YoY	Taux court (OCDE)	Taux long (OCDE)
Moyenne	9,97 %	3,75 %	1,82 %	3,31 %	4,20 %
Ecart-type	20,63 %	3,13 %	1,15 %	3,35 %	2,84 %
Maximum	+54,14 %	+10,06 %	+5,85 %	+10,34 %	+9,93 %
Minimum	-40,33 %	-0,37 %	-0,02 %	-0,55 %	-0,15 %

Tableau 6 : Statistiques empiriques des séries temporelles : CAC 40 TR ; TEC 7 ; Inflation française YoY

Les indicateurs de l'indice CAC40 TR montrent que le minimum se situe à 2,5 écart-types de la moyenne et le maximum à 1,7 traduisant un skew négatif. La situation est inverse pour les deux taux dont les maximums sont à près de deux écart-types au-dessus de la moyenne pour le TEC 7 et trois et demi écart-types pour l'inflation. L'inflation a été légèrement négative une année alors que le TEC 7 a été négatif pendant plus de trois ans.

L'inflation est relativement plus volatile le taux TEC 7, à cause de chocs exogènes, même si elle a été faible en moyenne (et un peu inférieure au taux cible de la BCE). Sa moyenne est pratiquement égale à la moitié de celle du taux TEC 7 ; des ratios proches de 0,5 s'appliquent également aux écart-types et aux valeurs extrêmes.

Pour avoir un historique homogène des taux d'intérêt on présente les mêmes statistiques sur le taux court (maturité un an) et le taux long (maturité dix ans) publiées par l'OCDE. La comparaison entre l'inflation et le taux court conduit au même constat : l'inflation française a été durablement inférieure aux taux d'intérêt français court sur l'ensemble de la période, sauf à partir de 2022 lorsque l'inflation a rebondi et a été supérieure aux taux d'intérêt.

L'autre constat est le faible écart de rendement moyen (taux coupon moyen) entre le taux long et le taux court. Le surcroît de rendement offert par les échéances longues est modeste par rapport à la plus forte volatilité en prix des obligations longues. Les volatilités des deux taux sont proches de 3%, alors que les volatilités des prix des obligations sont le produit de cette volatilité (indifférenciée) de 3% et de la durée de l'obligation soit un facteur proche de huit pour le long et d'un pour le court : le ratio des volatilités en prix est dans un rapport de l'ordre de 1

à 8. La situation est différente avec la courbe américaine qui est la plupart du temps sensiblement plus pentue et où le placement long est relativement mieux rémunérateur.

Les performances annuelles des deux compartiments financiers sur cet historique de trente-six ans sont sensiblement supérieures aux taux d'inflation : ceci explique en grande partie les résultats des simulations historiques présentés ci-après, qui résultent aussi de la solvabilité satisfaisante du canton en 2024.

Les montants obtenus en euros de 2097 sont facialement élevés : pour passer à leurs équivalents en « euros de 2024 » il faut les diviser par dix (facteur d'actualisation au taux de 3,25%), c'est la conséquence de simulations en comptabilité de caisse.

6.3.1.2 RESULTATS AVEC LES REVALORISATIONS INDEXEES SUR L'INFLATION

- Le cas Stable suppose que la poche action reste constante à 30 % jusqu'à l'extinction. La poche obligataire est gérée en noria, les coupons perçus sont les taux TEC 7 historiques et les rentes sont revalorisées avec les taux d'inflation historiques.

Les résultats semblent aberrants en première lecture : le montant de la valeur finale moyenne du portefeuille (la trésorerie résiduelle en 2097) ressort à 1962 M€ (1,9 Md€) sur les trente-cinq simulations. La feuille a été auditée avec soin et l'enchaînement des montants vérifié ligne à ligne, car les récurrences sont assez simples. Après ces vérifications, ce résultat étonnant est confirmé par une vérification simple : on applique les trois taux moyens (9,97 % ; 3,75 % ; 1,82 %) à la place de leurs valeurs aléatoires dans une simulation « sur moyenne » qui donne une richesse finale de 2504 M€. On obtiendra les mêmes ordres de grandeur avec les simulations par Monte Carlo.

Ces chiffres apparemment exorbitants (mais exacts) s'expliquent par deux facteurs :

- Le rendement moyen du portefeuille est largement supérieur au taux de revalorisation : les rentes versées ne parviennent pas à consommer le portefeuille suffisamment vite et celui-ci fructifie et augmente exponentiellement.
- Les montants obtenus sont exprimés en euros courants de 2097. Il faut les ramener à des équivalent-euros de 2024 pour que cette première impression s'estompe. Le coefficient d'actualisation à 72 ans avec un taux de 3,25 % est de 0,10. Avec cette décapitalisation les montants finaux exprimés en euros 2024 deviennent plus raisonnables mais encore un peu supérieurs à sa richesse actuelle : le portefeuille a été maintenu voire accru.

Pour s'assurer que le déséquilibre entre les taux historiques utilisés est la première source de ces résultats à première vue étonnants, on effectue la même simulation sur valeurs moyennes constantes pour la performance et la revalorisation. Lorsque les deux taux sont pratiquement égaux, le portefeuille est épuisé à la date d'extinction. On choisit un taux de performance financière moyen modéré mais plausible : un rendement total moyen action de 5% et un taux moyen TEC 7 de 1,80 % qui donne un taux moyen pondéré de rendement de 2,76 % et on recherche le taux d'inflation moyen qui annule le portefeuille à la date d'extinction. On obtient un taux d'inflation constant de 2,64 % ; ce qui est pratiquement égal au taux de rendement moyen (la différence provient du taux de frais qui obère le rendement et du léger excédent de richesse au démarrage). On approfondira l'importance de la hiérarchie entre les trois facteurs de risque en utilisant les simulations de Monte Carlo et des paramètres des variables de marché choisis de manière discrétionnaire.

Ce constat confirme a contrario que les revalorisations ne peuvent excéder le rendement moyen du portefeuille (lorsque canton est à l'équilibre à l'origine comme ici). On retrouve une règle logique qui est celle des produits d'assurance avec participation aux bénéfiques, on développera ce point plus loin.

Le tableau 7 rassemble les statistiques de la valeur du portefeuille en 2097 du cas Stable en simulations historiques.

Simulations Histo	Moyenne	Ecart-type	Maximum	Minimum
Cas Stable	1962 M€	711 M€	3926 M€	1014 M€

Tableau 7 : Statistiques de la valeur du portefeuille en 2097 dans la stratégie Stable en simulations historiques

On remarque que la distribution empirique est déséquilibrée vers les valeurs élevées, ce qui est rassurant. Le maximum se situe à + 2,9 écart-type de la moyenne et le minimum à - 1,3 écart-type. Le ratio entre l'écart-type et la moyenne est de 0,36. La moyenne des maturités moyennes de la poche obligataire est de 4,11 ans (max : 5,71 et Min : 2,56). La gestion en noria se révèle donc assez efficace pour maintenir la maturité moyenne de la poche obligataire autour de la cible de 4 ans.

Le cas Stable est adapté pour estimer l'influence de la fenêtre glissante, car la performance financière moyenne du portefeuille est toujours calculée avec la pondération de 30 %. Pour chaque simulation historique on calcule la moyenne (simple équipondérée) de ces performances moyennes et de l'inflation (donc sans pondérer par les assiettes variables). La moyenne des performances moyennes du portefeuille ressort à 5,60 % avec un écart-type de 0,19 % (et des valeurs extrêmes des 5,30 % et 6,08%) ; pour l'inflation les valeurs homologues sont 1,77% (écart-type de 0,05 % et valeurs extrêmes de 1,69 % / 1,82%). Les compositions des échantillons sont différentes et s'appliquent à des assiettes différentes. On observe cet impact dans le graphique suivant (figure 12) qui rassemble les trente-cinq valeurs finales du portefeuille en 2097 et leur valeur moyenne. La simulation donnant plus haute valeur (3,9 Md€) commence en 1996 et débute par une série de performances boursières fastes : + 27,6 % ; + 32 ;9 % ; + 34,1 % et + 54,1 % entre 1996 et 1999 avant la chute des années 2001 et 2002.

Comme pour un CPPI le démarrage sous des auspices favorables facilite l'évolution ultérieure même avec une chute de - 20 % et - 32 % en 2001 et 2002. A contrario la simulation donnant la plus faible valeur finale (1,01 Md €) commence en 2000 (performance de 0,95%). Ces analyses ne seront pas reconduites sur les deux autres stratégies dans lesquelles le ratio varie introduisant une variabilité supplémentaire.

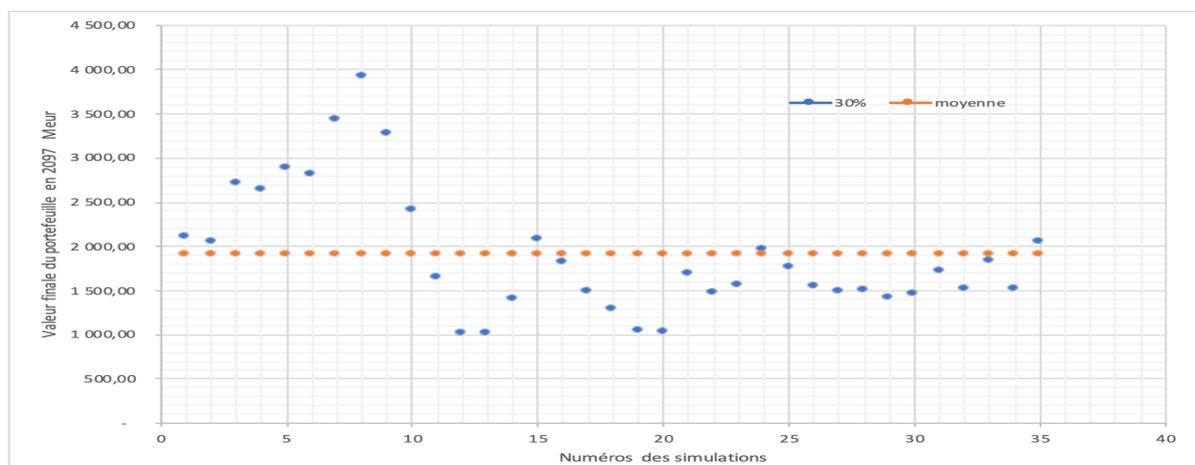


Figure 12 : Valeur finale du portefeuille en 2097 dans la stratégie Stable - simulations historiques

- Le cas Prudent suppose que la poche action passe de 30 % jusqu'à zéro par pas annuels de 0,50 % puis reste égale à zéro ensuite ; on utilise les feuilles de calcul déjà auditées.

Les résultats restent encore surprenants : le montant moyen de la trésorerie résiduelle en 2097 ressort à 941 M€ (0,9 Md€) sur les trente-six simulations. Ce résultat est confirmé par la même vérification simple : on applique les trois taux moyens (9,97 % ; 3,75 % ; 1,82 %) constants dans une simulation unique qui donne une richesse finale de 1097 M€.

Les deux explications déjà avancées pour la stratégie Stable restent valables ici : le canton est à l'équilibre en 2024 et les rentes indexées sur l'inflation n'arrivent pas à épuiser le portefeuille qui a une rentabilité moyenne sensiblement supérieure à l'inflation moyenne d'une part et d'autre part les montants exprimés en euros de 2097 doivent être divisés par dix pour être comparés à ceux de 2024.

Simulations Histo	Moyenne	Ecart-type	Maximum	Minimum
Cas Prudent	941 M€	306 M€	1583 M€	468 M€

Tableau 8 : Statistiques de la valeur du portefeuille en 2097 dans la stratégie Prudente en simulations historiques

Comme dans le cas Stable, on effectue la même simulation en utilisant des taux moyens de 5% et 1,80 % respectivement, on obtient un taux d'inflation moyen de 2,47 % qui épuise le portefeuille, un taux légèrement inférieur au 2,64 % obtenu dans le cas stable (ici l'investissement moyen en action diminue graduellement jusqu'à zéro, ce qui explique cet écart).

La distribution empirique est encore déséquilibrée vers les valeurs élevées. Le maximum se situe à + 2,21 écart-type de la moyenne et le minimum à -1,48 écart-type. Le ratio entre l'écart-type et la moyenne est de 0,32.

- Le cas « Dynamique » suppose que la poche action passe de 30 % jusqu'à 60 % par pas annuels de 0,50 % puis reste égal à 60 % ensuite, et on utilise les mêmes feuilles de calcul.

Les résultats se situent sans surprise au-dessus de ceux du cas stable : le montant moyen du portefeuille résiduel en 2097 ressort à 3666 M€ (3,7 Md€) sur les trente-cinq simulations. Ce résultat est confirmé par la vérification simple : on applique les trois taux moyens (9,97 % ; 3,75 % ; 1,82 %) constants dans une simulation « moyenne » qui donne une richesse finale de 5616 M€ (l'écart avec la moyenne des simulations provient de la plus grande volatilité des trajectoires, en prenant ces taux moyens on évite les fortes baisses de l'indice action).

Comme plus haut, on effectue la même simulation en utilisant des taux moyens moins déséquilibrés qui mènent à l'épuisement du portefeuille. Avec les taux précédents de 5% et 1,80 % respectivement, on obtient un taux d'inflation moyen de 2,80 % qui épuise le portefeuille, un taux légèrement supérieur au 2,64 % obtenu dans le cas stable (ici l'investissement moyen en action est plus important ce qui explique cet écart).

Simulations Histo	Moyenne	Ecart-type	Maximum	Minimum
Cas Dynamique	3666 M€	1577 M€	8708 M€	1736 M€

Tableau 9 : Statistiques de la valeur du portefeuille en 2097 dans la stratégie Dynamique en simulations historiques

La division par dix des montants de 2097 pour estimer leur valeur en 2024 s'applique toujours et le solde final ramené en euros de 2024 vaut ici plus de deux fois le portefeuille initial de 2024.

Le graphique de la figure 13 rassemble avec la même échelle les valeurs finales dans les stratégies Prudent et Dynamique. On constate que la stratégie Dynamique est toujours dominante par rapport à la stratégie Prudent et aussi que ses valeurs terminales sont nettement plus dispersées (cf les écart-types respectifs).

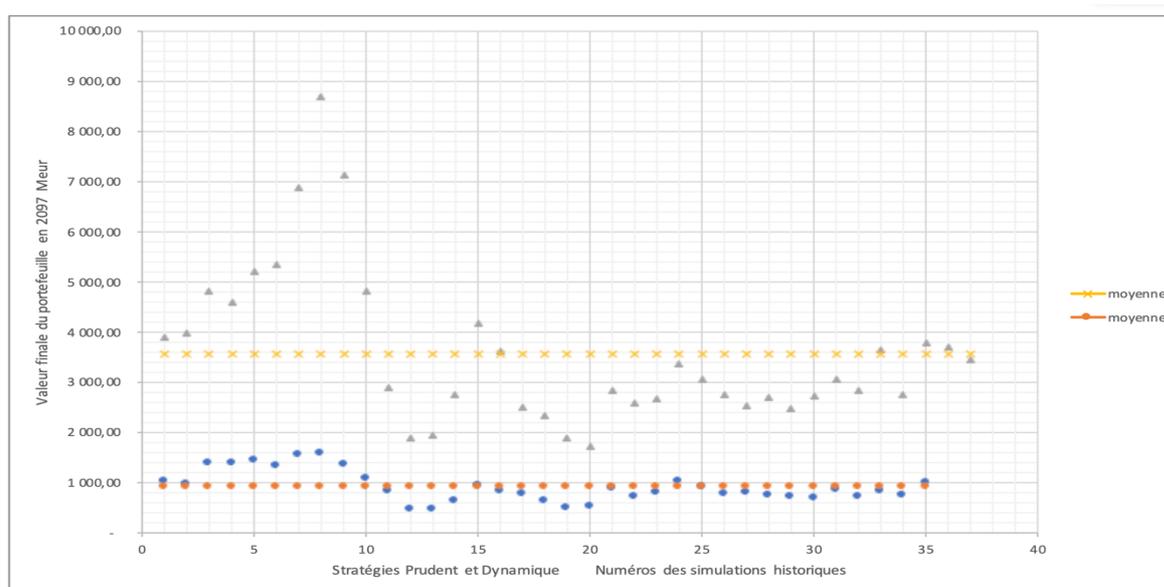


Figure 13 : Valeur finale du portefeuille en 2097 dans les stratégies Prudent et Dynamique -simulations historiques

On remarque aussi que ces deux stratégies extrêmes se comportent de manière identique pour chaque scénario. Les deux distributions des valeurs finales ont la même forme : la séquence commençant pendant une période boursière favorable (la période 1996 à 1999) correspond au solde final le plus élevé, ce qui est vérifié pour toutes les séquences. La stratégie Dynamique amplifie les variations autour de la moyenne, cette dernière étant nettement supérieure à celle de la stratégie Prudent.

Les grandeurs descriptives de la valeur finale du portefeuille obtenues avec des simulations historiques sur les trois types de pilotage de la poche action sont rassemblées dans le tableau 10 :

Simulations Histo	Moyenne	Ecart-type	Maximum	Minimum
Cas Prudent	941 M€	306 M€	1583 M€	468 M€
Cas Stable	1962 M€	711 M€	3926 M€	1014 M€
Cas Dynamique	3666 M€	1577 M€	8708 M€	1736 M€

Tableau 10 : Statistiques de la valeur du portefeuille en 2097 dans les trois stratégies en simulations historiques

On constate que le canton présente un solde final moyen toujours largement positif même dans le cas Prudent : la conjonction d'une solvabilité satisfaisante au départ et de performances financières historiques particulièrement favorables, sensiblement supérieures au taux moyen d'inflation, expliquent ce fait.

Un autre facteur expliquant ces résultats favorables est que la stratégie de gestion de la poche actions en pilotant le ratio se traduit par « acheter bas » et « vendre haut », puisque que la poche action est mesurée en valeur de marché (et non comptable). Cette stratégie contribue à préserver la richesse du canton dans les mouvements adverses et de profiter des rebonds, elle est délicate à quantifier séparément faute de comparaisons avec d'autres stratégies moins simples à implémenter (comme des prélèvements proportionnels aux valeurs des deux poches en début d'année) et qui n'ont pas été envisagées ici.

En observant ligne à ligne l'évolution du portefeuille on remarque qu'après la chute du CAC 40 TR de plus de 40 % en 2008, la stratégie reconstituant la poche action au niveau souhaité (par exemple 30 % dans le cas Stable), en renouvelant la tombée obligataire par une ligne de faible montant ou de montant négatif (en empruntant cette année-là) permet de faire remonter sensiblement la valeur totale du portefeuille l'année suivante pendant laquelle le CAC 40 TR a gagné 28 %.

On obtient des montants finaux plus faibles quand on utilise des taux moyens plus pénalisants pour les trois facteurs de risque, plus sévères que ceux observés sur l'horizon de temps utilisé. Si l'on retient une performance moyenne de 5% pour les actions et un taux d'intérêt moyen de 1,80%, on obtient des valeurs terminales nulles pour des taux d'inflation moyens compris dans la fourchette 2,47 % à 2,80 % selon les stratégies. Ces taux d'inflation sont quasiment égaux au taux moyens (pondérés) des portefeuilles d'actifs (on a 2,76 % pour 30 % d'actions et 70 % d'obligations) et évoluent comme ces derniers. On approfondira ces variantes adverses dans les simulations en Monte Carlo qui intègrent aussi les volatilités des facteurs et pas seulement leurs moyennes.

On retrouve dans les trois stratégies que la solvabilité finale du canton dépend de la hiérarchie entre le taux de revalorisation des rentes et la performance moyenne de l'actif (on part d'une situation de départ équilibrée ici).

Les valeurs élevées mais exactes issues des simulations historiques introduisent un biais optimiste car sur la période historique retenue les marchés financiers ont été rémunérateurs (en valeur réelle) grâce à une inflation durablement basse. Ce constat reste vérifié lorsqu'on transforme ces montants en euros de 2097 en euros de 2024

La conjonction de marchés financiers globalement bien orientés et d'une faible inflation sur les trente-cinq années passées a été favorable à ce régime de retraite géré en capitalisation. Sa stratégie de pilotage depuis plus d'une trentaine d'années (il suit le cas « Stable ») lui a permis d'accumuler des réserves qui lui assurent une solvabilité convenable en 2024 et lui permettent d'envisager sereinement sa phase d'extinction sur plusieurs décennies, si la gestion de son portefeuille conserve la même rigueur et si les marchés financiers sont en moyenne aussi favorables.

Les simulations historiques utilisent une fenêtre glissante de l'échantillon, qui limitent l'indépendance entre les trajectoires et leur caractère exhaustif. Sur ces trajectoires on remarque que l'ordre des performances influe sur le solde final, comme dans une gestion de CPPI, même si dans le cas du canton l'assiette varie avec le temps comme

la pondération en actions (sauf dans le cas Stable qui s'approche le plus d'un CPPI). On constate aussi que les trajectoires les plus négatives correspondent à des périodes de plusieurs années successives de mauvaises performances financières en début de simulation. Dans les trois stratégies de gestion aucune occurrence de ruine n'est observée avec les simulations historiques, et par conséquent la stratégie Dynamique est la plus efficiente.

Pour éviter d'afficher des soldes finaux extrêmement élevés (exprimés en euros de 2097), on va explorer deux variantes :

- augmenter les revalorisations des rentes en les indexant en partie sur les performances financières du portefeuille,
- rapprocher la date d'observation à 2077 et 2060 pour éviter de capitaliser les excédents sur des dizaines d'années.

Ces variantes seront effectuées au § 6.5.3 en simulations de Monte Carlo car elles sont plus flexibles et plus précises que les simulations historiques.

6.3.2 SIMULATIONS HISTORIQUES DE L'ACTIF ET DU PASSIF AVEC LES RISQUES FINANCIERS, LE RISQUE INFLATION ET LE RISQUE DE LONGEVITE

Pour une entité servant des rentes viagères la longévité est le facteur de risque adverse intrinsèque. Comme dans Solvabilité 2 on choqe les facteurs q_x et q_y d'un pourcentage donné : ici + 10% pour les ORPS. On doit recalculer des tables de mortalité à partir de celles utilisées (TGH/TGF 00-05) en multipliant ces facteurs par 1,1. Il faut recalculer les flux annuels de rentes des allocataires et futurs allocataires regroupés par année de naissance (en distinguant les sexes et en incluant les réversataires) et appliquer les coefficients modifiés à cette soixantaine de sous-groupes.

Le rapport ORSA de l'IRPS fournit l'impact du choc de 10% sur les provisions techniques : le choc de longévité de 10% entraîne une augmentation de 2,8 % de celles-ci. Ce ratio observé sur l'IRPS est confirmé dans deux mémoires publiés par l'Institut des Actuaires. A. Chevallier applique le choc de longévité de 10% à un FRPS : les provisions techniques augmentent de 3,85%. D. Chemtob fournit l'impact de chocs allant de 5% à 30 % (par pas de 5%) : les variations relatives de la Provision Mathématique Théorique (pour un régime en points article L.441) vont de 1,5 % à 10,3% et sont proportionnelles aux chocs (le Best Estimate augmente de 1,6 % à 11,2 % avec la même proportionnalité).

Ces trois résultats obtenus de manière rigoureuse indiquent d'une part que le choc de longévité de 10% affecte modérément le montant de la provision technique (+3%), et d'autre part que l'impact est proportionnel au niveau du choc (un choc de 20% augmente de 6 à 7% la provision). La déformation du profil des rentes est une légère augmentation des montants et aussi un allongement marginal repoussant la date d'extinction ultime.

Il faut souligner que si un choc de mortalité a un sens pour un portefeuille d'assurance décès qui peut se trouver soudainement affecté par une pandémie sévère (même si le Covid-19 n'a pas provoqué de difficulté pour ces portefeuilles, car sa sévérité était finalement modérée et inférieure à son impact ressenti). Pour un régime d'épargne-retraite la longévité ne peut pas se présenter sous la forme d'un choc à la hausse mais plutôt d'un glissement progressif qui se traduit graduellement dans la solvabilité et peut être détecté au fil du temps.

Pour ces deux raisons : faible impact (de l'ordre de 3%) et impact graduel, nous n'effectuons pas de calcul rigoureux du choc de longévité. On ne reconstruit pas la chronique des rentes « choquées » mais on applique à la chronique initial un facteur multiplicatif constant de 1,05 (supérieur à l'impact de 3% et donc conservatif).

Valeur terminale avec choc longévité de 10 % Simulations Histo	Moyenne	Ecart-type	Maximum	Minimum	Somme des rentes reval.
Stable indexation inflation	1733 M€	711 M€	3726 M€	839 M€	204 M€
Prudent indexation inflation	821 M€	311 M€	1499 M€	374 M€	204 M€
Dynamique indexation inflation	3273 M€	1549 M€	8278 M€	1492 M€	204 M€

<i>PM Stable Inflation Sans choc</i>	<i>1962 M€</i>	<i>711 M€</i>	<i>3926 M€</i>	<i>1014 M€</i>	<i>191 M€</i>
<i>PM Prudent Inflation Sans choc</i>	<i>941 M€</i>	<i>306 M€</i>	<i>1583 M€</i>	<i>468 M€</i>	<i>191 M€</i>
<i>PM Dynamique Inflation Sans choc</i>	<i>3666 M€</i>	<i>1577 M€</i>	<i>8707 M€</i>	<i>1736 M€</i>	<i>191 M€</i>

Tableau 11 : Valeurs terminales dans les trois stratégies de pilotage de la poche action, en revalorisant sur le taux d'inflation spot et avec le choc de longévité de 10% (PM en italique, cas de base sans le choc de longévité)

Dans les trois stratégies aucune occurrence de ruine n'apparaît et la hiérarchie est conservée. La stratégie Prudente est paradoxalement la plus risquée puisque celle qui présente la trajectoire avec le solde final le plus bas et aussi la plus forte baisse de la moyenne en valeur relative.

Les soldes finaux moyens baissent de 10% environ (alors que les rentes augmentent de 5% en moyenne et aussi en durée), les écart-type sont pratiquement inchangés, les maxima baissent de 5 à 7% alors que les minima perdent presque 20% et les rentes augmentent de 7%.

Avec des revalorisations sur l'inflation et des simulations historiques on constate que le choc de longévité est peu pénalisant. On conclut que le risque de mortalité/longévité n'est pas un risque majeur pour l'IRPS, contrairement aux risques financiers purs et au risque d'inflation.

6.4. DISCUSSION SUR LES SEVERITES RESPECTIVES DES QUATRE FACTEURS DE RISQUE

6.4.1 PREMIERS CONSTATS FONDES SUR LES SIMULATIONS HISTORIQUES

Les quatre facteurs de risque (rendement des actions, niveau du taux d'intérêt à moyen/long terme, taux d'inflation et longévité) peuvent être regroupés en deux blocs. A l'actif du bilan du canton c'est la performance financière du portefeuille qui influe et au passif ce sont les revalorisations et le risque de longévité. Les trois premiers facteurs sont à caractère économique/financier et sont éventuellement corrélés alors que le dernier est considéré comme indépendant des précédents.

Ces facteurs s'appliquent au profil initial du canton (sa richesse initiale et sa chronique de rentes à servir) qui est fixé (c'est la donnée du problème) et les déforment au fil du temps progressivement et de manière irréversible pour les rentes indexées. Initialement le canton est solvable puisqu'on peut adosser les rentes et les frais futurs à un portefeuille d'obligations indexées sur l'inflation acquises en liquidant le portefeuille actuel : il faut seulement maintenir cette solvabilité jusqu'à son extinction.

On a vérifié cet équilibre initial (en utilisant la feuille Excel des simulations historiques) en remplaçant les paramètres historiques par des valeurs constantes que l'on choisit. On commence par utiliser des taux nuls pour l'inflation, la performance des actions et le taux coupon. Avec ce scénario de base on obtient un solde de trésorerie en 2097 pratiquement équilibré de -2,25 M€. Le montant total des frais s'élève à 15,19 M€, celui des rentes à 148,66 M€ à partir d'un portefeuille initial de 161,60 M€ : on retrouve sans actualisation le déficit de 2,25 M€ et les trois modes de pilotage conduisent au même solde puisqu'aucune poche du portefeuille ne produit de fruits.

On se place ensuite dans le cas d'un portefeuille complètement obligataire avec la série historique des taux TEC 7 et une gestion en noria, et on observe sur la figure 14 que le solde final évolue de manière continue. Il est toujours largement positif et le solde le plus élevé correspond à la séquence où les taux d'intérêt en début de période sont les plus élevés et procurent des coupons importants sur la plus forte assiette. Ce graphique illustre l'influence du chevauchement entre les valeurs successives (c'est un défaut des simulations historiques). Le solde moyen s'élève à 372 M€ (le minimum à 172 M€ et le maximum à 734 M€).

Le solde calculé avec les valeurs moyennes constantes (3,77 % pour le TEC 7 et 1,77% pour l'inflation) s'établit à 470 M€. En observant les flux annuels successifs on constate que les premières années les rentes sont un peu supérieures aux coupons du portefeuille mais qu'assez rapidement la situation s'inverse et qu'elles n'arrivent plus à absorber les coupons : le portefeuille se met à fructifier sans être consommé.

Toujours avec uniquement une poche obligataire, on vérifie qu'avec un taux coupon constant (1,90 %) légèrement supérieur au taux constant d'inflation (égal à la moyenne historique de 1,82%) on aboutit à un solde final nul : ce résultat n'est pas une surprise.

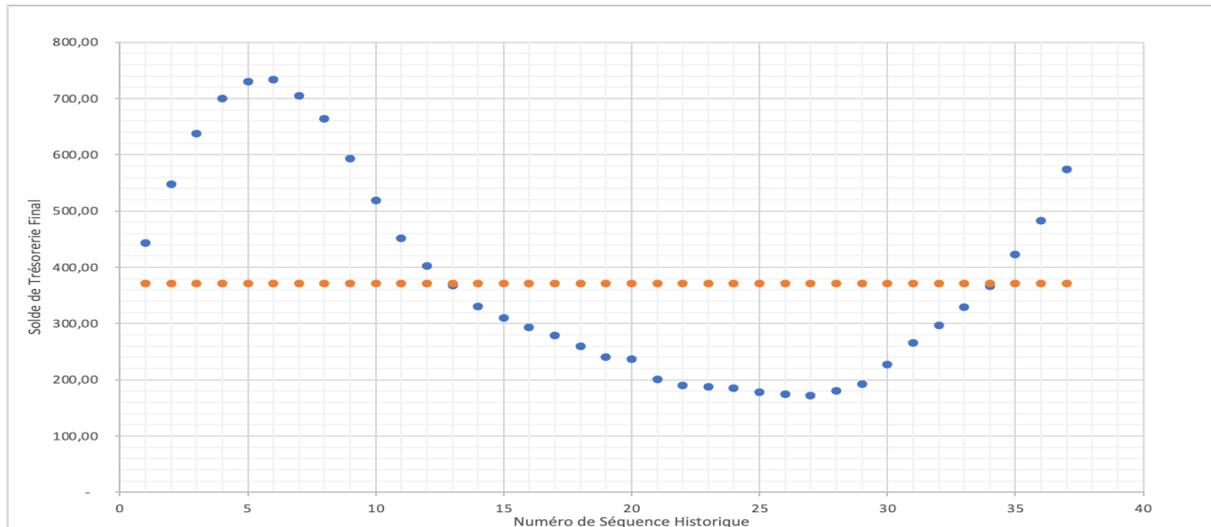


Figure 14 : Valeur finale du portefeuille en 2097 avec portefeuille entièrement obligataire - simulations historiques

Les constats faits en utilisant les données historiques des dernières trente-cinq années dépendent de la hiérarchie constatée entre les performances financières et l'inflation. Cet historique récent reflète une situation économique satisfaisante : croissance modérée, crises financières passagères et réversibles et surtout inflation maîtrisée. A partir de ce constat il serait possible de revaloriser les rentes sur la plus haute valeur entre le taux d'inflation de l'année et une fraction des gains financiers lissés du portefeuille : cette possibilité sera étudiée de manière approfondie dans les simulations en Monte Carlo.

Dans cette configuration favorable c'est la stratégie Dynamique qui est la plus efficace car elle génère le plus de richesse. Les risques financiers et d'inflation ont des effets comparables car ils sont cumulatifs : les rentes bénéficient du cumul des indexations et la valeur du portefeuille dépend des performances passées, des prélèvements effectués et de la pondération des deux poches.

Alors que les montants cumulés des rentes évoluent dans une fourchette allant de 1 à 2, les valeurs terminales sont considérablement plus volatiles (et dispersées) : elles sont très sensibles aux changements de mode de gestion ainsi qu'à l'ordre d'apparition des séquences (identiques) de valeurs.

Le cas Stable dans lequel le pourcentage de la poche action est constant permet de confirmer cette sensibilité aux premières années de la simulation. L'actif est graduellement consommé par le versement des rentes et une crise en début de simulation peut provoquer l'insolvabilité à terme (dans l'hypothèse d'un pilotage sans mesures correctrices).

Pour conforter ces conclusions (et s'assurer de la correcte implémentation du pilotage) on vérifie toujours que les résultats obtenus avec les séries historiques sont confirmés en les recalculant avec les trois facteurs de risque égaux aux valeurs moyennes utilisées (et donc sans aucune volatilité). En utilisant les taux moyens des séries historiques on obtient toujours un solde final voisin de celui de la moyenne des simulations historiques. C'est une façon de mettre en évidence la volatilité de ce solde final aux paramètres de performance et d'inflation, sans que les volatilités de ceux-ci observées sur la période ajoutent au résultat une composante aléatoire.

Lorsqu'on applique un taux moyen d'inflation supérieur au taux moyen de performance financière (combinaison linéaire de la performance action et du taux coupon) on obtient des déficits finaux élevés. Par exemple avec un taux moyen d'inflation de 3% et une performance financière moyenne extrêmement basse de 2% on aboutit à un déficit de 73,9 M€ en 2097 pour la stratégie Stable (74,4 pour Prudent et 73,5 pour Dynamique).

C'est la hiérarchie entre le taux d'inflation (qui pèse sur le passif) et la performance financière (qui fait croître l'actif) qui détermine l'équilibre du canton sur le long terme, avec l'indexation des rentes sur l'inflation. Dans un environnement économique et financier normal, la performance d'un portefeuille d'actifs équilibré est supérieure en moyenne au taux d'inflation. Dans les périodes de crise : stagflation ou forte inflation, l'inverse peut être observé et les régimes par capitalisation s'en trouver fragilisés.

Il n'y a pas de stratégie intrinsèquement supérieure aux autres pour toutes les configurations possibles entre les rendements financiers et l'inflation, il faut adopter celle qui est la plus indiquée pour les configurations les plus fréquentes (donc les plus probables).

Les actions sont généralement plus rentables que les obligations, mais plus volatiles ; de la même manière on observe généralement que les taux moyens obligataires sont supérieurs aux taux d'inflation. Ces hiérarchies peuvent être modifiées de manière temporaire, donc il ne s'agit pas d'un ordre intangible : on reviendra sur cette hypothèse structurante avec les simulations en Monte Carlo faites avec des paramètres fixés de manière discrétionnaire.

6.4.2 SENSIBILITES AUX FACTEURS DE RISQUE

Une manière de quantifier la sévérité d'un facteur de risque, indépendamment des résultats obtenus avec les séries historiques ou de Monte Carlo, est d'exprimer la sensibilité du solde final à ce facteur et de comparer les sensibilités des différents facteurs de risque entre elles pour mettre en évidence les plus importants.

La sensibilité à un facteur de risque est en général un scalaire qui fournit la variation relative de la grandeur étudiée en fonction de la variation absolue (ou relative) d'un paramètre agissant sur cette grandeur « toutes choses égales par ailleurs » (les autres paramètres étant maintenus constants). La sensibilité du prix d'une obligation (à taux fixe) aux taux d'intérêt mesure la variation relative de son prix lorsque la totalité de la courbe d'actualisation subit une translation de + 1%. En actuariat (assurantiel ou financier) on recourt souvent aux sensibilités pour obtenir une première estimation de la variation d'un indicateur, avant d'effectuer son calcul complet ou des simulations.

On va rechercher la sensibilité de la valeur finale du portefeuille (en 2097) au taux de performance financière et au taux d'inflation uniquement dans le cas Stable (poche actions toujours égale à 30%).

Pour cela on implémente une modélisation très simplifiée du pilotage du canton (sans recourir à la gestion en noria des obligations) et en retenant un taux unique constant sur toute la durée de la performance action et du coupon (soit le taux de performance financière). Le taux de revalorisation est aussi constant sur toute la durée.

Ce modèle basique et facilement auditable permet de retrouver les résultats obtenus avec la modélisation complexe (noria et détention jusqu'à maturité, utilisation des taux obligataires au ligne à ligne, taux différents pour les actions et les obligations et différents chaque année, ...) lorsque l'on utilise les taux moyens des facteurs de risque. Cette vérification confirme l'exactitude des résultats de la modélisation complète alors qu'ils avaient semblé exagérés en première lecture à l'horizon d'extinction 2097.

a) Sensibilité au taux de revalorisation des rentes

Dans ces simulations simplifiées l'indexation continue à être appliquée même lorsque la trésorerie devient négative. L'indexation est faite uniquement sur le taux d'inflation (sans aucune référence à la performance

financière de l'année ou passée). La performance financière est égale à 0% dans le cas de base et on fait varier uniquement le taux de revalorisation des rentes pour calculer les deux sensibilités.

La sensibilité du solde final du portefeuille en 2097 au taux de revalorisation des rentes varie fortement. L'évolution de ce solde (qui est un résidu résultant de deux chroniques de flux opposées, celle des rentes étant dominante) n'est pas linéaire en fonction du taux, il présente une forte convexité. La sensibilité du solde final au taux de revalorisation est fortement dépendante de ce taux, passant de plus de 100 % à 40 % à mesure qu'il augmente et que le déficit se creuse. Cette sensibilité est inutilisable en pratique et ne sera pas retenue pour effectuer des estimations.

Taux revalorisation	0%	1%	2%	3%	4%	5%
Somme des rentes	148,7 M€	172,6 M€	202,1 M€	238,9 M€	285,1 M€	343,7 M€
Var. vs précédent		+ 23,9 M€	+ 29,5 M€	+ 36,8 M€	+ 46,2 M€	+ 58,6 M€
Var.relative		+16 %	+17%	+18%	+19%	+21%
Solde Final	-2,2 M€	-21,2 M€	-44,8 M€	-74,3 M€	-111,7 M€	-159,2 M€
Var. vs précédent		-19 M€	-23,6 M€	-29,5 M€	-37,4 M€	-47,5 M€
Var relative		NS	111%	66%	50%	42%

Tableau 12 : Somme des rentes et solde final Cas Stable (performance financière globale de 0%), revalorisations allant de 0% à 5%

Le solde final du portefeuille et le montant total des rentes évoluent de manière assez parallèle, avec des signes opposés. Le montant total des rentes n'inclut pas les frais (ils sont prélevés sur les actifs). Avec le taux de revalorisation à 0% on retrouve la situation équilibrée du canton avec initialement 161,6 M€ d'actifs et pouvant servir la totalité des rentes futures non indexées et les frais (de 15 M€) dans l'hypothèse (irréaliste) d'absence de fructification du portefeuille. Le déséquilibre croissant est entièrement imputable à l'indexation qui n'est pas financée par les fruits futurs (probables) du portefeuille. On se place ici toutes choses égales par ailleurs et avec une performance financière nulle. On va relaxer cette dernière contrainte irréaliste plus loin.

La sensibilité du montant total des rentes au taux de revalorisation est nettement plus stable. C'est la sensibilité de la provision au taux technique (ici le taux technique est toujours nul par convention) mais avec une variation de sens opposé. Le taux technique est un taux d'actualisation alors que le taux de revalorisation est un taux de capitalisation, il se situent respectivement au numérateur et au dénominateur dans les expressions littérales. La sensibilité ressort à 16 ans et augmente lorsque les rentes augmentent par revalorisation (la surface d'encours augmente, ce comportement est classique et il a été souligné dans le livre de F. Planchet et P. Thérond et ailleurs).

Le solde final est voisin de zéro lorsque le taux de revalorisation et le taux de performance financière sont égaux : ce constat a déjà été expliqué puisque le canton est à l'équilibre en 2024 et qu'il peut supporter les frais forfaitaires. Lorsque les deux taux augmentent ce (quasi) équilibre se dégrade car même si les revalorisations et la fructification se font au même taux, la charge relative des frais calculés sur l'assiette du portefeuille croît et creuse le déficit, et les assiettes évoluent différemment.

La forte convexité du solde final à l'écart entre les deux taux, et surtout l'asymétrie défavorable, confirment que le taux de revalorisation est un facteur de risque aussi important que les risques financiers. Ce constat est confirmé lorsque la performance financière est fluctuante (autour d'une moyenne positive), donc que le portefeuille peut se contracter (avant même le service des rentes) et que les revalorisations sont à la fois toujours positives (voire nulles) et toujours cumulatives avec un cliquet positif. On a constaté plus haut que les taux d'inflation servant aux revalorisations ne sont pratiquement pas corrélés aux taux de performance financière et donc qu'on ne peut tableur sur une immunisation des premières par les secondes.

Ces deux constats négatifs doivent être mitigés par deux observations : même s'ils ne sont pas fortement corrélés, les deux taux évoluent dans des plages voisines et sur moyenne/longue période le taux d'inflation moyen est généralement inférieur au taux moyen de performances financières et en particulier au taux moyen de rendement des actions.

b) Sensibilités au taux de performance financière (en fonction du taux de revalorisation)

On reste toujours dans le cadre de la modélisation simple avec un taux unique de performance financière pour les actions et les obligations (donc où toutes les stratégies d'allocation d'actifs au cours du temps sont équivalentes) et on fait varier ce taux global. Le tableau 14 rassemble la matrice des soldes finaux en 2097 pour six taux de revalorisation fixes et six taux de performance financière fixes.

Solde final en 2097	Revalo 0%	Revalo 1%	Revalo 2%	Revalo 3%	Revalo 4%	Revalo 5%
Rendit financier 0 %	-2 M€	-21 M€	-45 M€	-74 M€	-112 M€	-159 M€
Rendit financier 1 %	+27 M€	-4 M€	-44 M€	-92 M€	-153 M€	-230 M€
Rendit financier 2 %	+111 M€	+57 M€	-9 M€	-90 M€	-190 M€	-314 M€
Rendit financier 3 %	+320 M€	+228 M€	+117 M€	-18 M€	-183 M€	-386 M€
Rendit financier 4 %	+809 M€	+652 M€	+464 M€	+238 M€	-35 M€	-369 M€
Rendit financier 5 %	+1909 M€	+1639 M€	+1320 M€	+939 M€	+483 M€	-69 M€

Tableau 14 : Solde final en 2097 en fonction du taux de rendement financier constant compris entre 0 % et 5 % et du taux de revalorisation constant compris entre 0% et 5% Cas Stable

La première diagonale du tableau confirme le premier constat : lorsque le taux de performance financière est égal au taux de revalorisation l'équilibre est (quasiment) conservé jusqu'en 2097.

Cet équilibre se dégrade à mesure que les deux taux augmentent, principalement à cause des frais de gestion et des frais financiers générés par les emprunts mis en place pour servir les rentes (convention d'un comblement du déficit par des emprunts au taux de marché).

Le second constat est que la valeur finale du portefeuille (le solde final) présente une forte convexité : il est fortement sensible au taux de performance financière (à taux de revalorisation fixé). Le solde positif est multiplié par un facteur compris entre 2 et 3 chaque fois que le taux de performance augmente de 1%, c'est une évolution fortement non-linéaire. Ce comportement s'observe lorsque la performance financière est supérieure au taux de revalorisation : les rentes n'arrivent pas à consommer les fruits du portefeuille qui grossit continûment, puisqu'il n'y a aucune revalorisation provenant de sa fructification.

Lorsque le solde de trésorerie devient négatif il est grevé par les frais financiers des emprunts (l'effet est plus marqué à mesure que le taux financier augmente). On remarque que les soldes présentent un creusement jusqu'à ce que le taux de rendement atteigne le taux de revalorisation puis se redressent lorsqu'il le dépasse. Cette évolution non monotone (en V) découle de la convention retenue d'appliquer des frais financiers au taux obligataire. Ce comportement de point bas se vérifie sur les deux diagonales partielles situées au-dessus de la première diagonale du tableau précédent.

On remarque aussi que le déficit lorsque les deux taux sont égaux (-2,2 M€ pour 0%) double à chaque fois que les taux augmentent de 1% ; ce comportement non linéaire traduit la convexité des deux chroniques opposées et les effets amplificateurs des taux croissants.

7 SIMULATIONS PAR LA METHODE DE MONTE CARLO

7.1 PRESENTATION DE LA METHODE DE MONTE CARLO

Les simulations par Monte Carlo sont des outils classiques en modélisation financière. Elles sont utilisées lorsque l'on cherche à estimer le prix d'un produit financier dépendant d'une ou plusieurs variable(s) aléatoire(s) en effectuant un grand nombre de tirages à partir de la distribution de probabilité de cette variable d'entrée (ou de plusieurs) et en retenant la moyenne des prix obtenus avec ces tirages.

Dans le cas du pilotage du canton jusqu'à extinction on effectue des tirages indépendants des valeurs des trois facteurs aléatoires : performance des actions (le CAC 40 TR), taux d'intérêt des obligations (le TEC 7) et taux de revalorisation (le taux d'inflation français YoY) et l'on observe le solde final de trésorerie à une date donnée.

Les simulations sont simples si les trois facteurs sont supposés indépendants : on génère trois séries indépendantes de nombres aléatoires, une pour chaque facteur de risque, et on utilise la loi normale inverse. Chaque trajectoire complète porte sur près de soixante-quinze ans, un jeu de simulations contient un millier de trajectoires qui sont moyennées (la feuille Excel contient 1,5 millions de cellules, elle arrive à son ultime colonne à droite) puis dix jeux sont moyennés à leur tour pour couvrir dix mille trajectoires donnant les indicateurs.

On avait déjà souligné plus haut que la modélisation de la gestion de la poche obligataire en noria est assez lourde : elle triple le nombre de colonnes de chaque simulation. On a constaté dans les simulations historiques que la maturité moyenne restait assez stable autour de 4 ans. A partir de ce constat on simplifie la modélisation en considérant que la poche obligataire est une unique ligne (et non sept décalées avec des montants généralement différents) mais dont le taux de coupon est la moyenne des taux d'intérêt des six années passées glissantes et de l'année en cours. Ce lissage du taux permet de ne pas trop s'éloigner de l'hypothèse de détention jusqu'à maturité, en revanche on gère une assiette unique et non divisée en sept lignes. La poche action reste toujours valorisée en valeur de marché. La règle de rebalancement est également conservée. On conserve l'essentiel de la logique de la simulation, adaptée ici au grand nombre de simulations nécessaire dans un Monte Carlo.

Les distributions des facteurs aléatoires sont modélisées comme des lois normales : on utilise les moyennes et les écart-types empiriques déduits des séries historiques. Avec ce procédé on peut élargir l'intervalle des valeurs générées en utilisant toujours cet historique comme base de référence, ce qui facilite les comparaisons entre les simulations historiques et en Monte Carlo.

Avec un Monte Carlo on peut multiplier le nombre de trajectoires totalement indépendantes et non chevauchantes, mais on reste toujours dépendant des caractéristiques de l'échantillon qui a fourni ces statistiques. Reste donc la question de la représentativité et de la reproductibilité de ces valeurs : le futur sera-t-il comme le passé ? ou y-aura-t-il changement de régime ?

Les distributions obtenues avec les simulations de Monte Carlo et les paramètres historiques sont comparées entre elles. On s'attend à retrouver des résultats voisins : les moyennes doivent être voisines même si on explore nettement plus de configurations et qu'on ne retient pas les synchronisations observées des trois facteurs de risques. Les écart-types sont moins aisément comparables à cause de la différence du nombre de trajectoires comparées. Les statistiques de cas de ruine sont établies ici avec un nombre de simulations (indépendantes) nettement plus élevé. Le pourcentage de ruine et la valeur moyenne de déficit en cas de ruine sont obtenus uniquement avec les Monte Carlo ici. Enfin les valeurs extrêmes qui dépendent du nombre de simulations ne sont pas présentées de ce fait.

Avec les simulations de Monte Carlo on se place dans le cadre du théorème central limite, ce qui était doublement impossible avec la trentaine de simulations historiques du fait de ce faible nombre et de la méthode de séquençage historique et glissant des variables (contrairement à un bootstrapping). On ne cherchera pas à introduire les

corrélations car les valeurs des coefficients calculées au § 4.2.4 sont faibles : 0,10 pour le couple CAC40 TR / TME et de 0,23 pour le couple Inflation YoY / TME -0,50%.

7.2 SIMULATIONS DE MONTE CARLO AVEC REVALORISATIONS INDEXEES SUR LE TAUX D'INFLATION ET SANS CORRELATIONS

Le choix des moyennes et des écart-types utilisés dans les simulations est essentiel. Nous retenons une moyenne de 9,97 % pour la performance annuelle de la poche action (CAC 40 TR) et une volatilité de 20,63 % ; une moyenne de 3,75 % et une volatilité de 3,13 % pour le taux TEC 7 et une moyenne de 1,82 % et une volatilité de 1,15 % pour le taux d'inflation français YoY. Ces valeurs sont les couples des statistiques empiriques des séries historiques de 1988 à 2023 déjà utilisées dans les simulations historiques (justifiant leurs comparaisons).

Les conventions de gestion sont aussi conservées : les éventuels déficits (trésorerie devenue négative pour servir les rentes) sont financés par des emprunts dont le taux est celui des obligations de maturité 7 ans contemporaines (de nominal négatif), générant un coupon négatif TEC 7 (donc une charge financière). Dans le premier jeu de simulations présentées l'indexation sur l'inflation continue à s'appliquer même en cas de passage en ruine (solde de trésorerie négatif). Dans le second jeu de simulations l'indexation sera calculée sur la plus haute valeur entre le taux d'inflation et une fraction de la performance financière lissée sur huit ans (comme au § 6.3.2) et elle cesse en cas de ruine.

La variable étudiée est toujours la valeur finale du portefeuille (le solde de trésorerie algébrique) en 2097 exprimée en euros courants de 2097. On caractérise toujours sa distribution empirique par sa moyenne, son écart-type, la probabilité de ruine (soit le pourcentage de soldes finaux négatifs), le montant moyen de ce solde négatif en cas de ruine et la durée moyenne avant le passage en ruine (pour les seuls cas de ruine).

On renouvelle ici l'avertissement sur la nécessité de relativiser les montants obtenus en euros courants (de 2097) puisqu'il faut les diviser par dix environ pour passer à des euros de 2024 et revenir à des soldes commensurables au montant actuel du portefeuille du canton.

On utilise ici un déflateur financier et non un déflateur de pouvoir d'achat obtenu par la composition des taux d'inflation simulés (comme dans la notice modèle EIOPA pour les PEPP). Le déflateur calculé sur l'inflation en pouvoir d'achat est préféré par l'EIOPA, il est bien adapté aux mesures de l'épargne accumulée pendant un plan d'épargne et adapté aux particuliers. Ce type de déflateur n'est jamais utilisé en revanche en finance de marché qui ne connaît que l'actualisation financière.

Le tableau 15 rassemble les résultats pour le cas Prudent avec les mêmes conventions pour dix jeux d'un millier de trajectoires :

Cas Prudent MC 2097	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Solde négatif moyen en cas de ruine M€	Solde négatif probable M€	Durée de vie si ruine
Moyennes des 10 jeux	784	506	1,61%	-109	1,75	33
Ecart-type des 10 jeux	13	23	0,45%	18	0,49	1

Tableau 15 : Solde final en 2097, écart-type et probabilité de ruine, Cas Prudent, simulations en Monte Carlo

Dans cette stratégie Prudente, le solde moyen final est facialement élevé : il est de 784 M€ avec un écart-type moyen de 65 % de cette moyenne. Divisés par dix ces chiffres sont plus réalistes mais restent élevés : le portefeuille initial a été consommé à moitié seulement, sa fructification a compensé les rentes versées. L'inflation moyenne future est sensiblement inférieure au taux de rendement moyen futur du portefeuille. Au vu de ces résultats la gestion Prudente est effectivement prudente et acceptable au seuil raisonnable de solvabilité de 2,50% mais pas au seuil strict de 0,50%.

Les écart-types des moyennes et ceux des écart-types empiriques valent entre 2 % et 4 % de chaque grandeur confirmant que la stabilité des résultats pour environ mille trajectoires est satisfaisante ; on n'étudie pas la vitesse de convergence. La dispersion des seuls soldes négatifs est plus grande, en lien avec le faible nombre d'occurrences (160 ici pour plus de dix milles trajectoires).

On va aussi explorer la stratégie « SuperPrudent » qui réduit le pourcentage de la poche actions de 1% par an (au lieu de 0,50%).

Cas SuperPrudent MC 2097	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Solde négatif moyen M€	Durée de vie si ruine
Moyennes des 10 jeux	622	386	1,56%	-88	34
Ecart-type des 10 jeux	12	16	0,41%	15	1

Tableau 16 : Solde final en 2097, écart-type et probabilité de ruine, Cas SuperPrudent, simulations en Monte Carlo

La moyenne et l'écart -type valent 80% de celles du cas « Prudent » et la probabilité de ruine n'a que faiblement baissé finalement.

Le tableau 17 rassemble les résultats pour le cas Stable avec les mêmes conventions pour dix jeux d'un millier de trajectoires :

Cas Stable MC 2097	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Solde négatif moyen M€	Durée de vie si ruine
Moyennes des 10 jeux	1383	1135	1,72%	-101	33
Ecart-type des 10 jeux	40	56	0,44%	26	2

Tableau 17 : Solde final en 2097, écart-type et probabilité de ruine, Cas Stable, simulations en Monte Carlo

On constate que la moyenne de ces écart-types empiriques vaut 80 % de la moyenne des moyennes. Les écart-types des moyennes et ceux des écart-types empiriques valent entre 3 % et 5 % de chaque grandeur. La dispersion des seuls soldes négatifs est plus grande, en lien avec le faible nombre d'occurrences (170 ici pour plus de dix milles trajectoires). La probabilité de ruine moyenne à 1,72 % dépasse le seuil strict de solvabilité de 0,5 % et reste en-deçà du seuil acceptable de 2,50%. La moyenne des sommes des rentes versées est de 197 M€.

La gestion Stable reste encore acceptable car la probabilité de ruine reste toujours proche inférieure au seuil rigoureux avec ces paramètres.

Le tableau 18 rassemble les résultats consolidés de deux fois dix jeux d'un millier de trajectoires pour le cas Dynamique :

Cas Dynamique MC 2097	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Solde négatif moyen M€	Durée de vie si ruine
Moyennes des 10 jeux	2300	2758	2,11%	-118	32
Ecart-type des 10 jeux	48	268	0,43%	18	1

Tableau 18 : Solde final, écart-type et probabilité de ruine pour le Cas Dynamique, simulations en Monte Carlo

On constate que la probabilité moyenne de ruine à 2,11 % reste inférieure au seuil acceptable de 2,50 %, avec un écart-type moyen de 0,43 % par jeu d'un millier de trajectoires. La probabilité de ruine augmente avec la prise de risque ce qui est conforme à l'intuition.

Quand on augmente l'exposition au risque actions en passant de Stable à Dynamique on observe également l'accroissement de la moyenne des soldes finaux et de leur dispersion : l'écart-type vaut ici 120 % de la moyenne. L'exposition plus élevée en actions explique la hausse du solde final moyen et de sa dispersion, le solde moyen final vaut plus du double de celui dans le cas Stable et son écart-type presque le quadruple de ce dernier.

Le montant final moyen est facialement aberrant (mais exact), même déflaté par dix (le facteur de capitalisation à 72 ans du taux 3,25%) on arrive à près de 230 M€ soit une fois et demi le portefeuille initial : l'effet fructification joue à plein et on retrouve la conclusion de Batocchio et al. qui privilégiait plus la richesse finale que le risque de ruine éventuelle.

La stratégie Dynamique est plus risquée mais elle est aussi plus profitable. Il faut choisir son facteur limitant : la prudence ou l'espérance de gain. Le premier critère est déterminant pour un IRPS, le second l'est pour un particulier qui peut risquer un peu plus pour espérer laisser un capital à ses héritiers.

Les simulations de Monte Carlo des quatre stratégies de pilotage présentent une forte augmentation de la moyenne du solde de trésorerie final doublant pratiquement à chaque passage dans la catégorie de risque plus élevé. L'écart-type du solde moyen final augmente à un rythme encore plus élevé : il triple puis quadruple à chaque passage.

La stratégie Dynamique n'entraîne pas de pertes moyennes sensiblement plus élevées que dans la stratégie Prudente ou Stable, et l'écart relatif entre sa probabilité de ruine et celle de la stratégie SuperPrudent est de 35%.

Exprimé en probabilité inconditionnelle le montant de la perte moyenne de la stratégie SuperPrudent est de 1,37 M€ en euros 2097 (et 0,14 M€ en euros 2024) ; pour la stratégie Dynamique on obtient 2,50 M€ en euros 2097 (et 0,25 M€ en euros 2024) ; les valeurs de la stratégie Prudent : 1,75 M€ et celle de la stratégie Stable est de 1,74 M€.

Les figures 15 et 16 représentent la même distribution mais avec des largeurs d'intervalles différentes. On remarque la forme d'une distribution log-normale avec quelques valeurs extrêmes à droite et seulement 17 valeurs négatives sur 1023 trajectoires.

La figure 17 contient une dizaine de trajectoires dans la stratégie Dynamique : elles restent groupées pendant les quarante premières années (le maximum se situant ici autour de 1500 M€ en euros courants), puis neuf sur dix fructifient mais restent dans la bande 500 à 2500 M€ cohérent avec la moyenne sur 1023 trajectoires de 2300 M€ et une dépasse 6000 M€ (en euros 2097). Les dix trajectoires se situent en 2097 dans la bande 500 M€ à 6800 M€, ce qui est en ligne avec la moyenne de 2300 M€ et l'écart-type de 2758 M€ et avec une loi log-normale. Ce constat visuel conforte le choix d'une date d'observation plus rapprochée que 2097, 2077 étant un compromis acceptable (à 53 ans), 2060 est un peu trop proche (36 ans).

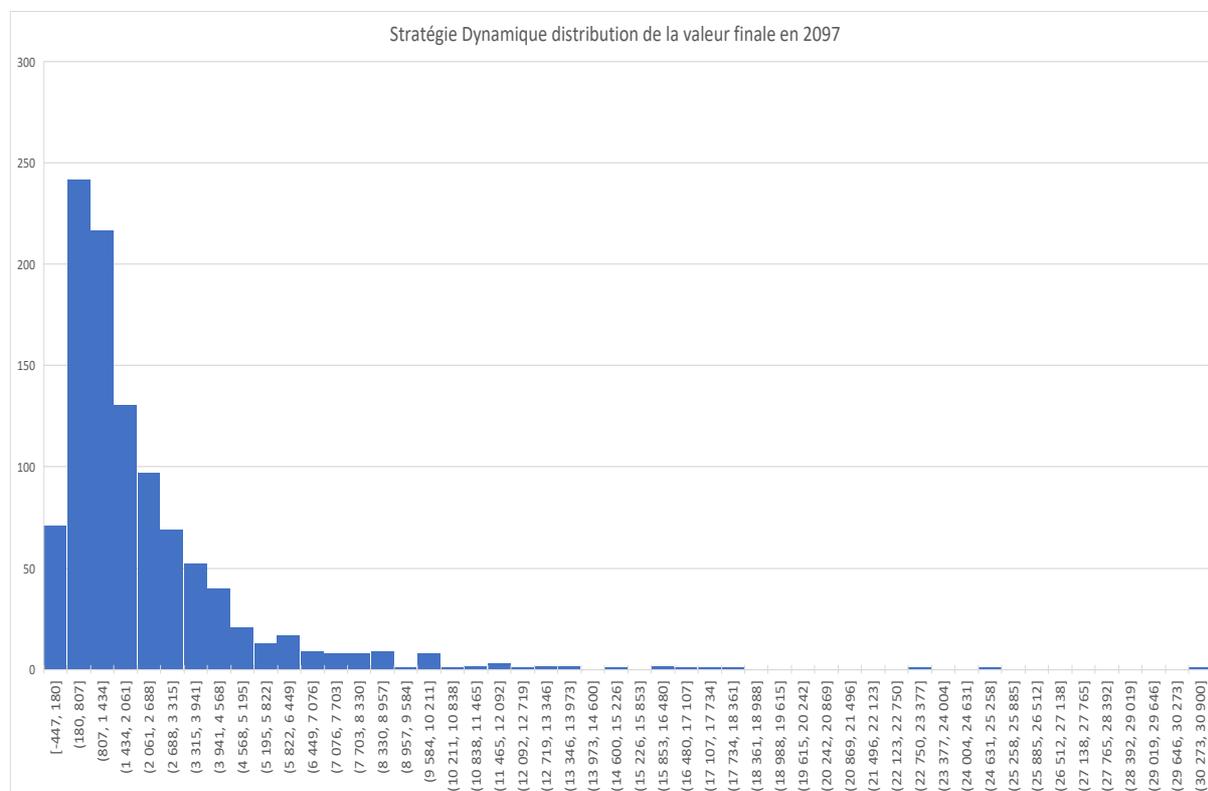


Figure 15 : Histogramme des valeurs finales (en 2097) dans la stratégie Dynamique sur 1073 trajectoires

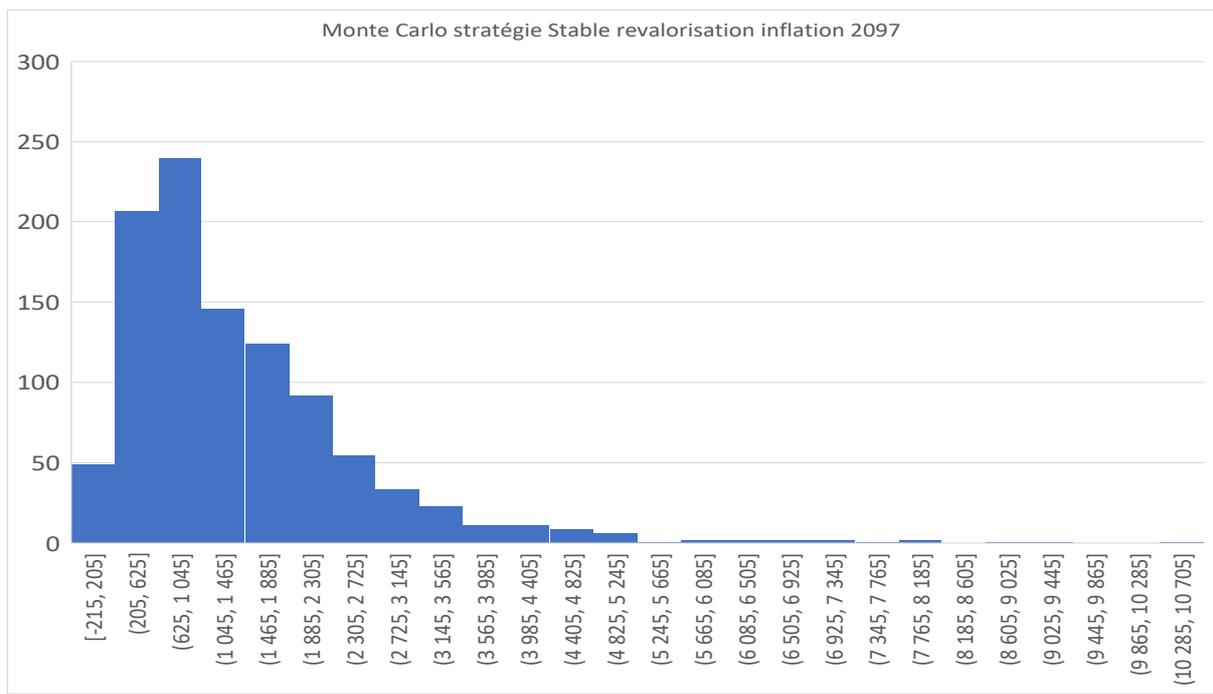


Figure 16 : Histogramme des valeurs finales (en 2097) dans la stratégie Stable sur 1073 trajectoires

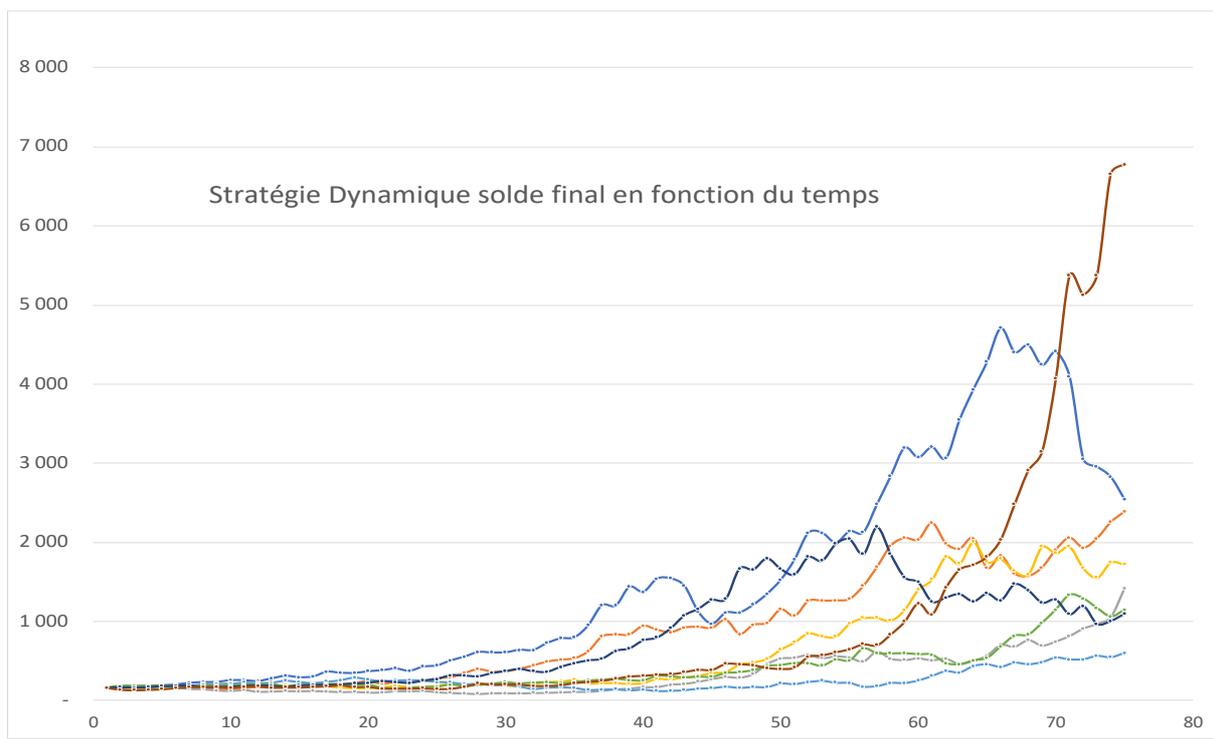


Figure 17 : Exemples de trajectoires de la valeur du portefeuille en fonction du temps (de 2024 jusqu'à 2097) dans la stratégie Dynamique pour 10 trajectoires

La figure 18 représente une dizaine de trajectoires dans la stratégie SuperPrudent : elles diffusent à partir du montant initial et en 2097 se situent entre 100 et 1400 M€ ; sur dix mille trajectoires la probabilité de ruine vaut 1,5 % et le solde moyen vaut 622 M€ en 2097 (les 10 trajectoires représentées sont en ligne avec ce chiffre).

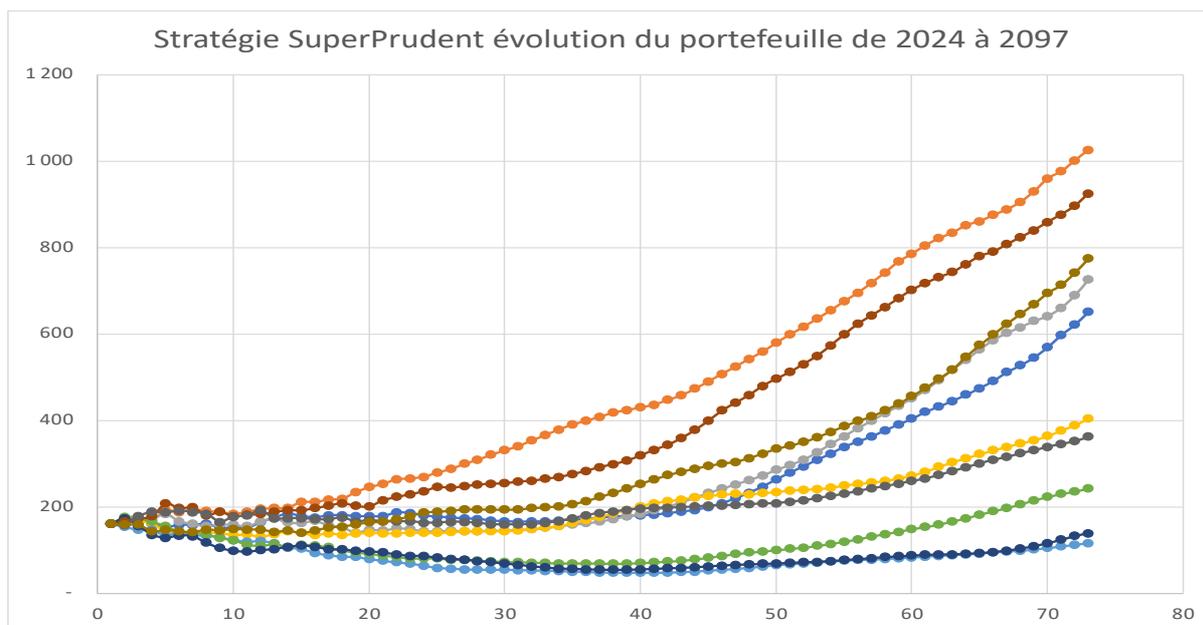


Figure 18 : Exemples de trajectoires de la valeur du portefeuille en fonction du temps (de 2024 jusqu'à 2097) dans la stratégie SuperPrudent pour 10 trajectoires

Le tableau 18 récapitule les résultats des simulations en Monte Carlo pour les trois stratégies de gestion en 2097 :

Monte Carlo 2097	Solde final moyen en M€	Ecart-type en M€	Probabilité de ruine en %	Ratio Ecart-Type /solde final moyen	Solde négatif moyen en cas de ruine M€	Solde négatif moyen inconditionnel M€
SuperPrudent	622	386	1,56%	0,62	-88	-1,37
Prudent	784	506	1,61%	0,65	-109	-1,75
Stable	1383	1135	1,72%	0,82	-101	-1,73
Dynamique	2300	2758	2,11%	1,20	-118	-2,49

Tableau 18 : Solde final, écart-type, probabilité de ruine et déficit en cas de ruine et inconditionnel pour les quatre stratégies, simulations en Monte Carlo

Les quatre stratégies sont toutes acceptables au seuil raisonnable de solvabilité de 2,50 % (soit « une ruine tous les quarante ans en moyenne » pour reprendre la formule souvent utilisée dans Solvabilité 2). Mais aucune ne satisfait le critère strict de 0,50 % qui est probablement trop rigoureux ici. Les ratios Ecart-Type / Moyenne se classent dans l'ordre croissant de risque et sont en ligne avec les probabilités moyennes de risque ; ils doublent en passant de la stratégie la moins risquée à la plus risquée alors que la probabilité de ruine n'augmente que de 35%.

Ce constat nuance donc la suprématie de la stratégie Dynamique observée avec les simulations historiques. Les simulations par Monte Carlo permettent d'explorer un très grand nombre de configurations et de montrer qu'une prise de risque plus grande se traduit par une probabilité de ruine plus élevée, même si la plage de valeurs est resserrée et que l'incertitude est du quart de celle-ci (estimée ici par un écart-type moyen sur dix jeux d'un millier de trajectoires). La forte augmentation des moyennes est accompagnée par une hausse encore supérieure des écart-types empiriques et d'une dégradation du ratio écart-type/moyenne (dernière colonne du tableau 18).

La stratégie SuperPrudent devient avec les simulations en Monte Carlo la meilleure réductrice de risque, avec la probabilité de ruine la plus basse à 1,56 %, à comparer à la valeur de celle de la stratégie Dynamique valant 2,11% (une différence de 0,55%, légèrement supérieure à un écart-type de ces probabilités).

7.3 COMPARAISONS ENTRE LES SIMULATIONS PAR MONTE CARLO ET LES SIMULATIONS HISTORIQUES

Cette comparaison portera d'abord sur les valeurs moyennes du solde final du portefeuille en 2097 et de son écart-type empirique. Le tableau 19 rassemble ces valeurs pour les trois stratégies avec les revalorisations sur l'inflation.

Simulations Histo vs MC	Moyenne Histo	Ecart-type Histo	Moyenne MC	Ecart-type MC
Cas Stable	1906 M€	711 M€	1383	1135
Cas Prudent	911 M€	306 M€	784	506
Cas Dynamique	3570 M€	1577 M€	2300	2758

Tableau 19 : Comparaisons des Moyenne et Ecart-type du solde final en 2097 pour les trois stratégies en simulations historiques et en Monte Carlo

Les moyennes du solde final obtenus dans les simulations historiques sont toujours supérieures à celles provenant des simulations par Monte Carlo. Le meilleur accord est obtenu avec la stratégie Prudent (écart de 16%) et le plus médiocre avec la stratégie Dynamique (écart de 55%). Les écart-types du solde final obtenus dans les simulations historiques sont toujours sensiblement inférieurs à ceux résultant des simulations par Monte Carlo, et les écarts relatifs compris entre 60 % et 75 %.

Dans ce dernier cas le grand nombre de simulations indépendantes permet d'explorer un large spectre de trajectoires possibles alors que les simulations historiques sont construites avec la fenêtre glissante des données et sur un faible nombre de simulations (qui sont en partie corrélées à cause du chaînage). Ces deux caractéristiques sont l'explication la plus plausible. Une explication supplémentaire pourrait être l'indépendance des trois facteurs de risque dans les Monte Carlo, alors que l'on intègre leurs corrélations implicites dans les simulations historiques avec les triplets de valeurs synchrones.

Dans les deux types de simulations, on retrouve l'augmentation de la divergence avec l'augmentation du risque moyen des stratégies (de Prudent à Dynamique). Ce dernier point confirme à nouveau que les simulations par Monte Carlo permettent d'explorer nettement plus de configurations que les simulations historiques et que les stratégies les plus risquée sont aussi les plus volatiles (ce qui est intuitif).

Les simulations historiques minorent la dispersion du fait du faible nombre de trajectoires et de leur dépendance, et a contrario majorent la valeur moyenne. En supposant que les simulations par Monte Carlo reflètent la « réelle » dispersion statistique, ce qui plausible, les simulations historiques ne fournissent pas de valeurs prudentes. En approfondissant l'analyse on perd la certitude d'une hiérarchie établie : les simulations historiques sont incomplètes et pourraient conduire à formuler des conclusions prématurées possiblement erronées. En effet la stratégie Dynamique était la plus efficiente avec les simulations historiques, elle ne l'est plus (et même l'ensemble de la hiérarchie a été inversé) avec les simulations en Monte Carlo.

Ce dernier constat et la comparaison entre les limitations des deux types de simulations nous conduisent à retenir les simulations par Monte Carlo comme méthode d'analyse même si les simulations historiques pouvaient sembler à première vue plus concrètes.

7.4 SIMULATIONS DE MONTE CARLO AVEC REVALORISATION SUR LE MAXIMUM ENTRE L'INFLATION ET UNE FRACTION DE LA PERFORMANCE FINANCIERE LISSEE

On conserve la plupart des règles de la modélisation précédente (indépendance des trois facteurs de risque, poche obligataire emprunteuse lorsque le portefeuille devient négatif, frais calculés sur la valeur absolue du portefeuille et sur les rentes). On reprend la règle d'indexation déjà utilisée dans les simulations historiques : chaque année le taux d'indexation est la plus haute valeur entre le taux d'inflation de l'année et une fraction de la performance

financière du portefeuille lissée sur sept ans, avec un plancher nul. La performance lissée est la moyenne pondérée des performances des actions et des taux coupon des obligations des six années précédentes et de l'année courante par les pourcentages de l'année courante des poches actions et obligations.

On lisse les performances des deux poches pour éviter la forte volatilité annuelle des performances actions et pour se rapprocher d'une approche comptable (pas de prise en compte immédiate des gains et provisionnement lissé des pertes). Il reste à fixer le taux de participation (ou fraction de performance lissée attribuée) qui sera utilisé dans la revalorisation des rentes (toujours a minima sur le taux d'inflation). En cas de ruine la poche action ne peut devenir négative, elle reste nulle et la poche obligataire devient alors emprunteuse et paye des frais financiers à TEC 7.

Avec les simulations de Monte Carlo on peut tester différents taux de participation. On mesure toujours le solde final moyen en 2097 et son écart-type, la probabilité de ruine, et la perte moyenne en cas de ruine. On mesure aussi la somme (non actualisée) des rentes versées puisque leur indexation dépend à la fois de l'inflation et des performances du portefeuille. On commence avec une fraction de performance attribuée de 50 % et on cherche le niveau de participation qui conduit à un seuil inacceptable de la probabilité moyenne de ruine. On conserve le seuil raisonnable de 2,5% pour caractériser une solvabilité acceptable ; les valeurs supérieures sont inacceptables. On se traite d'abord la stratégie Stable de manière systématique, les autres stratégies seront analysées dans les quelques cas spécifiques.

Pour la stratégie Stable on détaille les moyennes des grandeurs statistiques sur dix jeux d'un millier de trajectoires dans le tableau 20.

Stable Participation lissée 50%	Solde final moyen M€	Ecart-type moyen M€	Probabilité de ruine %	Solde négatif moyen M€	Durée de vie si ruine
Moyennes des 10 jeux	982	859	3,95%	-136	32
Ecart-type des 10 jeux	29	38	0,50%	13	1

Tableau 20 : Solde final, écart-type et probabilité de ruine pour le cas Stable, revalorisation au taux de participation lissé de 50 %, simulations en Monte Carlo, observation en 2097

Avec une fraction de participation de 50 % la probabilité de ruine atteint 4% : cette probabilité est supérieure au seuil acceptable de ruine de 2,50%, même si elle reste dans une zone tolérable (inférieur à 5%).

Pour mesurer la sensibilité de la probabilité de ruine au taux de participation on a testé le taux de 80 % la probabilité de ruine devient totalement inacceptable, on a effectué quelques jeux de mille trajectoires et on a obtenu de valeurs autour de 20 %, on ne fournit pas de tableau puisque ce niveau est inacceptable. Avec un taux de participation de 70 % on effectue aussi quelques milliers de simulations et la probabilité moyenne de ruine se situe vers 10 %, ce qui est encore trop élevé. Enfin avec le taux de participation de 60 % la probabilité de ruine est voisine de 5 % sur quelques milliers de trajectoires.

L'augmentation du taux de participation de 50 % à 60 % a fait passer la probabilité de ruine de 4% à 5 %, en augmentant à 70 % celle-ci dépasse 10 % et à 80 % on dépasse 20 %, ce qui traduit un comportement fortement non-linéaire sur ce profil (et sa durée de plus de soixante-dix ans).

On remarque que les gains pour les rentiers sont faibles : le total des rentes « mêlées » progresse de 10 % entre 50 et 60 % et de plus de 20 % entre 60 % et 70 % mais au prix d'un risque inacceptable.

Ce taux de participation est différent de celui de l'assurance-vie qui ne s'applique qu'à l'année en cours et donc n'est pas définitivement acquis (les intérêts de l'année sont capitalisés au taux de l'année suivante). Ici il y a un effet cliquet qui est cumulatif et donc explique la forte non-linéarité d'une part et la nécessité de ne pas confondre les valeurs faciales ces deux taux de « participation aux fruits ». Dans le cas de l'IRPS revaloriser les rentes à 50 % de la performance moyenne du portefeuille est assez généreux, d'autant plus qu'il y a le plancher du taux d'inflation en cas de mauvaises performances financières persistantes. On se situe dans un produit « Best of » avec tous les avantages attachés.

On va appliquer à la stratégie Dynamique les revalorisations sur le maximum entre l'inflation et 50 % de la performance financière lissée. Le tableau 21 rassemble les statistiques de la stratégie de gestion Dynamique avec les résultats de deux fois dix jeux d'un millier de trajectoires pour montrer la faible dispersion de ceux-ci :

Stable Dynamique Participation lissée 50%	Solde final moyen M€	Ecart-type moyen M€	Probabilité de ruine %	Solde négatif moyen M€	Durée de vie si ruine
Moyennes des 10 jeux	2078	3161	6,26%	-149	33
Ecart-type des 10 jeux	73	308	0,85%	19	1

Tableau 21 : Solde final, écart-type et probabilité de ruine pour le cas Dynamique, revalorisation au taux de participation lissé de 50 %, simulations en Monte Carlo, observation en 2097

Avec une fraction de participation de 50 % la probabilité de ruine dépasse 5% ce qui est inacceptable.

On va appliquer à la stratégie Prudent les revalorisations sur le maximum entre l'inflation et 50 % de la performance financière lissée. Les moyennes des grandeurs statistiques et leurs écart-types sur dix jeux d'un millier de trajectoires figurent dans le tableau 22.

Prudent Participation lissée 50%	Solde final moyen M€	Ecart-type moyen M€	Probabilité de ruine %	Solde négatif moyen M€	Durée de vie si ruine
Moyennes des 10 jeux	575	412	3,28%	-115	33
Ecart-type des 10 jeux	8	14	0,47%	17	1

Tableau 22 : Solde final, écart-type et probabilité de ruine pour le cas Prudent, revalorisation au taux de participation lissé de 50 %, simulations en Monte Carlo, observation en 2097

Avec une fraction de participation de 50 % la probabilité de ruine atteint 3,3 % on observe que cette probabilité dépasse encore le seuil acceptable de ruine de 2,50 %.

On applique enfin le taux de participation de 50 % à la stratégie SuperPrudent :

SuperPrudent Participation lissée 50%	Solde final moyen M€	Ecart-type moyen M€	Probabilité de ruine %	Solde négatif moyen M€	Durée de vie si ruine
Moyennes des 10 jeux	450	302	3,17%	-99	34
Ecart-type des 10 jeux	10	10	0,55%	22	1

Tableau 23 : Solde final, écart-type et probabilité de ruine pour le cas SuperPrudent, revalorisation au taux de participation lissé de 50 %, simulations en Monte Carlo, observation en 2097

Le tableau général 24 récapitule les valeurs moyennes des cinq grandeurs mesurées pour les quatre stratégies d'allocation d'actif et le taux de 50 % pour la participation de la performance financière lissée.

Stratégie (2097) % de Participation	Solde final moyen en M€	Ecart-type en M€	Probabilité de ruine	Déficit moyen en cas de ruine en M€	Durée moyenne avant ruine ans
SuperPrudent 50 %	450	302	3,17%	-99	34
Prudent 50 %	575	412	3,28%	-115	33
Stable 50 %	982	859	3,95%	-136	32
Dynamique 50 %	2078	3161	6,26%	-149	33

Tableau 24 : Solde final, écart-type, probabilité de ruine, déficit moyen en cas de ruine et durée de vie moyenne avant ruine pour les quatre stratégies, revalorisation au taux de participation lissé de 50 %, simulations en Monte Carlo, observation en 2097

Avec un taux de participation de 50% des performances financières lissées aucune des stratégies n'est acceptable au seuil raisonnable de solvabilité de 2,50%, seule la stratégie SuperPrudent s'en approche. On constate que la

probabilité de ruine augmente avec l'exposition moyenne aux actions : on accroît bien son risque en s'exposant relativement plus à celles-ci, un constat conforme à l'intuition. On remarque aussi que les probabilités de ruine sont proportionnelles au ratio écart-type empirique sur moyenne empirique, mais pas selon les ratios de la loi normale (on aurait des probabilités de ruine nettement plus élevées) ; la distribution présente un skew positif.

L'autre constat intéressant est la stabilité des déficits moyens en cas de ruine qui sont dans la fourchette -100 M€ à -140 M€ et croissent avec le risque (toujours conforme à l'intuition).

La durée moyenne précédant la ruine éventuelle est toujours supérieure à trente ans et ne dépend pas significativement du risque de la stratégie. Cette durée moyenne de trente-quatre ans (2058) correspond en fait à la quasi extinction du canton, puisqu'à cette date la provision mathématique actuelle vaudra moins de 5 % de son montant de départ actuel de 149 M€ (et dans cinquante ans elle représentera moins de 0,20% de celle-ci). Devenir insolvable à cette date, donc devoir faire appel à l'ancien employeur, va concerner une population de quelques réversataires (eux-mêmes âgés) et très peu de bénéficiaires directs : en 2023 la plus jeune future bénéficiaire avait 52 ans, en 2058 elle aura 87 ans (soit son espérance de vie actuelle de 87,2 ans issue de la table TGF05-00).

Ces remarques nous conduisent à retenir deux dates plus proches d'extinction : 2060 et 2077, ces variantes seront détaillées plus loin au § 6.5.7 et on fournira aussi les valeurs actualisées en euro 2024 pour relativiser les montants obtenus et déceler éventuellement une influence de la date d'observation sur le solde à cette date.

En choisissant 50 % comme fraction d'attribution de performance financière lissée pour l'indexation on se situe toujours avec une probabilité de ruine supérieure à 2,5 % quelle que soit la stratégie, c'est pourquoi on se cantonnera dans la suite du mémoire aux revalorisations sur l'inflation seule qui est celle du régime.

7.5 SENSIBILITES AUX FACTEURS DE RISQUE EN UTILISANT LES SIMULATIONS EN MONTE CARLO

Les couples (rendement, volatilité) des trois paramètres de risque peuvent être fixés arbitrairement pour observer la sensibilité des indicateurs suivis : le solde final moyen, la probabilité de ruine et le déficit moyen en cas de ruine.

Puisque le risque actions est considéré comme le plus élevé on va faire varier le couple rendement/volatilité à partir de ses valeurs historiques de 9,9 % et 20,6 % respectivement. On se fixe la contrainte de maintenir constant le ratio moyenne/écart-type à 0,476 (valeur observée) et comme borne basse le couple moyenne et volatilité représentatif du taux d'intérêt. Par simplicité on double ou on divise par deux le couple rendement/volatilité.

Le second facteur de risque du portefeuille financier est le taux d'intérêt (ou « taux coupon ») dont le couple taux/volatilité du taux est de 3,8 % et 3,1 % respectivement. On va également modifier ce couple en conservant fixe leur ratio (à 1,22) et une borne haute qui est le rendement des actions. Pour ce facteur de risque également on double et on divise par deux le couple taux/volatilité.

Le taux d'inflation est voisin d'un taux coupon et il affecte uniquement la chronique des rentes à verser, on appliquera la démarche décrite plus haut pour le taux d'intérêt à partir du couple taux d'inflation/volatilité de ce taux de 1,8% et 1,2 % respectivement.

Avant de présenter les résultats, il est nécessaire de préciser que le risque du portefeuille financier dépend à la fois du facteur de risque et du montant de cette poche de risque. Ainsi le risque de taux pourra être éventuellement dominant dans la stratégie Prudente alors que le risque action le sera dans la stratégie Dynamique. Pour éviter de multiplier les variantes on se limite à la stratégie Stable avec les revalorisations sur l'inflation (positive

uniquement) et on présentera quelques variantes dans les deux autres stratégies toujours avec les revalorisations sur l'inflation.

Le choix de conserver le ratio entre le rendement et la volatilité est restrictif mais réaliste. L'idéal est d'utiliser un actif risqué qui minimise ce ratio. La comparaison entre les performances du CAC 40 TR et du S&P 500 TR sur la même profondeur historique montre que le S&P 500 offre un meilleur mix rendement/risque. Pour éviter le risque de change il faut utiliser un ETF S&P 500 Hedged/Accumulation pour comparer des situations identiques. Dans ce cas son rendement moyen baisse car il est amputé du coût permanent de la couverture. Sinon on peut accepter de cumuler le risque de change et le risque du S&P 500 TR, on constate que sur moyenne période la performance est très proche de celles du S&P 500 TR libellé dans sa devise (i.e. le scalaire représentatif), la corrélation entre les deux risques est modérée, ce qui augmente la volatilité globale (mais pas en les additionnant). Chaque année les performances annuelles d'un ETF répliquant le S&P 500 TR avec le risque de change affiche des performances assez différentes de celle de l'indice mais on vérifie sur moyenne période (dix ans ou plus) que les deux performances globales sont voisines.

7.5.1 SENSIBILITE AU RISQUE ACTION

On part du couple rendement/volatilité du CAC 40 TR puis on le divise par deux. Le tableau suivant récapitule les indicateurs habituels du cas de base et des deux bornes extrêmes qui servent à apprécier la sensibilité au risque actions. On ajoute également le couple (5% ; 20%) qui permet d'isoler l'influence de la volatilité seule ou du rendement seul par comparaison avec les cas de base et le cas (10% ; 40 %). On revient à la revalorisation des rentes sur l'inflation seule qui est statutaire pour l'IRPS.

Comme précédemment tous les chiffres sont les moyennes de dix jeux d'un millier de trajectoires avec une date d'observation en 2097.

Stratégie et couple Rendement/Risque Action	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Stable (10% ; 20%)	1383	1135	1,72%	-101	33
Stable (5% ; 10%)	475	271	0,82%	-57	36
Stable (5% ; 20%)	271	362	16,38%	-143	31
Stable (10% ; 40%)	126	845	43,74%	-334	25
Stable (20% ; 40%)	3930	6560	9,02%	-256	27

Tableau 25 : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final en 2097 dans la stratégie Stable avec plusieurs couples de valeurs rendement/volatilité de la performance des actions ; revalorisations sur l'inflation

La hiérarchie des soldes finaux moyens est identique à celle des rendements corrigés de la volatilité, avec l'expression $(\mu - \sigma^2/2)$. Ces valeurs sont de 9,50 % pour le couple (10 % ; 20 %) ; 4,50 % pour le couple (5 % ; 10 %) ; 3,00 % pour le couple (5 % ; 20 %) ; 2,00 % pour le couple (10 % ; 40%) et 12,00 % pour le couple (20 % ; 40 %).

Lorsque le rendement est maintenu et que la volatilité est doublée, l'évolution est également fortement non linéaire et dépend du niveau absolu de la volatilité.

Un indicateur intéressant est le rapport entre l'écart-type et la moyenne (le coefficient de variation) ; ils valent dans l'ordre des lignes du tableau : 0,82 ; 0,57 ; 1,34 ; 6,71 et 1,67. Il n'est pas surprenant que ces valeurs soient cohérentes avec les probabilité moyenne de ruine. On obtient les couples suivants : (0,82 ; 1,72 %) ; (0,57 ; 0,82 %) ; (1,34 ; 16,38 %) ; (6,71 ; 43,74 %) ; (1,67 ; 9,02 %).

Avec l'inverse de ces ratios on cherche les probabilités correspondantes si le solde final moyen suivait une loi normale et on obtient les couples (probabilité loi normal hypothétique arrondie au % ; probabilité observée avec Monte Carlo) suivants : (11% ; 1,72 %) ; (4% ; 0,82 %) ; (23 % ; 16,38 %) ; (44 % ; 43,74 %) ; (27 % ; 9,02 %).

Les taux de ruine moyens obtenus par simulations sont nettement plus faibles que ceux déduites d'une loi normale, ce qui est conservatif, et confirme la nécessité de simuler le comportement du portefeuille qui résulte de la compensation entre une série de prélèvements semi-aléatoires (le « pieds de rente » est déterministe, sa revalorisation aléatoire et toujours positive) et de la valeur d'un portefeuille qui fructifie mais est continuellement consommé.

Le cas borne basse des paramètres (5% ; 10%) rapproche le comportement de la poche actions de celui d'une poche obligataire (avec une volatilité relativement élevée, ce qui est possible avec des obligations HY par exemple). Les indicateurs obtenus sont satisfaisants en termes de maîtrise du risque : les résultats obtenus sont meilleurs que ceux du cas de base en stratégie Stable. La probabilité de ruine se situe en-dessous de toutes celles faites avec les paramètres réels des actions.

A partir de ce couple borne basse, on conserve le rendement faible de 5%, mais on double la volatilité de 10% à 20% (comme le ratio volatilité/rendement), c'est aussi le couple obtenu en divisant le rendement par deux et en maintenant la volatilité du cas de base. Le couple (5% ; 20%) avec une probabilité de ruine inacceptable de 16,4 % illustre la forte influence de la volatilité, ou du ratio volatilité/rendement, sur les indicateurs de risque. La situation est encore pire avec le couple (10% ; 40%) qui mène une fois deux à la ruine. Ce couple extrême est assez similaire à celui de Stellantis qui est l'action la plus volatile du CAC 40. Cela confirme accessoirement le danger d'investir un PEE ou un PER en totalité dans les actions de son employeur sans se diversifier.

Enfin le couple (20% ; 40%) qui est le double du couple de base conduit à une probabilité moyenne de ruine de 9% trop élevée pour une entité de type IRPS. Ce couple n'est pas représentatif d'un indice boursier, éventuellement d'une action individuelle, mais à laquelle s'applique la remarque précédente.

Ces couples sont hypothétiques, ils servent à obtenir la sensibilité aux paramètres rendement/risque de la poche action dans un intervalle de variations suffisamment large pour déceler des comportements bien marqués et pas de faibles variations, c'est une approche en stress test plus qu'en sensibilité classique. Elle sera conservée avec les autres facteurs de risque.

Le doublement de la volatilité à rendement fixé est la situation la plus pénalisante : la probabilité de ruine atteint 15 %, un niveau inacceptable ; le montant moyen du solde varie peu alors que l'écart-type double (comme la volatilité).

Pour fixer les idées, l'indice S&P 500 présente un ratio volatilité/rendement de 1,25 (entre 1988 et 2023) alors que celui du CAC 40 est de 2,1 sur la même période (indices hors dividendes). Le rendement du S&P 500 est supérieur à celui du CAC 40 et sa volatilité est inférieure à celle du CAC, elle vaut à 0,7 fois celle du CAC 40. La hiérarchie des deux paramètres est toujours à l'avantage du S&P 500 : ce fait doit être souligné et rappeler dans le choix des supports : un indice très large est préférable à un indice plus étroit (on revient à la diversification et au portefeuille de marché de Markowitz).

En conclusion, on remarque que le couple le plus efficace en termes de réduction du risque est le (5% ; 10%) mais il est assez peu représentatif d'un indice actions avec une volatilité aussi faible. Le couple (10% ; 20%) qui est « réel » (c'est celui du CAC 40 TR). Les trois autres couples conduisent à des niveaux inacceptables de risque (probabilité moyenne de ruine de 9% à 43 %). Le niveau absolu de la volatilité et son ratio avec le rendement sont des facteurs influant sur le niveau de la probabilité de ruine ainsi que le rendement corrigé (toutes choses égales par ailleurs).

7.5.2 SENSIBILITE AU RISQUE DE TAUX D'INTERET

On suit une logique identique en partant du couple (taux coupon ; volatilité du taux) du taux TEC 7 soit (3,75% ; 3,13%) que l'on double et divise par deux, toujours dans le cas Stable avec revalorisation égale au taux d'inflation et une date d'observation en 2097. On conserve les autres paramètres et conventions du cas de base.

Stratégie et couple Rendement/Risque TEC	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Stable (3,8% ; 3,1%)	1383	1135	1,72%	-101	33
Stable (7,5% ; 6,3%)	12960	9853	0,01%	SO	SO
Stable (1,9% ; 1,6%)	350	392	12,08%	31	124
Stable (3,8% ; 6,3%)	1433	1420	3,20%	-153	31

Tableau 26 : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final en 2097 dans la stratégie Stable selon plusieurs couples de valeurs rendement/volatilité du taux TEC 7 ; simulations en Monte Carlo

Ces résultats conduisent à faire trois constats dont certains ne sont pas intuitifs :

- Conserver un taux coupon moyen de 3,75 % et faire passer sa volatilité de 3,15% à 6,30 % modifie assez peu le solde final et sa dispersion, la probabilité de ruine double passant de 1,72 % à 3,20% et le déficit en cas de ruine de 101 à 153 M€. On constate que c'est le niveau du taux coupon qui est dominant ici et que le doublement de sa volatilité a un impact plutôt linéaire sur la probabilité de ruine (et non exponentiel comme pour les actions). Ce couple théorique est moyennement probable cependant.
- Doubler le couple (rendement/risque) du taux coupon conduit à ne jamais devenir insolvable. Ce n'est pas surprenant car le taux de 7,5% génère des montants très élevés en capitalisation sur plusieurs décennies lorsque le portefeuille reste positif et s'apprécie dès lors que les rentes deviennent négligeables. Un couple où le rendement est supérieur à la volatilité (les deux en taux) est caractéristique d'obligations sans risque (ou supposées telles), mais leur rendement est faible. A contrario les obligations HY procurent des rendements plus élevés, mais leur risque est proportionnellement plus élevé aussi : il est de (4,5 % ; 6,5%) pour l'ETF Ishares € High Yield UCITS). Le couple (7,5% ; 6,3 %) est donc assez peu probable dans le monde réel, c'est un couple de test.
- Diviser par deux le couple (rendement/risque) conduit à la plus forte probabilité de ruine : 12,1 %, ce qui est inacceptable : le trop faible rendement de la poche obligataire ne parvient pas à assurer les revalorisations sur l'inflation et les performances aléatoires de la poche action. Cette situation de faible rendement des fonds d'Etat (et de faible volatilité) a été observée sur la dernière décennie caractérisée par la baisse continue des taux jusqu'à des valeurs négatives persistantes jusqu'à mi 2022. Ce fait souligne l'importance du coupon dans un portefeuille de retraite par capitalisation car c'est la fraction sans risque du portefeuille qui peut justifier à côté l'existence d'une poche plus rentable mais plus risquée. Ce couple de test n'est donc pas irréaliste : il montre que le rendement des obligations doit se situer au moins au niveau du taux d'inflation (dans le cas de l'IRPS ici, mais plus généralement aussi) pour qu'un régime par capitalisation soit viable. Cette configuration est quasiment toujours observée jusqu'à présent avec des périodes d'exception temporaires toutefois, cf § 4.2.5.

7.5.3 SENSIBILITE AU RISQUE DE TAUX D'INFLATION

On suit la même logique en partant du couple (taux d'inflation ; volatilité du taux d'inflation) historique utilisé soit (1,82% ; 1,15%) que l'on double et divise par deux, toujours dans le cas Stable avec des revalorisations indexées sur 80 % de taux d'attribution de la performance financière lissée à (et au moins égale au taux d'inflation). On conserve les autres paramètres et conventions du cas de base, les résultats figurent au tableau 27.

Stratégie et couple Rendement/Risque Inflation	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine Ans
Stable (1,8% ; 1,15%)	1383	1135	1,72%	-101	33
Stable (3,6% ; 2,3%)	636	940	23,82%	-284	30
Stable (0,9% ; 0,6%)	1650	1206	0,17%	-52	34
Stable (1,8% ; 2,3%)	1276	1106	3,32%	-150	32

Tableau 27 : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final en 2097 dans la stratégie Stable selon plusieurs couples de valeurs rendement/volatilité du taux d'inflation ; simulations en Monte Carlo

Lorsque le taux d'inflation moyen historique est doublé à 3,6 % et qu'il se situe au niveau du taux d'intérêt moyen historique (3,75%) la solvabilité du canton devient inacceptable avec un taux moyen de probabilité de ruine de près de 24 %. Ce constat souligne à nouveau l'importance de l'effet cliquet de la revalorisation des rentes. D'autre part lorsque le rendement moyen du portefeuille devient insuffisant (par rapport à l'inflation, donc en terme réel) pour compenser la consommation par les rentes revalorisées à un taux comparable, l'équilibre est rompu et la solvabilité compromise. La compétition entre la fructification et la revalorisation tourne à l'avantage de cette dernière et le canton devient insolvable près d'une fois sur quatre (alors qu'il était équilibré à l'origine).

L'influence de la division par deux du niveau et de la volatilité de l'inflation ne modifie pratiquement pas le solde final moyen et son écart-type comme lorsque les revalorisations se font sur l'inflation seule (comme dans le cas précédemment traité où elles se faisaient sur la performance lissée). Avec ces niveaux divisés par deux la probabilité moyenne de ruine devient négligeable à 0,2 %, nettement plus basse que le seuil rigoureux de 0,50%.

En doublant la seule volatilité de l'inflation et en conservant sa moyenne on ne modifie pratiquement pas la moyenne et l'écart-type du solde final (la première est déterminée principalement par le taux moyen d'inflation), mais on dégrade la probabilité moyenne de ruine qui double de 1,7 % à 3,3 % (un peu au-dessus du seuil acceptable).

Le risque majeur est que le taux d'inflation future soit très voisin du taux de coupon TEC 7, et de manière quasi permanente : ce point a été montré avec les analyses simplifiées du § 6.4.2 b. La poche actions permet d'améliorer partiellement cette situation, mais au prix d'une solvabilité un peu dégradée, sans surprise.

7.5.4 REMARQUES SUR LES SENSIBILITES AU DIFFERENTS FACTEURS DE RISQUE

On ne peut pas contrôler les paramètres des facteurs de risque dans le futur, mais on doit chercher les hiérarchies les plus probables entre les performances (moyenne) et les volatilités (écart-type) des trois classes de risque. C'est cette hiérarchie qui détermine la solvabilité du canton. Il faut rechercher les supports de placement et les combinaisons les plus adaptés, sachant que l'inflation est subie via les revalorisations. On se limite dans un premier temps à la seule stratégie Stable.

On s'appuie sur les hiérarchies observées et les corrélations éventuelles entre les paramètres de rendement et de volatilité des différents facteurs de risque. Sur longue période le taux coupon d'une obligation d'Etat à 10 ans (ou à 7 ans) est en moyenne toujours plus élevé que le taux d'inflation spot. Cette relation peut ne pas être respectée temporairement, mais elle est vérifiée sur longue période en moyenne aussi bien en France qu'aux USA. On explique ce constat par l'existence d'un taux réel positif en moyenne, exigé par les investisseurs. On peut supposer que les deux éléments du couple (taux TEC7 ; volatilité du TEC 7) sont supérieurs deux à deux à ceux du couple (taux d'inflation YoY ; volatilité de ce taux YoY).

La situation est identique pour les actions, les deux termes du couple (rendement actions ; volatilité du rendement actions) sont sensiblement supérieurs deux à deux à ceux du couple (taux TEC7 ; volatilité du taux TEC 7).

En revanche le ratio entre l'écart-type (la volatilité) et la moyenne (le rendement) des actions est proche de deux pour le CAC 40 TR et même de trois pour le CAC 40 hors dividendes (il est nettement plus faible pour le S&P

500). Ce ratio est voisin d'un pour le TEC 7 et l'inflation. Le niveau absolu de la volatilité influe à la fois sur le rendement corrigé et sur la volatilité la performance.

La hiérarchie la plus courante des rendements est la suivante : les indices actions larges, les taux d'intérêt Etat à moyen terme, l'inflation YoY ; la hiérarchie des volatilités est identique. Analysons les cas où la probabilité moyenne de ruine dépasse le seuil acceptable de 2,50 % :

- Pour les actions ce sont trois couples : (5 % ; 20 %) donnant une probabilité de ruine moyenne de 16 % parce que le rendement est insuffisant, (10 % ; 40 %) donnant une probabilité de 44 % parce que le rendement corrigé de la volatilité est très insuffisant (ou de manière connexe que la volatilité est trop élevée) et enfin (20 % ; 40 %) donnant une probabilité de 9 %, pour les raisons précédentes atténuées (le ratio volatilité / rendement redevenant acceptable). En résumé c'est soit un rendement insuffisant des actions, soit une volatilité relativement trop élevée (ratio volatilité/rendement de 4) qui sont préjudiciables à la solvabilité de l'IRPS.
- Pour le taux coupon TEC 7 c'est principalement le couple moitié du couple historique (1,9 % ; 1,6 %) donnant une probabilité de ruine moyenne de 12 % avec un rendement insuffisant des obligations (juste au niveau de l'inflation), et le couple avec uniquement la volatilité doublée (3,8 % ; 6,3 %) donnant une probabilité de ruine moyenne de 3,2 % (un peu au-dessus du seuil) avec un rendement acceptable mais avec une volatilité relativement trop élevée (ici ratio volatilité/rendement de deux) qui sont préjudiciables à la solvabilité de l'IRPS.
- Pour le taux d'inflation c'est principalement le couple double des données historiques (3,6 % ; 2,3 %) donnant une probabilité de ruine moyenne de 24 %. C'est la revalorisation relativement trop élevée par rapport au rendement moyen du portefeuille qui est préjudiciable à la solvabilité de l'IRPS. Le couple avec uniquement la volatilité doublée (1,8 % ; 2,3 %) donnant une probabilité de ruine moyenne de 3,3 % (un peu au-dessus du seuil) avec une volatilité relativement trop élevée (ici ratio volatilité/rendement de 1,3) qui sont préjudiciables à la solvabilité de l'IRPS. La volatilité de l'inflation ne doit pas être négligée var elle joue principalement à la hausse puisque les revalorisations ne subissent pas les taux d'inflation négatifs et que l'effet cliquet s'applique toujours.

Avec ces constats, on va appliquer à la stratégie Dynamique les couples qui conduisent à des probabilités de ruine au-dessus du seuil acceptable et voir s'il y a amélioration, ou non. Pour les actions on se limite au cas non-extrême avec les couples (20% ; 40 %) et (5 % ; 20 %).

Le tableau 28 compare les résultats de la stratégie Dynamique avec ceux de la stratégie Stable.

Stratégies Stable et Dynamique et couple Rendement/Risque Action	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Stable (5% ; 20%)	271	362	16,38%	-143	31
Stable (20% ; 40%)	3930	6560	9,02%	-256	27
Dynamique (5% ; 20%)	230	442	21,03%	-151	31
Dynamique (20% ; 40%)	10929	35464	10,94%	-279	26

Tableau 28 : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final en 2097 dans les stratégies Stable et Dynamique avec plusieurs couples de valeurs rendement/volatilité des actions ; simulations en Monte Carlo

La stratégie Dynamique est celle qui est la plus exposée en moyenne aux actions et la solvabilité se dégrade lorsque celles-ci présentent un couple (rendement/risque) médiocre. La probabilité moyenne de ruine se dégrade encore augmentant de 20% en valeur relative. Le changement de stratégie de gestion ne change pas le comportement global de la solvabilité.

Pour les mêmes couples (rendement/risque) la moyenne et l'écart-type de la moyenne des soldes finaux moyen de la stratégie Dynamique sont 2,5 à 5 fois plus élevés alors que le déficit moyen ne varie pratiquement pas. Ce n'est

pas surprenant puisque les trajectoires moyennes du solde se situent nettement au-dessus et entraînent l'enveloppe vers les valeurs supérieures alors même que celle-ci s'élargit.

7.5.5 SENSIBILITE A L'HORIZON D'EXTINCTION (2097 ET 2077) DANS LES SIMULATIONS PAR MONTE CARLO AVEC REVALORISATION SUR L'INFLATION :

Les soldes finaux moyens facialement élevés obtenus dans la plupart des simulations avec les revalorisations indexées sur l'inflation seule conduit à s'interroger sur la date d'extinction réaliste à retenir. Choisir 2097 comme borne finale permet d'atteindre la date de versement ultime des rentes. En 2097 le montant annuel total des rentes sera de l'ordre de la centaine d'euros en valeur 2024 non revalorisée (soit un millier d'euro après revalorisations avec l'inflation sur plus de soixante-dix ans : le facteur de capitalisation au taux de 2,50 % sur 70 ans est de 5,6). Les soldes finaux sont plus compréhensibles lorsqu'ils sont actualisés à la date actuelle avec un coefficient de 0,10 (le coefficient correspondant à une actualisation au taux de 3,25%). La date de 2097 est à la fois très éloignée (« deux générations ») et assez inadaptée : le plus jeune futur bénéficiaire du régime serait centenaire en 2071 et s'il est encore en vie en 2097 à 126 ans il sortirait des tables de mortalité actuelles.

On doit choisir une date d'observation (qui n'est plus la date d'extinction ultime) qui soit un compromis acceptable

On retient d'abord 2077 comme date d'extinction réaliste, vingt ans avant la date d'extinction. A cette date on mesure le solde moyen final, évitant ainsi de continuer à capitaliser pendant vingt ans d'éventuels excédents conduisant à des chiffres irréalistes en cas d'absence de ruine et des déficits inutilement aggravés en cas de ruine.

Les résultats des simulations de Monte Carlo analysées en 2077 figurent au tableau 29 pour la stratégie Stable avec les revalorisations toujours indexées sur l'inflation et les paramètres de risque et les conventions de gestion inchangées ; ce sont toujours les moyennes sur dix jeux d'un millier de trajectoires.

Stable revalorisation sur l'inflation en 2097 et 2077	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Stable 2097	1383	1135	1,72%	-101	33
Stable 2077	568	421	1,71%	-47	33
Stable 2060	271	181	1,61%	-23	30

Tableau 29 : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final sur plusieurs dates d'observation : 2097, 2077 et 2060 dans la stratégie Stable inflation seule ; simulations en Monte Carlo

Les probabilités de ruine sont strictement identiques en 2097 et 2077, à chaque tirage d'un millier de trajectoires on recense le même nombre (faible) de ruines. Entre 2060 et 2077 certaines occurrences de ruine apparaissent, modifiant la durée de vie moyenne avant ruine.

Les ratios écart-type sur moyenne du solde final sont égaux à 0,75 (2097) et 0,68 (2077), en ligne avec l'élargissement de la dispersion avec le passage du temps.

Le rapport entre les moyennes du solde final de 2097 et de 2077 vaut 2,71, ce qui correspond à un taux de capitalisation de 5,11% sur les vingt ans d'écart. Le taux moyen des rendements pondéré des deux poches (30% actions et 70% obligations) ressort à 5,60% avec 9,94 % et 3,75 % ; c'est bien la capitalisation des soldes en 2077 jusqu'en 2097 qui explique en quasi-totalité ces chiffres.

En utilisant toujours le taux de 3,25% le coefficient d'actualisation entre 2024 et 2077 vaut 5,45. Les soldes moyens respectifs divisés par 10 et par 5,45 donnent 231 M€ et 156 M€. Cette différence s'explique parce le portefeuille fructifie à 5,6 % et qu'on actualise à 3,25% : on retrouve la capitalisation ultime qui ne profite pas aux rentiers.

Le montant total des rentes à verser après 2077 (montant de la provision restante non revalorisée et non actualisée) s'élève à moins de 0,1 M€, un montant négligeable devant cette provision de près de 150 M€.

On peut retenir comme date d'extinction 2060 : le plus jeune bénéficiaire (féminin) aurait 89 ans (soit son espérance de vie actuelle) et le montant total annuel des rentes restant à verser (sans revalorisation) s'élève à 3,3 M€. Une autre façon de justifier cette date est de rappeler que régime a été fermée en 1993, donc qu'un salarié entré dans la banque à 23 ans aura 90 ans en 2060. En choisissant 2060 comme date d'observation (ou de « quasi-extinction ») on obtient des indicateurs encore élevés en euros courants, mais plus réalistes, et reflétant encore mieux l'évolution du canton quand ils sont transformés en euros de 2024.

Rapprocher la date d'observation en 2060 fait baisser un peu la probabilité moyenne de ruine (quelques occurrences de ruine apparaissent entre 2060 et 2077 (il n'y avait aucune nouvelle occurrence de ruine entre 2077 et 2097)).

Le rapport entre les moyennes du solde final de 2077 et de 2060 vaut 2,32, ce qui correspond à un taux de capitalisation de 5,1% sur les dix-sept ans d'écart (c'est le taux observé entre 2077 et 2097). Le taux moyen des rendements pondéré des deux poches (30% actions et 70% obligations) ressort à 5,60% avec 9,94 % et 3,75 % ; c'est bien la capitalisation des soldes en 2077 jusqu'en 2097 qui explique la quasi-totalité de ces chiffres encore.

Le passage à 2060 avec la stratégie Dynamique présente un comportement un peu différent puisque l'amélioration de la probabilité de ruine est sensible ; le tableau 30 rassemble les probabilités de ruine sur les mêmes dix jeux d'un millier de trajectoires et rappelle les valeurs aux mêmes dates pour la stratégie Stable. On ne reproduit pas ici les probabilités de la stratégie Prudent qui sont encore plus stables que ceux de la stratégie Stable.

Stable revalorisation sur l'inflation en 2097 et 2077	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Stable 2097	1383	1135	1,72%	-101	33
Stable 2060	271	181	1,61%	-23	30
Dynamique 2097	2392	2875	1,90%	-135	31
Dynamique 2060	322	245	1,49%	-28	29

Tableau 30 : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final sur plusieurs dates d'observation : 2097 et 2060 dans la stratégie Dynamique et Stable, revalorisation sur l'inflation ; simulations en Monte Carlo

On remarque que ce nouveau jeu de plus de dix mille trajectoires donne une probabilité de ruine moyenne de 1,90 % (avec un écart-type de 0,31 %) en 2097 alors qu'au tableau 17 du §7.2 on avait 2,11% (avec un écart-type de 0,43 %). Les moyennes restent cohérentes avec les écart-types mais fluctuent. Lorsqu'on compare les soldes à plusieurs dates, il faut utiliser les mêmes jeux de trajectoires.

Avec la stratégie Dynamique il y a des ruines qui arrivent entre 2060 et 2097, alors que c'était extrêmement rare avec les stratégies moins risquées, ce qui est compréhensible : certaines trajectoires passent sous zéro à cause de leur exposition comprise entre 48 % et 60 % aux actions.

Facialement en 2060 la stratégie Dynamique est la moins risquée et ceci disparaît à mesure que le temps passe. En 2077 la probabilité de ruine se situe entre 1,5 e% et 1,9 % : 1,71 % est la moyenne et c'est précisément la probabilité de ruine de la stratégie Stable en 2077 (1,71 % cf tableau 19).

Ces constats confirment que les différences entre les trois stratégies sont assez ténues et que leur hiérarchie dépend de la date d'observation, qu'elle est également sensible aux incertitudes même sur d'un grand nombre de trajectoires (ce qui n'est pas surprenant puisque l'on recherche des occurrences rares de l'ordre du pourcent). On peut aussi remarquer que les trois (ou quatre) stratégies ne sont pas extrêmement différentes : d'abord parce qu'elles partent toutes de 30 % et que ce pourcentage varie d'un demi pourcent par an (sauf pour la SuperPrudent). Les simulations avec un pourcentage constant allant de 0% à 70 % sont nettement plus discriminantes, elles figurent au paragraphe 7.5.6 qui suit.

7.5.6 SENSIBILITE AU POURCENTAGE DE LA POCHE ACTIONS PAR SIMULATIONS PAR MONTE CARLO AVEC REVALORISATION SUR L'INFLATION :

Les trois stratégies de gestion partent toutes d'un ratio de 30 % pour la poche actions reflétant l'allocation d'actifs actuelles et elle est considérée comme une donnée du problème. On peut relaxer cette contrainte et faire varier ce pourcentage entre 10 % et 70 % par pas de 20 % et il est maintenu constant ensuite. F. Planchet et P. Thérond avaient constaté pour le régime de rentes qu'ils analysaient que la probabilité de ruine augmentait de manière monotone avec le pourcentage d'actions (elle était nulle jusqu'à 10%) et valait 75% pour 100% (ils remarquaient aussi qu'avec les revalorisations les probabilités étaient inférieures à celles sans revalorisation pour les mêmes pourcentages initiaux constants d'actions).

On rassemble dans le tableau 31 les indicateurs de risque en choisissant l'année 2077 comme date d'observation. On se place dans le cas de base avec des revalorisations calculées sur le taux d'inflation. Les paramètres sont à nouveau les valeurs historiques de base avec les couples moyenne/écart-type suivants (1,82 % ; 1,15 %) pour le taux d'inflation, (3,75% ; 3,13 %) pour le taux TEC 7 et (9,94 % ; 20,63 %) pour les actions. Le déflateur pour passer des euros de 2077 aux euros de 2024 est de 0,18 (au taux 3,25 %).

Les indicateurs sont toujours les moyennes de dix jeux d'un millier de simulations et la date d'observation 2077.

Pourcentage poche actions fixe 2077 Indexation inflation	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Stable 0 %	195	92	0,26%	-14	39
Markowitz 7 %	260	115	0,11%	-26	35
Stable 10 %	289	133	0,14%	-22	36
Stable 20 %	411	237	0,55%	-40	33
Stable 30 % Base	568	421	1,71%	-47	33
Stable 50 %	1006	1149	6,24%	-95	28
Stable 70 %	1811	3064	11,16%	-137	25

Tableau 31 : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final sur la date d'observation 2077 dans la stratégie Stable inflation seule pour plusieurs pourcentages fixes de la poche actions ; simulations en Monte Carlo

La dernière ligne sans poche actions confirme que la solvabilité du canton est satisfaisante puisqu'en 2077 le solde final moyen est facialement supérieur au portefeuille actuel et la probabilité de ruine est pratiquement nulle. Ce n'est pas un adossement statique comme au §. 6.1. mais une gestion au fil du temps en obligations à taux fixe avec les taux TEC 7 aléatoires futurs.

On constate que la probabilité de ruine sans poche action de 0,26 % est un peu supérieure à celle avec une poche action constante de 10% qui a une probabilité de ruine valant 0,17 %. Dans la représentation rendement/volatilité de Markowitz et un coefficient de corrélation de 0,10 l'allocation optimale (tangence entre la droite donnant le rendement sous la forme $k \cdot \text{volatilité}$ et la courbe donnant ces deux variables en fonction de la fraction risquée et avec k le plus élevé correspond à 7% d'actions).

Le pourcentage de 10% en actions est égal à celui des FRPS français (avec 70 % d'obligations longues et 20 % d'immobilier et de diversification). C'est un portefeuille défensif qui est adapté à Solvabilité 2 (et satisfait facilement les stress réglementaires des FRPS). Choisir ce pourcentage faible qui maximise la solvabilité (on minimise la probabilité de ruine) suit le principe de la personne prudente, augmenter ce pourcentage à 30 % fait passer au-dessus du seuil strict de 0,50% mais sans dépasser le seuil de 2,50%.

Si l'on exprime la distance entre les valeurs finales moyennes et zéro en nombre d'écart-type empiriques, on obtient 2,12 pour 0% ; 2,17 pour 10 % et 1,35 pour 30%. Si le solde final moyen suivait une loi normale on aurait les probabilités suivantes (les probabilités issues des simulations sont entre parenthèses) : 1,7% (0,26%) ; 1,5 % (0,14%) et 8,5% (1,71%) respectivement. Pour les autres pourcentages d'actions, les probabilités observées sont

toujours nettement inférieures à celles déduites d'une loi normale, ce qui n'est pas surprenant puisque le solde final résulte de plusieurs chroniques et variations qui ne sont pas toutes des lois normales.

Enfin une fraction en actions supérieure à 70 % n'est pas raisonnable pour au moins deux raisons : la poche obligataire (quasiment « sans risque ») est trop faible pour être utilisée en cas de forte chute des actions : l'encaisse de précaution est trop réduite, et d'autre part le risque du portefeuille est trop élevé.

Quelques dizaines de milliers de simulations avec une poche actions de 45 % donne une probabilité moyenne de ruine de 5%, et avec 35 % on se situe au seuil acceptable de 2,50 %.

7.5.7 SENSIBILITE AUX MONTANT DU PORTEFEUILLE INITIAL DANS LES SIMULATIONS PAR MONTE CARLO AVEC REVALORISATION SUR L'INFLATION SEULE

Toujours avec l'indexation sur l'inflation et on fait va observer l'influence de la valeur initiale du portefeuille pour obtenir des cas mordants avec des probabilités moyennes de ruine notables. Ces cas correspondent à des montants du portefeuille initial allant de 100 à 150 M€. On va rechercher si une allocation d'actifs plus risquée permet de redresser, ou non, la faible solvabilité initiale.

Portefeuille initial M€ Indexation inflation 2097	Solde final moyen M€	Ecart-type en M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Stable 100 M€	-178	412	73,85%	-361	24
Stable 125 M€	440	683	24,76%	-199	29
Stable 150 M€	1070	982	4,58%	-142	31
Stable 161,6 M€ Base	1383	1135	1,72%	-101	33

Tableau 31 bis : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final en 2097 dans la stratégie Stable inflation seule selon plusieurs valeurs du portefeuille financier en 2024 ; simulations en Monte Carlo

Un portefeuille initial de 100 Meur, soit 2/3 de la provision IRS de 148 Meur (hors frais), est véritablement insuffisant pour permettre de servir les rentes : la durée moyenne avant ruine de 24 ans correspond à un montant résiduel des rentes futures à servir (somme non actualisée des rentes non revalorisées depuis 2024 exprimée en euros courants) de 28 M€ en 2048. La probabilité de ruine de 74 % et le déficit final moyen de 178 Meur ainsi que le déficit moyen en cas de ruine ressort à plus de 360 Meur reflètent cette situation inacceptable qui provient du sous-financement majeur à l'origine qui ne peut pas être redressé par les fruits du portefeuille trop insuffisants devant les prélèvements des rentes.

La variante à 125 Meur, soit un sous-provisionnement brut de 16 % (et de 23 % en intégrant les frais qui représentent 10 % de la provision) conduit à une probabilité moyenne de ruine de 25 % : un niveau encore inadmissible.

Lorsque le portefeuille initial vaut 150 Meur, la probabilité moyenne de ruine s'établit à 4,6% et la durée moyenne avant ruine de 31 ans correspond à un montant résiduel des rentes futures à servir (somme non actualisée des rentes non revalorisées depuis 2024 exprimée en euros courants) de 14 M€ en 2055.

Pour ce portefeuille initial de 150 M€ on va chercher si la stratégie Dynamique peut être envisagée pour redresser ce sous provisionnement initial au prix d'un risque accru.

Montants du portefeuille initial Meur Indexation inflation seule obs. en 2097	Solde final moyen Meur	Ecart-type Meur	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine Meur	Durée moyenne avant ruine ans
Dynamique 2097 150 Meur	1878	2398	5,08%	-157	30
Stable 2097 150 Meur	1070	982	4,58%	-142	31
SuperPrudent 150 Meur	475	347	4,12%	-110	33
Dynamique 2097 161,6 Meur	2300	2758	2,11%	-118	32

Tableau 31 Ter : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final en 2097 dans les stratégies Dynamique et Stable inflation avec un portefeuille financier de 150 M€ en 2024 ; simulations en Monte Carlo

On remarque encore ici que la probabilité de ruine est assez peu sensible au changement de stratégie : passe de 4,6 % à 5,1 % alors que le solde final moyen double quasiment (et sa dispersion un peu plus encore). On constate que le déficit moyen en cas de ruine est peu affecté : les trajectoires sont à la fois plus positives et plus dispersées. La prise de risque de la stratégie Dynamique par rapport à la stratégie Stable se révèle envisageable pour un PER géré par un particulier qui « court le risque » mais moins conseillée dans le cas d'un IRPS qui doit rendre des comptes à ses participants et suivre le principe de la « personne prudent ». On remarque aussi qu'un sous provisionnement de moins de 10 % ne peut pas être « rattrapé » par une gestion normale ou plus agressive.

On conclut cette étude de sensibilité au montant du portefeuille initial en adoptant la stratégie SuperPrudent à partir de ce portefeuille de 150 M€. La probabilité moyenne de ruine s'améliore un peu à 4,1%, la durée moyenne avant ruine aussi et les montants en 2097 sont à la fois plus faibles et moins dispersés.

NB : Tous les montants exprimés en euros de 2097 doivent être divisés par dix pour obtenir leurs équivalents euros de 2024.

7.6 REMARQUES ET CONCLUSIONS SUR LES SIMULATIONS PAR MONTE CARLO

Les simulations par Monte Carlo permettent d'explorer un grand nombre de variantes et d'hypothèses, ce qui était impossible avec les simulations historiques qui ne sont ni facilement paramétrables (par définition), ni suffisamment robustes (le faible nombre de trajectoires indépendantes possible est bien trop limité).

En retenant la date ultime d'extinction en 2097, ce qui est rigoureux (et logique avant d'analyser les résultats), nous avons obtenu des soldes finaux qui semblaient aberrants à première lecture. La vérification de l'implémentation des Monte Carlo et les contrôles de cohérence avec des paramètres de performance financière et d'inflation fixes sur toute la durée ont confirmé que c'est à la fois la date d'extinction, mais surtout les grandeurs relatives de ces paramètres (des performances financières nettement plus élevées que l'inflation) et la bonne capitalisation du canton à l'origine qui expliquaient ces soldes extraordinairement positifs.

L'autre cause de cet étonnement était que ces montants étaient exprimés en euros courants de 2097, pour retrouver des soldes finaux plus lisibles il faut les transformer en euros constants de 2024. On les décapitalise au taux UFR de 3,25% (l'Ultimate Forward Rate, même si l'UFR est un taux forward à 1 an départ dans N années, N étant grand) soit un coefficient d'actualisation de 0,10 exactement. Même après actualisation, les montants restent élevés : la plupart sont supérieurs au portefeuille initial de 161,6 M€. Ce paradoxe confirme qu'avec les paramètres historiques utilisés pour simuler les trois classes de risque (une inflation sensiblement plus faible que les taux TEC 7 et le rendement du CAC 40 TR) les rentes n'arrivent pas à consommer le portefeuille initial qui fructifie avec le temps : la compétition entre les prélèvements et les fruits tourne à l'avantage de ces derniers.

Ces résultats dépendent des paramètres de simulation retenus (ici historique 1988/2023). Avec d'autres couples de paramètres on obtient d'une part des soldes finaux moyens sensiblement plus élevés et surtout des probabilités de ruine excédant le seuil acceptable de 2,50 % et allant jusqu'à plusieurs dizaines de pourcents

On a exploré les couples rendement/risque (ou moyenne/volatilité) des trois paramètres sur des plages de valeurs aux bornes des valeurs réalistes. Ces analyses en sensibilité permettent de nuancer les conclusions obtenues avec les valeurs historiques : un changement de paradigme peut modifier des constats qui sont devenus des certitudes.

Mais il ne faut pas non plus tomber dans l'excès inverse et choisir des paramètres trop adverses ou irréalistes pour obtenir des ruines de manière quasi certaine : ainsi avec une inflation supérieure systématiquement au taux

d'intérêt la ruine devient hautement probable. A fortiori si l'inflation moyenne est supérieure au rendement boursier alors la ruine est certaine avec les revalorisations indexées sur l'inflation..., on réalise que cette hypothèse extrême est absurde.

Viser l'équilibre (c'est-à-dire un portefeuille réduit à zéro) à l'horizon d'extinction revient à accepter une probabilité moyenne de ruine voisine de 50%, ce qui n'est pas une cible facile à faire accepter pour un régime de retraite. Symétriquement se fixer un seuil bas mais acceptable équivaut à accepter de constituer en excédent notable à l'extinction (qui sera dévolu à la collectivité).

Le lien entre le rendement des actions et l'inflation est un des arguments avancés par les partisans de celles-ci : selon eux elles suivent l'inflation nettement mieux que les obligations car elles représentent la valeur des entreprises en monnaie courante et non des dettes en monnaie constante. Ce postulat est vérifié sur longue période, lorsque les entreprises cotées survivent à une crise inflationniste, la variabilité de leur cours boursier (contrairement à la fixité des nominaux des obligations) leur assure une indexation implicite à l'inflation. Dit autrement, leur cours reflète leurs bénéfices futurs exprimés en monnaie courante et non constante. La valeur des entreprises reflète en premier lieu leur capacités bénéficiaires futures. Enfin l'utilisation d'un indice boursier large avec son biais de sélection positif renforce de caractère défensif.

On a constaté aux § 7.5.1 à 7.5.4 que la probabilité moyenne de ruine dépasse le seuil raisonnable de 2,50 % lorsque les couples (rendement/risque) de la classe d'actif ou de l'inflation dépasse sa zone plausible d'évolution et que l'on sort d'un régime normal : d'autant plus que ce régime dure pendant la totalité de la vie restante de l'IRPS doit plus de cinquante ans. Ces stress sont informatifs sur les sensibilités du canton à ces facteurs de risque.

Les quatre stratégies de gestion ne modifient pas sensiblement les indicateurs de risque, seulement à la marge. Comparées au cas de base Stable à 30 % d'actions, les deux autres stratégies ne sont pas fortement différentes car la variation de 0,5 % par an (sauf avec la stratégie SuperPrudent à 1%) est assez lente. Il faut soixante ans pour ne plus posséder d'actions et la même durée pour atteindre 60%. La situation devient contrastée entre les deux stratégies extrêmes : 15 % vs 45 % mais seulement au-delà d'une trentaine d'années.

C'est pourquoi on a exploré une plage d'exposition en actions constante sur la durée allant de 0% à 90 %. Le comportement est alors plus marqué et plus facile à caractériser (dans les expositions variant au cours du temps le pourcentage moyen d'exposition sur la durée non-pondéré par les montants est réducteur mais facile à obtenir alors que celui pondéré par les montants est moins aisé à calculer et à expliquer).

Avec ces simulations à « pourcentage fixé » on constate que 30 % se situe au niveau du seuil acceptable de ruine de 2,50 % et que le pourcentage de 15 % au niveau du seuil strict de ruine de 0,50%. On retrouve par les simulations sur le canton les deux niveaux publiés par les entités gérants des engagement long. Le niveau de 15 % est la moyenne de l'exposition actions des FRPS français et celui de 30 % est celui du canton actuellement et d'entités en phase de croissance comme le FRAFP ou à but spécifique comme le FRR.

Enfin il est nécessaire de conserver une poche obligataire suffisamment importante pour qu'elle joue un rôle de capteur de richesse (après un boom boursier) et de fournisseur de cash (après un krach pour renforcer la poche actions et miser sur le rebond...) : un compte courant rémunéré.

Dans les pays anglo-saxons une exposition de 70 % en actions est la borne supérieure : c'est le pourcentage maximal observé sur des plans de retraite US. Le document britannique « Pension Decumulation Pathways, A proposed approach », Institute and Faculty of Actuaries, May 2022 va même plus loin et dans la stratégie « bold » retient le pourcentage de 80 % pour la poche actions. Ce chiffre doit remis en perspective, car ce document suppose que la rente provenant de la capitalisation représente 40% des retraites totales perçues (les 60% restant qui sont celles du régime de base sont supposées être sans risque et indexées sur l'inflation ou mieux). On retrouve la notion de « frontière du problème » déjà mentionnée : il faut à la fois circonscrire le problème à traiter et sa frontière propre, mais aussi indiquer sa frontière externe, si elle existe pour être exhaustif et objectif. Ce document suggère également de répartir la poche obligataire à égalité entre obligations à taux fixe et obligations indexées sur l'inflation : on pourra s'inspirer de cette suggestion pour définir la composition de la poche obligataire du canton.

Le pourcentage d'actions dans le portefeuille est de 70 % dans le fonds souverain norvégien qui a un horizon bien plus éloigné que l'IRPS. Le fonds de pension étatique japonais est investi à 50 % en actions (25% en actions japonaises et 25 % en actions internationales. Dans les deux cas ces fonds ne sont pas en extinction, ils servent à faire face aux besoins de populations vieillissantes mais qui se renouvellent en partie.

8. SIMULATIONS AVEC LE MODELE DE HARDY

8.1 PRESENTATION DE L'IMPLEMENTATION DU RISQUE ACTION AVEC LE MODELE DE HARDY

Le modèle de Hardy à deux états a été décrit au § 4.2.1.2 B avec ses deux utilisations : extraction des paramètres historiques de l'indice et génération des rendements futurs probables à partir de ceux-ci. A partir des rendements historiques de l'indice on déduit les six paramètres caractéristiques des deux états que l'on utilise pour simuler son comportement futur. Dans son article Hardy présente plusieurs utilisations du modèle : obtention de la fonction de probabilité de la durée de séjour en régime 1 (notée R, pour un nombre total de périodes de n), qui se calcule par récursion rétrograde, estimation de la valeur de l'indice à une date future, calcul du prix d'une option.

L'obtention de la fonction de distribution de l'indice à un instant T_n (cf figure 19, attention il faut ajouter 1 pour obtenir la fonction de distribution de l'indice) utilise R pour exprimer le rendement de l'indice à l'instant T_n comme une loi log-normale dont le drift μ est la combinaison linéaire des deux rendements pondérés par les durées respectives de séjours dans les deux états et la volatilité comme la racine carrée des variances pondérées par ces même poids. La loi de probabilité de la durée R est à nouveau utilisée pour obtenir la loi de distribution de la valeur de l'indice à cette date.

Nous avons implémenté ce modèle dans ses deux utilisations : extraction des paramètres (cf §4.2.1.2) et génération des valeurs futures : leur logique est identique car c'est le problème dual.

La feuille Excel de prévision a été testée avec ses paramètres du S&P 500 TR (de 1956 à 1990) pour fournir la loi de distribution de la valeur de l'indice (normé à un) à l'issue de 10 ans. Le graphique suivant est extrait de son article : il fournit le gain (Accumulated Proceeds) de ce placement ; le multiplicateur s'obtient en ajoutant un aux chiffres de l'axe horizontal. Le maximum de probabilité se situe à 2,75 soit un multiplicateur de 3,75.

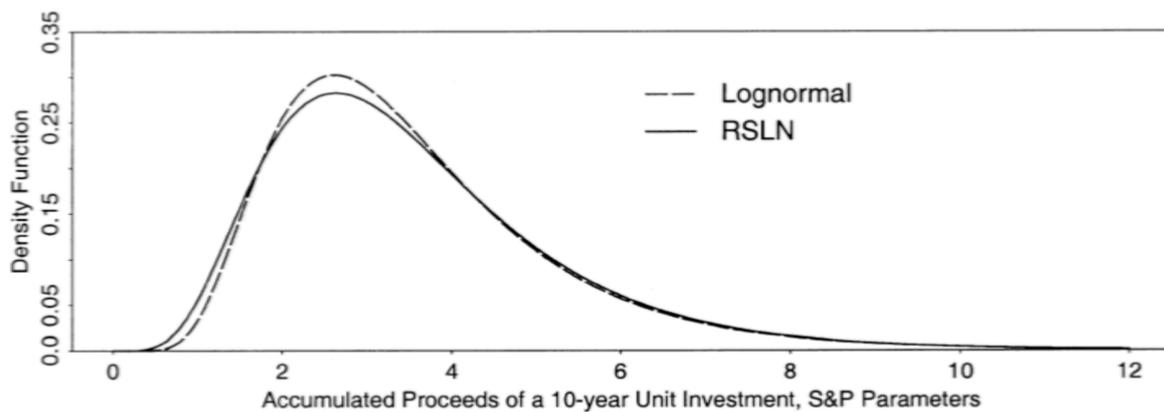


Figure 19 : Distribution du produit d'un investissement unitaire dans le S&P 500 TR avec le modèle de Hardy à deux états et la représentation par la loi lognormale (à partir des données historiques entre 1956 et 1999)

(Source M.R Hardy « A Regime Switching Model of Long Term Stock Return » - North American Actuarial Journal April 2001)

L'implémentation du modèle de Hardy sous Excel est un arbre à deux états recombinaux qui est de dimension N. Avec les données de l'article sur le S&P 500 TR (sur 36 ans d'historique) on a recalculé par Monte Carlo dans Excel la valeur d'un placement à 10 ans sur l'indice d'une unité monétaire. Le Monte Carlo (sur 1259 tirages contenant chacun treize colonnes sur près de 130 lignes soit 2,13 millions de cellules) donne la valeur moyenne 3,35 ; le maximum de la densité se situe dans la bande : (3,5 / 3,7), l'histogramme de la distribution en figure 18.

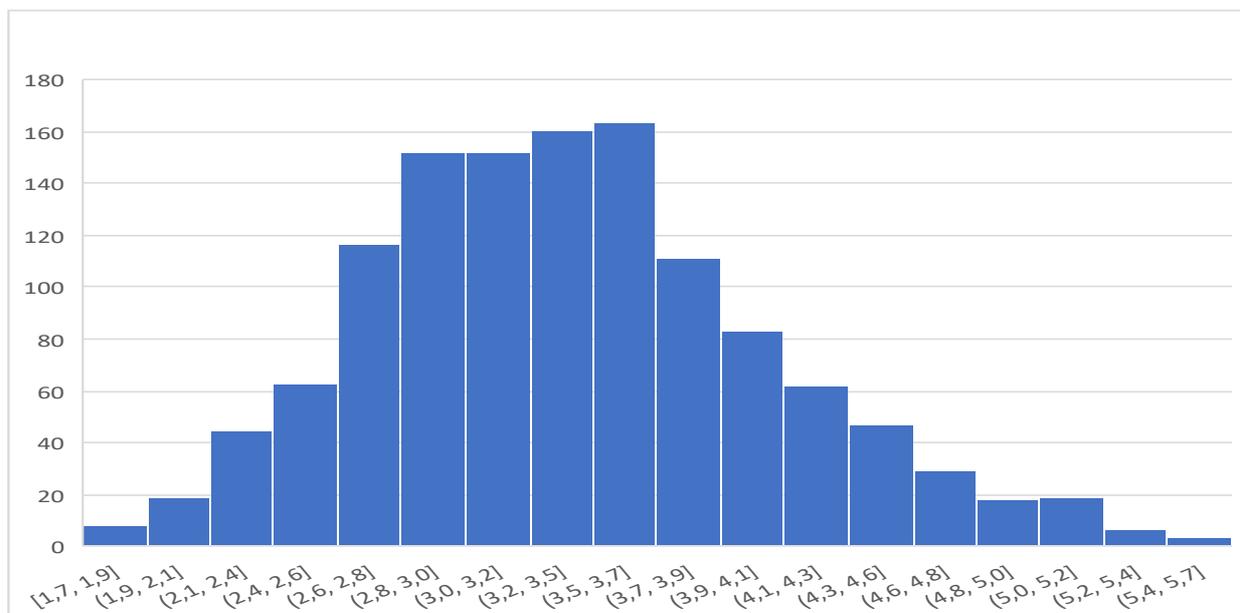


Figure 20 : Distribution de la valeur de l'indice S&P 500 TR (normalisé à 1 à T_0) à l'année 10 avec le modèle de Hardy à deux états (avec les paramètres de l'article de M. Hardy d'Avril 2001)

Les moyennes, moyennes des valeurs extrêmes (annuelles et mensuelles) et les valeurs extrêmes (annuelles et mensuelles), la moyenne des écart-types des rendements mensuels et le TRI moyen sont également calculés.

Après ce test de vérification de l'implémentation avec le S&P 500 nous générons des trajectoires de l'indice CAC 40 (nu) avec un pas mensuel sur 36 ans et 730 trajectoires par jeu, et nous effectuons dix jeux. La figure 21 donne la distribution de la valeur finale à 36 ans d'une unité monétaire investie à l'origine dans le CAC 40, la probabilité maximale se situe dans la zone 6,0-7,3 et la moyenne de la distribution vaut 10,94 (correspondant à un TRI de 6,88 % alors que la moyenne des TRI vaut 6,12%).

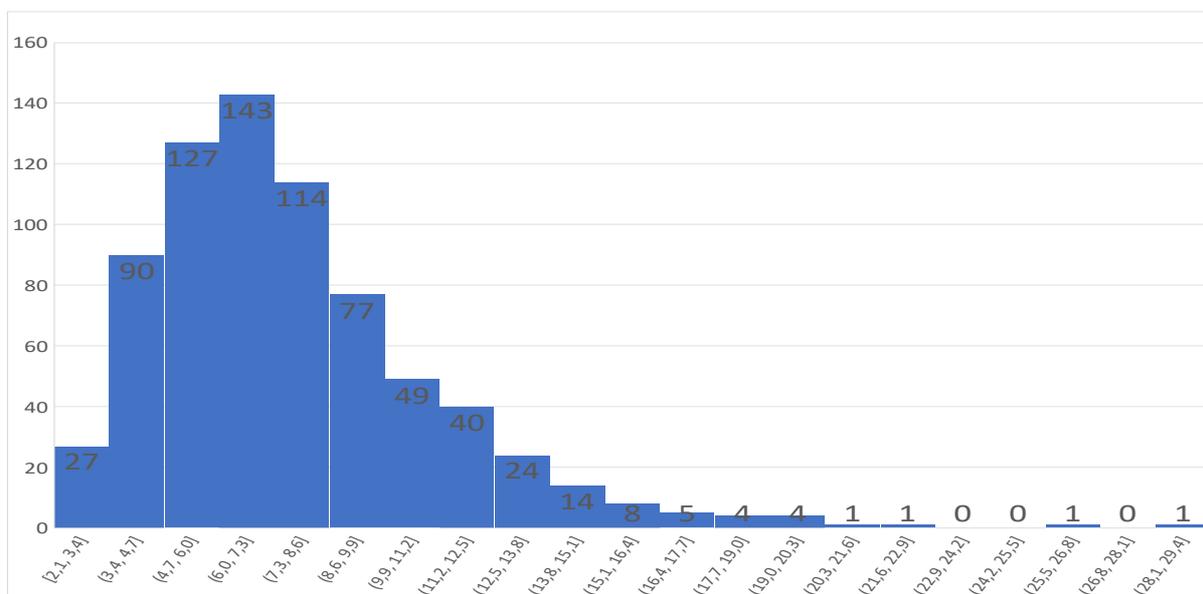


Figure 21 : Distribution de la valeur de l'indice CAC 40 (normalisé à 1 à T_0) à l'année 36 avec le modèle de Hardy à deux états (avec les paramètres extrait de l'historique 1990 à 2024)

Le tableau 32 rassemble les statistiques des rendements annuels et mensuels. Dix simulations de 421 tirages sont utilisées dans la moyenne, seules les trois premières et la dernière figurent, l'avant dernière colonne contient la moyenne et la dernière colonne les valeurs des indicateurs des rendements historiques ayant fourni les paramètres.

CAC 40 (de 1990 à 2024)	Simulation1	Simulation2	Simulation3	Simulation10	Moyenne des 10	Historique CAC
rendement annuel moyen	5,21%	5,26%	5,20%	5,25%	5,25%	6,69%
moyenne des maximum	36,37%	35,59%	35,86%	36,17%	36,06%	
moyenne des minimum	-18,96%	-18,71%	-18,87%	-18,75%	-18,74%	
ecart type rendements annuels	12,90%	12,73%	12,78%	12,76%	12,78%	22,17%
rendement mensuel moyen	0,42%	0,43%	0,42%	0,43%	0,43%	0,48%
moyenne des max mensuels	11,92%	11,87%	11,96%	11,76%	11,89%	
moyenne des min mensuels	-9,66%	-9,65%	-9,68%	-9,69%	-9,67%	
ecart type rendements mensuels	4,26%	4,26%	4,26%	4,25%	4,26%	5,31%
maximum des maxima annuels	81,85%	67,24%	93,65%	73,68%	80,80%	49,74%
minimum des minima annuels	-36,92%	-36,02%	-35,37%	-36,67%	-36,11%	-44,15%
maximum des maxima mensuels	19,44%	20,58%	19,92%	17,85%	19,55%	20,12%
minimum des minima mensuels	-16,00%	-15,35%	-15,48%	-13,99%	-15,31%	-17,49%

Tableau 32 : Rendements mensuels et annuels obtenus avec le modèle de Hardy sur dix jeux de 1259 trajectoires et leur moyenne et comparaison avec les valeurs réelles observées (période 1990 à 2024)

La moyenne des dix rendements annuels moyens (calculés chacun sur 1259 trajectoires) vaut 5,25 % et elle est sensiblement inférieure à la moyenne des valeurs observées : 6,69 % (l'écart de 27 % est notable). L'accord est meilleur avec les rendements mensuels, la simulation à deux états donne 0,43% et on observe 0,48 % respectivement, l'écart de 12 % est acceptable. Il est normal que le modèle génère, en moyenne, les données qui ont permis son étalonnage ; en revanche l'enchaînement des rendements mensuels conduit à un rendement moyen plus faible que celui observé. Hardy avait déjà souligné que le modèle à deux état est conservatif : «the left tail is substantially fatter for the RSLN model than for the lognormal model... » : les estimations sont plus nombreuses à gauche (les valeurs basses) avec le Regime Switching Log Normal qu'avec le Lognormal classique. On retrouvera ce caractère conservatif, qui est un atout dans une logique de mesure de la solvabilité/risque., au § 8.2 qui suit.

Les différences entre les valeurs des volatilités mensuelles et annuelles générées et celles valeurs observées sont plus importantes et surtout les volatilités déduites du modèle sont sensiblement inférieures à celles observées. La différence entre les rendements annuels est très forte : 12,8% simulé et 22,7 % mesuré. La valeur 12,7 % est la moyenne des écart-types de rendements annuels obtenus à partir des rendements mensuels simulés (ces rendements mensuels sont appliqués à la poche action de l'IRPS dans la simulation du montant du portefeuille).

Les valeurs des rendements mensuels obtenues avec le modèle de Hardy sont moins volatiles : le ratio écart-type/moyenne est de 6,53 (et de 11,6 pour les valeurs observées).

En formant l'expression $(\mu - \sigma^2/2)$ avec les valeurs annuelles observées on obtient 4,28 % et avec celles simulées 4,46 % pour combiner le rendement et la volatilité d'une modélisation en loi log-normale. Le même calcul sur les statistiques mensuelles donne respectivement le même chiffre de 0,34 % (on retrouve les données initiales de l'étalonnage encore, à juste titre).

Le modèle de Hardy fournit une estimation convenable des valeurs extrêmes : la pire baisse mensuelle estimée est de -15,3 % (celle observée de -17,5%) et la plus forte hausse mensuelle estimée est de +19,6 % (et + 20,1 % pour celle observée). L'accord sur les fortes baisses mesurées sur des intervalles de douze mois est assez bon : -36,1 % (et - 44,1%) observé, en revanche sur les fortes hausses il est médiocre puisque la moyenne des maxima estimés (sur dix fois 545 trajectoires) est de +81 % alors que la plus haute performance observée sur l'historique de plus d'une trentaine d'années est de 50 %.

Le modèle de Hardy repose sur les caractéristiques des deux états (rendement et volatilité) et aussi sur les durées moyennes de séjour dans chaque état qui déterminent in fine les rendement et volatilité globaux (qui doivent être en ligne avec les données observées). Hardy indiquait dans son article que le rendement moyen est la pondération par les durées totales de séjour des rendements des deux états et aussi pour leur variance. Le problème réside dans

la difficulté à estimer la volatilité observée avec le modèle de Hardy, car pour cela il faut revenir aux temps de séjour qui dépendent des deux probabilités de passage $p_{1>2}$ et $p_{2>1}$. Hardy montre que la probabilité d'être dans l'état 1 est proportionnelle à $p_{2>1} / (p_{1>2} + p_{2>1})$, et réciproquement celle d'être dans l'état 2 à $p_{1>2} / (p_{1>2} + p_{2>1})$, et puisque le dénominateur est le même, elles sont proportionnelles à $p_{2>1}$ et $p_{1>2}$ respectivement.

Dans le cas du CAC 40 les deux probabilités sont égales à 6%. Cette égalité implique que le temps passé dans le mode « calme » est égal à celui dans le mode « crise » : ce fait est vérifié par E. Raynal qui a tracé les zones de crise en superposition au graphique de la valeur du CAC 40 entre 1900 et 2024. La somme des périodes de « crise » est égale à la moitié de la période complète de 35 ans (en revanche pour le S&P 500 sur le même historique elle est bien plus faible et toujours en accord avec le ratio $p_{1>2} / (p_{1>2} + p_{2>1})$). Sur le CAC 40 ce ratio vaut 50 % ; sur le S&P il valait 10% avec les données utilisées par Hardy entre 1956 et 1999 ; E. Raynal trouve 8% sur la période allant de 1990 à 2024, confirmant la stabilité du comportement de cet indice dans le temps.

A partir de la variance totale qui est la somme pondérée des variances de chaque état par les durées de séjour respectives, on calcule la volatilité. Avec cette formule la volatilité mensuelle moyenne vaut $((((3,30\%)^2) + ((6,60\%)^2)) / 2)^{0,5} = 5,03\%$. Ce chiffre de 5,03 % est à comparer à 5,31 % observé avec les rendements mensuels réels du CAC 40. Si l'on transforme ces volatilités mensuelles de 5% et 5,3% en volatilité annuelle en multipliant par racine carrée de 12 on obtient respectivement 17,42 % et 18,36 % qui sont en assez bon accord avec les volatilités annuelles observées.

8.2 RESULTATS DES SIMULATIONS PAR MONTE CARLO AVEC LE MODELE DE HARDY ET COMPARAISON AVEC LE MODELE LOG-NORMAL

On utilise le modèle de Hardy à deux états avec 2077 comme date d'observation sur la stratégie Stable (avec une poche action constante à 30%) et les revalorisations des rentes indexées sur le taux d'inflation. On conserve les couples rendement/volatilités historique de (3,75% ; 3,13%) pour le taux TEC 7 et de (1,82 % ; 1,15%) pour l'inflation.

On utilise ici l'indice CAC 40 (hors dividendes) contrairement aux simulations précédentes. Le couple rendement/volatilité mensuel du CAC 40 sur la période 1990 à 2024 retenu est de (0,51 % ; 5,31%) ; ce couple de valeurs est transformé en valeurs annuelles équivalentes (6,12% ; 18,40 %) en multipliant respectivement par 12 et par la racine carrée de 12. En utilisant les performances annuelles observées (années civiles) on a le couple suivant (6,46 % ; 19,90 %). Il y a donc un écart de 6 % et 8 % entre les paramètres observés et ceux obtenus conventionnellement.

Par commodité on retient le couple moyen (6,30 % ; 19,15 %) et on effectue de nouvelles simulations par Monte Carlo pour la stratégie Stable car ce couple est sensiblement différent de celui du CAC TR (9,94 % ; 20,63 %) obtenu sur l'historiques 1988 à 2023 (qui est également différent). Le tableau 33 rassemble les résultats des simulations classiques par Monte Carlo pour la stratégie Stable avec les paramètres réels moyens de la période :

Stable 2077 (6,30 % ; 19,15 %)	Solde final moyen M€	Ecart-type en M€	Probabilité de ruine en %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Moyennes	235	222	8,17%	-56	31
Ecart-types	6	10	0,55%	7	1

Tableau 33 : Solde final, écart-type, probabilité de ruine, déficit moyen en cas de ruine et durée de vie moyenne avec les couples moyenne/EC : actions (5,76% ; 18,40%) ; taux TEC 7 (3,75% ; 3,13%) et (1,82% ; 1,15%) inflation et revalorisation sur l'inflation

Avec ces hypothèses, la probabilité moyenne de ruine vaut 8,2 % (avec un écart-type empirique de 0,6%) pour plus de dix mille trajectoires. Cette probabilité est nettement au-dessus des deux seuils retenus (2,50 %).

Cette probabilité de 8,2% se situe entre celle de 1,72 % obtenue avec le couple (10 % ; 20 %) et celle de 16,38 % obtenue avec le couple (5 % ; 20 %) au § 7.5.1. Elle est nettement supérieure à la probabilité moyenne de ruine de 1,7 % obtenue avec la même stratégie mais avec les paramètres du CAC 40 TR (l'impact de taux de dividendes sur le rendement vaut près de 3% annuel) et sur un historique un peu différent. Le solde final moyen de 235 M€ est voisin de 271 M€ obtenu avec le couple (5 % ; 20 %) ; l'ordre non respecté s'explique probablement par la différence des écarts-types : 222 M€ ici et 362 M€ avec le couple (5 % ; 20 %).

On effectue ensuite les simulations en Monte Carlo hybrides (combinant modèle de Hardy et simulation du solde final) avec les paramètres historiques rappelés en début de paragraphe. Les résultats figurent dans le tableau 34.

Stable revalorisation sur l'inflation en 2077 et avec modèle de Hardy	Solde final moyen M€	Ecart-type M€	Probabilité de ruine %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Stable 2077 Moyennes	281	174	1,10%	-26	36
Stable 2077 Ecart-types	9	14	0,26%	11	3

Tableau 34 : Indicateurs de risque du solde final sur la date d'observation 2077 dans la stratégie Stable et revalorisation sur l'inflation ; simulations en double Monte Carlo sur Hardy et sur le solde final

Avec le modèle de Hardy et les paramètres obtenus au § 4.1.1.2 B (cf tableau 1), on observe pratiquement aucune occurrence de ruine sur dix jeux de 545 trajectoires, alors qu'elle était de 8 % en Monte Carlo simple avec les paramètres historiques du CAC 40. La moyenne et l'écart-type caractérisent une bonne solvabilité : moyenne plus élevée et en revanche volatilité identique que celles du tableau 32 avec le modèle log-normal. La division par deux du déficit moyen se comprend étant donné le doublement de la moyenne. On constate que le modèle de Hardy opère une translation vers le haut des valeurs de l'indice action.

On a remarqué plus haut que le modèle donnait un rendement moyen proche de celui observé mais une volatilité sensiblement inférieure. On va utiliser le rendement et la volatilité obtenus avec le modèle de Hardy dans les simulations simple par Monte Carlo pour les rendre comparables avec celles du modèle. On retient le couple (6,84 % ; 13,05 %) dans ces nouvelles simulations.

Stable 2077 (6,84% ; 13,05%)	Solde final moyen M€	Ecart-type en M€	Probabilité de ruine en %	Déficit moyen en cas de ruine M€	Durée moyenne avant ruine ans
Moyennes	355	206	0,72%	-30	35
Ecart-types	7	11	0,31%	10	2

Tableau 35 : Solde final, écart-type, probabilité de ruine, déficit moyen en cas de ruine et durée de vie moyenne avec les couples moyenne/EC : actions (6,84% ; 13,05%) ; taux TEC 7 (3,75% ; 3,13%) et (1,82% ; 1,15%) inflation et revalorisation sur l'inflation en Monte Carlo

Lorsque l'on remplace la volatilité observée (19,1%) par celle déduite du modèle de Hardy (13 %, pourtant obtenue à partir des paramètres réels observés) on obtient un assez bon accord entre l'application des deux modèles. La probabilité moyenne de ruine est plus élevée en utilisant le modèle de Hardy que le modèle log-normal : 1,1 % vs 0,7 %, deux niveaux très faibles, chacun étant entaché de la même incertitude de 0,3 % ; ce qui montre qu'ils sont de l'ordre du pourcent et sensiblement inférieurs au seuil strict de 2,50 %. La moyenne et l'écart-type empirique des soldes finaux sont assez proches de celles obtenues avec le double Monte Carlo du tableau 33 (300 M€ à 20 % et 200 M€ à 10% près), comme le déficit moyen en cas de ruine (30 M€ à 10% près).

Nous cherchons ici à simuler l'évolution du portefeuille du canton et non pas à effectuer un pricing. L'occurrence de mouvements extrêmes de l'indice boursier est un risque fort pour la solvabilité de celui-ci. Pour estimer ce risque il est plus simple de stresser les paramètres de rendement moyen et de volatilité dans une logique de stress test, en utilisant un modèle simple et bien connu.

9 ANALYSE DES RESULTATS DES SIMULATIONS EN FONCTION DU CHOIX DE PILOTAGE DE LA POCHES ACTIONS

9.1 SEVERITES RELATIVES DES QUATRE FACTEURS DE RISQUE ET LEURS SENSIBILITES AU TYPE DE SIMULATION

Les simulations par Monte Carlo avec des modélisations simples des trois facteurs de risque sont bien adaptées pour comparer leurs sévérités relatives. En outre on peut modifier facilement leurs paramètres (moyenne et écart-type) à partir des valeurs extraites de l'historique retenu.

Le risque de longévité est de nature différente puisqu'il affecte uniquement la chronique des rentes (en montant et durée) mais il est du second ordre par rapport aux précédents. Les simulations historiques sont trop partielles et un modèle complexe comme celui de Hardy complexifie l'analyse. Outre son calibrage délicat, il ne se prête pas facilement à une analyse de la sensibilité au comportement de la poche actions du fait que les deux régimes sont intriqués et qu'il faut manipuler six paramètres simultanément.

On a présenté au § 6.5.5.1 à 6.5.5.4 les sensibilités du solde final aux trois facteurs de risque financiers et économiques (horizon 2097 et revalorisations sur le plus haut de l'inflation de l'année et la moyenne des performances du portefeuille lissée sur les huit dernières années). Des revalorisations plus généreuses que l'inflation seule épuisent rapidement le portefeuille et conduisent rapidement à l'insolvabilité. Des revalorisations sur le plus haut entre l'inflation de l'année et une fraction de la performance moyenne lissée du portefeuille sur les sept dernières années sont supportables tant que cette fraction ne dépasse pas 60 %. Puisque les revalorisations prévues par le règlement du régime sont indexées sur l'inflation seule, nous nous limitons à cette règle dans les simulations suivantes.

La sensibilité au taux d'inflation agit directement sur les rentes par leur indexation. Son mécanisme est analogue dans son principe à celui d'une actualisation des rentes par un taux technique, mais ici dans le sens d'une capitalisation. En utilisant un taux constant sur toute la période on peut calculer l'augmentation de la provision initiale en multipliant la durée du profil des rentes par l'incrément de taux d'inflation appliqué. Mais les deux indicateurs-clé suivis : l'impact exact sur le solde final (à la date choisie) et la probabilité moyenne de ruine ne peuvent être obtenus qu'avec les simulations par Monte Carlo. En modifiant le taux moyen d'inflation future on constate que la probabilité de ruine et le déficit moyen en cas de ruine sont alors fortement non-linéaires (contrairement à la somme non-actualisée des rentes). L'impact de la volatilité du taux d'inflation est moindre.

Dans les simulations par Monte Carlo on a d'abord utilisé les paramètres issus d'un historique qui reflétait un environnement financier et économique réel passé dont la profondeur est comparable avec l'horizon de projection. Cet historique de plus d'une trentaine d'années est caractérisé par de faibles taux d'inflation, des taux d'intérêts plus élevés en moyenne que celle-ci et des performances boursières sensiblement supérieures à ces deux taux.

Au §6.4.2 l'analyse a été conduite de manière systématique avec des simulations simplifiées (non aléatoires car effectuées sur des moyennes fixes et donc sans volatilité) sur une trentaine de couples fixes : inflation (comprise entre 0% et 5%) et rendement moyen du portefeuille (compris entre 0% et 5%). Les soldes finaux sont à l'équilibre sur la diagonale de la matrice rendement/inflation (égalité des deux facteurs), ils deviennent négatifs si l'inflation est supérieure au rendement, et inversement dans le cas opposé. Ce résultat intuitif est vérifié par le calcul : à partir d'une situation équilibrée, l'inversion des deux taux (par rapport à l'ordre habituellement observé) provoque une revalorisation des rentes sur l'inflation qui consomme plus rapidement le portefeuille de départ alors que celui-ci fructifie moins rapidement et à terme entraîne la ruine. Cet effet de ciseau est le risque majeur d'un régime de retraite supplémentaire par capitalisation. En cas d'évolution défavorable il appartient aux instances de direction de réduire l'indexation des rentes et d'accorder des revalorisations supportables en ligne avec les performances financières relativement médiocres du portefeuille.

Dans cette hypothèse adverse, c'est la stratégie de gestion Dynamique qui est relativement la mieux adaptée pour que le portefeuille génère suffisamment d'excédents pour financer les revalorisations. Mais la volatilité de l'indice action est le facteur de risque qui limite le pourcentage de la poche actions (il est borné à 60% en fin de stratégie Dynamique). La règle de pilotage du ratio de la poche actions selon le principe du CPPI est aussi un facteur efficace de réduction du risque. La mesure du risque supplémentaire pris n'est pas simple et les déficits sont repoussés sur les derniers bénéficiaires si des mesures correctrices ne sont pas prises.

On peut avancer qu'un investissement dans un indice boursier est plus défensif face à l'inflation qu'un investissement dans des obligations à taux fixe (a fortiori longues), ou à défaut dans des obligations indexées sur l'inflation qui sont plus défensives mais dont les performances sont bornées à l'inflation. C'est l'autre argument pour justifier ce risque supplémentaire donc pour mesurer ses sensibilités et les expliquer.

Les mesures de sensibilité par Monte Carlo montrent que le couple rendement/risque de la poche action est le premier facteur de risque parce ses valeurs sont élevées (supérieures à celles des deux autres couples) et que la poche action est la seconde composante du portefeuille, même si elle n'est généralement pas majoritaire. C'est aussi le principal risque de marché perçu par les tiers (le risque obligataire, de prix ou de taux coupon semble moins bien appréhendé par ceux-ci).

Le fait saillant est qu'à rendement inchangé à 10 % le doublement de la volatilité de 20% à 40 % (assez violent) transforme radicalement la solvabilité de l'IRPS : le solde final moyen (en euros 2077) est divisé par dix passant de 1386 à 126 M€ et la probabilité de ruine est multipliée par vingt-cinq passant de 1,7 % à 44 %. Même sans être aussi drastique une hausse de la volatilité à rendement fixé est fortement préjudiciable pour la solvabilité du canton. Ce constat (issu d'un calcul et pas seulement intuitif) explique la nécessité de retenir le couple rendement / risque le plus faible possible donc de privilégier un indice boursier le plus large possible, donc de diversifier au maximum son portefeuille (le MSCI World semble être le meilleur candidat). A contrario plus la volatilité est basse relativement au rendement, plus la stratégie Dynamique est pertinente, cette configuration vertueuse s'observe sur les indices très larges comme le S&P 500 ou le MSCI World, qui sont plus efficaces que le CAC 40 et aussi que l'Eurostoxx 50 un peu plus diversifié que le CAC.

Les mesures de sensibilité ont également montré que le couple rendement/risque de la poche obligataire ne doit pas être négligé, principalement parce que celle-ci est la plupart du temps majoritaire dans le portefeuille, et que les coupons perçus sont une source de richesse à ne pas négliger. Corrélativement lorsque ces coupons sont faibles par rapport à l'inflation, ou au rendement boursier, la fructification du portefeuille est insuffisante face aux revalorisations des rentes (qui portent sur la totalité de la provision mathématique et qui ont un effet cliquet). Ce fait a déjà été souligné. Les simulations par Monte Carlo permettent de constater les effets du rendement moyen et de sa volatilité.

Une inflation durablement plus haute (par rapport aux taux d'intérêt) ou des performances financières (taux d'intérêt et actions) globalement moins bonnes dégradent la solvabilité du canton mesurée par la probabilité de ruine. Les deux autres indicateurs : la moyenne et l'écart-type du solde final en 2077 fournissent des informations moins faciles à exploiter pour communiquer le niveau de risque encouru.

On vérifie que si l'inflation moyenne future est supérieure au rendement moyen du portefeuille, l'équilibre initial constaté de 2024 se dégrade. La seule façon de se couvrir contre ce risque (peu probable au demeurant) est de s'adosser immédiatement avec des OAT indexées sur l'inflation, qui en outre supprime quasiment toute gestions active (seuls les regroupements faits sur des paquets de rentes projetées à des horizons éloignés devront être affinés). Cette solution peut s'envisager dans le cas d'une mise en run-off de l'IRPS ; elle est aussi un argument convaincant sur le bon équilibre (la bonne solvabilité) de l'IRPS actuellement (sans formuler d'hypothèses sur le taux de rendement ou un taux technique différent de zéro).

Ces trois analyses en sensibilité (plus proche de stress tests que de faibles variations) montrent qu'il n'y a pas un risque plus élevé que les deux autres car ils portent sur des assiettes de tailles différentes : le risque actions, qui est intrinsèquement le plus élevé, s'applique à la plus petite poche et le risque inflation, le plus modéré, s'applique à l'ensemble du bilan (la provision mathématique mesurant les rentes restant à servir) et avec un effet cumulatif.

9.2 COMMENT CHOISIR LE TYPE DE PILOTAGE DE LA POCHE ACTION : QUELLE DOSE DE RISQUE ACCEPTABLE ?

Il faut souligner que parmi les trois stratégies de gestion aucune n'est « meilleure » que l'autre dans l'absolu : tout dépend de la hiérarchie entre les performances des deux compartiments de marché et de l'inflation. Ce constat de relativisme et d'indétermination étant posé, il mérite d'être affiné.

L'expérience sur plusieurs décennies et sur plusieurs marchés boursiers montre que le rendement total moyen d'un indice actions Large Cap est supérieur au taux coupon moyen d'obligation d'Etat en moyenne sur moyen terme (les deux étant exprimés comme des rendements annuels, des TRI ou toute mesure homogène). Il en est de même entre le taux coupon obligataire (TEC 7 ou TME) et le taux d'inflation YoY de l'année, même si des périodes de taux réel négatif peuvent être observées. On se place sur les moyennes de longue période et non sur quelques années atypiques, et toujours en rendements faciaux et non en terme réels (plus délicats à établir).

Avec cet horizon de moyen terme, et la hiérarchie « normale » (dont celle résultant de l'historique des trente-six dernières années) la stratégie Dynamique est relativement la plus efficiente avec les données initiales du canton et sa chronique de rentes, car sa probabilité moyenne de ruine un peu supérieure à celles des stratégies moins risquées est plus que compensée par les soldes moyens finaux élevés et laissant des marges de manoeuvre.

Ce constat traduit la supériorité des actions pour générer en moyenne des gains sur moyenne/longue période d'une à plusieurs décennies, même avec des épisodes de crise. L'autre facteur qui conforte cette supériorité réside dans le mécanisme de préservation des gains après une hausse du marché actions et d'achat en période de baisse pour respecter le ratio d'exposition calculé sur la valeur de marché de la poche actions. Cette stratégie est analogue à celle d'un CPPI et permet de lisser les hauts et les bas de l'indice ; elle est en outre « automatique » : on doit respecter le pilotage de la trajectoire choisie ex ante du ratio. Cette contrainte évite de devoir faire des choix subjectifs ou tactiques via des stratégies à court terme comme vendre (ou acheter) le compartiment qui a relativement mieux performé ou toute règle empirique suggérée dans l'article rédigé par les deux praticiens américains.

La stratégie Dynamique peut sembler inadaptée à un IRPS par son apparent manque de prudence, avec son exposition moyenne assez forte au risque actions (et croissante dans le temps). Cette remarque doit être nuancée car l'évolution du ratio est assez lente (0,5% par an) et a contrario même la stratégie SuperPrudent (1% par an) maintient une exposition relative moyenne en actions à un niveau supérieur à 10% pendant une quarantaine d'années. Les analyses avec un ratio fixe du § 7.5.6 fournissent des résultats plus simples à analyser et montrent que la fraction d'actions acceptable se situe un peu au-dessus de 30 % (avec une poche actions égale à 35 % en permanence la probabilité moyenne de ruine atteint 2,50%, le seuil acceptable que l'on s'est fixé).

Le postulat qu'un investissement en actions est toujours rentable sur le long terme est souvent considéré comme une évidence. Mais le Nikkei 225 sur les quarante dernières années met en défaut ce postulat. Cet indice est une moyenne arithmétique équipondérée des 225 cours de ses composants (donc non pondérée par les capitalisations). L'évolution du Nikkei entre 1985 et 2023 (cf figure 22) montre qu'investir dans un indice boursier national n'est pas exempt de risques à moyen/long terme et qu'il faut être patient pour conserver sa position. Cet exemple reflète les conditions assez particulières du marché boursier japonais et de sa politique économique plus largement. Or il existe au Japon des fonds de pension depuis 1966 qui sont assez comparables aux régimes surcomplémentaires français (création par une entreprise ou multi-entreprise, paritarisme,...) mais sont originaux puisqu'ils remplacent partiellement les régimes obligatoires et sont neutres pour le salarié en termes de niveau de cotisation (l'entreprise cotise globalement un peu plus). Le plus grand fonds de pension mondial est d'ailleurs japonais, c'est le Government Pension Investment Fund avec 1500 Md\$ d'actifs sous gestion et une allocation d'actifs de 50 % en actions et 50 % en obligations, chaque poche étant répartie pour moitié en titres domestiques et en titres internationaux. Cette allocation d'actifs assez habile qui reflète les leçons tirées du passé est gérée par une trentaine des plus grands gestionnaires d'actifs internationaux (les six japonais en gèrent la moitié). Cette allocation a dégagé un rendement annualisé moyen de 4,47 % entre 2001 et Q1-2024. Cette période (qui a succédé à la chute des années 1990 à 2000) est concomitante à la hausse de l'indice de 10 000 à 40 000. Le point d'entrée a été bien

choisi il est vrai et au moins la puissance publique a titré partie de la dépression boursière et a « joué » le rebond, leur pari a été gagnant.



Figure 22 : Valeur de l'indice Nikkei 225 de 1980 à 2024

Cette évolution en auge contraste avec celle du S&P 500 qui a été globalement haussier sur la même période, avec des crises passagères, mais pas un creux aussi prolongé. La trentaine d'années nécessaires au Nikkei pour retrouver son plus haut rappelle la longue crise du Dow Jones après 1929 qui n'a retrouvé ce niveau qu'en 1950, soit une vingtaine d'années seulement couvrant une crise et une guerre mondiale (un indice est exprimé en monnaie courante et non constante, donc il ne s'agissait pas d'un retour au niveau en monnaie constante (en pouvoir d'achat).

Ces deux exemples avec des indices nationaux larges montrent qu'ils ne sont pas systématiquement les meilleurs supports ; ils peuvent être dépassés par les placements obligataires de manière temporaire et en période de crise ou d'inflation. Damodaran et d'autres auteurs américains fournissent des statistiques détaillées couvrant de longues périodes sur les marchés US.

L'autre point déjà souligné est qu'il ne faut pas tirer de conclusions définitives face à un graphique d'évolution d'un indice boursier sur longue période apparemment « décevant ». En effet dans le cas d'investissements partiels réguliers pendant la phase d'accumulation on effectue des achats à des cours « bas » dans les périodes de crise/marasmus qui permettent de moyenniser le prix d'entrée et finalement de tempérer la première impression défavorable. Le mécanisme des achats et des ventes fractionnées, et de l'exposition à des cours moyens, compensent en grande partie (et dans les deux sens d'ailleurs) le jugement fondé sur l'évolution de l'indice entre les deux dates bornes. C'est ce qui se passe avec l'IRPS, les ventes sont faites au fil du temps aussi bien dans les périodes de hausses que dans celles de baisses et le respect du ratio suit aussi ces fluctuations. Dans ce cas également une simulation exacte est préférable à une conclusion hâtive au vu d'un graphique/

Un dernier exemple de la supériorité relative d'un indice boursier large sur les autres classes d'actifs est son caractère adaptatif. Les ETF indexés sur des indices sont qualifiés de « gestion passive », ce qui est exact mais l'indice est en fait géré « activement ». Ce n'est pas un gérant qui choisit des actions, ce sont les sociétés dont les capitalisations croissent fortement et rapidement qui entrent dans l'indice et font sortir les sociétés déclinantes. Cette sélection naturelle se révèle assez efficace (même s'il y a quelques subtilités dans le choix de la composition du CAC 40 où un certain équilibre entre les différents secteurs d'activité doit être respecté). Le cas du S&P 500 est instructif : c'est un indice à la fois domestique et international qui intègre la plupart des plus grandes sociétés mondiales expliquant son attractivité. L'indice est pondéré par les capitalisations et sa composition suit l'émergence des nouveaux géants boursiers. En juillet 2024 les sept premières capitalisations de l'indice sont des sociétés de haute technologie : Microsoft, Apple, Nvidia, Amazon, Alphabet Class B (ex Google), META (ex Facebook) et Alphabet Class A, il faut passer aux trois suivantes pour trouver des sociétés de « l'ancienne économie » (la première étant Berkshire Hathaway qui est une société de portefeuille partiellement investie dans ces mêmes sociétés et d'autres plus conventionnelles). Cette rotation des titres nous renvoie à la fois à la

« destruction créatrice » de Schumpeter et à la « main invisible » du marché de Smith qui fait progresser les cours des sociétés performantes. Malgré ces deux parrainages illustres, il y a parfois des ratés : des fraudes comme Enron, des bulles comme la dot.com, mais ces épisodes ne ralentissent pas durablement la hausse de l'indice américain qui reste le plus efficace du monde (exprimé par le ratio rendement moyen /volatilité).

En conclusion, on peut soutenir qu'un indice action est le support « le moins pire » en acceptant le risque de crise et de longue période de marasme boursier éventuel, et que son poids doit rester raisonnable.

9.3 L'ÉMERGENCE DE NOUVEAUX RISQUES : COMMENT LES INTÉGRER DANS LA GESTION ?

L'émergence de nouveaux risques est inhérente à la gestion financière : les crises économiques et géopolitiques surgissent régulièrement et c'est précisément parce qu'elles ne sont pas anticipées qu'elles sont violentes. Même si la probabilité d'une baisse violente des marchés actions est régulièrement annoncée, sa date et son amplitude sont rarement précisés. A ces risques connus et documentés vient de s'ajouter le risque climatique et son pendant les enjeux du financement de la transition écologique pour freiner cette dégradation visible désormais peu contestée.

Dès à présent il est demandé aux ORPS d'intégrer le risque de durabilité dans leur SFCR. Ce risque de durabilité est couvert par le rapport « article 19 » pour les entités de taille moyenne ou grande (total bilan supérieur à 500 M€). Le respect des normes environnementales, sociétales et de gouvernance (ESG) constituent le socle de base pour les investissements, qui est la plupart du temps pris en compte par les gestionnaires d'actifs (internes ou externes). Les notations et les diverses réglementations fournissent un cadre quantitatif et orientent les décisions d'investissement. Toutefois les investissements « responsables » en actions à thème : Climat ou Social RH sont généralement moins performants que les fonds actions diversifiés (source GALEA rapport sur les SFCR 2023 des ORPS). Sauf dans quelques secteurs controversés (pétrole, charbon, ...), la plupart des groupes cotés veillent à se conformer à ces nouveaux standards car ils savent que les gestionnaires sont attentifs à leur respect.

Les besoins de financement par le marché obligataire et par émission d'actions et l'adaptation des sociétés cotées à ce changement doivent être pris en compte dans les décisions d'investissement. Le marché action s'adapte déjà à cette nouvelle donne : les investisseurs professionnels et les particuliers exigent désormais des sociétés cotées le respect de normes ESG et la mise en pratique de celles-ci. De leur côté les sociétés qui s'adaptent à cette nouvelle donne, soit par des engagements réels, soit par une politique habile seront sélectionnées plus volontiers par les investisseurs. Il y a alignement d'intérêt et les cours des sociétés les plus aptes/adaptées progresseront. On retrouvera ensuite ce « biais du survivant » dans la composition des indices boursiers, un facteur supplémentaire pour les utiliser. A côté de ces mesures volontaires, des obligations croissantes s'appliquent aux investisseurs qui n'ont d'autre choix que les respecter.

Face aux nouveaux risques, la stratégie classique de diversification entre les secteurs et les zones géographiques (et leurs économies et politiques monétaires) est une première réponse. Une autre est de financer directement la transition énergétique et d'investir dans des entreprises actives dans ces domaines. L'investissement dans des « actifs réels » est également une possibilité : l'immobilier, mais aussi les infrastructures peuvent générer des flux indexés sur l'inflation sur le long terme et fournir les équipements nécessaires pour s'adapter au changement climatique, aux nouveaux besoins sociétaux et aux infrastructures à renouveler. Ce mouvement est favorisé par les pouvoirs publics qui souhaitent toujours « flécher l'épargne » vers des secteurs jugés prioritaires, soit par des avantages fiscaux, soit plus autoritairement. Pour preuve, la création du mode de gestion piloté « offensif » dans les nouveaux PER et l'obligation d'investir dans des titres d'entreprises non-cotées ou de la dette privée. Certains professionnels se montrent assez sceptiques sur les perspectives de rendement de ces véhicules proposés aux épargnants « de base » (cf Les Echos du 5 juillet 2024) et ils soulignent que les fonds d'actions cotées offrent un couple rendement/risque comparable avec une liquidité et une transparence nettement plus élevée.

CONCLUSION

L'étude du cas réel d'un IRPS en extinction permet de formuler certaines conclusions spécifiques et d'autres plus générales ; il est aussi instructif pour guider la gestion d'un PER (ou PERCO) en phase de consommation.

Les simulations historiques sont à proscrire car malgré leur simplicité évidente et leur caractère « réel » elles conduisent à des constats ici erronés. Seules les simulations en Monte Carlo permettent d'explorer un nombre suffisant de configurations possibles avec un degré raisonnable de confiance. Les modélisations les plus simples sont parfois les meilleures (ou les moins mauvaises) car la complexité accrue n'implique pas forcément une précision accrue ou un meilleur pouvoir prédictif. Les modèles complexes sont bien adaptés à des pricings (qui sont effectués chaque jour voire plus fréquemment) et doivent être toujours en adéquation avec les conditions de marché. Dans une projection portant sur plusieurs décennies, il n'est pas raisonnable de cristalliser les conditions de marché de l'instant (pour preuve les courbes de taux EIOPA fin 2021 et fin 2022 ou 2023 par exemple). Une approche plus lissée se basant sur les moyennes historiques avec un horizon adapté à des engagements longs (une trentaine d'années) comme celui d'un ORPS semble plus adaptée. L'utilisation de modélisations utilisant des paramètres caractérisant une longue période évite de dépendre des paramètres de calibrage de l'instant. Les lois normales pour les taux d'intérêt et d'inflation et log-normale pour l'indice actions sont suffisantes à notre sens. L'utilisation d'un modèle plus complexe (ici le modèle de Hardy à deux états) permet de s'assurer que les conclusions initiales ne sont pas trop dépendantes du modèle (on aurait pu utiliser le modèle à saut de Merton ou à volatilité stochastique de Heston). Un modèle de taux alternatif (Vasicek ici) n'a pas été utilisé (l'exemple du document PEPP de l'EIOPA en 2020 sur l'inflation européenne est instructif). Enfin les corrélations entre les trois facteurs de risque : action, taux TEC 7 et inflation sont faible à modeste (0,10 et 0,20) et ont été considérées comme nulles.

La modélisation de l'ALM de l'IRPS en comptabilité de caisse et la caractérisation de son solde de trésorerie à une date d'observation fixée en 2097 (extinction totale estimée) ou de manière plus réaliste en 2077 permet de comparer les quatre stratégies de gestion possibles dans le futur (pourcentage action stable à 30 %, ou croissant jusqu'à 60 % ou décroissant jusqu'à 0%). L'indicateur principal est la probabilité moyenne de ruine qui doit être inférieure à 2,50 % à cette date ; le solde moyen et son écart-type sont également retenus comme indicateurs supplémentaires.

Avec des paramètres de marché historiques (représentatifs des trente dernières années) avec l'ordre suivant des rendements : actions, TEC 7 et inflation YoY, on constate que les quatre stratégies ont des probabilités de ruine très voisines (de 1,6% à 2,1%) alors que les soldes finaux moyens sont nettement plus dispersés (comme les écart-types). Ces résultats dépendent de la hiérarchie des rendements et de la situation actuelle de l'IRPS qui est « équilibré » (il peut être statiquement adossé avec des OATi et €i) car sa solvabilité est satisfaisante. Le risque de mortalité est du second ordre par rapport aux trois risques principaux qui ont des intensités différentes (mesurées par leurs volatilités respectives) mais portent sur des assiettes différentes. En choquant notablement (multiplication ou division par deux) leurs couples (moyenne/volatilités) on constate que l'équilibre entre le rendement du portefeuille et l'inflation moyenne est le facteur déterminant : une inflation future durablement forte dégrade notablement la solvabilité actuelle de l'IRPS. Ceci confirme la vulnérabilité des régimes par capitalisation en période d'inflation forte et de marchés financiers dégradés. Ces analyses en sensibilité confirment aussi la nécessité de chercher les meilleurs supports possibles et en particulier d'investir dans un indice action avec le meilleur ratio rendement/volatilité possible comme le S&P 500 ou MSCI World.

Pour un IRPS qui doit suivre le principe de la « personne prudente » les stratégies Stable ou Prudente sont préférables à la stratégie Dynamique. Celle-ci est possible pour un plan individuel de retraite (qui ne fournit qu'une fraction du total des pensions perçues, jusqu'à 50% par exemple). Le cas des PER et des PERCO en phase de consommation n'a pas encore été abordé en France (contrairement aux USA et au Royaume Uni), il est souhaitable que des études soient entreprises (ou adaptés au cas français) et que des préconisations (comme celles existants pour la phase d'épargne) soient proposées. Les modélisations et techniques développées dans ce mémoire pourront être utilisées à cet effet (sur les deux phases mêmes) et tester les meilleures stratégies selon l'appétence au risque.

TABLE DES FIGURES

- Figure 1 : Part des dépenses (publiques et privées) dans le PIB en 2002 et 2017 (Avis CSR 2022 – juillet 2023)
- Figure 2 : Niveau de vie moyen des seniors français rapporté au niveau de vie de la population de 1970 à 2070 (Rapport du COR 2023 - juin 2024)
- Figure 3 : Niveau de vie moyen des seniors OCDE rapporté au niveau de vie de la population en 2020 (Avis CSR 2022 – juillet 2023)
- Figure 4 : Rentes futures probables en vision IRS (hors frais et sans revalorisations)
- Figure 5 : Evolution de la provision mathématique en vision IRS (hors frais et sans revalorisations)
- Figure 6 : Ratio rente annuelle / provision mathématique restante en vision IRS (hors frais et sans revalorisations)
- Figure 7 : Courbe des taux EIOPA du 31/12/2021 au 30/06/2024 (sans ajustement de volatilité) (GALEA)
- Figure 8 : Distribution des valeurs de l'estimation du taux d'inflation Euro HICP (EIOPA 2020)
- Figure 9 : Performance annuelle logarithmique du CAC40 TR en fonction du TEC 7 (estimé par TME – 0,50%) de 1988 à 2023
- Figure 10 : Corrélation entre les rendements annuels des US Treasury et le rendement du S&P 500 TR de 1985 à 2022 (Source EDHEC- Risk Climate Impact Institute juillet 2024)
- Figure 11 : TEC 7 (estimé par TME – 0,50%) en fonction du taux d'inflation YoY français de 1996 à 2023
- Figure 12 : Valeur finale du portefeuille en 2097 dans la stratégie Stable - simulations historiques
- Figure 13 : Valeur finale du portefeuille en 2097 dans les stratégies Prudent et Dynamique -simulations historiques
- Figure 14 : Valeur finale du portefeuille en 2097 avec portefeuille entièrement obligataire - simulations historiques
- Figure 15 : Histogramme des valeurs finales (en 2097) dans la stratégie Dynamique sur 1073 trajectoires
- Figure 16 : Histogramme des valeurs finales (en 2097) dans la stratégie Stable sur 1073 trajectoires
- Figure 17 : Exemples de trajectoires de la valeur du portefeuille en fonction du temps (de 2024 jusqu'à 2097) dans la stratégie Dynamique pour 10 trajectoires
- Figure 18 : Exemples de trajectoires de la valeur du portefeuille en fonction du temps (de 2024 jusqu'à 2097) dans la stratégie SuperPrudent pour 10 trajectoires
- Figure 19 : Distribution du produit d'un investissement unitaire dans le S&P 500 TR avec le modèle de Hardy à deux états et la représentation par la loi log-normale (à partir des données historiques entre 1956 et 1999)
- Figure 20 : Distribution de la valeur de l'indice S&P 500 TR (normalisé à 1 à T_0) à l'année 10 avec le modèle de Hardy à deux états (avec les paramètres de l'article de M. Hardy d'Avril 2001)
- Figure 21 : Distribution de la valeur de l'indice CAC 40 (normalisé à 1 à T_0) à l'année 36 avec le modèle de Hardy à deux états (avec les paramètres extrait de l'historique 1990 à 2024)
- Figure 22 : Valeurs de l'indice Nikkei 225 de 1980 à 2024

TABLE DES TABLEAUX

Tableau 1 : Paramètres du modèle de Hardy du CAC 40 (source E. Raynal) et du CAC 40 TR (mars 1990 - mai 2024)

Tableau 2 : Paramètres du modèle de Hardy du S&P 500 (source E. Raynal mars 1990 à mai 2024 et M.R Hardy 1956 à 1999)

Tableau 3 : Taux réels européens de 1961 à 2023 (Source EIOPA)

Tableau 4 : Adossement statique avec des obligations Zéro coupon OAT théoriques, détail dix premières années

Tableau 5 : Adossement statique complet avec des OAT indexées sur l'inflation française ou européenne

Tableau 6 : Statistiques empiriques des séries temporelles : CAC 40 TR ; TEC 7 ; Inflation française YoY

Tableau 7 : Statistiques de la valeur du portefeuille en 2097 dans la stratégie Stable en simulations historiques

Tableau 8 : Statistiques de la valeur du portefeuille en 2097 dans la stratégie Prudente en simulations historiques

Tableau 9 : Statistiques de la valeur du portefeuille en 2097 dans la stratégie Dynamique en simulations historiques

Tableau 10 : Statistiques de la valeur du portefeuille en 2097 dans les trois stratégies en simulations historiques

Tableau 11 : Valeurs terminales dans les trois stratégies de pilotage de la poche action, en revalorisant sur le taux d'inflation spot et avec le choc de longévité de 20% (PM en italique, cas de base sans le choc de longévité)

Tableau 12 : Somme des rentes et solde final Cas Stable (performance financière globale de 0%), revalorisations allant de 0% à 5%

Tableau 13 : Somme des rentes et solde final Cas Stable (performance financière globale de 3%), revalorisations allant de 0% à 5%

Tableau 14 : Solde final en fonction du taux de performance financière allant de 0 % à 5 % et du taux de revalorisation allant de 0% à 5% Cas Stable

Tableau 15 : Solde final, écart-type et probabilité de ruine pour le Cas Prudent, simulations en Monte Carlo

Tableau 16 : Solde final, écart-type et probabilité de ruine pour le Cas SuperPrudent, simulations en Monte Carlo

Tableau 17 : Solde final, écart-type et probabilité de ruine pour le Cas Stable, simulations en Monte Carlo

Tableau 18 : Solde final, écart-type et probabilité de ruine pour le Cas Dynamique, simulations en Monte Carlo

Tableau 19 : Solde final, écart-type et probabilité de ruine pour les trois stratégies, simulations en Monte Carlo

Tableau 20 : Solde final, écart-type et probabilité de ruine pour le cas Stable, revalorisation au taux de participation lissé de 50 %, simulations en Monte Carlo

Tableau 21 : Solde final, écart-type et probabilité de ruine pour le cas Dynamique, revalorisation au taux de participation lissé de 50 %, simulations en Monte Carlo, observation en 2097

Tableau 22 : Solde final, écart-type et probabilité de ruine pour le cas Prudent, revalorisation au taux de participation lissé de 50 %, simulations en Monte Carlo, observation en 2097

Tableau 23 : Solde final, écart-type et probabilité de ruine pour le cas SuperPrudent, revalorisation au taux de participation lissé de 50 %, simulations en Monte Carlo, observation en 2097

Tableau 24 : Solde final, écart-type, probabilité de ruine, déficit moyen en cas de ruine et durée de vie moyenne avant ruine pour les quatre stratégies, revalorisation au taux de participation lissé de 50 %, simulations en Monte Carlo, observation en 2097

Tableau 25 : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final en 2097 dans la stratégie Stable avec plusieurs couples de valeurs rendement/volatilité de la performance des actions ; revalorisations sur l'inflation

Tableau 26 : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final en 2097 dans la stratégie Stable selon plusieurs couples de valeurs rendement/volatilité du taux TEC 7 ; simulations en Monte Carlo

Tableau 27 : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final en 2097 dans la stratégie Stable selon plusieurs couples de valeurs rendement/volatilité du taux d'inflation ; simulations en Monte Carlo

Tableau 28 : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final en 2097 dans les stratégies Stable et Dynamique avec plusieurs couples de valeurs rendement/volatilité des actions ; simulations en Monte Carlo

Tableau 29 : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final sur plusieurs dates d'observation : 2097, 2077 et 2060 dans la stratégie Stable inflation seule ; simulations en Monte Carlo

Tableau 30 : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final sur plusieurs dates d'observation : 2097 et 2060 dans la stratégie Dynamique et Stable, revalorisation sur l'inflation ; simulations en Monte Carlo

Tableau 31 : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final sur la date d'observation 2077 dans la stratégie Stable inflation seule pour plusieurs pourcentages fixes de la poche actions ; simulations en Monte Carlo

Tableau 31 bis : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final en 2097 dans la stratégie Stable inflation seule selon plusieurs valeurs du portefeuille financier en 2024 ; simulations en Monte Carlo

Tableau 31 Ter : Comparaisons des indicateurs de risque du solde final en 2097 dans les stratégies Dynamique et Stable inflation avec un portefeuille financier de 150 M€ en 2024 ; simulations en Monte Carlo

Tableau 32 : Rendements mensuels et annuels obtenus avec le modèle de Hardy sur dix jeux de 1259 trajectoires et leur moyenne et comparaison avec les valeurs réelles observées (période 1990 à 2024)

Tableau 33 : Solde final, écart-type, probabilité de ruine, déficit moyen en cas de ruine et durée de vie moyenne avec les couples moyenne/EC : actions (5,76% ; 18,40%) ; taux TEC 7 (3,75% ; 3,13%) et (1,82% ; 1,15%) inflation et revalorisation sur l'inflation

Tableau 34 : Indicateurs de risque du solde final sur la date d'observation 2077 dans la stratégie Stable et revalorisation sur l'inflation ; simulations en double Monte Carlo sur Hardy et sur le solde final

Tableau 35 : Solde final, écart-type, probabilité de ruine, déficit moyen en cas de ruine et durée de vie moyenne avec les couples moyenne/EC : actions (6,84% ; 13,05%) ; taux TEC 7 (3,75% ; 3,13%) et (1,82% ; 1,15%) inflation et revalorisation sur l'inflation en Monte Carlo

BIBLIOGRAPHIE

Livres :

PLANCHET F., THÉRON P. (2007) Pilotage technique d'un régime de rentes viagères, Ed. Economica

PORTAIT R., PONCET P. (2009) Finance de marché, 2^{ème} édition, Ed. Dalloz

MARTELLINI L., MILHAU V. (2020) Advances in retirement investing, Coll. Quantitative Finance, Ed. Cambridge University Press

Mémoires de l'Institut des Actuaires :

MOINET F. (2017) Opportunités et contraintes de la nouvelle réglementation des FRPS pour un portefeuille de retraite entreprise

ZIYATI O. (2019) Impact de la création des FRPS sur la gestion d'engagements de retraite professionnelle en France

CHEMTOB D. (2015) Impact du risque de longévité dans le calcul d'un régime de retraite L.441 Construction d'une table Best Estimate et mise en place d'un modèle interne partiel

CHEVALLIER Alex. (2017) La différence de gestion du risque entre un contrat placé sous la réglementation FRPS et son équivalent sous Solvabilité 2

WALLE C.L. (2018) Allocation stratégique d'actifs d'un contrat de retraite géré dans le cadre d'un FRPS à l'aide d'un outil de projection actif passif

BERRADA SOULMI S. Allocation stratégique d'actifs dans le cadre de l'épargne-retraite

Articles :

GAUTRON N., PLANCHET F., THÉRON P. (2003) Méthodes financières et allocation d'actifs en assurance, Les cahiers de recherche de l'ISFA, WP 2025

BATTOCCHIO P., MENONCIN F., SCAILLET O. (2003) Optimal asset allocation for pension funds under mortality risk during the accumulation and decumulation phases, ECON Discussion papers 2003/29

HARDY M.R. (2001) A regime-switching model of long-term stock return » North American Actuarial Journal, April 2001

SPITZER J.J, SINGH S. Is rebalancing a portfolio during retirement necessary ? Journal of Financial Planning June 2007

SCOTT J.S., SHARPE W.F., WATSON J.G. The 4% rule – At what price ? April 2008 site Stanford.edu

AHADO F., CAMBOU A., CANDUS E., CHEVALLIER A., BUI QUANG P., MEGDICHE I. Les organismes de retraite professionnelle supplémentaire : un nouvel acteur pour l'épargne retraite des Français, Bulletin de la Banque de France 243/4 novembre/décembre 2022

DAMODARAN A., Equity risk premiums (ERP) : Determinants, Estimation, and Implications – The 2024 Edition, Stern School of Business NYU

Rapports publics :

Rapports annuels du Conseil d'Orientation des Retraites de juin 2023 et juin 2024

Avis du Comité de Suivi des Retraites de juillet 2023 et de juillet 2024

Panoramas de la DREES Social : Les retraités et les retraites, Edition 2023

Rapport « Epargner à long terme et maîtriser les risques financiers » O. Garnier, D. Thesmar , La Documentation Française 2009

« Pension Decumulation Pathways, A proposed approach », Institute and Faculty of Actuaries, May 2022 Great Britain

Sites internet :

Banque de France, Agence France Trésor, Galéa, OCDE, INSEE, Légifrance, Deutsche Börse, Yahoo Finance, Amundi ETF, IShare Blackrock , mémoires publiés par l'Institut des Actuaires

TABLE DES ACRONYMES

ORPS : Organisme de Retraite Professionnelles Supplémentaire

FRPS : Fonds de Retraite Professionnelle Supplémentaire (Code des Assurances)

IRPS : Organisme de Retraite Professionnelle Supplémentaire (Code de la Sécurité Sociale)

MRPS : Mutuelle de Retraite Professionnelle Supplémentaire (Code de la Mutualité)

ACPR : Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution

EIOPA : European Insurance and Occupational Pensions Authority

AMF : Autorité des Marchés Financiers

AFG : Association Française de Gestion

IP : Institution de Prévoyance

IRS : Institution de Retraite Supplémentaire

IORP : Institutions for Occupational retirement Provision

EMS : Exigence Minimale de Marge de Solvabilité

SCR : Solvency Capital Requirement

SFCR : Solvency and Financial Condition Report

BE : Best Estimate

TME : Taux Moyen de l'Etat

TEC : Taux de l'Echéance Constante

OPCVM : Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières

ETF : Exchange Traded Fund

S&P : Standard & Poor 's

VAR : Value at Risk

CPPI : Constant Proportion Portfolio Insurance

ANNEXE 1 : BIBLIOGRAPHIE

A.1 DEUX ARTICLES EUROPEENS TRAITANT DE LA PHASE DE DECUMULATION

A.1.1 L'ARTICLE DE N. GAUTRON, F. PLANCHET ET P. THEROND

L'étude de la stratégie de gestion d'un organisme servant des rentes en phase de restitution uniquement (ou en régime mixte de constitution et de restitution) est un sujet qui a été traité par ces trois auteurs dès 2003 et deux d'entre eux l'ont approfondi dans leur ouvrage « Pilotage technique d'un régime de rentes viagères » paru en 2007.

La première modélisation de la gestion de l'actif d'un fonds de pension et de son analyse par des auteurs français se trouvent à notre connaissance dans l'article de N. Gautron, F. Planchet et P. Théron : « Méthodes financières et allocation d'actifs en assurance » de 2003, disponible sur le site « Ressources Actuarielles.net ». L'article traite également quelques points techniques introduits avec Solvabilité 2 alors en phase de discussion. L'article décrit une modélisation stochastique de la gestion de l'actif financier d'une entité gérant un portefeuille de rentes viagères en cours de service. La contrainte posée dans la simulation est de servir chaque année le flux projeté sans opérer de prélèvement sur la masse des capitaux destinés à couvrir les autres flux futurs, cette absence de fongibilité est extrêmement prudente mais très pénalisante puisque chaque flux annuel est considéré comme une poche cantonnée (ce qui n'est pas le cas en pratique). Cette contrainte stricte de devoir disposer chaque année d'une marge de sécurité non mutualisée avec celles des années suivantes oblige d'adopter une allocation d'actifs nécessairement peu risquée et donc de pénaliser l'investissement en actions. Ce point est déjà souligné dans l'article et sa relaxation est annoncée dans le cadre de travaux ultérieurs.

Avec cette hypothèse fortement restrictive : soit une probabilité fixée de ruine sur chaque flux total annuel de rente (financé par la combinaison d'un zéro coupon calé sur cette date et d'un actif risqué action) la part en actif risquée admissible décroît avec la durée jusqu'à l'extinction ; il passe de 25 % pour un horizon de 1 an à 5 % pour un horizon de 17 ans et à 2,5% pour 45 ans. La courbe « part d'actif risqué en fonction de l'horizon » est monotone fortement décroissante.

Les auteurs soulignent que « ...ce résultat n'est pas intuitif et ne correspond pas à la pratique ; il est généralement admis que la part action d'un investissement est croissant avec l'horizon de gestion ... ». Ils ajoutent que « ...cette décroissance est ici la conséquence du fait que la contrainte est très forte et qu'elle se resserre avec le temps.... ». Ce resserrement est la conséquence de l'accroissement du nombre des échéances qui doivent respecter la contrainte car la « ruine » sur un seul flux entraîne la « ruine globale » alors qu'il pourrait y avoir compensation avec les échéances suivantes. Les auteurs concluent «les contraintes annuelles semblent inefficaces pour déterminer une allocation stratégique performante ».

Les auteurs relaxent cette contrainte en choisissant comme critère d'efficacité l'atteinte d'un taux garanti (moyen sur la durée de l'horizon) avec une probabilité fixée a priori. Avec ce critère global ils retrouvent un résultat en accord avec la pratique et l'intuition : la part d'actif risqué admissible (pour un seuil de confiance donné) augmente avec la durée de l'horizon. La courbe est monotone croissante (pratiquement en racine carrée) et la fraction en actif risqué passe de 5 % pour un horizon de 1 an, à 45 % pour un horizon de 15 ans, à 67 % à 30 ans et à 80 % pour 45 ans. Ce changement dans la modélisation préfigure le modèle retenu dans l'ouvrage rédigé par deux auteurs de l'article qui paraîtra quatre ans plus tard.

A.1.2 L'ARTICLE DE P. BATTOCCHIO, F. MENONCHIN ET O. SCAILLET

Un autre article européen : « Optimal asset allocation for pension funds under mortality risk during the accumulation and decumulation phases » P. Battocchio, F. Menoncin et O. Scaillet, ECON Discussion papers 2003/29 - 2003 – DIAL, est un peu antérieur (il est cité dans l'article précédent qui en fournit d'ailleurs la référence) traite le même problème. Il adopte une approche globale (abordant les phases d'épargne et de consommation, le risque de mortalité) et recourt à des modélisations assez complexes. La conclusion de l'article est surprenante puisqu'elle indique qu'il faut augmenter la part risquée du portefeuille tout au long de la phase de consommation (décumulation). Il est intéressant de comprendre ce qui a conduit à cette conclusion plutôt contre-intuitive.

Les auteurs traitent aussi d'autres sujets connexes à la phase de décumulation : la phase préalable d'accumulation et l'incidence du risque de mortalité. Ils proposent une stratégie dynamique consistant à augmenter la pondération en action avec le temps jusqu'à atteindre 100% en fin de phase de décumulation (qui est diamétralement opposée à la règle empirique et simple du (100-âge) % pour la part actions d'un produit retraite, comme un PER ou un PEPP).

Dans le contexte des travaux de l'OCDE sur les fonds de pension dans les années 2000 et à la suite des travaux de R. Merton en 1970, cet article aborde de manière théorique l'ensemble du problème. Les auteurs se placent dans le cadre du modèle classique de N actifs risqués suivant des browniens géométriques corrélés et d'un actif sans risque. Une fonction d'utilité CRRA (Constant Relative Risk Aversion) est utilisée pour piloter l'allocation d'actif. L'article traite des deux phases : accumulation et décumulation avec la même stylisation et intègre également le risque de mortalité (en fait ici la durée de vie) modélisé par une loi de Weibull.

La condition d'équilibre entre le taux de contribution et le taux de restitution est établi en premier lieu : il ne dépend que du taux d'intérêt sans risque, et des paramètres de durée de la vie active et de la durée de vie à la retraite. Les résultats tabulés sont très dépendants du taux d'intérêt (de 1% à 4%) et logiquement des deux âges charnière : l'âge de début de cotisation (généralement 25 ans) et l'âge d'entrée en retraite. Les valeurs des rapports théoriques obtenus en fonction des différents paramètres (T ; l'âge de décès probable en fonction des paramètres a et b de la loi de Weibull, le taux d'intérêt r) sont aussi fortement dépendant du taux d'intérêt même dans cet intervalle réduit compris entre 1% et 4%. La formule obtenue est assez peu opérationnelle car les ratios calculés sont très sensibles au taux d'intérêt (alors même que ceux-ci se situent dans un intervalle étroit).

Les auteurs de l'article cherchent l'allocation d'actifs optimale sur la globalité du cycle de constitution d'une épargne pour la retraite et de sa consommation. Ils constatent en premier lieu que celle-ci est différente entre les deux phases : la taille relative de la poche risquée doit être décroissante pendant la phase d'accumulation (on retrouve les stratégies types d'un PER) et de manière plus surprenante elle doit être croissante au cours de la phase de décumulation. Ce profil en « V » contraste avec tous les profils monotones décroissants généralement suggérés. Ce profil complet de la pondération de l'actif risqué en courbe en « V » avec le point bas à la date d'entrée en retraite, s'explique principalement par la prise en compte du risque de longévité.

Cette stratégie est justifiable dans le cas d'un PER pour lequel le titulaire est seul responsable de la gestion de son actif et ne bénéficie pas de la mutualisation. Il peut aussi souhaiter laisser le reliquat de son épargne à ses héritiers mais au risque de se trouver dépourvu en cas d'évolution adverse de la poche actions. Dans le cas d'un fonds de pension, l'obligation de servir les rentes promises, sous contrainte du risque de sous-mortalité et des risques de marché sur le portefeuille, est un frein à la mise en application de cette stratégie que l'on peut qualifier d'agressive et que l'on comparera à des stratégies plus prudentes.

La complexité des modèles et la forte sensibilité des résultats au taux d'intérêt (compris dans l'intervalle étroit 1 à 4 %) rendent difficile l'utilisation de cette modélisation (avec les formules obtenues), même si la conclusion incite à l'appliquer à des cas réels. Le choix de couvrir l'ensemble du cycle épargne-consommation comme un seul problème est en revanche bien adapté à la modélisation d'un produit d'épargne-retraite de type PER ou PEPP.

A.2 LIVRES, MEMOIRES ET ARTICLE TRAITANT DE L'ALLOCATION D'ACTIFS

A.2.1 L'OUVRAGE « PILOTAGE TECHNIQUE D'UN REGIME DE RENTES VIAGERES » DE F. PLANCHET ET P. THEROND

L'ouvrage de F. Planchet et P. Théron : « Pilotage Technique d'un régime de rentes viagère », 2007, Editions Economica couvre les problèmes techniques spécifiques à un régime de rentes viagères comme le risque systématique de mortalité, la modélisation de l'inflation et des sauts boursiers et le pilotage financier d'une entité gérant en extinction des rentes viagères. L'ouvrage publié en 2007 traite également les domaines alors récents du référentiel Solvabilité 2 et des normes IAS/IFRS (déjà en vigueur à l'époque). Cet ouvrage approfondit leur article de 2003 des auteurs et ils abandonnent l'hypothèse d'adossement rigoureux des flux chaque année (sans fungibilité) au profit d'une mutualisation des actifs financiers (ce qui est le cas en pratique) jusqu'à leur épuisement.

Le livre est entièrement consacré à la gestion d'un régime (fermé) de rentes viagères. Il présente les équations décrivant les mécanismes de gestion de l'actif sous contrainte du versement des flux projetés ainsi que les modélisations classiques des actions et des taux d'intérêt. Il fournit les résultats des simulations du pilotage financier pour un régime existant et propose une approche pragmatique plus transparente que celle de l'article de Battocchio et al.

Les caractéristiques du canton de l'IRPS en extinction étudié dans ce mémoire sont assez voisines de celles du régime analysé dans l'ouvrage (le profil des âges est voisin, la taille de bilan et les rentes sont cinq fois plus petites mais on peut effectuer leur rebasage). On pourra vérifier que les modélisations et simulations du mémoire peuvent être appliquées à ces données. On peut ainsi comparer les deux séries de résultats pour s'assurer que ceux-ci sont cohérents.

Le livre est organisé en trois parties couvrant respectivement le passif, l'actif et l'analyse des risques actif/passif. Dans chaque partie, l'analyse des risques et leur modélisation sont présentés.

Pour le passif, ce sont les modélisations des revalorisations, de l'inflation et du taux technique ainsi que la quantification du risque systématique de mortalité qui sont traités.

Pour l'actif, ce sont modélisations de l'inflation et des sauts boursiers qui sont approfondies.

La troisième partie porte sur l'analyse globale d'un fonds de pension, en vision de type ALM et en appliquant les modèles présentés dans les deux premières parties.

Nous allons présenter les principales modélisations utilisées dans ce livre et indiquer ensuite les choix opérés dans ce mémoire ainsi que certains approfondissements entrepris.

Le chapitre 7 : « Un nouveau critère d'allocation stratégique d'actifs » présente le cas d'un régime de rentes viagères en extinction sur un horizon de soixante ans (environ 370 participants et une provision mathématique de 38 M€), avec un flux de rentes annuelles partant de 2 M€ et s'amortissant continûment. Il est supposé que ce flux de rentes est déterministe, c'est-à-dire que les risques de mortalité/longévité, de revalorisation et de frais sont supposés inexistantes. Seul le risque financier à l'actif est pris en compte. Le portefeuille financier est constitué de deux poches : une poche Y « sans risque » (en capital) et dont le taux d'intérêt suit le modèle de Cox Ingersoll Ross (modèle avec retour à la moyenne et volatilité multipliée par la racine carrée du taux prévalant) et une poche risquée X modélisée par un brownien géométrique.

Ces deux modélisations impliquent de facto certaines conséquences :

- le taux d'intérêt modélisé est le taux de rendement annuel de la poche sans risque et la valeur de marché de la poche est invariante entre chaque mouvement annuel (prélèvement pour payer les rentes).

- la modélisation de l'actif risquée est la plus classique possible, c'est celle du modèle de Black et Scholes qui suppose l'absence de dividendes.

- la gestion des actifs, c'est-à-dire la répartition entre les deux poches est fixe au cours du temps.

Le pilotage s'effectue par le choix de la valeur ce ratio uniquement à la date origine, ensuite il évolue passivement avec les fluctuations de la valeur de la poche risquée en fonction des évolutions de marché.

La diminution du portefeuille (puisque le fonds est en extinction) s'effectue en le réduisant de manière homothétique : la réduction de la poche action est proportionnelle à sa pondération « courante ». Donc si le marché boursier chute, on va vendre un montant d'actions qui correspond à un nombre élevé de « paniers CAC », a contrario si celui-ci est en forte hausse, un nombre plus faible de « paniers CAC » (on observe ici le changement de numéraire des théoriciens). Il n'y a pas de rebalancement pour maintenir le ratio à sa valeur initiale.

Cette gestion totalement passive est procyclique car cela revient à réduire fortement la part de la poche actions en cas de baisse de ce marché en début de période et de ne pas pouvoir profiter des éventuels rebonds postérieurs. Ce choix est justifié par la possibilité de fixer le ratio initial à un niveau suffisamment élevé et de le laisser ensuite fluctuer (à la hausse ou à la baisse) avec la gestion passive le portefeuille.

Les auteurs mentionnent toutefois l'autre possibilité qui consiste à piloter au cours du temps ce ratio (ici en le maintenant constant) en rebalçant chaque année les deux poches lors des mouvements de fonds annuels (rentes à verser, coupons perçus, frais supportés...).

NB : C'est cette seconde approche qui a été choisie dans le mémoire, avec un pilotage permanent du ratio. Cette stratégie anticyclique est suivie parce qu'elle évite de subir passivement les fluctuations boursières et permet de pouvoir bénéficier des éventuels rebonds après une chute des marchés. Ainsi on préserve les gains et on cherche à minimiser les pertes en tablant implicitement sur des rebonds. C'est également le principe de gestion d'un CCPI (Constant Proportion Portfolio Investment) une technique simple de gestion de portefeuille, qui relève de la même logique et qui fait intervenir une courbe de garantie.

- les flux des prestations sont déterministes et le risque de longévité n'est pas pris en compte, ni les revalorisations futures. Les auteurs ont traité dans la partie I de leur livre ces deux sources de risque et montré que le risque de longévité est faible devant le risque financier, et qu'il doit être intégré non pas en termes d'effectifs, mais en termes de volumes de rentes à verser, donc en simulant les fluctuations tête par tête, puisque deux bénéficiaires du même âge et du même sexe, donc de risque de longévité égal, peuvent percevoir des pensions de niveaux très différents, ce qui est le risque final porté par le régime. Cette mesure : perte ou gain de mortalité est calculé chaque année sur les seuls décès constatés. Le choc réglementaire qui porte sur l'ensemble des bénéficiaires suppose que la mutualisation est opérante et néglige la variance du risque vie.

La modélisation du taux d'inflation est abordée en même temps que celle du taux de revalorisation, puis approfondi dans la partie III avec le modèle d'Ahlgrim (processus d'Ornstein-Uhlenbeck). Avec ce modèle et des données sur l'inflation française dans la décennie 1990-2000 (un taux d'inflation instantané « j » de 2,79 % ; un paramètre « a » de retour à la moyenne de 0,7369 et une volatilité taux « sigma » de 0,56%), ils montrent que la provision mathématique passe de 32,8 M€ (sans revalorisation) à 47,9 M€ (avec revalorisation au taux d'inflation), soit une hausse notable de 46%.

Quelques résultats importants de la dernière partie doivent être rappelés (sur ce groupe de 370 rentiers environ) :

- La part relative du risque mortalité dans la modélisation du risque total (risques financier et mortalité) devient négligeable (moins de 5 %) dès lors que la part en action de départ dépasse 10%.
- La mesure du risque financier (mesurée par la variance de la provision mathématique) augmente de manière plus qu'exponentielle avec la part action à l'origine (et maintenue constante). La variance est un carré ; mais ici les effets sont encore plus marqués : le risque est multiplié par deux quand le

ratio passe de 80 % à 90 % et par six quand il passe de 80% à 100%, il est divisé par deux quand le ratio passe de 80 % à 60 %.

NB : On remarque que ce comportement « exponentiel » est observé pour des taux de la poche actions se situant nettement au-dessus des niveaux admissibles pour un fonds de pension (plafond à 60%) ; ils sont envisageables éventuellement pour un produit individuel comme un PER.

Les auteurs présentent ensuite deux résultats majeurs sur la relation entre la probabilité de ruine et la part initiale en actif risqué :

- La ruine comptable survient lorsque la valeur comptable du portefeuille est inférieure à la provision mathématique (les fonds propres initialement égaux à 4% de la provision mathématique initiale sont complètement consommés), la probabilité de cet évènement suit une courbe pratiquement confondue à 0 jusqu'à un ratio initial de 10% puis monotone croissante dont l'allure est proche de celle d'une racine carrée : la probabilité de ruine est de 40 % pour un ratio initial de 30%, de 60 % pour un ratio initial de 50% et culmine à 85 % pour un ratio initial de 100%. Ces résultats correspondent à des rentes non-revalorisées et à au niveau minimal de solvabilité requis de 4% (il n'y a pas d'étude de sensibilité à ce ratio de solvabilité initial).

Lorsque les rentes sont revalorisées la probabilité de ruine pour un ratio donnée diminue ; ce résultat apparemment contre-intuitif s'explique par l'augmentation de la durée du profil du passif (les rentes futures sont augmentées et le profil diminue moins rapidement) qui permet à la poche risquée de s'apprécier plus (longtemps). Avec les hypothèses de revalorisation (environ 2% par an en moyenne) la probabilité de ruine passe de 40 % à 15% pour un ratio initial de 30 % en actions (et de 60% à 45 % pour un ratio initial de 50%). Ce constat dépend du couple (rendement, volatilité) des actions et du taux d'inflation moyen futur : l'augmentation moyenne des rentes doit rester inférieure au rendement moyen des actions, dans le cas contraire la ruine est accélérée.

NB : Nous retrouverons dans le mémoire la dépendance de certaines conclusions aux paramètres utilisés qui reflètent le passé assez récent et une hiérarchie quasiment toujours observée.

- Les auteurs introduisent la « provision économique » du régime qui est définie comme la somme des flux futurs actualisés au taux de rendement de l'actif (qui est la combinaison linéaire des taux de rendement de l'actif sans risque et de l'actif risqué) et mesurent son montant (exprimé en pourcentage de la provision mathématique initiale) en fonction du ratio (initial et constant) en actif risqué. Ce montant se situe dans la fourchette 80% à 130 % ; il est quasiment constant autour de 80% lorsque le ratio en actif risqué est compris entre 0% et 50 % -(exactement entre 78,7% et 82,7%, le minimum correspondant à environ 20 % d'actif risqué initial) ; il vaut 90 % à 70 % d'actif risqué et 130% à 100%. Ces valeurs dépendent des paramètres de simulation en 2007 : taux technique 2,50 %, drift action 7% et volatilité action 25%, taux d'intérêt spot 3% et taux à long terme 4,63 %.

NB : On remarque que ces paramètres sont en ligne avec les valeurs actuelles, et que les résultats présentés dans le livre peuvent être comparés avec les simulations faites avec les paramètres de 2024.

Ils incluent ensuite les revalorisations (indexation au taux d'inflation) et montrent que celles-ci permettent des pourcentages plus élevés en actif risqué pour une même probabilité de ruine (celle calculée sans revalorisation).

NB : Ce résultat peut se comprendre même si l'inflation est considérée ici comme indépendante du rendement de l'actif risqué ; c'est l'allongement de la durée par l'augmentation des valeurs des rentes éloignées qui explique que la part d'actif risqué doit être plus importante. On considère généralement que les actions sont des titres assez bien corrélés sur l'inflation alors que les produits de taux fixe sont moins bien corrélés (les obligations indexées sur l'inflation étant en revanche parfaitement corrélés). Le rendement moyen des obligations est plus faible en moyenne sur longue période que celui des actions. Les actions fournissent un surcroît de rendement moyen qui permet de servir l'accroissement des rentes provoqué par les revalorisations, le corolaire étant une prise de risque plus importante, qui est quantifiée par la probabilité de ruine (non négligeable ici).

Ces résultats obtenus dans le cas réel d'un régime et avec les données de marché de l'époque sont intéressants car ils confirment d'une part la nécessité d'avoir une part investie en actifs risqués (actions) suffisante (a minima au départ dans leur modélisation) et d'autre part le fait que celle-ci peut se situer jusqu'à 30 % sans entraîner de risques inacceptables (probabilité de ruine de 15%, que l'on doit relativiser par l'appel éventuel à l'employeur).

L'ouvrage publié en 2007 remarque que la mesure de la solvabilité dans le référentiel Solvabilité 2 bientôt en place avec un horizon à un an et un seuil de ruine très haut est mal adapté à un régime de rente dont la durée est proche de 15 ans. La mise en place de Solvabilité 2 oblige de tels régimes à réduire leur part en actif risqué et donc à adopter une allocation d'actifs sous-optimale voire inadaptée.

A la date de publication du livre les ORPS n'étaient pas encore créés ; l'adoption de cette forme par des régimes de retraite supplémentaires leur permettra de revenir à des allocations d'actifs plus raisonnables dont le bien-fondé est établi dans ce livre de manière mathématique et pas seulement en se référant à la seule intuition ou au bon sens.

A.2.2 L'OUVRAGE « ADVANCES IN RETIREMENT INVESTING » DE L. MARTELLINI ET V. MILHAU

L'ouvrage de L. Martellini et V. Milhau : « Advances in Retirement Investing », 2020, Collection Quantitative Finance, Editions Cambridge University Press, présente un panorama de certains travaux plus récents et s'attache en particulier à la phase de décumulation. Il dépasse le cadre français et privilégie une approche théorique.

Les auteurs rappellent les chiffres-clés des systèmes de retraite dans les grands pays de l'OCDE et dressent un état des lieux des systèmes de retraite dans lesquels les régimes par capitalisation sont significatifs. Puis ils présentent la notion de « retirement bonds » : des instruments synthétiques qui procurent des flux de ressources prévisibles pendant la retraite. Ces instruments (actuellement hypothétiques) pourraient être obtenus à partir d'obligations indexées sur l'inflation strippées (un marché encore inexistant contrairement à celui des obligations d'Etat strippées, même s'il est réduit en termes de volumes et de liquidité). Ces « retirement bonds » garantiraient des flux réévalués avec l'inflation composée depuis leur acquisition et leur remboursement (in fine) et fourniraient des montants de rentes indexés (contrairement aux rentes assurantielles classiques qui ne peuvent pas être indexées).

Ils présentent le caractère dual entre la constitution d'un capital et la fourniture d'un flux de revenus « stables », et soulignent que c'est celui-ci seul qui est la source d'une retraite. Ils se limitent dans un premier temps à des obligations à taux fixe ou indexées sur l'inflation. Ils concluent que ces deux instruments ne sont pas les meilleurs outils pour fournir seuls les flux de revenus en utilisant les performances historiques du marché nord-américain (pour lequel les données sont profondes et les études assez nombreuses). Ils notent que ce constat dépend en partie du choix des intervalles de temps, et qu'il est fondé sur ces données historiques. D'autres études ont comparé les historiques des différents grands marchés et ont constaté que le marché nord-américain était finalement plus performant que ceux de l'Europe continentale. Le caractère prédictif des données historiques est un débat qui s'applique à tous les marchés financiers car une telle analyse n'a pas vocation à « prédire l'avenir » mais simplement à informer de manière objective afin d'éclairer des choix avec des données réelles observées.

Ils reprennent la notion de la séparation entre une fraction sécurisée de la pension (indexée sur l'inflation) et une fraction complémentaire risquée qui peut apporter un surcroît de pouvoir d'achat, avec un risque, à un niveau de probabilité choisi. Ils remarquent que seul un investissement en actions peut fournir ce « moteur de performance » (en utilisant les performances passées comparées des marchés actions, obligations et monétaires nord-américains sur un historique d'une cinquantaine d'années). Ils retiennent deux poches : les « retirement bonds » ou « Goal-Hedging Portfolio » (GHP) et les actions ou « Performance-Seeking Portfolio » (PSP). L'ouvrage analyse également les caractéristiques et les performances de plusieurs fonds à horizon commercialisés aux Etats-Unis (ce type de produit est également disponible en France pour des produits de type PER). Ces fonds ont des allocations d'actifs plus ou moins risquées et des stratégies d'atterrissage également diverses.

NB : Ces notions ont déjà été introduites auparavant et dans le cas français on peut dresser un parallèle entre les pensions des régimes obligatoires qui sont à la fois (assez bien) indexées sur l'inflation (le GHP) et les pensions des régimes supplémentaires gérés en capitalisation, ou les PER dans le futur (pour les salariés) qui représentent la partie potentiellement plus risquée (ceci ne s'applique pas à des professions libérales ou des indépendants pour lesquels la partie obligatoire est relativement plus faible et la partie facultative plus élevée).

Les modélisations retenues sont classiques tant pour les actions que pour les obligations et les paramètres sont ceux des marchés nord-américains sur des historiques d'une cinquantaine d'années.

En revanche les simulations ne sont pas faites par une série de versements réguliers (soit constants en valeur constante, soit légèrement croissants) dans la phase d'accumulation mais en considérant un versement unique global. Ce choix qui ne correspond pas à la réalité (même simplifiée) limite fortement la portée des conclusions que les auteurs tirent de leurs choix d'allocation d'actifs et de rythme des prélèvements. De facto ils se placent comme si le futur rentier investissait la totalité de son capital à un moment donné, avant son départ en retraite (comme s'il liquidait une épargne constituée au préalable ou percevait un héritage à une date intermédiaire entre celle de son entrée et celle de sa sortie de la vie active) : c'est un cas particulier trop restrictif.

Cette simplification ignore totalement le bénéfice d'investir de manière régulière sur une longue période d'activité qui permet d'une part de compenser des périodes de marché défavorables avec des périodes favorables, de bénéficier du réinvestissement continu et composé des fruits et de ne pas subir le phénomène de « point d'entrée ». Ce phénomène est d'ailleurs observé par les auteurs (et d'autres études) qui constatent que la fructification d'un montant unique sur longue période est fortement dépendante du point d'entrée et du point de sortie. Dans leur modélisation le niveau de sortie est fractionné sur une longue période. Cette simplification à l'entrée limite cependant fortement la portée des conclusions des auteurs et elle pourrait être corrigée en supposant que le phase d'épargne au cours de l'activité est quasi constante (pourcentage constant du revenu réel par exemple), comme l'ont fait d'autres auteurs (Spitzer et Singh cf 5.3) et comme le suppose l'EIOPA pour les PEPP.

NB : Seule des simulations exactes des phases d'accumulation et de décumulation, qui traduisent la réalité des opérations effectuées, permettent de tirer des conclusions pertinentes sur le cycle complet et de rechercher l'allocation optimale (éventuellement variable au cours de la totalité du cycle) pour le futur rentier.

Finalement les conclusions formulées dans cet ouvrage ne peuvent pas être appliquées à des cas réels, car la modélisation n'est pas réaliste comme celle utilisée dans les travaux antérieurs présentés au 5.2.1 et au 5.2.3. et à la méthodologie proposée par l'EIOPA pour les PEPP.

A.2.3 TROIS MEMOIRES PRESENTES POUR L'ADMISSION A L'INSTITUT DES ACTUAIRES ET DEUX ARTICLES AMERICAINS

Nous citons deux mémoires publiés sur le site de l'Institut des Actuaraires Français dont les méthodologies et les résultats ont été analysés ; leurs conclusions sont rapprochées de celles de ce mémoire.

a) Le mémoire « Opportunités et contraintes de la nouvelle réglementation des FRPS pour un portefeuille de retraite entreprise » de F. Moinet, novembre 2017 ISUP compare les trois cadres réglementaires : Solvabilité 1 et 2 et FRPS. Comme dans d'autres mémoires, l'auteur souligne que la réduction de l'exigence de fonds propres pour un FRPS permet d'augmenter la part investie en actions et donc d'obtenir de meilleures performances au prix d'une volatilité accrue de l'actif. Il compare les modélisations sous Solvabilité 2 et sous IORP2 et analyse les calculs réglementaires en testant l'impact en capital réglementaire pour des allocations en actions (maintenue constantes) allant de 10% à 50 % du portefeuille total sur l'horizon réglementaire de dix ans, mais ne s'attache pas à la gestion de cette allocation sur des durées plus longues.

b) Le mémoire « Impact de la création des FRPS sur la gestion d'engagements de retraite professionnelle en France », O. Ziyati, Janvier 2019, PSL Dauphine souligne également la relaxation du niveau de fonds propres

permise par le statut de FRPS. Il modélise finement un portefeuille financier investi à hauteur de 20% en actions et de 80 % en obligations, cette répartition étant maintenue constante sur un horizon de trente ans. Il analyse un régime de retraite supplémentaire Article 39 géré par un assureur. Sa transformation en FRPS est envisagée principalement pour alléger la consommation de fonds propres. Il estime comme d'autres auteurs que le passage en FRPS divise pratiquement par deux l'exigence de fonds propres et/ou corrélativement offre la possibilité d'avoir des portefeuilles plus fortement investis en actions, qui sont des « moteurs » de performance. Il calcule le niveau de fonds propres requis sous Solvabilité 2 en faisant varier la fraction d'actions dans le portefeuille total de 0% à 33 % et observe un quadruplement de celui-ci (quasi linéairement à partir d'un niveau minimal).

c) Le mémoire « Allocation stratégique d'actifs dans le cadre de l'épargne-retraite », S. Berrada Souni 2015, ENSAE décrit et explicite les modèles ALM applicables à un régime de retraite. Elle présente d'abord le cadre fondateur de Markowitz puis détaille son application et son élargissement ALM par le modèle de Sharpe et Tint et celui de Leibowitz. Le mémoire fournit non seulement leur description mais aussi l'ensemble des équations qui les sous-tendent, permettant de les utiliser. Un exemple avec deux actifs (action et obligation) fournit les résultats obtenus en termes d'allocation d'actif et des analyses de sensibilité illustrent l'importance respective des paramètres. S. Berrada Souni cite la thèse de Talfi qui a travaillé sur un fonds de pension fermé et a approfondi ces modèles en leur adjoignant un paramètre de tolérance au risque en simplifiant la représentation du passif par une obligation zéro-coupon. Elle rappelle qu'avec des tests de sensibilité Talfi montre que si « Avec une corrélation entre l'actif risqué et l'actif obligataire (est) assez faible, une hausse des engagements induit une augmentation du poids de l'obligation ... », alors que « Dès que la corrélation entre l'actif et le passif dépasse un certain seuil, la stratégie de couverture contre une hausse des engagements consiste à investir plus dans l'actif risqué.. ». Enfin «...l'allocation en actif risqué est croissante avec le coefficient de tolérance au risque... ». Le mémoire présente l'application des modèles (Markowitz, Sharpe & Tint, Leibowitz et Talfi) à un régime de retraite fermé (2,8 Md€ d'actifs servant 240 M€ de rentes annuelles en 2015 et qui sera quasiment éteint dans en 2065 ; la durée du passif est de 12 ans en 2015) investi sur sept classes d'actifs. L'allocation initial sert de base de référence et les quatre portefeuilles obtenus en appliquant les trois modèles (avec deux niveaux de tolérance au risque pour le modèle de Talfi) se révèlent supérieurs : soit ils présentent une volatilité plus faible avec le rendement du portefeuille de base, soit avec le modèle de Talfi un couple rendement/risque meilleur sur ses deux composantes que celui du couple de base, ou bien avec la même ratio de Sharpe et un rendement plus élevé (4,25 % vs 3,62 % et donc une volatilité également plus élevée 3,87 % vs 3,38%). S. Berrada Souni souligne les possibilités d'amélioration offertes par l'application de ces modèles et l'opportunité d'approfondir les techniques d'allocation d'actifs pour un régime de retraite à horizon long (ici aussi en extinction). Elle souligne aussi les contraintes de Solvabilité 2. Son mémoire présente les évolutions des principaux postes sur dix ans. Ce mémoire invite aussi à consulter la thèse de Talfi, qui a adopté une approche monopériode pour simuler le passif.

d) Un article de praticiens américains « Is rebalancing a portfolio during retirement necessary ? » J.J Spitzer et S. Singh Journal of Financial Planning June 2007 présente une analyse empirique de différentes stratégies de consommation d'un capital au moment de son entrée en retraite. L'article est centré sur la seule période de décumulation (comme pour l'IRPS de ce mémoire), en retenant une large fourchette pour l'allocation en actions. L'article retient six allocations allant de 30 % actions / 70 % obligations à 80 % actions / 20 % obligations avec un pas de 10 %. Ces allocations vont de dynamique à agressive selon les critères européens, s'agissant d'un portefeuille personnel il n'y a pas de contrainte réglementaire.

Les auteurs retiennent cinq stratégies de gestion systématique ou tactique : maintien du ratio initial constant impliquant des rebalancements annuels, ventes des obligations d'abord ou des actions d'abord et dans les deux cas sans rebalancement (donc épuisement progressif de la poche affectée), vente partielle du compartiment ayant le mieux ou le moins bien performé l'année passée (stratégie de prise de gain ou de sanction systématique).

A partir de la richesse initiale en base 100, ils explorent enfin cinq taux de prélèvement annuel allant de 3 % à 7 %, ils simulent donc 150 combinaisons possibles.

La représentation des performances financières des marchés est volontairement concrète puisque ce journal s'adresse aux membres de la Financial Planning Association, des conseillers en gestion patrimoniale indépendants et non des universitaires ou des actuaires. Aucune modélisation théorique des actifs n'est présentée, ce qui rend

leur article facilement accessible à ces conseillers qui orientent les particuliers dans la gestion de la consommation de leur plan 401K et dont les arguments doivent être simples pour être convaincants.

Pour appuyer leur démonstration auprès de ce public, ils utilisent les séries longues des performances de la bourse américaine et des taux longs entre 1926 et 2003. A partir des paires de performances annuelles des actions et des obligations, ils utilisent deux méthodes classiques : soit un bootstrap en tirant au sort parmi les années de la fenêtre et en retenant la paire de performances correspondante, et en réitérant le tirage (sans exclure l'année déjà tirée), soit en utilisant les séries de paires de performance dans l'ordre chronologique sur des fenêtres de trente ans glissant commençant depuis 1926 jusqu'à 1974 (soit 49 suites se chevauchant partiellement sur les 49 ans).

Les performances sont corrigées de l'inflation pour fournir des taux nets d'inflation et fournir des retraits à pouvoir d'achat constant calculés à partir des taux de prélèvement choisis.

Le critère de classement des stratégies est fondé sur le nombre de cas de ruine, ici la consommation totale du capital avant le terme choisi de trente ans. Des variantes avec un seuil plus court (15, 20 et 25 ans) sont également explorées, ainsi que sur le montant de capital restant éventuel à l'échéance (possibilité de doter des héritiers). Les résultats des 150 simulations sont régressés pour obtenir la stratégie la plus efficace sous ce critère (minimiser la probabilité de ruine avant 30 ans).

Les résultats obtenus avec cette approche empirique sont ensuite commentés :

- Le premier constat est que plus le pourcentage de prélèvement est élevé, plus la probabilité de ruine est élevée, c'est un résultat conforme à l'intuition.

Plus finement, pour les stratégies à ratio actions/obligations fixé, plus le pourcentage en obligations est élevé, plus cette probabilité de ruine est élevée, ce qui rejoint les résultats de Battochio, Menonchin et Scaillet.

- Les auteurs montrent que la stratégie « vendre les obligations d'abord » est toujours plus efficace que celle de rebalancement pour les cinq ratios d'allocation, et a fortiori que les autres, la pire étant son opposé « vendre les actions d'abord ». Ce constat confirme encore que la part investie en action doit rester importante et non être réduite pour essayer de réduire la volatilité du portefeuille.
- Les stratégies « tactiques » consistant à vendre le compartiment qui a le mieux ou le plus mal performé l'année précédente n'apportent pas sensiblement de valeur ajoutée et se situent toujours entre les deux extrêmes. Il n'y a donc pas de « martingale » de gestion fondée soit sur la poursuite de tendance, soit sur le rebond systématique, et ce type de gestion systématique n'est pas efficace.

Ces résultats ont été obtenus sur le marché financier nord-américain, avec des périodes de trente ans dont le point de départ se situe entre 1926 et 1941, marquées par la fin du boom des années vingt et la sévère crise de 1929 et ensuite caractérisées par une longue période assez favorable. En Europe, il n'est pas aisé d'utiliser des séries aussi longues et c'est la date de création du CAC 40 en 1987 qui sert généralement de borne de départ (même si des séries longues ont été reconstituées pour la France).

Le fait que les actions soient plus rentables en moyenne sur longue période que les obligations et les placements monétaires justifie qu'elles doivent être conservées le plus longtemps dès lors que leur volatilité n'est pas trop élevée et que l'horizon final est lointain, c'est la combinaison idéale à atteindre.

e) L'autre article américain a été corédigé par le prix Nobel d'économie W.F. Sharpe en 2008 (« The 4% Rule – At What Price ? » ; J.S. Scott, W.F. Sharpe & J.G. Watson April 2008, site Stanford.edu) et il est souvent cité car il est à la fois synthétique et pas trop théorique pour atteindre un large public. Les auteurs soulignent d'emblée que « ...the major flaw of the 4% rule is its attempt to support non-volatile spending with volatile investing... ». Ce constat se concrétise par la génération d'excédents non dépensés (« unspent surpluses ») quand les marchés surperforment et de possibles insuffisances (« spending shortfall ») quand ils sont en crise. Ils rappellent que la « règle des 4% » a été avancée initialement par Bengen en 1994 qui recherchait le rythme de prélèvement et

l'allocation optimale dans la phase de consommation du plan individuel de retraite d'un salarié américain. La règle consiste à prélever 4 % du capital accumulé à la date de départ en retraite et ensuite d'appliquer chaque année l'inflation cumulée à ce premier montant pendant trente ans. A partir d'analyses historiques Bengen a conclu alors que la fraction du portefeuille investie en action devait être comprise entre 50 et 75 %. Ces chiffres ont été confirmés par une étude postérieure de Cooley, Hubbard et Walz en 1998. Sharpe et ses coauteurs remarquent que ces conclusions ont été obtenues par des scénarios historiques avec chevauchements (analogue à l'article présenté ci-dessus) et que seule une approche stochastique permet d'explorer un grand nombre de scénarios. L'article de Sharpe et al. résume ensuite des travaux plus récents qui utilisent des simulations par Monte Carlo et qui ont aussi introduit le risque de longévité. Sharpe procède ensuite à une analyse critique (et sévère) des préconisations formulées par des gestionnaires d'actifs réputés et les articles de conseillers indépendants qui promeuvent cette règle simple à comprendre et surtout facile à énoncer. Cet article fournit également l'explication du taux de 4 % ; ils considèrent que le taux réel des obligations US vaut 2 % (valeur moyenne historique obtenue avec les obligations à taux fixe et celles indexées sur l'inflation) et calculent le prix d'un portefeuille de trente obligations zéro-coupon de maturités comprises entre 1 et 30 ans remboursées 1\$, soit 22,40 dont l'inverse équivaut au taux de 4,46 % (le même calcul avec un taux de ZC de 1,50 % donne 4,23% et avec 1,15 % exactement le taux de 4,00%). Dans l'examen critique de la règle des 4% ils montrent son inefficience relative en simulant un portefeuille formé de deux poches : une constituée d'obligations sans risque et l'autre du portefeuille théorique de marché, ce dernier représentant une proportion allant de 0 à 125 % du total par pas de 25%. Plutôt que d'utiliser directement le pourcentage en actions, ils utilisent la volatilité totale du portefeuille (allant de 0% à 15% avec des pas de 3%) car le portefeuille de marché (qui inclut la totalité des actifs financiers cotés disponibles et dont la capitalisation totale des actions représente 70% de ce total) présente une volatilité de 12% (ce qui correspond pratiquement à une volatilité de 17 % pour les actions, ce qui est un supérieur à celle du S&P 500). Les évolutions sur trente ans des portefeuilles composites sont simulées par Monte Carlo et plusieurs métriques sont utilisées pour analyser leurs valeurs terminales (le 30 ième prélèvement) selon des taux de prélèvement de 4,75 % et de 5% qui sont supérieurs au taux d'équilibre statique (obtenu avec les zéro-coupons de 4,46%). Ils analysent aussi des sous-consommations avec des taux de 4% (le « taux conventionnel ») et 4,25%. Ils constatent que le taux d'insuffisance (« failure rate »), soit la proportion de tirages (la probabilité) de ne pouvoir prélever la totalité du pourcentage ciblé la trentième année) baisse d'abord avec la volatilité du portefeuille puis augmente. Ce minimum local confirme qu'un choix optimal du couple rendement/risque peut permettre d'augmenter la consommation de l'épargne (donc le bien être financier) en acceptant un risque résiduel (dont il faudra fixer la borne admissible), ainsi avec un taux de prélèvement de 4,75% le taux d'insuffisance est de 14 % pour un portefeuille de volatilité 9% (ce qui correspond à environ 50% d'actions : 75 % du portefeuille de marché avec 70 % d'actions). Ils soulignent que l'évolution est dépendante du chemin car les montants sur lesquels les performances sont appliquées ne sont pas constants (donc leur ordre importe comme dans la phase de démarrage d'un CPPI). La seconde métrique est le « surplus cost » soit les montants générés et non consommés (sur les trente ans) exprimé en pourcentage du capital de départ. Ce surplus (qui peut être transmis aux héritiers a priori) est une perte d'opportunité pour le retraité et mesure un risque symétrique au précédent mais moins aigu puisque les prélèvements seront tous perçus au niveau désiré (ils auraient pu être plus élevés, et donc la totalité du capital n'a pas servi). La dernière métrique mesure le manque à gagner exprimé en pourcentage du capital initial en utilisant la règle du 4% plutôt que de prélever à un taux plus élevé. Les pourcentages (flat) sont tous inférieurs à 5%, ils sont nettement plus faibles que ceux obtenus avec la seconde métrique.

Le fait que l'allocation d'actif ne soit pas exprimée directement avec les pourcentages d'actions et d'obligation mais par la volatilité globale du portefeuille (même si la volatilité est une mesure synthétique souvent utilisée par les spécialistes mais moins familières aux épargnants concernés) et que les métriques choisies soient assez peu lisibles « directement » obscurcissent leurs conclusions et ne fournissent pas de « règle simple à retenir ». Ce refus d'une règle simple est probablement volontaire mais oblige à transformer les variables et les métriques en leurs équivalents plus courants. Avec leurs notations et leurs critères les auteurs ne proposent pas des pondérations optimales, là aussi probablement de manière volontaire pour ne pas fournir une nouvelle « règle de Sharpe »....

En transformant la mesure par la volatilité par une mesure en pourcentage action dans le portefeuille on constate que Sharpe et ses coauteurs privilégient finalement des pondérations allant de 50 % à 75 % pour celle-ci, analogues à celles dans les travaux antérieurs et qui sont assez agressives à première vue, mais concevable aux USA.

ANNEXE 2 : LA MESURE DE SOLVABILITE D'UN FRPS : LE SCENARIO CENTRAL ET LES CHOCS APPLIQUES (TEXTES ET COMMENTAIRES)

Le scénario de base :

Le niveau d'exigence minimal de marge de solvabilité figure dans l'article R. 385-2-1 du décret FRPS de 2017. La marge de solvabilité forfaitaire représente 4% des provisions mathématiques comme dans le référentiel Solvabilité 1. Ce niveau minimal de 4 % doit être respecté de manière permanente dans la simulation sur une période de 10 ans des résultats de l'entité avec des hypothèses de cristallisation de la structure de l'actif, d'une gestion en détention jusqu'à maturité des obligations et de réemploi sur ces mêmes maturités avec des rendements cristallisés. Cette projection des résultats futurs est le scénario central servant de référence et en cas de déficit il est nécessaire d'apporter des fonds propres supplémentaires afin que le ratio atteigne 4% à nouveau.

La simulation projette le compte de résultat prévisionnel sur dix ans, une durée en ligne avec l'horizon long d'un FRPS. Pour estimer les résultats nets futurs, on évalue les produits et charges prévisibles, les impôts éventuels, et de potentielles corrections. Les résultats nets futurs estimés sont additionnés algébriquement aux fonds propres comptables afin de calculer les projections du ratio de solvabilité. En cas d'insuffisance, des montants supplémentaires de capital sont appelés, ce qui suppose qu'il y ait un actionnaire ou un souscripteur solvable pour intervenir alors.

Les variables financières futures sont les cristallisations des valeurs moyennes de l'exercice précédent ; le taux d'intérêt sert de référence aussi bien pour estimer le taux de coupon des obligations que de taux de référence pour estimer le taux de rendement total des actions. La répartition par classes d'actifs est également figée, on conserve les pondérations actuelles sur les dix années suivantes : une convention simple à implémenter.

La cristallisation est la plus simple estimation de la valeur future d'une grandeur financière ; l'autre estimation qui est plus logique d'un point de vue financier est la valeur à terme car on peut la « bloquer » avec un produit dérivé et on peut aussi la considérer comme le meilleur estimateur du prix de marché futur obtenu par le jeu de l'offre et de la demande. Cet estimateur financier objectif n'a pas été retenu par le législateur qui a préféré geler les conditions financières de l'instant (disponibles sans calcul).

Voici une présentation plus détaillée des textes applicables, que nous commentons éventuellement.

L'article A.385-2 liste les différentes hypothèses :

- Primes futures : elles correspondent à « la moyenne des primes encaissées pendant les trois derniers exercices... ».
Etant modélisé en run-off dès à présent, le canton ne perçoit (pratiquement) plus de cotisations (qui sont l'équivalent des primes), ce poste est considéré comme nul (rigoureusement il représenterait moins de 1% de l'actif).
- Frais de gestion : ils doivent être estimés de manière cohérente avec les hypothèses de frais utilisées pour le calcul de la provision de gestion (cf article 4 de l'article R 343-3).
- L'allocation des actifs : ceux-ci sont évalués conformément aux articles R 343-9 et R 343-10, c'est-à-dire à leur prix d'achat (modulo un éventuel traitement correctif comptable et hors coupon couru). Pour évaluer la valeur du portefeuille et calculer les montants respectifs des deux poches, c'est la valeur au prix d'achat ou de revient des valeurs amortissables et non amortissables qui sont retenues. Ce ratio sera « inchangé pour l'ensemble de la période projetée », ce sont donc les ratios des valeurs comptables et non de marché qui seront retenus.

NB : Dans les simulations effectuées dans ce mémoire, on retient la valeur de marché des actions et la valeur faciale (ou comptable) des obligations car les deux sont disponibles directement. Techniquement le suivi des valeurs d'achat historiques dans la poche action est plus difficile que celui des lignes de la poche obligataire. La valeur historique d'achat d'une action est une donnée

comptable mais elle n'est pas pertinente ni en vision marché, ni même en vision prudentielle car elle ne représente pas le montant que l'on peut récupérer à terme comme pour une obligation. Les notions de « valeur amortissable » ou de « valeur non amortissable » proviennent de la réglementation et sont utilisées par convention dans le texte. Dans les simulations du mémoire on utilisera conjointement des valeurs comptables et des valeurs de marché et on acceptera l'écart méthodologique entre un ratio inhomogène calculé à partir de deux modes de valorisation des poches mais qui est à la fois logique et facile à implémenter.

- Les valeurs amortissables, en fait les obligations, sont selon le texte : « évaluées comptablement conformément à l'article R 343-9 et....., détenues jusqu'à maturité et réinvesties sur des obligations de maturités cohérentes avec la durée des engagements, sans pouvoir être supérieur à quinze ans ».

Deux points de ce texte sont à retenir :

- Premièrement : l'utilisation de la valeur comptable qui lisse les sauts de valeurs de marché (dans les deux sens) dans une stratégie privilégiant la détention jusqu'à maturité, ce qui est logique pour une entité gérant des engagements longs. Toutefois en cas de baisse significative du prix de marché une provision (PRE) est à constituer, avec un traitement assez favorable (lissage).
- Deuxièmement : la notion de réinvestissement dans des titres « en cohérence avec la durée des engagements » est mentionnée. Le législateur ne fixe pas de règle rigide, mais rappelle au gestionnaire la nécessité de respecter un certain équilibre des durées.

En revanche le texte précise que le taux utilisé pour les projections sur dix ans est celui de la moyenne sur l'année précédente du TEC N pour la maturité N retenue ; c'est donc le dernier taux connu qui est cristallisé.

Il n'est pas demandé dans le texte d'utiliser des taux forward, alors qu'ils sont calculables à partir de la courbe spot des taux TEC N par bootstrapping (ces taux à terme sont aussi fournis par les taux de swap ou de FRA). Le législateur n'a pas souhaité utiliser une approche de marché, ni inciter indirectement les entités gérant des engagements longs à utiliser des produits dérivés de taux en stratégie de « blocage » de la courbe des taux spot (en utilisant les taux forward).

Cette cristallisation est facile à implémenter. Elle incite les instances dirigeantes des entités à se focaliser sur les projections du compte de résultats et des bilans prévisionnels (« toutes choses égales par ailleurs ») fournissant des résultats simples à comprendre. Introduire un traitement plus fin mais plus complexe et moins aisément compréhensible pourrait compliquer leurs choix de gestion et leur compréhension des projections. Le fait que ces simulations soient faites chaque année avec des données de marché changeantes leur permet aussi de constater la plus ou moins grande inertie des résultats des scénarios annuels successifs et de ne pas chercher à gérer à court terme.

L'utilisation de taux à terme pourrait brouiller la compréhension de ces projections dans des entités de petite ou moyenne taille, qui ne disposeraient pas de plusieurs jeux de projections et ne seraient pas familières avec les notions de scénarios. Les entités de grande taille peuvent toujours continuer à effectuer des simulations supplémentaires utilisant des données de marché plus élaborées dans une logique proche de Solvabilité 2. Ces derniers pourront comparer les résultats des différents types de simulations et utiliser leurs enseignements pour mieux piloter la gestion.

La projection des différents postes du compte de résultat et du passif permet de déduire le solde des placements et donc les réinvestissements possibles sous ces contraintes.

- Les valeurs non amortissables, en fait les actions et les placements immobiliers, sont « évaluées comptablement conformément à l'article R 343-10, génèrent un rendement annuel égal à la moyenne annuelle, sur l'exercice précédent le test, du niveau du taux moyen des emprunts d'Etat français augmenté d'une prime de risque 250 points de base ».

Cette formulation fournit une règle (relativement) claire pour estimer le rendement de la poche actions et pour l'évaluation comptable de l'assiette retenue : c'est celle de l'article R 343-10 du Code des Assurances, c'est-à-dire la valorisation en prix d'achat ou de revient.

Le texte ne donne pas une définition détaillée du taux de rendement, on suppose logiquement que c'est le taux de rendement qui intègre en outre d'éventuels gains (ou pertes) en capital.

Le niveau normatif du taux de rendement est fixé comme la moyenne annuelle du TME de l'exercice précédent augmenté de 250 points de base (qualifiée ici de « prime de risque »); le texte réglementaire n'utilise pas une valeur déduite de l'observation du marché comme en Solvabilité 2. Le terme même de prime de risque confirme qu'il s'agit du rendement total et non du seul taux de dividende qui est d'ailleurs incomplet pour caractériser le rendement d'une action.

NB : On reviendra sur cette valeur fixée à 250 points de base et sur sa cohérence (ou non) avec les observations sur les séries historiques du CAC 40 et du TME, sur une profondeur d'une trentaine d'années. Le spread constant entre le rendement de la poche actions avec le niveau des taux longs de l'Etat est cohérent avec une approche en probabilité historique et avec la notion de prime de risque. Nous comparerons les valeurs historiques françaises (taux de rendement total du CAC 40 et taux TME) avec l'hypothèse d'une prime de risque de 250 points de base.

- La mortalité : « la mortalité projetée est cohérente avec les hypothèses utilisées pour le calcul des provisions mathématiques, évaluées conformément à l'article R 343-4 », cet article décrit les travaux de l'actuaire dans le domaine des tables de mortalité.
- L'imposition : « les résultats du fonds de retraite professionnel sont imposés aux conditions en vigueur ...et les éventuels crédits d'impôt ne sont comptabilisés que si... ». Même si l'IRPS est à but non lucratif et fait bénéficier ses allocataires et futurs allocataires de ses gains, il est soumis à l'impôt sur les sociétés depuis une dizaine d'années (sous ses formes prudentielles successives). Cette charge supplémentaire est à intégrer dans la projection à dix ans et nécessite d'évaluer la chronique des résultats nets, assez complexe à modéliser dans les simulations, c'est pourquoi on négligera dans un premier temps ce poste. On supposera de facto que les revalorisations seront calibrées pour limiter l'imposition au niveau de l'IRPS (et on se placera « hors fiscalité »).
- La participation aux bénéfices : « ...est évaluée aux conditions en vigueur à la date de clôture de l'exercice précédent le test ». Ce libellé court signifie que la politique de participation est elle aussi cristallisée.

NB : Dans les simulations en flux de caisse, cette notion comptable ne sera pas utilisée, la logique étant de servir les flux de rentes sans tracer l'origine des fonds entre les remboursements au pair, les coupons ou dividendes et les gains dégagés ainsi que leur distribution dans le temps.

- Les provisions techniques : Celles-ci sont calculées de manière classique comme sous Solvabilité 1 avec les tables de mortalité et le taux technique retenu.

Ces éléments de méthodologie doivent être connus et maîtrisés au même titre que ceux utilisés dans Solvabilité 2. Ils révèlent la logique qui sous-tend le suivi prudentiel, avec l'accent mis sur la cristallisation des paramètres de

rendement et de coupon et l'approche comptable. L'approche en flux est indirecte ici, via la variation des provisions principalement et les charges comptabilisées.

Le mécanisme de réinvestissement est naturel pour des entités en phase de croissance ou en plateau, mais il est moins adapté aux entités qui doivent liquider progressivement leur portefeuille financier, il est généralement inférieur au montant amorti. Ce mécanisme sera appliqué dans les simulations qui calculent le montant à réinvestir chaque année en fonction des flux sortants modélisés ou fixés et des fruits du portefeuille modélisé.

Enfin on remarque que les provisions sont calculées avec « le taux technique retenu », celui-ci doit respecter la condition de ne pas excéder 60% du TME moyen des six derniers mois (et avec les règles de variation discrètes).

Les chocs réglementaires :

A partir du scénario de base on applique des tests de résistance sous la forme de chocs. Trois types de choc, tous pénalisants, sont appliqués de manière indépendante : baisse des taux d'intérêt, baisse du rendement des actions (et de l'immobilier) et baisse de la mortalité (choc à la hausse de la longévité), et le décret précise leurs caractéristiques.

Comme dans Solvabilité 2, le choc de taux est appliqué à la fois à l'actif : sur la poche obligataire via le niveau des coupons en réemploi (et pas par la variation de la valeur de marché du portefeuille) et au passif : sur les provisions techniques portées au bilan prudentielle IORP (et comptable) via le taux technique d'actualisation.

Pour chaque choc, la chronique des résultats nets sur les dix exercices futurs est recalculée.

On retient ensuite le maximum des montants supplémentaires cumulés de besoin en capital supplémentaire provenant du scénario le plus défavorable de chaque exercice N divisé par N, (N étant la durée en années séparant la date de la simulation future de la date actuelle) et N allant de 1 à 10.

Ce principe utilisant à la fois le « pire » scénario de chaque exercice simulé et un amortissement étalé sur la période entre allant jusqu'à l'année du maximum est logique dans une approche fondée sur le long terme et sur la capacité à consolider la solvabilité de l'entité en réagissant immédiatement et en acceptant un retour à la solvabilité minimale dans un délai raisonnable. Cette approche graduelle est assez éloignée de la vision à court terme sur un horizon d'un an de Solvabilité 2, et de son seuil fixé à 99,5%, elle est en ligne avec une approche en lissage.

Ces chocs peuvent tous générer a priori un besoin supplémentaire de capital car ils sont tous pénalisants via une baisse de rendement action ou de coupon obligataire (puisque l'impact sur les provisions techniques correspond à une hausse de celles-ci) et d'allongement de la durée de vie, et c'est le plus pénalisant qui est retenu. Il n'y a pas de cumul (mais pas de compensation non plus), ce qui n'est pas fortement pénalisant contrairement à l'approche en VaR de Solvabilité 2.

Les descriptions du scénario des trois chocs règlementaires figurent ainsi dans le décret :

- Une baisse des taux d'intérêt : « Pour le scénario de baisse des taux d'intérêt, le niveau des taux d'intérêt pour les valeurs amortissables ainsi que celui servant de référence pour le calcul des provisions techniques est diminué, pour toute la durée de la projection (nb : soit 10 ans) du maximum entre une baisse relative de 40% et une baisse absolue de 0,75 % sans pouvoir être inférieur à 0% ou supérieur à 3,50 % ».
- Une baisse des rendements financiers : « Dans le scénario de baisse des rendements financiers tirés des actifs non amortissables, le niveau de rendement des actifs non amortissables est diminué de 30% ».

- Une baisse de la mortalité : « Dans le scénario de baisse de la mortalité, le taux de mortalité à tout âge est diminué de 10% ».

Le choc de taux d'intérêt est classique, puisqu'il est estimé à la fois par un choc absolu et par un choc relatif avec un mécanisme de maximum et de bornage comme dans la plupart des stress tests de taux d'intérêt.

Le choc s'applique aussi bien à l'actif qu'au passif, comme dans Solvabilité 2 et capte les différences de durée.

Le texte indique : « le niveau des taux d'intérêt...servant de référence pour le calcul des provisions techniques est diminué pour toute la durée de projection du maximum entre une baisse de » ce qui oblige à modifier le taux d'actualisation servant dans le calcul de la provision mathématique sur les seules dix prochaines années (et de le laisser inchangé au-delà). Si un taux technique unique est utilisé, le plus fort choc à la baisse doit lui être appliqué.

Dans le cas de l'IRPS analysé le taux technique est nul, il n'est pas choqué par conséquent.

On remarque qu'il n'y a pas de choc à la hausse car c'est une approche « par les flux » traduite au compte de résultat et non par « les valeurs de marché » (en comptabilité de couverture on parlerait de « cash flow hedge » alors que Solvabilité 2 est en « fair value hedge »).

Le choc à la baisse est appliqué sur le rendement des actifs financiers non amortissables (les actions) et non pas sur leur valeur de marché (ce qui est fait dans Solvabilité 2, avec un choc allant de -22% au début de la période transitoire – et dans certains cas précis pour atteindre désormais -39%, pour les actions appartenant à de grands marchés liquides) ; la remarque faite pour les taux s'applique aussi ici, on se focalise sur les fruits seuls.

On retrouve la différence entre l'approche par les flux d'IORP2 et celle par les valeurs de marché de Solvabilité2.

Le choc de mortalité, en fait un choc de longévité, est analogue à celui qui est appliqué dans Solvabilité 2 dans son principe, mais deux fois plus faible en valeur relative car les taux de mortalité sont diminués ici de 10 % et non de 20 %. L'implémentation s'effectue en adaptant en conséquence les tables de mortalité et se traduit par l'augmentation du montant de la provision mathématique, ainsi que de l'espérance de vie moyenne de la population couverte.

ANNEXE 3 : ANALYSE DE LA MORTALITE DU CANTON SUR LA DECENNIE ECOULEE

Le suivi de la mortalité observée des bénéficiaires du canton étudié dans ce mémoire a été effectué depuis plus d'une dizaine d'années par son actuaire Galéa. Nous reprenons ici les statistiques qu'il a établi et les commentaires. La première question était de vérifier si la mortalité de cette population d'anciens employés et cadres de banque pouvait être décrite avec les tables TGF 00-05 et TGH 00-05. Les conditions de travail de cette population du secteur tertiaire ne sont pas représentatives de celles de l'ensemble de la population active française (secteurs primaire et secondaire) qui sont couvertes par les tables INSEE. Les tables TGF et TGH ont été établies sur des populations de rentiers qui sont également une population restreinte.

Compte tenu de la faible taille (au sens statistique) de la population suivie : environ un millier de personnes, il est nécessaire de l'observer sur plusieurs années pour pouvoir conclure.

Galéa a dressé un tableau donnant les taux de mortalité théoriques et observés couvrant les années 2009 à 2022 (ici présenté sans distinction de sexe, ce qui était fait auparavant). Les taux sont détaillés par tranches d'âge et en moyenne (pondérée par les effectifs). Ce dernier chiffre (théorique et observé) est assez stable au cours du temps : il n'y a pas de tendance haussière marquée mais des fluctuations (effet « moisson » ? : le taux baisse après une hausse).

La volatilité du taux moyen observé peut être estimée de manière simpliste mais réaliste supposant un âge moyen de 70 ans et un taux de mortalité moyen de 4% et un échantillon de mille personnes. Le calcul de l'intervalle de confiance du taux s'effectue à partir de l'écart-type valant : $((p_x * q_x) / L_x)^{0,5}$ qui se simplifie en $(q_x / L_x)^{0,5}$ soit ici 0,6 % correspondant à une bande d'incertitude de +/- 1,2 % au seuil bilatéral de 95% (cf l'ouvrage Théorie et pratique de l'assurance-vie ; M. Fromenteau et P. Petauton , Economica 5^{ième} édition ; 2017). Les valeurs observées se situent dans l'intervalle : 2,8 % à 5,2 % (cette dernière valeur est sujette à caution puisque certaines liquidations en VFU à la suite de la campagne Eckert Sapin 2 de recherches de radiés bénéficiaires avaient été assimilées à des décès des bénéficiaires...et la statistique n'a pas été corrigée ensuite). En excluant cette donnée non fiabilisée on obtient un intervalle observé de 3,2 % à 4,9 % inclus dans l'intervalle théorique calculé de manière approchée.

Ce constat nous a permis de considérer les tables TGF et TGH comme applicables, sans correction, au canton de l'IRPS dans les estimations de mortalité. I n'y a pas de risque avéré de sous-mortalité.

Taux de mortalité théorique TGH-TGF

qx théoriques TGH-TGF	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	Moyenne 2011-2022	
50-59	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,2%	0,3%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,0%
60-69	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,4%	0,5%	0,5%	0,5%	0,7%
70-79	1,5%	1,5%	1,4%	1,5%	1,4%	1,4%	1,4%	1,4%	1,3%	1,2%	1,2%	1,2%	1,2%	1,2%	1,2%	1,6%
80-89	5,4%	5,4%	5,5%	5,5%	5,6%	5,5%	5,5%	5,4%	5,3%	5,1%	4,9%	5,2%	4,4%	4,5%	4,5%	5,0%
90-99	15,8%	14,4%	13,5%	13,2%	13,4%	13,5%	13,9%	13,9%	14,0%	14,1%	14,0%	15,5%	13,8%	14,1%	14,7%	14,7%
100 ans et plus	28,9%	30,3%	28,3%	30,1%	29,0%	26,4%	29,8%	29,5%	27,1%	28,0%	27,2%	20,4%	24,7%	24,7%	24,7%	39,0%
TOTAL	3,7%	3,8%	3,8%	3,9%	3,9%	4,1%	4,1%	4,1%	4,2%	4,2%	4,1%	4,2%	3,6%	3,5%	4,3%	

Taux de mortalité réels

qx réels - Ts	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	Moyenne 2011-2022	
50-59	0,0%	10,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
60-69	0,3%	0,3%	0,8%	1,1%	1,1%	0,6%	0,3%	0,5%	1,1%	0,9%	0,7%	0,3%	1,0%	0,0%	0,8%	0,8%
70-79	1,6%	0,4%	2,1%	1,2%	2,7%	2,3%	0,8%	2,4%	0,6%	1,7%	3,1%	0,3%	1,2%	1,4%	1,6%	1,6%
80-89	5,4%	7,9%	7,0%	4,3%	5,8%	5,5%	4,7%	5,3%	4,5%	4,7%	6,4%	5,7%	2,7%	2,0%	5,3%	5,3%
90-99	14,8%	14,3%	16,3%	12,3%	14,2%	10,4%	10,6%	12,2%	10,0%	14,4%	21,8%	21,3%	14,6%	16,9%	14,5%	14,5%
100 ans et plus	25,0%	50,0%	33,3%	75,0%	0,0%	25,0%	25,0%	40,0%	50,0%	50,0%	66,7%	0,0%	62,5%	20,0%	42,9%	42,9%
TOTAL	3,6%	4,6%	4,9%	3,7%	4,6%	3,9%	3,2%	4,2%	3,4%	4,5%	6,7%	4,8%	3,9%	3,3%	4,3%	

Ecart

Ratio réels/th	-3,3%	21,5%	27,7%	-5,1%	15,8%	-5,8%	-23,1%	1,0%	-17,5%	8,0%	61,6%	15,3%	7,3%	-5,2%	1,91%
-----------------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	---------------	-------------	---------------	-------------	--------------	--------------	-------------	--------------	--------------

