



Mémoire d'actuariat

Tarification d'un traité proportionnel non-vie par simulation

Alice ZINS
Master 2 Actuariat
Année universitaire 2022-2023

Table des matières

Remerciements	4
Résumé	5
Abstract	6
Introduction	7
1 Le groupe Covéa	8
1.1 Histoire	8
1.2 La réassurance non-vie chez Covéa	9
2 Généralités sur la réassurance	11
2.1 Principe de la réassurance	11
2.2 Besoin et objectifs de la réassurance	13
2.3 Fonctionnement de la réassurance	13
2.3.1 Cycles en réassurance	13
2.3.2 Le sens de la réassurance	14
2.3.3 Les formes de réassurance	14
2.3.4 Les modes de distribution	15
2.3.5 Le placement d'un traité de réassurance	16
2.3.6 La notation des compagnies de réassurance	17
2.4 La réassurance proportionnelle	17
2.4.1 La quote-part	18
2.4.2 L'excédent de plein	19
2.4.3 Combinaison quote-part et surplus	22
2.5 Clauses des traités proportionnels	23
2.5.1 La commission de réassurance	23

2.5.2	La participation aux sinistres et la participation aux pertes	24
2.5.3	Le report de pertes	27
2.5.4	La participation aux bénéfices	28
2.6	La réassurance non-proportionnelle	29
3	Tarification d'un traité proportionnel non-vie	31
3.1	Périmètre d'étude	31
3.2	Mise en as-if	34
3.2.1	Prise en compte de l'inflation	34
3.2.2	Prise en compte des changements dans le traité de réassurance	35
3.2.3	Prise en compte des changements tarifaires (<i>rate changes</i>)	36
3.3	Tarification d'un traité proportionnel	38
3.3.1	Problématique des données en réassurance	38
3.3.2	Etapas de la tarification d'un traité proportionnel non-vie	39
3.4	Enjeux pour la direction	41
3.4.1	Approche actuelle	41
3.4.2	Distribution du ratio combiné et choix du seuil des atypiques	42
4	Détermination du seuil des atypiques	44
4.1	Les différents seuils de la tarification d'un traité proportionnel	44
4.2	Minimisation de la variance	46
4.3	Minimisation de la distance	49
4.4	Utilisation d'un modèle composite	49
4.5	Méthode de minimisation de l'AMSE	52
5	Modélisation du ratio combiné et simulation	54
5.1	Modélisation du loss ratio atypique	54
5.1.1	Modèle collectif	54
5.1.2	Choix de la distribution pour la sévérité des sinistres atypiques	55
5.1.3	Modélisation de la fréquence des sinistres atypiques	58
5.1.4	Simulation du loss ratio atypique	59
5.2	Modélisation du loss ratio attritionnel	59
5.3	Prise en compte des frais et application des clauses	60

6 Application	62
6.1 Application sur données réelles	62
6.1.1 Description du traité	62
6.1.2 Revalorisation des données	64
6.1.3 Choix du seuil des atypiques	66
6.1.4 Modélisation de la sinistralité et simulation	70
6.1.5 Application des clauses et analyse de la rentabilité	79
6.1.6 Tests de sensibilité	84
6.2 Présentation de l'application RShiny	90
Conclusion	91
Bibliographie	96
Annexes	98

Remerciements

Avant toute chose, je souhaite remercier l'ensemble des personnes ayant contribué au bon déroulement de mon alternance et la rédaction de mon mémoire.

En premier lieu, je tiens à remercier mon tuteur en entreprise, Gwenaël Pedron, pour son suivi et ses précieux conseils.

Je tiens également à remercier mon manager, Christophe Guilloux, pour sa confiance et ses remarques pertinentes.

Enfin, je remercie l'ensemble de l'équipe pédagogique du DUAS pour leurs enseignements. Plus particulièrement, je remercie mon tuteur universitaire, Pierre-Olivier Goffard, pour son suivi et ses pistes de réflexion.

Résumé

Dans le cadre de la tarification des traités de réassurance proportionnelle, la question cruciale à laquelle souhaite répondre l'actuaire est la suivante : « Au vu des conditions actuelles, faut-il souscrire l'affaire ? ». Face à cette question, le réassureur est confronté à une situation délicate : un historique limité de seulement dix années de données, offrant une vision incomplète du risque.

L'objectif de ce mémoire est de compléter et d'optimiser les outils de tarification des traités proportionnels du pôle de réassurance non-vie de Covéa, en adoptant l'approche privilégiée de la simulation qui permet de pallier ce problème de manque de visibilité. En simulant un grand nombre de valeurs de la sinistralité annuelle, l'actuaire disposera d'une distribution du ratio combiné. Il sera donc mieux équipé pour appréhender le risque et évaluer la rentabilité du traité.

Par ailleurs, lors de la tarification d'un traité proportionnel, il est nécessaire de distinguer les sinistres attritionnels et les sinistres atypiques. Cette distinction se matérialise par la définition d'un seuil à partir duquel les sinistres seront considérés comme atypiques. Pour déterminer ce dernier, l'actuaire aura le choix entre quatre méthodes.

Dans l'ancien outil, seule la sinistralité atypique était modélisée par une loi de probabilité. La nouvelle approche par simulation impose l'ajustement de la sinistralité attritionnelle par une loi de probabilité. Celle-ci est donc modélisée par une loi Log-normale ou une loi Gamma. Le choix de la loi est basé sur les critères d'information d'Aikake et bayésien. Pour la modélisation des sinistres atypiques, une approche classique fréquence \times sévérité est utilisée. La sévérité des sinistres atypiques, qui était jusqu'alors uniquement modélisée par la distribution de Pareto, pourra également être modélisée par une distribution de Pareto généralisée. Pour sélectionner la distribution la plus adaptée aux données, des comparaisons graphiques et des statistiques d'adéquation sont utilisées. La fréquence des sinistres atypiques est quant à elle modélisée par une loi de Poisson.

L'impact du choix du seuil des atypiques et de l'approche par simulation est illustré par l'application de toutes les méthodes introduites sur des données réelles d'un traité proportionnel couvrant l'incendie.

Mots clés : réassurance non-vie proportionnelle, sinistralité attritionnelle, sinistralité atypique, seuil, modélisation, simulation, distribution, ratio combiné.

Abstract

When it comes to pricing proportional reinsurance treaties, the question the actuary wants to answer is : « Given current conditions, should the treaty be underwritten ? ». Faced with this question, the reinsurer finds himself in a delicate situation : a limited history of just ten years' data, offering an incomplete view of the risk.

The aim of this dissertation is to complete and optimize the pricing tools for proportional treaties of Covéa's non-life reinsurance division, by adopting the preferred approach of simulation, which makes it possible to overcome this problem of lack of visibility. By simulating a large number of annual claims values, the actuary will have a distribution of the combined ratio. He will therefore be able to apprehend the risk and assess the profitability of the treaty.

When pricing a proportional treaty, it is also necessary to distinguish between attritional and atypical claims. This distinction is made by defining a threshold above which claims are considered atypical. To determine this threshold, the actuary has a choice of four methods.

In the old tool, only atypical claims were modeled by a probability distribution. The new simulation approach requires attritional claims to be fitted with a probability distribution. This is modelled by a Lognormal or Gamma distribution. The choice of law is based on the Aikaike and Bayesian information criteria.

To model atypical claims, a classic frequency \times severity approach is used. The severity of atypical claims, only modelled by the Pareto distribution until now, can now be modelled by a generalized Pareto distribution. Graphical comparisons and test statistics are used to select the distribution best fitted to the data. The frequency of atypical claims is modeled by a Poisson distribution.

The impact of the choice of the atypical threshold and the simulation approach is illustrated by applying all the methods introduced to real data from a proportional treaty covering fire.

Mots clés : non-life proportional reinsurance, attritionnal claims, atypical claims, threshold, modelling, simulation, distribution, combined ratio

Introduction

Pour suivre la croissance du marché de la réassurance et développer sa compétitivité, le pôle de réassurance non-vie du groupe Covéa désirait améliorer la tarification de ses traités. Une précédente étude a permis de compléter l’outil de tarification des traités non-proportionnels en excédent de sinistres. Cette étude, qui se concentre sur la tarification des traités de réassurance proportionnelle, entre dans la continuité de ce projet.

L’objet du mémoire se concentre sur l’obtention d’une distribution du ratio combiné du réassureur, afin de prendre en compte la volatilité du risque et de disposer d’une tarification plus précise. Pour répondre à cette problématique, une nouvelle approche par simulation est implémentée. Dans le cadre de la tarification d’un traité proportionnel, la modélisation des sinistres attritionnels, c’est-à-dire des sinistres fréquents mais de faible montant, et la modélisation des sinistres atypiques, de fréquence faible mais de forte intensité, se font séparément. Il est donc nécessaire de déterminer un seuil à partir duquel les sinistres sont considérés comme importants. Pour cela, quatre méthodes seront proposées.

La principale difficulté de ce mémoire réside dans le manque de données historiques dont dispose l’actuaire en charge de la tarification. Il peut ainsi être compliqué d’ajuster une loi de probabilité. Pour déterminer la loi la plus adaptée, l’actuaire dispose d’outils graphiques et numériques.

En parallèle de l’exposé théorique, la création d’une application de tarification *RShiny* vient répondre aux besoins opérationnels. Cette application vient remplacer l’outil de tarification déjà existant au sein de la direction.

En somme, ce mémoire aspire à être un guide regroupant les différents aspects de la tarification des traités de réassurance proportionnelle.

Le premier chapitre permet de décrire brièvement le cadre de travail. Le deuxième chapitre permet d’exposer le fonctionnement de la réassurance et plus précisément d’un traité de réassurance proportionnelle et de ses différentes clauses. Ces notions sont essentielles à la compréhension du mémoire. Le chapitre qui suit permet de fixer le périmètre de l’étude et d’introduire la problématique et les différents enjeux du mémoire. Les méthodes de détermination du seuil et la modélisation de la sinistralité atypique et attritionnelle sont décrites dans les chapitres 4 et 5. Enfin, le mémoire se termine par l’application des différentes techniques exposées sur des données réelles.

1. Le groupe Covéa

Le groupe Covéa est un groupe d'assurance mutualiste régit par le Code des Assurances qui réunit les marques d'assurance GMF, MAAF, MMA et, plus récemment, la marque de réassurance Partner Re.

1.1 Histoire

Durant le 19^{ème} siècle et la première moitié du 20^{ème} siècle, les sociétés mutuelles ont façonné le secteur de l'assurance en France. C'est en 1819 qu'a été créée Assurances Mutuelles de France, la plus ancienne des mutuelles fondatrices du groupe. Aujourd'hui, Covéa est un leader de l'assurance de biens et responsabilité en Europe.

En 2003, les marques MAAF, MMA et GMF décident d'unir leurs forces en créant la Société de groupe d'assurance mutuelle (SGAM) Covéa. Première SGAM à voir le jour en France, elle introduit des liens de solidarité et permet l'élaboration d'une stratégie commune. La création de Covéa Coopérations en 2012 scelle la fusion de leur puissance financière et de leurs capacités opérationnelles.

En juillet 2022, le groupe Covéa rachète Partner Re, acteur de référence dans la réassurance. PartnerRe a une présence forte en Amérique du Nord, Europe et dans la région Asie-Pacifique.

La figure 1.1 illustre l'organisation du groupe Covéa. La direction de réassurance en acceptations se trouve au niveau bloc international.



FIGURE 1.1 – Structure du groupe Covéa

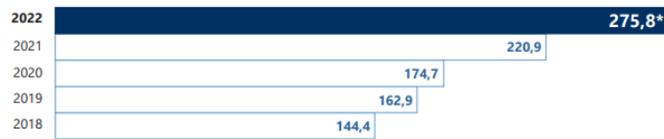
1.2 La réassurance non-vie chez Covéa

Avant la fusion avec PartnerRe, Covéa était sur le marché de la réassurance depuis plus de 65 ans et était gérée par la Direction Réassurance Acceptations Internationales (DRAI) à Strasbourg. Depuis le 1er juillet 2023, la DRAI a été complètement intégrée à PartnerRe Strasbourg.

Je parlerai dans ce mémoire de la DRAI uniquement, puisque mon alternance s'est effectuée au sein de cette direction.

Les chiffres d'affaires de la DRAI total et par branche sont détaillés dans la figure 1.2.

CHIFFRE D'AFFAIRES | MILLIONS €



BRANCHES

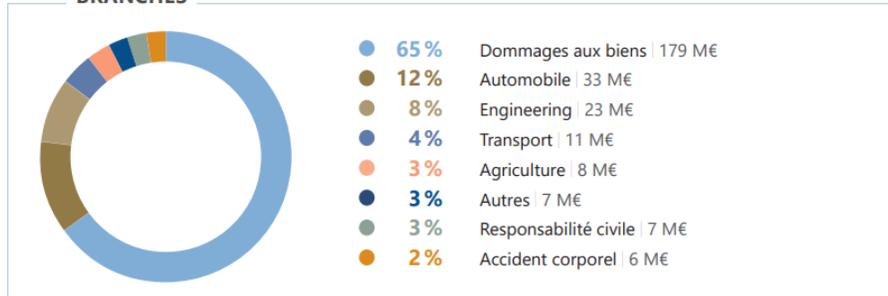


FIGURE 1.2 – Chiffre d'affaires et secteur d'activité de la DRAI

La DRAI est composée d'une cinquantaine de collaborateurs qui se répartissent en quatre pôles : le pôle Projets, Méthodes et Coordination, le pôle Pilotage Economique et Performance (PEP), le pôle Développement Commercial et Rétrocession et enfin le pôle Tarification et Actuariat, dont je fais partie.

L'équipe Tarification et Actuariat, dirigée par M. Christophe Guilloux, est composée de 7 personnes réparties en trois sous-pôles :

- Le pôle **Contrôles permanents**, dont la mission principale est le contrôle du guide de souscription.
- Le pôle **Modélisation et rétrocession**, dont la mission principale est de modéliser le portefeuille et calibrer notre propre protection (rétrocession) de façon à maîtriser nos expositions et se protéger face au risque de catastrophe naturelle.
- Le pôle **Etudes actuarielles**, dont les principales missions sont le développement des outils et des méthodes de tarification, ainsi que le suivi et la rentabilité du portefeuille.

L'activité de réassurance non-vie de la DRAI s'inscrit à l'échelle mondiale, auprès de 44 pays et 318 cédantes, mais son implantation est particulièrement forte en Europe, où est produit 65% du chiffre d'affaires.

2. Généralités sur la réassurance

Le principe de mutualisation des risques est un principe fondamental dans l'activité d'assurance. Il consiste à répartir le coût de la réalisation d'un sinistre entre les différents assurés, tous soumis au même risque. Néanmoins, afin de limiter son exposition financière et renforcer sa couverture, l'assureur peut se tourner vers la réassurance.

Cette deuxième partie a pour objectif de permettre au lecteur de se familiariser avec les mécanismes de la réassurance, souvent méconnue du grand public. Plus particulièrement, le fonctionnement et les clauses des traités proportionnels, notions essentielles dans la compréhension de ce mémoire, seront présentées en détail.

2.1 Principe de la réassurance

La réassurance est un procédé par lequel l'assureur se couvre contre ses risques en l'échange d'une prime de réassurance. Dans le langage courant, la réassurance est décrite comme un transfert de risque entre un assureur (la cédante) et un autre assureur (le réassureur). Néanmoins, bien que cette notion de cession de risque soit souvent utilisée, l'assureur reste juridiquement le seul responsable vis-à-vis de l'assuré (article L111-3 du Code des Assurances). Ainsi, la cédante devra rembourser ses assurés sinistrés, même si le réassureur refuse de payer. L'opération de réassurance est étrangère à l'assuré.

Sur un contrat de réassurance, il y a une unique cédante mais il peut y avoir plusieurs réassureurs. La cédante souhaite plusieurs réassureurs sur le contrat afin de diversifier son placement et limiter le risque de contrepartie. De leur côté, les réassureurs ont aussi leur propre appétit au risque et peuvent ainsi souhaiter ne souscrire qu'une petite part, en fonction de leur capacité notamment. Il faut donc trouver un juste équilibre entre les deux parties.

Chaque réassureur ainsi présent sur le contrat souscrit donc une certaine part. Le réassureur ayant la plus grande part est appelé le réassureur apériteur (*leader* en anglais). Ce dernier définit les conditions du contrat et fixe le tarif, en accord avec la cédante. Les autres réassureurs sont des suiveurs (*followers*), ils tarifient l'affaire de façon à déterminer la rentabilité du traité et la part qu'ils souhaitent souscrire, mais ce n'est pas eux qui déterminent le taux de prime final.

Enfin, il est important de savoir que le réassureur se réassure lui aussi auprès d'autres réassureurs. On dit alors que le réassureur cède des affaires en rétrocession, et les réassureurs qui acceptent ces affaires sont appelés les rétrocessionnaires.

La figure 2.1 illustre les différents acteurs de la réassurance.

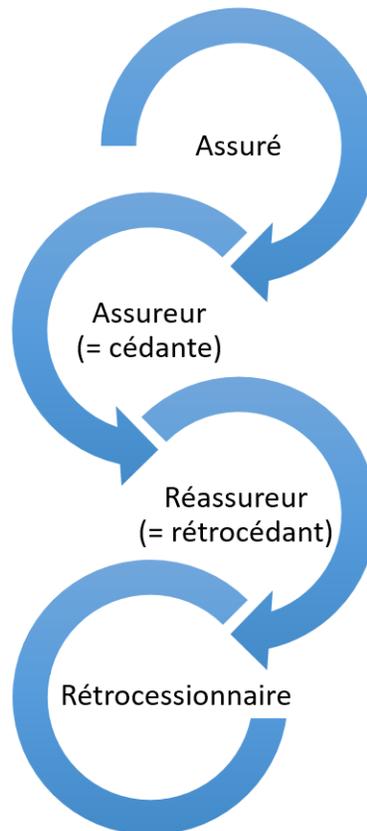


FIGURE 2.1 – Les acteurs de la réassurance

2.2 Besoin et objectifs de la réassurance

La réassurance facilite une répartition plus large des risques au niveau mondial et joue un rôle dans la stabilité du marché de l'assurance. Traditionnellement, les compagnies d'assurance font appel aux réassureurs pour les raisons suivantes :

- Réduire la volatilité de la sinistralité en se protégeant contre les sinistres exceptionnels et ainsi améliorer l'équilibre du portefeuille et stabiliser le résultat annuel.
- Se protéger contre les cumuls de risques, notamment sur des événements catastrophes naturelles (tels que le tremblement de terre, la tempête ou l'inondation par exemple).
- Augmenter sa capacité de souscription. La réassurance permet à l'assureur de couvrir de grands risques qu'il ne serait pas judicieux de conserver pour son propre compte.
- Réduire le besoin en capital. La réassurance permet aux assureurs de diminuer le niveau de fonds propres exigé par la directive Solvabilité 2.
- Supporter l'entrée sur un nouveau marché. Se lancer sur un marché nouveau représente un risque pour l'assureur. La réassurance apporte une aide au développement d'un nouveau produit en limitant l'incertitude et les coûts que cela peut engendrer.

Pour offrir ces services et être en mesure de respecter ses engagements, les réassureurs travaillent à l'échelle internationale (diversification géographique) et sur de multiples branches d'assurance (diversification sur les risques).

2.3 Fonctionnement de la réassurance

2.3.1 Cycles en réassurance

De même que l'assurance, la réassurance connaît une activité cyclique mais sur des périodes plus longues. Les taux de primes augmentent et baissent en fonction de l'évolution de la sinistralité.

On parle de marché haussier (ou *hard market* en anglais) lorsque le prix de la réassurance est élevé. Le marché haussier fait souvent suite à un gros événement dont les effets se répercutent sur le marché, comme une pandémie, une catastrophe naturelle ou encore un contexte économique difficile. L'offre de réassurance est croissante car les compagnies victimes du cycle de pertes veulent rétablir leur position. Les réassureurs sont en position de force pour imposer leurs conditions.

Pendant une période où il n'y a pas ou peu de catastrophes majeures justifiant le taux élevé des primes, le marché entre dans ce que l'on appelle un *soft market*. La capacité est librement disponible et l'offre est abondante. La concurrence augmente et les taux de prime finissent par baisser de manière progressive.

La figure 2.2 schématise les différents cycles en réassurance.

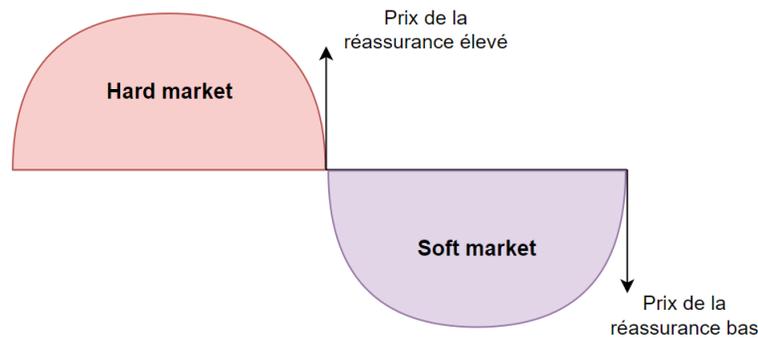


FIGURE 2.2 – Les cycles en réassurance

Depuis la Covid 19, le marché de la réassurance est actuellement en marché haussier.

2.3.2 Le sens de la réassurance

La réassurance a un double sens selon si la compagnie accepte le risque ou le cède.

La cession en réassurance est l'opération par laquelle l'assureur, appelé la cédante, transfère une partie de son risque à un ou plusieurs réassureurs. Il s'agit de réassurance passive.

L'acceptation en réassurance désigne l'opération par laquelle le réassureur accepte de couvrir un risque souscrit par un assureur. Il s'agit de réassurance active.

2.3.3 Les formes de réassurance

Il existe quatre formes de réassurance qui se distinguent premièrement par leur caractère facultatif ou obligatoire, et deuxièmement par leur sens (cession ou acceptation).

En réassurance obligatoire (ou traité), la cession et l'acceptation sont obligatoires. Ce mode de réassurance couvre ainsi tout le portefeuille de la cédante pour le type de risque défini au contrat. Tous les risques du portefeuille sont couverts. De ce fait, la gestion administrative de la réassurance obligatoire est simple et il n'y a pas de risque d'anti-sélection.

En réassurance facultative, la cession et l'acceptation sont facultatives. La cédante est libre de proposer le risque et le réassureur, après une analyse de celui-ci, est libre de l'accepter ou le refuser. La gestion administrative de ce mode de réassurance est plus complexe, elle requiert un suivi des risques du portefeuille. De plus, elle présente un risque d'anti-sélection si la cédante cède uniquement des mauvais risques.

Il est ensuite possible de combiner les caractères facultatifs et obligatoires en rendant soit la cession facultative et l'acceptation obligatoire (FAC-OB), soit la cession obligatoire et l'acceptation facultative (OB-FAC). En réassurance FACOB, il y a un risque élevé d'asymétrie d'information puisque la cédante peut décider des risques à réassurer tandis que le réassureur n'a pas d'autre choix que de les accepter.

Le tableau 2.1 ci-dessous reprend de manière synthétique les quatre formes de réassurance possibles :

TABLE 2.1 – Les quatre formes de réassurance

	Acceptation (réassureur)	
Cession (assureur)	Facultative	Obligatoire
Facultative	Facultative	FACOB
Obligatoire	OB-FAC	Traité

Dans la direction de réassurance acceptations non-vie de chez Covéa, il n'y a que de la réassurance obligatoire. Nous parlerons donc de traités dans la suite de ce mémoire.

2.3.4 Les modes de distribution

En assurance, il est possible de souscrire un contrat en direct, par internet, via un intermédiaire d'assurance tel que l'agent général ou le courtier, etc. En réassurance, il n'y a que deux modes de distribution : en direct ou via des courtiers de réassurance.

Souscrire un programme de réassurance en direct permet à la cédante et au réassureur de construire une relation de long terme. Néanmoins, la cédante a intérêt à mandater un courtier de réassurance car celui-ci lui rendra un certain nombre de services, tels que :

- Définir les besoins de couverture
- Placer le programme de réassurance auprès de un ou plusieurs réassureur(s)
- Négocier en son nom les traités de réassurance les mieux adaptés à ses besoins et au meilleur coût
- Aider à la préparation des documents à envoyer pour le renouvellement du contrat à la date d'échéance
- Etre l'interlocuteur avec le réassureur et gérer le côté administratif
- Proposer des analyses des risques présents dans le portefeuille

Les frais de courtage sont payés par le réassureur. Ce sont donc des frais à prendre en compte lors de la tarification.

La figure 2.3 illustre les différents flux entre la cédante, le courtier et le réassureur :

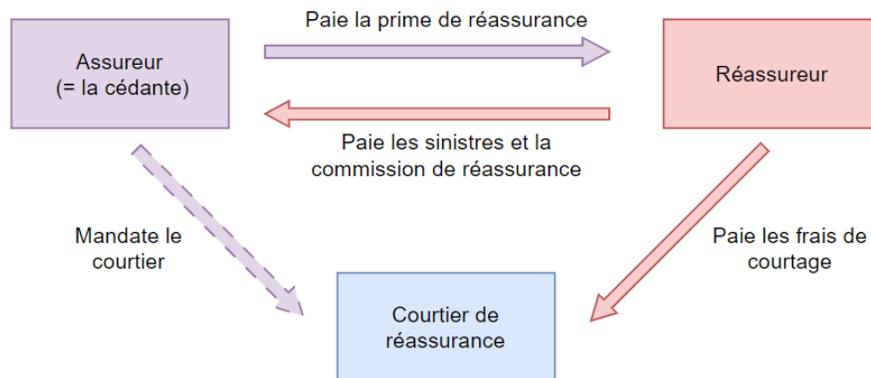


FIGURE 2.3 – Principaux flux entre la cédante, le réassureur et le courtier

2.3.5 Le placement d'un traité de réassurance

La plupart des traités ont une durée d'un an. Chaque année les traités sont renouvelés durant une période dite de renouvellement (*renewal period* en anglais) qui marque un pic d'activité d'activité chez le réassureur.

Le point de départ du contrat de réassurance dépend généralement du pays d'implantation de la cédante :

- 1^{er} janvier pour les pays d'Europe
- 1^{er} juillet pour les pays du Moyen-Orient
- 1^{er} avril pour le Japon et la Corée du Sud

Durant le renouvellement, la cédante ou son courtier font généralement un appel d'offre de réassurance avec un type de contrat et des conditions pré-choisies qui sont détaillées dans une note de couverture (*slip*).

Les réassureurs sont donc amenés à tarifer l'affaire et indiquer la part qu'ils souhaitent souscrire. La cédante reçoit donc plusieurs propositions de prix et décide de placer l'affaire chez un ou plusieurs réassureurs, et choisit son apériteur.

Elle envoie finalement le document contractuel (*wording*) qui définit en détail les conditions du contrat de réassurance et qui doit être signé par chaque partie.

2.3.6 La notation des compagnies de réassurance

L'assureur fait appel au réassureur pour lui transférer une partie de son risque, il est donc primordial que ce dernier soit présent et solvable à long terme, afin de limiter le risque de défaut. Ainsi, la sécurité financière d'un réassureur est l'un des critères les plus importants pour la cédante.

Pour cela, la cédante peut se référer aux notations (*ratings*) des compagnies de réassurance proposées par des agences spécialisées telle que S&P Global par exemple. Plus la notation d'un réassureur est élevée, plus il est considéré comme financièrement sûr. A l'inverse, plus la notation est faible, plus le risque de défaut est élevé. La notation de la compagnie de réassurance permet d'instaurer une relation de confiance entre la cédante et le réassureur.

De plus, une bonne notation permet également aux cédantes de réduire le capital S2 bloqué, ce qui leur offre la possibilité d'investir plus ailleurs.

A présent que le fonctionnement général de la réassurance a été présenté, il convient d'aborder les types de réassurance qui existent, à savoir la réassurance proportionnelle et la réassurance non-proportionnelle.

2.4 La réassurance proportionnelle

Dans le cas d'une réassurance proportionnelle, il y a un lien de proportionnalité entre le montant de prime cédée par la cédante et l'intervention du réassureur dans la sinistralité. Le réassureur reçoit une partie de la prime de la cédante et il paie la même proportion des éventuels sinistres qui touchent la police d'assurance. Les traités proportionnels couvrent donc la fréquence.

Il y a deux grands types de traités proportionnels : les traités à la quote-part (*quota share* en anglais) et les traités en excédent de plein (*surplus* en anglais).

2.4.1 La quote-part

La cédante et le réassureur conviennent d'un taux de cession unique τ , compris entre 0 et 100%, qui est le même pour tous les risques du portefeuille. Les primes et sinistres sont alors cédés à proportion de ce taux. On peut aussi définir le taux de conservation de la cédante, qui est simplement égal à $1 - \tau$.

Le traité peut également prévoir une limite, définie au contrat, qui détermine l'engagement maximal du réassureur sur un sinistre. Autrement dit, si on note S le montant du sinistre de base et L la limite, alors le montant à charge du réassureur est égal à $\tau \cdot \min(S, L)$.

Exemple 2.4.1 Soit un traité à la quote-part avec un taux de cession $\tau = 40\%$, avec une limite par sinistre de 100.

Id	1	2	3	4	5
Montant du sinistre	120	60	95	35	30
Montant réassuré	40	24	38	14	12
Montant conservé dans le plein	60	36	57	21	18
Montant conservé hors traité	20	0	0	0	0
Total cédé	40	24	38	14	12
Total conservé	80	36	57	21	18

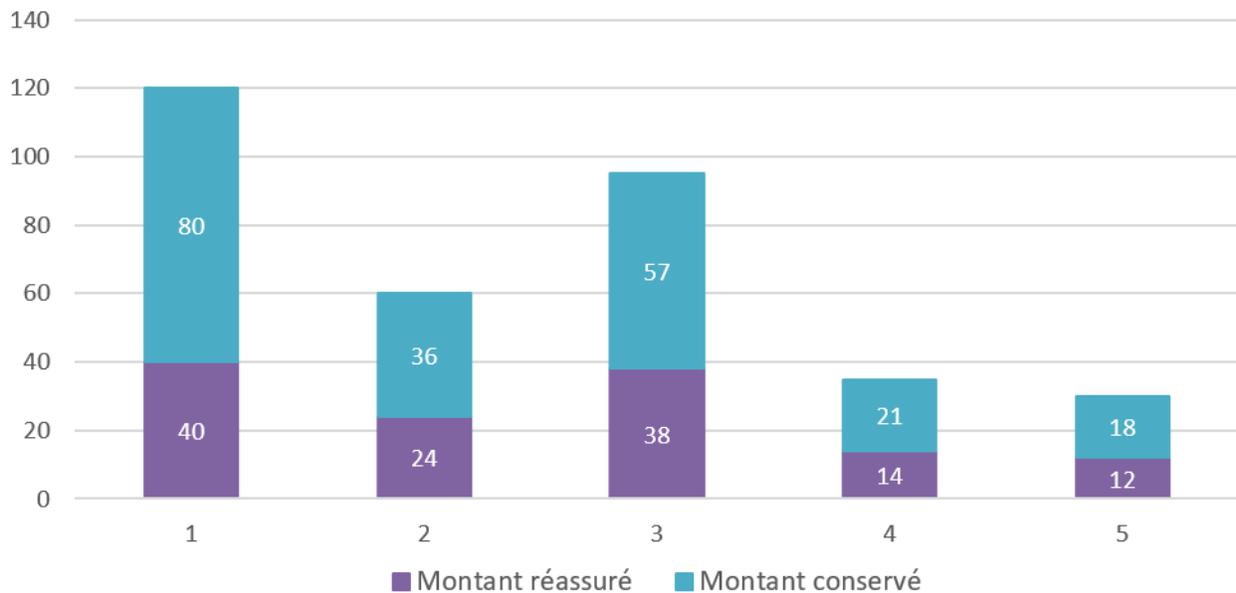


FIGURE 2.4 – Exemple de traité de réassurance à la quote-part

Ce type de traités présente plusieurs avantages :

- Il est facile à mettre en oeuvre.
- Il permet de réduire une exposition jugée trop importante.
- Il est utile en début d'activité, lors du lancement d'un portefeuille qui ne suit pas encore la loi des grands nombres.
- Il permet à la cédante d'augmenter sa capacité de souscription puisque chaque risque, même les plus gros, sont cédés au même taux.

En revanche, un taux de cession ainsi généralisé implique également une quantité importante de primes cédées. De plus, les petits risques seront cédés alors que la cédante pourrait supporter la totalité de ces risques. Les traités en quote-part limitent l'exposition générale de la cédante mais ils ne lissent pas les risques de pointe.

2.4.2 L'excédent de plein

Avant d'expliquer le fonctionnement des traités en excédent de plein (ou *surplus*), il convient d'introduire dans un premier lieu la notion de plein de souscription et de plein de rétention.

Définition 2.4.1 (Plein de souscription) Le plein de souscription est la somme assurée maximale que le réassureur s'engage à garantir sur un risque donné.

Le plein de souscription et la limite définie dans la partie 2.4.1 pour les traités à la quote-part sont des concepts similaires.

Définition 2.4.2 (Plein de rétention) Le plein de rétention est le montant minimal que la cédante conserve pour son propre compte sur un risque donné. Il s'agit donc d'un montant que la cédante aura nécessairement à sa charge.

Dans un traité en excédent de plein, le taux de cession est calculé risque par risque, sur la base de la somme assurée SI (*sum insured*). De plus, le réassureur n'intervient que si la somme assurée dépasse un certain montant R appelé le plein de rétention, et dans la limite du plein de souscription PS .

Le taux de cession pour un risque i de somme assurée SI_i est donné par :

$$\tau_i = \max \left(0, \frac{\min(SI_i, PS) - R}{SI_i} \right)$$

Exemple 2.4.2 Soit un traité en excédent plein avec un plein de souscription à 100 et un plein de rétention à 40.

Id	1	2	3	4	5
Somme assurée	200	80	150	50	40
Taux de cession	30%	50%	40%	20%	0%
Montant de sinistre	120	60	95	35	30
Montant cédé	36	30	38	7	0
Montant conservé	84	30	57	28	30

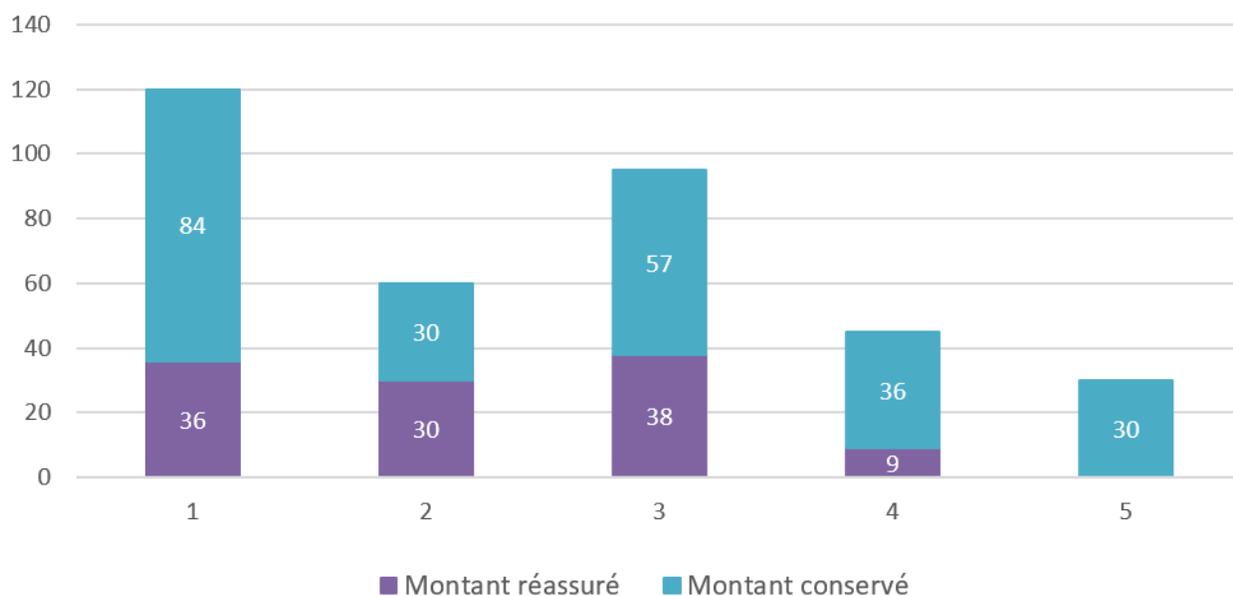


FIGURE 2.5 – Exemple de traité de réassurance en excédent de plein

Un traité en excédent de plein, avec des taux de cession adaptés à chaque risque, permet à la cédante de garder à sa charge les petits et moyens risques et ainsi être libre dans leur gestion. Ce type de traité permet également à la cédante de conserver une plus grande part des primes et d'homogénéiser son portefeuille.

La figure 2.6 permet de visualiser, sur un même portefeuille, la différence entre l'application d'une quote-part et d'un excédent de plein :

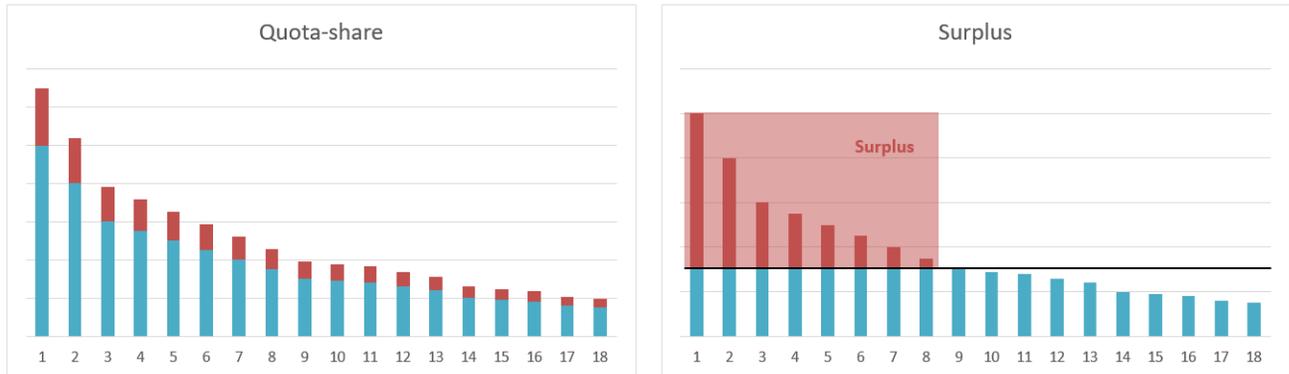


FIGURE 2.6 – Quote-part vs surplus

Le portefeuille conservé par la cédante (en bleu) dans le cas d'un surplus est moins volatile que dans le cas d'un quote-part. Un traité en quote-part permet à la cédante de se protéger de la fréquence des sinistres, tandis qu'un traité en excédent de plein permet de se protéger de la sévérité des sinistres.

2.4.3 Combinaison quote-part et surplus

Il est également possible de combiner ces deux formes de couverture. Le plus courant est d'appliquer un surplus qui couvre à partir de la limite d'engagement du quote-part. Dans ce cas, les deux mécanismes s'appliquent de manière indépendante sur les sinistres (et les primes).

Exemple 2.4.3 Soit un traité combinant quote-part et surplus dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Quote-part avec taux de cession $\tau = 40\%$ avec une limite par sinistre de 40,
- Surplus avec plein de rétention de 40 et plein de souscription de 100.

Id	1	2	3	4	5
Somme assurée	200	80	150	50	40
Montant de sinistre	120	60	95	35	30
Taux de cession SPLS	30%	50%	40%	20%	0%
Montant réassuré SPLS	36	30	38	7	0
Montant réassuré QP	16	16	16	16	12
Total cédé	52	46	54	25	12
Total conservé	68	14	41	20	18

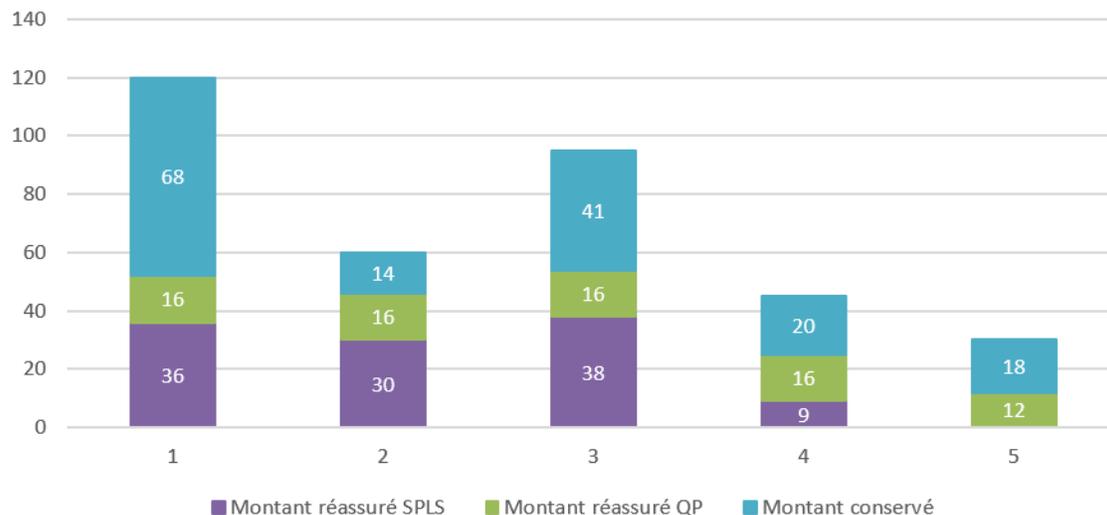


FIGURE 2.7 – Exemple de traité de réassurance combinant quote-part et surplus

Un traité combinant quote-part et surplus permet à la cédante de se couvrir à la fois contre la fréquence et la sévérité des sinistres.

2.5 Clauses des traités proportionnels

Cette section présente les clauses des traités proportionnels qui ont un impact sur la tarification. Ces clauses sont le fruit de négociations entre le réassureur et la cédante (ou le courtier).

2.5.1 La commission de réassurance

Le réassureur reçoit une portion de la prime commerciale de l'assureur. Il reçoit donc une portion de la prime pure servant à couvrir le risque mais aussi une portion des chargements appliqués par la cédante. Or, les coûts d'acquisition et de gestion sont nettement plus faibles pour le réassureur que pour l'assureur. Par conséquent, le réassureur verse à l'assureur une commission de réassurance pour compenser ces coûts.

La commission s'exprime en pourcentage des primes et peut être fixe ou à échelle. Dans le cas d'une commission fixe, le taux de commission est le même quel que soit le ratio S/P (ou *loss ratio* (LR) en anglais). En revanche, dans le cas d'une commission à échelle (*sliding scale*), le taux de commission varie en fonction du loss ratio, de façon à ce que le taux de commission augmente si le loss ratio du traité diminue.

Considérons la commission à échelle suivante :

COM		LR	
Min	30,00%	Min	36,00%
Max	47,00%	Max	52,00%
Pas	1,00%	Pas	1,00%

Lorsqu'un pas est renseigné, comme c'est le cas ici, il s'agit d'une commission en escalier. Lorsqu'aucun pas n'est renseigné, une interpolation linéaire est réalisée pour calculer les valeurs de la commission entre les bornes.

Dans cet exemple, le taux de commission est calculé comme suit :

LR	Taux de commission
$LR \leq 36\%$	47%
$36\% < LR \leq 37\%$	46%
$37\% < LR \leq 38\%$	45%
\vdots	\vdots
$51 < LR < 52\%$	31%
$LR \geq 52\%$	30%

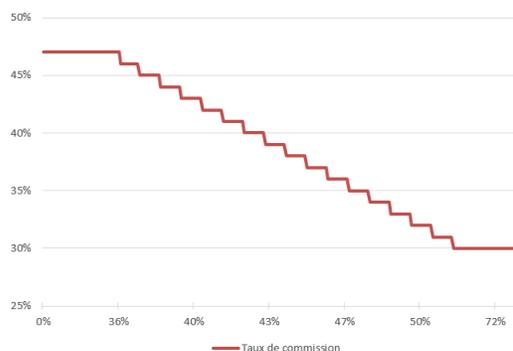


FIGURE 2.8 – Taux de commission en fonction du loss ratio

La commission à échelle a été développée afin de permettre à la cédante de recevoir un montant plus élevé de commission lorsque le traité est profitable et, à l'inverse, moins de commission lorsque le traité est moins profitable. Utiliser une commission à échelle plutôt qu'une commission fixe a pour effet de stabiliser les résultats du traité à long terme, en réduisant le profit du réassureur sur les bonnes années et en réduisant ses pertes sur les mauvaises années.

2.5.2 La participation aux sinistres et la participation aux pertes

Lorsque la sinistralité rapportée aux primes dépasse un certain niveau, le traité peut prévoir contractuellement une intervention de la cédante dans cette sinistralité exceptionnelle.

Lorsque l'intervention de la cédante se calcule sur la base du rapport sinistres sur primes (*loss ratio*), on parlera de participation aux sinistres (ou *loss corridor* (LC) en anglais). Lorsqu'elle se calcule sur la base du *loss ratio* additionné de la commission de réassurance et d'éventuels autres frais, on parlera de participation aux pertes. Le rapport sur lequel est calculé l'intervention de la cédante est défini contractuellement.

Pour comprendre le fonctionnement de cette clause, considérons le loss corridor suivant :

TABLE 2.2 – Exemple de loss corridor

LC	LR	
60,00%	LR min	80,00%
	LR max	100,00%

Cela signifie que pour la part du ratio S/P compris en 80% et 100%, la cédante intervient à hauteur de 60%. Le loss corridor (i.e. l'intervention de la cédante) vaut alors :

$$LC = \max(0, 60\% \times [\min(100\%, LR) - 80\%])$$

Par exemple :

LR	LC	LR après LC
65%	0	65%
147%	$60\% \times (100\% - 80\%) = 12\%$	$147\% - 12\% = 135\%$
94%	$60\% \times (94\% - 80\%) = 8,4\%$	$94\% - 8,4\% = 85,6\%$

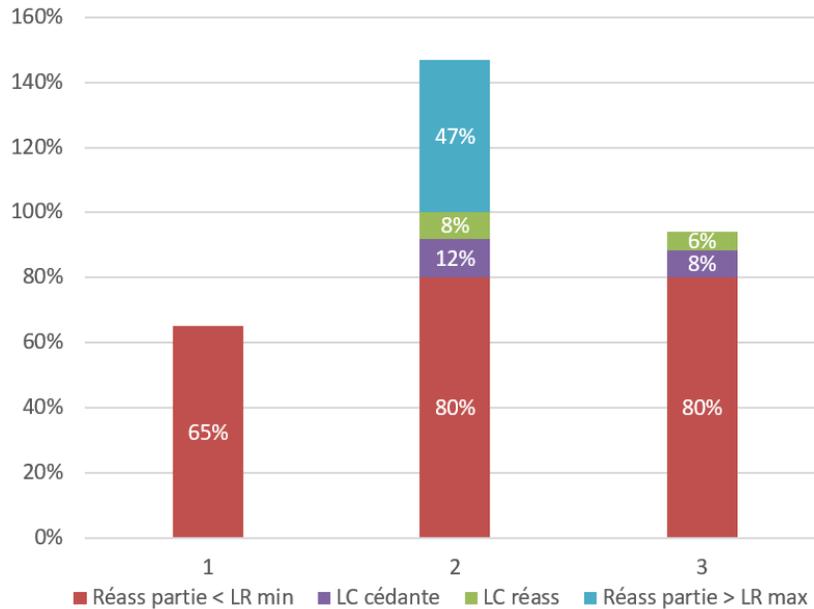


FIGURE 2.9 – Exemple de *loss corridor*

Le loss corridor est très pénalisant pour l'assureur, puisque ce dernier paie la prime de réassurance et, lorsque la sinistralité dépasse un seuil critique, le réassureur réduit son intervention.

Ce type de clause est exigé par le réassureur dans le cas d'un traité qui ne lui semble pas profitable. Cela permet à ce dernier de se protéger, mais également d'inciter la cédante à mieux souscrire ses risques (effet moralisateur).

2.5.3 Le report de pertes

Cette clause permet de reporter les mauvais résultats d'un traité sur un nombre d'années défini au contrat. Elle est généralement liée à la clause de participation aux bénéfices décrite dans la sous-section suivante.

Soit P et S les primes et sinistres de la cédante et COM le montant de la commission de réassurance. Le résultat R du réassureur est défini comme :

$$R = P - S - COM - Taxes \quad (2.1)$$

Lorsque le réassureur accuse une perte (i.e $R < 0$), il peut reporter cette perte dans le futur. Par exemple, pour un report de pertes sur 3 ans :

Année	Résultat	Résultat avec report
2018	150.000	150.000
2019	420.000	420.000
2020	-370.000	-370.000
2021	190.000	-180.000
2022	260.000	80.000

Les deux premières années, le résultat est positif. En revanche, le résultat de l'année 2020 est négatif. Comme le traité comporte une clause de report de perte, celui-ci va pouvoir être reporté sur les 3 années qui suivent. En 2021, le résultat avec report est calculé comme suit : $190.000 - 370.000 = -180.000$. En 2022, le résultat est égal à : $260.000 - 180.000 = 80.000$. Le résultat est donc positif après deux reports, il n'est pas nécessaire d'en effectuer un troisième.

Un autre exemple, toujours avec un report de pertes sur 3 ans :

Année	Résultat	Résultat avec report
2018	-620.000	-620.000
2019	150.000	-470.000
2020	112.000	-358.000
2021	190.000	-168.000
2022	260.000	260.000

Dans cet exemple, la perte enregistrée en 2018 est reportée sur les exercices 2019, 2020 et 2021. En 2021, le résultat avec report est toujours négatif mais le nombre maximal de report a été atteint, il n'y a donc pas de report en année 2022.

De plus, dans le cas où il y a deux exercices négatifs, les résultats se cumulent également.

2.5.4 La participation aux bénéfices

La participation aux bénéfices (ou *profit commission* en anglais) est une clause permettant de limiter le bénéfice du réassureur. Elle consiste à restituer un certain pourcentage des profits du réassureur à la cédante.

De même que la commission, la participation aux bénéfices peut être fixe ou à échelle. Elle s'applique au résultat du réassureur R après report de pertes et auquel sont retirés les frais de réassurance.

Le report de pertes permet au réassureur de ne payer une participation aux bénéfices pour un exercice donné que lorsque les pertes des exercices précédents auront été absorbées.

Pour le calcul du montant de la participation aux bénéfices, il y a donc trois étapes à réaliser au préalable :

1. Calcul du résultat du réassureur R tel que défini à l'équation 2.1 (et donc calcul de la commission de réassurance).
2. Calcul du résultat après report de pertes, tel que cela a été expliqué dans la partie précédente.
3. Calcul du montant des frais de réassurance qui correspondent à un pourcentage, défini contractuellement, des primes de la cédante. Ces frais prennent en considération les frais généraux et administratifs du réassureur.

La participation aux bénéfices ne s'applique que lorsque le réassureur fait du bénéfice, c'est-à-dire lors que le résultat ainsi calculé est supérieur à 0.

Pour mieux comprendre, considérons la participation aux bénéfices (PB) suivante :

TABLE 2.3 – Exemple de participation aux bénéfices fixe

Type	Fixe
PB	20,00%
Frais de réassurance	8,00%
Report de pertes	2

De plus, on suppose que le traité comprend une commission fixe de 40% et que le taux de taxe s'élève à 2% des primes.

Les montants de primes et sinistres considérés, ainsi que les calculs, pour chaque année, de la commission de réassurance, du montant des taxes et du résultat du réassureur se trouvent dans le tableau ci-dessous :

Année	Primes	Sinistres	Commission	Taxes	Résultat
2018	128 330	34 769	53 899	2 567	37 096
2019	136 072	32 847	57 150	2 721	43 353
2020	143 675	104 752	60 344	2 874	- 24 294
2021	149 284	35 288	62 699	2 986	48 311
2022	151 160	56 572	63 487	3 023	28 078

Une fois que le résultat du réassureur a été calculé, on peut appliquer le report de pertes qui est de 2 ans, puis calculer le montant des frais de réassurance (8% des primes) pour ensuite calculer le résultat sur lequel s'appliquent les 20% de participation aux bénéfices (si ce dernier est positif). Les résultats se trouvent dans le tableau ci-dessous.

Année	Résultat après report	Frais de réass	Résultat PB	Montant de PB
2018	37 096	10 266	26 829	5 366
2019	43 353	10 886	32 468	6 494
2020	- 24 294	11 494	- 35 788	0
2021	24 017	11 943	12 074	2 415
2022	28 078	12 093	15 985	3 197

2.6 La réassurance non-proportionnelle

Lors de la tarification d'un traité de réassurance proportionnel, les deux éléments suivants sont utilisés : un seuil permettant de séparer la sinistralité atypique de la sinistralité « de base » dite attritionnelle (cet aspect est développé dans les parties 3 et 4) et une limite par sinistre, égale au plein de souscription (Surplus) ou à la limite d'engagement du réassureur (QS).

Ces notions se rapprochent des traités de réassurance non-proportionnelle en excédent de sinistre (*excess of loss* en anglais) et la sinistralité atypique peut être tarifé comme tel, c'est pourquoi il convient de définir ce type de réassurance.

Dans le cas d'un traité en excédent de sinistre, la cédante et le réassureur s'accordent sur un montant de franchise, appelé la priorité (P), au-delà duquel le réassureur prendra en charge la sinistralité. La somme maximale prise en charge par le réassureur est appelée la portée ou capacité (C). Ce type de traité est noté C XS P.

Mathématiquement, si on note X le montant du sinistre, alors le montant à charge du réassureur pour un traité C XS P se calcule comme suit :

$$\min(C, \max(0, X - P)) \quad (2.2)$$

Exemple 2.6.1 Soit un traité non-proportionnel en excédent de sinistre dont la priorité vaut 50 et la portée 90.

Id	1	2	3	4	5
Montant du sinistre	140	79	185	98	42
Montant réassuré	90	29	90	48	0
Montant conservé (< prio)	50	50	50	50	42
Montant conservé hors traité	0	0	45	0	0
Total cédé	90	29	90	48	0
Total conservé	50	50	95	50	42

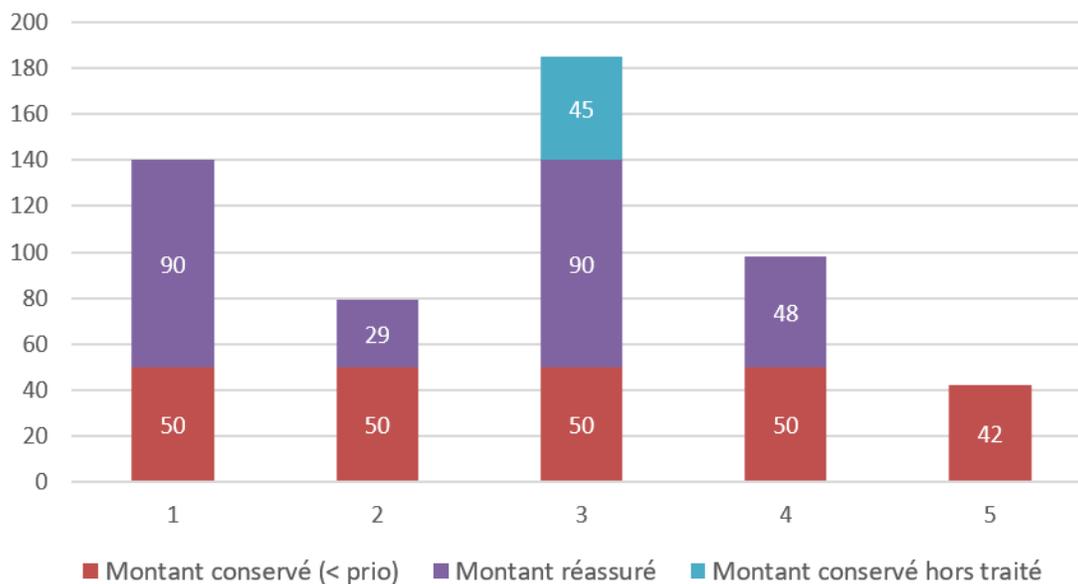


FIGURE 2.10 – Exemple de traité de réassurance en excédent de sinistre

Il existe d'autres types de réassurance non-proportionnelle qui ne seront pas abordées dans ce mémoire.

3. Tarification d'un traité proportionnel non-vie

L'objectif de ce chapitre est de définir le périmètre de l'étude et de présenter les étapes de la tarification d'un traité proportionnel non-vie, en vue d'introduire la problématique du mémoire.

3.1 Périmètre d'étude

Les traités de réassurance sont le plus souvent annuels. Les polices originales d'assurance ne courent pas toutes du 1^{er} janvier au 31 décembre et ne sont pas nécessairement annuelles. C'est pourquoi il est important de définir comment les primes et sinistres doivent être affectés au traité de réassurance. Il existe trois façons de comptabiliser ceux-ci :

- Par exercice de souscription (ESC) (ou *risk attaching*)
- Par exercice de survenance (ESV) (*loss occurring*)
- Par exercice comptable (ou *Clean Cut*)

En base comptable ou *Clean Cut*, les primes acquises et la charge de sinistres d'une année comptable affectent le traité de réassurance en vigueur pour cette année comptable.

En base de survenance sont réassurés tous les sinistres survenus pendant la durée du traité de réassurance, quelle que soit la date d'effet de la police d'assurance afférente.

La figure 3.1 illustre le fonctionnement d'un traité en exercice de survenance pour une police d'assurance annuelle :



FIGURE 3.1 – Exemple de traité de réassurance en exercice de survenance

Bien que le sinistre du 31/10/2022 soit couvert par la police d'assurance, il n'est pas couvert par le traité de réassurance puisqu'il est survenu avant la date de début du contrat d'assurance. En revanche, le sinistre du 17/06/2023 est bien couvert par le traité de réassurance.

En base de souscription, le réassureur prendra en charge les sinistres affectant des polices d'assurance ayant pris effet durant la période du traité de réassurance, quelle qu'en soit la date de survenance.

La figure 3.2 illustre le fonctionnement d'un traité en exercice de souscription pour une police d'assurance annuelle :



FIGURE 3.2 – Exemple de traité de réassurance en exercice de souscription

La police d'assurance ayant été souscrite durant la période du traité de réassurance, les deux sinistres du 26/08/2023 et du 15/04/2024 sont couverts par le réassureur, et ce, même si ce dernier a eu lieu après la fin du traité de réassurance.

En exercice de souscription, l'engagement du réassureur peut donc s'étaler dans le temps. Le traité continue d'être exposé, même après sa fin. Les années récentes sont très souvent sous estimées puisqu'il est quasiment certain que des sinistres vont arriver tardivement. Les séismes de février 2023 en Turquie sont un exemple parfait pour illustrer cette exposition tardive. Ces événements ont touché des traités de réassurance. Les tremblements de terre ont affecté des polices d'assurance souscrites en 2022 et toujours en vigueur au moment du sinistre. Les traités de réassurance, qui étaient en exercice de souscription, ont donc été impactés et ce même s'ils n'ont pas été reconduits au 1^{er} janvier 2023.

Dans la majorité des cas, il faut compter environ deux ans à partir de la date de souscription du traité pour qu'il soit clôturé. Il est donc nécessaire d'avoir des triangles de développement de sinistres pour avoir une vision plus lointaine.

Une autre distinction s'opère selon la nature même du risque (ou *line of business*). On distingue les branches d'assurance à développement long des branches d'assurance à développement court.

On parle de branche courte (ou *short-tail*) lorsque la durée entre la date de sinistre et le règlement final est courte (pas plus d'une année en général). Par exemple, l'assurance dégâts matériels de la voiture ou l'assurance multirisque habitation sont des branches d'assurance à développement à court.

A l'inverse, on parle de branche longue (ou *long-tail*) lorsque la durée entre la date de survenance du sinistre et son règlement est longue. Cela concerne surtout les branches responsabilité civile. Ce sont des branches pour lesquelles l'estimation du coût de sinistre à la date de déclaration peut être très différente du coût réel du sinistre à la clôture. Pour tarifier ces branches, l'actuaire a besoin d'un historique de sinistres plus important (une dizaine d'années au minimum) mais aussi d'un triangle de règlement permettant d'estimer la charge ultime.

Enfin, la durée de la police d'assurance a aussi son importance dans l'exposition du réassureur. Par exemple, la branche d'assurance *engineering* est une branche à développement court puisque lorsqu'un sinistre survient sur le chantier, il est réglé rapidement. En revanche, les chantiers qui sont couverts peuvent durer sur plusieurs années, l'exposition du réassureur dans le temps sera donc longue, et ce d'autant plus si le traité est en exercice de souscription.

Le tableau 3.1 résume les cas où des triangles de développement des primes et sinistres sont nécessaires :

TABLE 3.1 – Cas où il y a besoin des triangles de primes et sinistres

Branche	Base de rattachement		Durée de la police d'assurance	Type de données
	ESV	ESC		
Courte	Pas de triangles	Triangles	≤ 1 an	Pas de triangles
Longue	Triangles	Triangles	> 1 an	Triangles

Dans ce mémoire, seul le cas de traités de réassurance en exercice de survenance pour des branches à développement court et pour des polices d'assurance d'échéance inférieure ou égale à un an sera étudié. La théorie sur le provisionnement ne sera donc pas abordée. Nous n'avons donc pas besoin de projeter les primes et les sinistres à l'ultime.

3.2 Mise en as-if

Pour sa tarification, l'actuaire dispose d'un historique de primes et sinistres sur une dizaine d'années. Durant ce laps de temps, plusieurs facteurs sont susceptibles de changer :

- Tout d'abord, **l'environnement économique**. La valeur de l'argent évolue avec le temps et il est nécessaire de tenir compte de l'inflation dans la tarification afin d'évaluer au mieux le risque.
- Ensuite, **la politique de souscription** de la cédante. Que ce soit un changement de structure, une augmentation considérable du nombre de polices souscrites ou tout simplement des changements tarifaires, tous ces éléments doivent être pris en compte puisqu'ils ont un impact direct sur le montant des primes et sinistres, et donc sur la tarification du traité de réassurance.
- Finalement, **l'environnement juridique et réglementaire** peut également avoir un impact sur le montant des primes et sinistres. Par exemple, chaque pays a ses propres règles en terme de responsabilité civile.

Avant de commencer la tarification, il est nécessaire de prendre en compte ces différents facteurs pour revaloriser les primes et les sinistres à la date de modélisation, de façon à avoir des données comparables et sur une même base. Ce processus s'appelle la mise en *as-if*. L'objectif est donc de répondre à la question suivante : quelle est la valeur aujourd'hui des primes et sinistres historiques si l'on se place dans les conditions actuelles ?

Cette problématique de la mise en *as-if* a été d'autant plus importante lors du renouvellement de janvier 2023 du fait de la forte inflation.

3.2.1 Prise en compte de l'inflation

L'objectif de la revalorisation des montants des primes historiques et des sinistres passés est de déterminer le coût de ceux-ci aujourd'hui. Pour cela, les montants de primes et sinistres sont redressés de l'inflation en fonction de l'année à laquelle ils sont rattachés. La méthode repose sur le calcul de facteur de redressement (*on-level factor*) basé sur un indice d'inflation.

Calcul des facteurs d'inflation

Soient S_1, \dots, S_n des montants de sinistres historiques (ou de primes) sur n années, avec n l'année d'évaluation. Soient I_1, \dots, I_n les valeurs de l'indice d'inflation pour chaque année. Soient f_1, \dots, f_n les facteurs de redressement pour chaque année.

Le facteur d'inflation pour l'année k se calcule en fonction de l'année d'évaluation n et de l'indice d'inflation comme :

$$f_k = \frac{I_n}{I_k}$$

Le tableau 3.2 illustre les différentes étapes de calcul des facteurs d'inflation sur les années d'historique :

TABLE 3.2 – Calcul des facteurs d'inflation

Année de survenance	Montant historique	Indice d'inflation	Facteur d'inflation	Montant revalorisé
1	S_1	I_1	$f_1 = \frac{I_n}{I_1}$	$\tilde{S}_1 = S_1 \times f_1$
2	S_2	I_2	$f_2 = \frac{I_n}{I_2}$	$\tilde{S}_2 = S_2 \times f_2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	S_n	I_n	$f_n = 1$	$\tilde{S}_n = S_n$

Le choix de l'indice à utiliser dépend évidemment du pays de la cédante, mais également de la branche d'assurance couverte par le traité de réassurance. Dans beaucoup de cas, c'est l'indice du prix à la consommation qui est utilisé mais pour la branche *engineering* par exemple, il faudra utiliser un indice du prix de la construction.

De plus, il est possible d'avoir un indice différent (ou modifié) entre les primes et les sinistres. Par exemple, on peut raisonnablement penser que les sinistres sont immédiatement impactés par l'inflation alors que les primes d'assurance mettront un certain temps à la rattraper. De ce fait, l'indice utilisé pour les sinistres pourrait être décalé de 6 mois pour les primes par exemple.

3.2.2 Prise en compte des changements dans le traité de réassurance

Le traité de réassurance est susceptible de changer dans le temps, par exemple un taux de quote-part qui passe de 50% à 60%, et il est nécessaire de tenir compte de ces changements lors de la tarification.

Il y a deux façons de prendre en compte les données lors tarification. Soit l'actuaire utilise les données « au traité », c'est-à-dire que la quote-part ou l'excédent de plein a été appliqué. Soit il utilise les données à 100%, c'est-à-dire les données « brutes », sans application du traité.

Quoi qu'il en soit, les données utilisées lors de la tarification doivent être mises sur une même base. Il faut donc être vigilant aux changements qui surviennent dans le traité.

Considérons la liste de primes suivante :

TABLE 3.3 – Exemple de changement de taux de quote-part sur l'historique

Année	Primes cédées	Taux de QP
2017	162 000	50%
2018	180 000	50%
2019	210 000	60%
2020	225 000	60%
2021	228 000	60%
2022	246 000	60%

A partir de l'année 2019, le taux de quote-part a changé, passant de 50% à 60%. Ainsi, pour avoir les données à 100%, l'actuaire ne devra pas effectuer le même calcul pour les données des années 2017 et 2018 que pour les années 2019 et suivantes :

TABLE 3.4 – Calcul des primes à 100%

Année	Primes à 100%
2017	162 000 / 50% = 324 000
2018	360 000
2019	210 000 / 60% = 350 000
2020	375 000
2021	380 000
2022	410 000

3.2.3 Prise en compte des changements tarifaires (*rate changes*)

En ce qui concerne les primes, un autre élément est à prendre en compte lors de la mise en *as-if*. En effet, au-delà de l'inflation, les primes peuvent aussi subir des changements tarifaires (*rate changes* en anglais).

Idéalement, l'actuaire dispose d'une mesure d'exposition telles que le nombre de polices ou les sommes assurées par exemple. Dans ce cas, les *rate changes* sont donnés par les évolutions annuelles des primes historiques par unité d'exposition.

Calcul des *rate changes*

Soient P_1, \dots, P_n les primes historiques.

Soient E_1, \dots, E_n les mesures d'exposition historiques (nombre de polices ou sommes assurées).

Le rate change de l'année k est calculé comme suit :

$$RC_k = \frac{\frac{P_k}{E_k}}{\frac{P_{k-1}}{E_{k-1}}} - 1$$

Selon la mesure d'exposition choisie, le rate change prend en compte ou non l'inflation. En effet, lorsque la mesure d'exposition est sensible à l'inflation, comme la somme assurée, le rate change n'inclut pas l'inflation. Il faut donc appliquer le facteur d'inflation en plus. En revanche, quand la mesure d'exposition n'est pas sensible à l'inflation, comme le nombre de polices, le rate change tient compte de l'inflation.

Bien souvent, l'actuaire ne dispose pas de ces informations d'exposition et ne peut donc pas calculer d'une année à l'autre l'augmentation tarifaire. En général, l'actuaire reçoit une information partielle donnant, à une date précise, l'augmentation tarifaire. Par exemple, la cédante a augmenté ses tarifs de 10% au 01/07/2023, c'est-à-dire qu'au 30/06/2023, la prime est de P et au 01/07/2023 elle est de $P \times (1 + 10\%)$. La figure 3.3 illustre cet exemple.

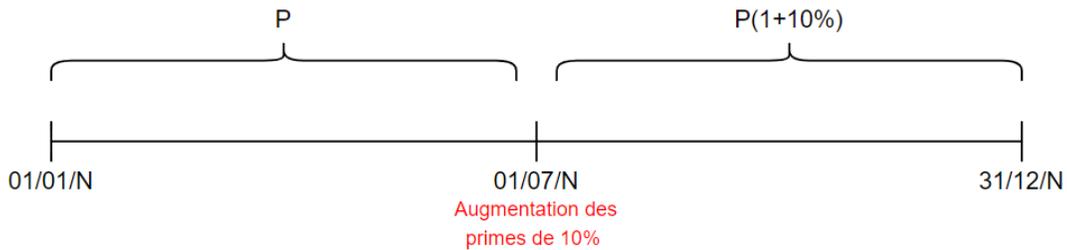


FIGURE 3.3 – Exemple d'information sur les rate changes dont dispose l'actuaire

Contrairement à la méthode avec exposition où l'actuaire connaît l'évolution des primes sur une période d'un an, ici il ne connaît l'évolution des primes qu'à une date précise. L'objectif est donc de calculer, à partir de cette information, le rate change annuel. Pour cela, l'actuaire peut utiliser la méthode du parallélogramme, qui est détaillée dans l'annexe E.

Une fois que l'actuaire dispose des taux rate change, il peut calculer l'indice puis le facteur de rate change de la même manière que pour le calcul des facteurs d'inflation.

Remarque : Dans ce mémoire, les cas où l'actuaire reçoit des triangles de développement des primes et sinistres ne sont pas abordés. Néanmoins, il convient de noter que la mise à l'ultime est une étape à réaliser dans le cadre de la mise en as-if. Il faut donc prendre en compte les provisions IBNR (*incurred but not reported*), qui sont décomposées en deux sous-composantes : les IBNyR (*incurred but not yet reported*) et les IBNeR (*incurred but not enough reported*).

3.3 Tarification d'un traité proportionnel

Contrairement aux traités non-proportionnels, la cotation d'un traité proportionnel ne fournit pas un taux de prime mais une estimation du résultat du réassureur. Il s'agit d'analyser la rentabilité du traité et non pas de la tarifier à proprement parler.

3.3.1 Problématique des données en réassurance

La tarification d'un traité proportionnel peut s'avérer très compliquée à cause du manque de données dont dispose le réassureur.

Dans le cas d'un traité proportionnel, les données que reçoit l'actuaire sont des données agrégées, à savoir l'assiette de primes et la sinistralité annuelles. Il reçoit également une liste de sinistres individuels importants, mais cette information n'est que partielle puisqu'il s'agit seulement des sinistres supérieurs à certain seuil, et non pas de la totalité des sinistres individuels de la cédante. Le manque de données est donc un réel défi pour le réassureur qui, contrairement à l'assureur, ne possède pas l'information détaillée.

Voici plus en détail les quatre types de données dont dispose le réassureur pour la tarification d'un traité proportionnel :

1. Les données contractuelles

Il s'agit des données liées au traité de réassurance à savoir la date d'effet du contrat, la branche couverte, les différentes clauses, l'affectation des sinistres, etc.

2. Un historique de primes et sinistres agrégés

Il s'agit des montants de primes et de sinistres annuels de la cédante. En général, le réassureur ne dispose que des 10 dernières années d'historique.

3. Une liste de sinistres importants

Il s'agit d'une liste de sinistres individuels considérés comme importants, c'est-à-dire que leur montant dépasse un certain seuil, appelé seuil de notification, qui est défini contractuellement. Les sinistres importants peuvent être de deux types : ce sont soit des sinistres par risque, soit des sinistres événement. Dans le cas d'un sinistre « par risque », le sinistre en réassurance correspond au sinistre en assurance. Dans le cas de sinistres « par événement », le montant d'un sinistre correspond au cumul de plusieurs sinistres individuels en assurance. Souvent, les sinistres événements résultent d'une catastrophe naturelle telles qu'un séisme, une inondation ou encore une tempête par exemple.

4. Des données de modélisation des événements catastrophes naturelles

Il s'agit de données spécifiques à la tarification des événements. Ce point ne sera pas détaillé dans ce mémoire.

3.3.2 Etapes de la tarification d'un traité proportionnel non-vie

Pour comprendre le déroulement de la tarification d'un traité proportionnel, prenons un exemple de données que le réassureur peut recevoir :

TABLE 3.5 – Exemple de données dont dispose le réassureur

Exercice	Primes	Sinistres	Loss ratio
2012	1 447 314	659 834	45,6%
2013	1 435 934	611 731	42,6%
2014	1 144 355	546 210	47,7%
2015	1 698 401	993 311	58,5%
2016	1 721 704	2 085 402	121,1%
2017	1 352 794	694 061	51,3%
2018	1 203 481	676 027	56,2%
2019	1 137 435	647 189	56,9%
2020	1 292 079	861 452	66,7%
2021	1 391 384	1 487 469	106,9%
2022	1 459 723	548 675	37,6%
Total	15 284 604	9 810 986	64,2%

Année	Sinistres imp.
2015	312 897
2016	1 423 326 (CAT)
2017	136 677
2020	301 693
2021	452 344
2021	261 389

La question à laquelle souhaite répondre l'actuaire est la suivante : au vu de l'historique de primes et sinistres, doit-on souscrire l'affaire ? Autrement dit, le traité est-il rentable en tenant compte des clauses et de tous les frais ? A première vue, il est impossible de répondre à cette question.

L'objectif de la tarification est de calculer une estimation du ratio combiné, qui désigne le rapport entre le coût total du traité et les primes encaissées. Pour cela, il est nécessaire de modéliser le loss ratio de la cédante.

La première étape de la tarification est de revaloriser les données, comme cela a été évoqué dans la partie 3.2. On suppose ici que les données sont déjà en *as-if*.

Ensuite, pour tarifer un traité proportionnel, il y a trois éléments à distinguer :

- La sinistralité attritionnelle, qui correspond à des sinistres par risque récurrents, de fréquence élevée mais de coût faible.
- La sinistralité atypique, qui correspond à sinistres par risque de coût élevé mais de faible fréquence.
- Les événements (cumuls de risque).

Ces différents sinistres sont caractérisés par des périodes de retour différentes. La période de retour est la durée moyenne au cours de laquelle statistiquement un événement d'une même intensité se reproduit. Les sinistres atypiques et les sinistres par événement ont des périodes de retour bien supérieures aux sinistres attritionnels, c'est pourquoi il est nécessaire de les modéliser séparément. Le loss ratio est donc décomposé comme suit :

$$LR = LR_{att} + LR_{aty} + LR_{event}$$

Pour déterminer le loss ratio atypique, il est nécessaire de déterminer un seuil à partir duquel les sinistres sont considérés comme importants. Une fois ce seuil déterminé, il faut retirer de la statistique globale les sinistres individuels supérieurs à ce seuil. Pour simplifier, on supposera ici que tous les sinistres par risque de la liste sont considérés comme atypiques.

De même, les sinistres événements sont à retirer de la sinistralité globale, de façon à identifier séparément la sinistralité attritionnelle, la sinistralité atypique et la sinistralité liée aux événements :

TABLE 3.6 – Séparation des sinistres selon leur type

Exercice	Sinistres attritionnels	Sinistres atypiques	Sinistres événements
2012	659 834	0	0
2013	611 731	0	0
2014	546 210	0	0
2015	680 414	312 897	0
2016	662 076	0	1 423 326
2017	512 384	136 677	0
2018	676 027	0	0
2019	647 189	0	0
2020	559 759	301 693	0
2021	773 736	713 733	0
2022	548 675	0	0

La sinistralité attritionnelle et la sinistralité atypique sont ensuite modélisées par des lois de probabilité.

En ce qui concerne les sinistres événements, l'actuaire peut en principe les modéliser par une loi de probabilité, de la même façon que les sinistres par risque atypiques. Néanmoins, puisque ce sont des sinistres ayant des périodes de retour très élevées, l'actuaire ne dispose jamais d'un nombre suffisant de sinistres pour ajuster une loi de probabilité. C'est pourquoi les événements font l'objet d'une tarification spécifique. Il s'agit d'une tarification par simulation utilisant des données de modélisation envoyées par la cédante. Cet aspect, qui est développé dans le travail de Homer and Li (2017) [6], ne sera pas détaillé ici.

Une fois que l'actuaire a déterminé le loss ratio total, il peut appliquer les clauses du contrat et ajouter les frais pour obtenir le ratio combiné.

En résumé, les étapes de la tarification d'un traité proportionnel sont les suivantes :

1. Rassembler les données nécessaires à la tarification et les mettre en *as-if*.
2. Exclure les pertes dues aux catastrophes, qui font l'objet d'une tarification spécifique.
3. Définir le seuil des atypiques pour séparer les sinistres de pointe et les sinistres de base.
4. Modéliser le loss ratio attritionnel et le loss ratio atypique à l'aide de lois de probabilité. Calculer le loss ratio événement par simulation.
5. Appliquer les clauses et ajouter les frais au loss ratio pour obtenir le ratio combiné.

3.4 Enjeux pour la direction

3.4.1 Approche actuelle

Actuellement, les actuaires de la DRAI utilisent un outil de tarification implémenté sur Excel. Cet outil permet d'obtenir une estimation du ratio combiné et du résultat pour l'année à tarifier.

Les sinistres importants sont modélisés par une loi de Pareto. Le choix des paramètres de la loi relève de l'expertise de l'actuaire, il n'y a pas de statistique d'adéquation ou de graphique permettant de mesurer la qualité de l'ajustement. Quant au seuil des atypiques, il est pris égal au paramètre de seuil de la distribution de Pareto sélectionnée par l'actuaire.

L'estimation du loss ratio attritionnel est une moyenne des loss ratio attritionnels observés sur les 10 années d'historique. L'estimation du loss ratio atypique est calculée par un coût moyen dans la tranche de la loi de Pareto sélectionnée, multiplié par la fréquence observée des sinistres au-dessus du seuil.

L'actuaire dispose donc d'une seule valeur du loss ratio total estimé pour l'année à tarifier. C'est sur cette unique valeur que les différentes clauses sont appliquées et que la rentabilité du traité est évaluée. L'inconvénient de cette approche est qu'elle ne permet pas de bien appréhender les différentes facettes du phénomène aléatoire et ne tient aucunement compte de la volatilité du risque. L'objectif de ce mémoire est donc compléter et optimiser les méthodes de tarification actuelles.

Pour répondre à cette problématique, une nouvelle approche par simulation sera privilégiée. L'objectif est de simuler un grand nombre de valeurs de la sinistralité annuelle, sur lesquelles l'actuaire pourra appliquer les différentes clauses de façon à obtenir une distribution du ratio combiné. De plus, des méthodes de détermination du seuil des atypiques seront introduites.

3.4.2 Distribution du ratio combiné et choix du seuil des atypiques

Comme cela a été évoqué dans la partie précédente, l'un des grands enjeux de ce mémoire est d'obtenir une distribution du ratio combiné plutôt qu'un ratio combiné moyen.

Une moyenne sur dix années d'historique ne permet pas à l'actuaire d'avoir une bonne visualisation du risque. Pour pallier ce problème, une nouvelle méthode de tarification par simulation est introduite. En simulant un grand nombre de valeurs du loss ratio, l'actuaire va pouvoir observer différents cas de figure et ainsi avoir une vue plus complète du risque et une meilleure compréhension de celui-ci.

L'approche par simulation permet de prendre en compte l'incertitude quant aux pertes potentielles et fournit une distribution complète du ratio sinistres sur primes, ce qui permet d'introduire des mesures de risque tel que l'écart-type par exemple. Contrairement aux autres méthodes, la simulation produit une gamme étendue de scénarios possibles, permettant ainsi à l'actuaire de mieux comprendre la nature des risques associés à chaque traité.

Au-delà de l'aspect mathématique, la vision en moyenne pose également problème dans la prise en compte des conditions du traité. Reprenons l'exemple du *loss corridor* de la partie 2.5.2 :

LC	LR	
30,00%	LR min	80,00%
	LR max	90,00%

Si l'intervention de la cédante passe de 30% à 50%. Du point de vue du réassureur, il s'agit d'une amélioration des conditions. De ce fait, toutes choses égales par ailleurs, l'actuaire s'attend à ce que le traité soit plus rentable que l'année passée. Pourtant, si dans l'historique de la cédante le loss ratio maximal observé est de 77%, ce changement de conditions ne sera pas pris en compte dans la tarification puisque la clause n'est pas appliquée. En revanche, si on avait une distribution du loss ratio, il y aurait sûrement des loss ratio plus élevés auxquels la clause s'appliquerait. Le tarif tiendrait alors forcément compte des éventuels changements de conditions d'une année à l'autre.

Un autre aspect essentiel de ce mémoire est la détermination du seuil définissant la sinistralité attritionnelle et la sinistralité atypique. Le choix de ce seuil est très important pour la tarification, pourtant il n'y a aucun outil mathématique permettant de le déterminer dans l'outil actuel. Ainsi, dans le cadre de ce projet d'amélioration de la tarification des traités proportionnels, différentes méthodes de détermination du seuil des atypiques seront proposées. Cet aspect sera développé en partie 4.

D'un point de vue opérationnel, une nouvelle application de tarification développée en *RShiny* viendra remplacer l'outil de tarification actuel.

4. Détermination du seuil des atypiques

Le seuil est un paramètre essentiel dans la tarification des traités proportionnels puisqu'il permet de séparer les sinistres attritionnels des sinistres atypiques. Le choix de ce seuil est donc crucial pour déterminer la structure de la tarification.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les quatre méthodes utilisées pour déterminer ce seuil. Le chapitre débute par une sous-section décrivant les autres seuils que l'on retrouve dans le cadre de la tarification d'un traité proportionnel.

4.1 Les différents seuils de la tarification d'un traité proportionnel

Lors de la tarification d'un traité proportionnel, il y a en réalité trois seuils différents :

- Le premier est le seuil de notification de la cédante, noté s_n , qui correspond au montant de sinistre à partir duquel la cédante envoie au réassureur les sinistres individuels,
- Ensuite, il y a le seuil des atypiques, noté s_a , qui est le seuil à partir duquel un sinistre est considéré comme atypique,
- Enfin, il y a le seuil de modélisation, noté s_m , qui correspond au montant à partir duquel les sinistres sont pris en compte dans la modélisation des sinistres importants. Il s'agit d'un des paramètres des lois de probabilités utilisées pour la modélisation de la sévérité des sinistres importants.

Ces trois seuils respectent l'inégalité suivante :

$$s_n \leq s_m \leq s_a$$

La première inégalité est évidente puisque l'actuaire ne dispose que des sinistres individuels dont le montant est supérieur au seuil de notification. La deuxième inégalité est imposée par soucis de manque de données.

Le choix d'un seuil de modélisation convenable est important car un seuil trop haut peut poser un problème de perte d'information. Cette problématique est d'autant plus importante chez un réassureur du fait du peu de données dont il dispose. Le fait d'imposer un seuil de modélisation inférieur ou égal au seuil des atypiques permet de considérer un nombre plus important de sinistres dans la modélisation et d'obtenir ainsi un ajustement plus fiable. Il faut cependant être vigilant : le seuil de modélisation ne sert que lors de l'ajustement de loi et donc, par extension, dans la simulation. Néanmoins, pour définir la sinistralité atypique, c'est bien le seuil des atypiques qui est utilisé. Ainsi, il faudra bien faire attention à retraiter les sinistres simulés.

La figure 4.1 permet d'illustrer ces trois seuils. Les sinistres hachurés, inférieurs au seuil de notification, sont des sinistres individuels pour lesquels le réassureur ne dispose d'aucune information. Ils ne figurent pas dans les données envoyés par la cédante. Les sinistres en rouge correspondent aux sinistres atypiques.

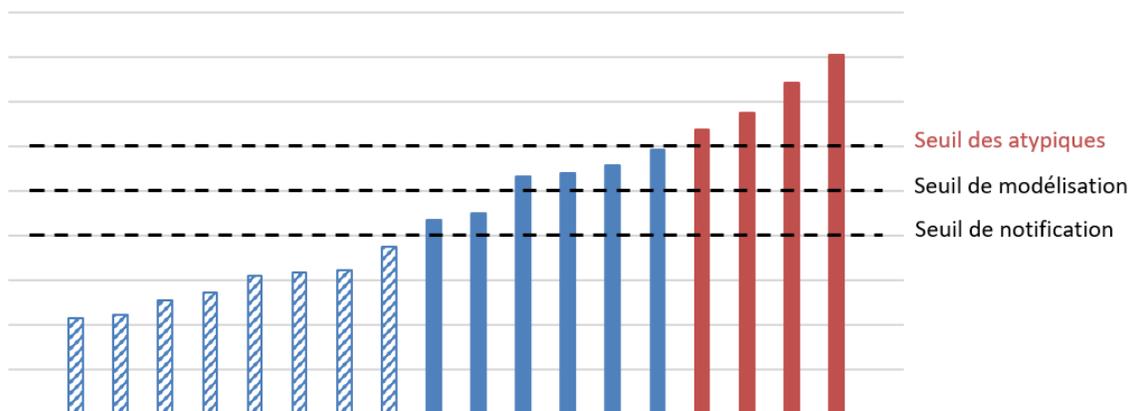


FIGURE 4.1 – Illustration des trois différents seuils

Le seuil qui nous intéresse dans ce travail est le seuil des atypiques, car il permet de définir la structure de la tarification. Des méthodes pour le déterminer ont donc été implémentées. Celles-ci sont définies dans les parties ci-après.

4.2 Minimisation de la variance

La première méthode, qui est très simple à mettre en œuvre, se base sur la définition même de ce qu'on appelle sinistre attritionnel. En effet, par définition, la sinistralité attritionnelle est relativement stable d'une année à l'autre. De ce fait, on peut choisir le seuil des atypiques tel que la volatilité du loss ratio attritionnel soit minimale.

Pour ce faire, l'actuaire considère l'un des sinistres de la liste comme étant le seuil et calcule la sinistralité attritionnelle associée en retirant de la statistique globale les sinistres supérieurs à ce seuil. Il obtient donc un historique d'une dizaine d'années de la sinistralité attritionnelle annuelle sur lequel il peut calculer une mesure de volatilité (variance ou écart-type par exemple).

Il réitère ensuite l'opération pour chacun des sinistres individuels dont il dispose. Le seuil retenu est donc le sinistre de la liste pour lequel l'écart-type de la sinistralité attritionnelle associée est minimal.

Formulation mathématique

Soient S_1, \dots, S_N les montants de la sinistralité annuelle globale des N années d'historique. Soient X_1, \dots, X_n les montants de sinistre individuels.

Pour un montant de sinistre individuel $X_j, j \in [1, n]$ considéré comme seuil des atypiques, la sinistralité attritionnelle annuelle associée pour l'année k s'écrit comme :

$$\forall k \in [1, N], S_{att_k} = S_k - \sum_{i=1}^n X_i \mathbb{1}_{X_i \geq X_j}$$

Le seuil retenu par cette méthode est donc :

$$\theta = \arg \min_{X_j, j \in [1, n]} \mathbb{V}[S_{att_1}, \dots, S_{att_N}]$$

A première vue, il est naturel de penser que la volatilité de la sinistralité attritionnelle est minimale lorsque tous les sinistres de la liste sont considérés comme atypiques, c'est-à-dire lorsque le seuil choisi est égal au minimum des sinistres, mais il peut y avoir des situations où ce n'est pas le cas.

Pour mieux comprendre, considérons l'exemple suivant :

Année	Sinistralité globale	Année	Montant de sinistre indiv.
2015	10 782 390	2021	6 028 323
2016	10 888 941	2018	2 003 250
2017	11 735 881	2019	1 777 232
2018	14 790 886	2021	1 339 074
2019	16 378 111	2017	1 316 153
2020	22 251 737	2016	1 216 522
2021	18 006 505	2018	751 900
2022	19 410 767		

L'année 2020 est marquée par une forte sinistralité qui se démarque des autres années. Pourtant, cette année-là il n'y a pas de sinistres importants (i.e. de sinistres qui dépassent le seuil de notification de la cédante). Cette sinistralité exceptionnelle est donc caractérisée par un volume important de sinistres moyens, et non par des sinistres de pointe. De ce fait, peu importe le seuil des atypiques choisi, la sinistralité attritionnelle de l'année 2020 est égale à la sinistralité totale. En choisissant un seuil relativement faible, la sinistralité attritionnelle des autres années baissera (puisque davantage de sinistres seront retirés de la statistique globale), creusant d'autant plus l'écart avec cette année exceptionnelle.

Le tableau 4.1 fournit, pour chaque seuil considéré, l'écart-type de la sinistralité attritionnelle associée :

TABLE 4.1 – Exemple de choix du seuil par minimisation de la variance

Seuil considéré	Ecart-type
6 028 323	4 277 231
2 003 250	4 334 564
1 777 232	4 271 201
1 339 074	4 399 699
1 316 153	4 525 138
1 216 522	4 661 941
751 900	4 693 215

Dans cet exemple, le seuil retenu est le sinistre de 2019 de 1 777 232€. Pour des seuils inférieurs à ce montant, l'écart-type est nettement plus élevé et c'est d'ailleurs le sinistre mi-

nimal qui maximise l'écart-type.

Cette méthode de détermination du seuil des atypiques présente plusieurs avantages. Tout d'abord, son principe est facile à comprendre et simple à mettre en oeuvre. Elle nécessite une liste de sinistres, puisque le seuil est choisi parmi eux, mais n'impose aucune contrainte quant à leur nombre. La méthode fonctionne pour une grande liste de sinistres, tout comme pour une petite liste de sinistres. Ce dernier point est important pour le réassureur qui, comme cela a été évoqué précédemment, ne dispose que de peu de données.

Cette méthode permet de ne considérer comme atypiques que les sinistres ayant un réel impact sur la sinistralité globale.

4.3 Minimisation de la distance

La deuxième méthode pour déterminer le seuil des atypiques se concentre sur l'ajustement de la loi des sinistres atypiques.

Dans cette méthode, le seuil des atypiques est choisi comme étant égal au paramètre de seuil de la distribution ajustant au mieux les sinistres importants. Autrement dit, le seuil des atypiques et le seuil de modélisation sont les mêmes. Ils sont donc déterminés simultanément, contrairement aux autres méthodes.

Cette méthode n'est donc pas une méthode de détermination du seuil des atypiques en soit. Il s'agit simplement de déterminer la distribution des sinistres importants, puis de considérer comme seuil des atypiques le paramètre de seuil de la loi ainsi choisie.

La méthode utilisée pour choisir la distribution des sinistres atypiques repose sur la minimisation de l'écart entre la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition de loi théorique. Elle est développée dans la partie 5.

4.4 Utilisation d'un modèle composite

Une autre méthode pour déterminer le seuil des atypiques est d'utiliser les modèles composites. Les modèles composites permettent de modéliser à la fois la sinistralité attritionnelle et la sinistralité atypique en combinant deux distributions : l'une à queue lourde, l'autre à queue moins lourde.

Définition 4.4.1 (Modèle composite)

Un modèle composite est défini par la densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} r \frac{f_1(x)}{F_1(\theta)} & \text{pour } 0 \leq x < \theta \\ (1-r) \frac{f_2(x)}{1-F_2(\theta)} & \text{pour } x \geq \theta \end{cases}$$

où f_1 et F_1 (resp. f_2 et F_2) sont les fonctions de densité et de répartition de la loi de probabilité du ventre (resp. de la queue) de la distribution.

Le modèle comporte donc les paramètres suivants :

- Les paramètres des deux lois combinées.
- Un paramètre $r \in [0, 1]$, appelé paramètre de mélange.
- Un paramètre de seuil $\theta > 0$, qui permet de déterminer à partir de quel montant l'une et l'autre des deux distributions s'appliquent. Ce paramètre permet donc la distinction entre les pertes attritionnelles et les pertes atypiques.

Les conditions de régularité suivantes sont imposées :

$$\begin{cases} f(\theta^-) = f(\theta^+) \\ f'(\theta^-) = f'(\theta^+) \end{cases} \quad (4.1)$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} r \frac{f_1(\theta)}{F_1(\theta)} = (1-r) \frac{f_2(\theta)}{1-F_2(\theta)} \\ r \frac{f_1'(\theta)}{F_1(\theta)} = (1-r) \frac{f_2'(\theta)}{1-F_2(\theta)} \end{cases}$$

Ce système peut également se réécrire :

$$\begin{cases} \frac{f_2(\theta)F_1(\theta)}{f_1(\theta)(1-F_2(\theta))} = \frac{f_2'(\theta)F_1(\theta)}{f_1'(\theta)(1-F_2(\theta))} \\ r = \frac{f_2(\theta)F_1(\theta)}{f_2(\theta)F_2(\theta)+f_1(\theta)} \end{cases}$$

Dans ce mémoire, la modélisation de la sinistralité attritionnelle et de la sinistralité atypique se fait en deux temps, il n'est pas question ici de modéliser toute la sinistralité avec un seul modèle, d'autant plus que l'actuaire ne dispose d'aucune information sur les sinistres attritionnels individuels. L'utilisation des modèles composites a donc pour unique but de déterminer le seuil des atypiques.

Grâce aux conditions de régularité imposées (équation 4.1), il est possible de fixer deux des paramètres, en les exprimant en fonction des autres. Les autres paramètres sont estimés de manière simultanée par la méthode du maximum de vraisemblance. Cette méthode a été introduite par Cooray and Ananda (2005) [18].

L'objectif est donc d'ajuster un modèle composite sur la liste de sinistres individuels et ainsi obtenir une estimation du paramètre de seuil du modèle. C'est cette valeur du paramètre qui sera choisie comme seuil des atypiques.

Dans le cadre de ce mémoire, seules les lois Gamma et log-normale seront utilisées pour modéliser le ventre de la distribution, et les lois Pareto et Pareto généralisée pour la queue de la distribution. Il y a donc quatre modèles composites à étudier.

Même si l'utilisation des modèles composites a ici pour seul objectif de déterminer le seuil des atypiques, c'est-à-dire de trouver un estimateur du paramètre θ , et non pas de modéliser simultanément la sinistralité attritionnelle et atypique, il convient tout de même de choisir le meilleur ajustement parmi les quatre modèles proposés. La sélection du modèle se base sur les critères d'information d'Aikaike et bayésien.

Le critère d'information d'Aikaike (*Akaike information criterion* (AIC) en anglais) est un critère statistique proposé par Hirotugu Akaike en 1973 [11]. Il est donné par :

$$AIC = 2k - 2 \ln \tilde{L}(\theta)$$

Le critère d'information bayésien (*bayesian information criterion* (BIC) en anglais), aussi appelé critère d'information de Schwarz, est un critère d'information dérivé du critère d'information d'Aikaike, proposé par Gideon Schwarz en 1978 [12]. Il est défini par :

$$BIC = -2 \ln \tilde{L}(\theta) + k \ln(N)$$

où \tilde{L} est le maximum de la fonction de vraisemblance du modèle, k le nombre de paramètres à estimer et N le nombre d'observations dans l'échantillon.

Les critères d'information pénalisent les modèles ayant plus de paramètres. Le modèle retenu est celui qui minimise les critères AIC et BIC.

L'inconvénient de cette méthode est que, comme pour tout ajustement, sa fiabilité dépend du nombre de sinistres à disposition. Or, en réassurance, les données sur les sinistres individuels sont très limitées.

4.5 Méthode de minimisation de l'AMSE

Lorsqu'on cherche à déterminer un seuil des atypiques, il est naturel de penser à la théorie des valeurs extrêmes. Quelques notions de la théorie des valeurs extrêmes sont détaillées en annexe D.

Dans la théorie des valeurs extrêmes, les méthodes de détermination du seuil des atypiques sont bien souvent des méthodes graphiques (Hill plot, Pickands plot, etc.), qui peuvent être difficiles à interpréter. Pour ce travail, nous avons donc fait le choix d'une méthode numérique, qui fournit de manière automatique une valeur du seuil des valeurs extrêmes. Il s'agit de la méthode de minimisation de l'erreur quadratique moyenne asymptotique (AMSE), issue des travaux des Caeiro and Gomes (2016) [13]. Le lecteur curieux pourra retrouver d'autres méthodes de détermination du seuil des valeurs extrêmes dans le mémoire d'Antoine Pierre [3].

Principe de la méthode

L'idée de cette méthode est de sélectionner un nombre d'excès k_0 qui minimise l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de Hill.

Pour un échantillon X_1, \dots, X_n de variables aléatoires indépendantes et de même loi appartenant au domaine de Fréchet, l'estimateur de Hill de l'indice des valeurs extrêmes est donné par :

$$\hat{\gamma}_n^{(H)}(k_n) = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln(X_{(n-i+1)}) - \ln(X_{(n-k_n)})$$

où $X_{(n-k_n)}$ est une estimation du seuil des extrêmes et k_n un entier compris entre 1 et n .

Cette méthode consiste à sélectionner un seuil $X_{(n-\hat{k}_0)}$, où \hat{k}_0 est une estimation de k_0 , qui minimise l'erreur quadratique moyenne asymptotique de l'estimateur de Hill, c'est-à-dire la somme du biais au carré et de la variance de la distribution asymptotique de l'estimateur $\hat{\gamma}_n^{(H)}$. L'objectif est donc de sélectionner un seuil qui représente un bon compromis entre le biais et la variance de l'AMSE.

Sous certaines conditions de régularité non détaillées ici, il est possible d'exprimer l'AMSE de l'estimateur de Hill par :

$$\text{AMSE}(\hat{\gamma}_n^{(H)}(k_n)) = \gamma^2 \left(\frac{1}{k_n} + \frac{\lambda^2}{(1-\rho)^2} \left(\frac{n}{k_n} \right)^{2\rho} \right)$$

où ρ et λ sont des paramètres qui contrôlent la vitesse de convergence de l'estimateur de Hill.

Cette quantité est minimale pour la valeur k_0 suivante :

$$k_0 = \left\lfloor \left(\frac{(1-\rho)^2 n^{-2\rho}}{-2\rho\lambda^2} \right)^{\frac{1}{1-2\rho}} \right\rfloor$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction partie entière.

Grâce aux estimateurs des paramètres ρ et λ proposés par Caeiro and Gomes (2016) [13], il est possible d'obtenir une estimation \hat{k}_0 du nombre d'excès à considérer pour estimer le seuil des valeurs extrêmes.

Cette méthode fournit donc le nombre d'excès optimal qui minimise l'AMSE de l'estimateur de Hill, et donc par extension, la valeur du seuil des valeurs extrêmes correspondant.

5. Modélisation du ratio combiné et simulation

L'objectif de l'étude est de compléter et optimiser l'outil de tarification des traités de réassurance proportionnel en adoptant une nouvelle approche simulation. Pour cela, il est nécessaire de modéliser la sinistralité attritionnelle et la sinistralité atypique par des lois de probabilités.

Ce chapitre présente les méthodes utilisées pour déterminer la distribution de la sinistralité atypique d'une part, et la distribution de la sinistralité attritionnelle d'autre part. Ces méthodes s'appliquent après détermination du seuil des atypiques par le biais d'un des procédés développés en partie 4.

Les différents frais à charge du réassureur, qui doivent être pris en compte pour le calcul du ratio combiné au même titre que les clauses du traité, seront également détaillés dans ce chapitre.

5.1 Modélisation du loss ratio atypique

Pour la sinistralité atypique, l'actuaire dispose d'une liste de sinistres. De ce fait, il va pouvoir modéliser la charge des sinistres atypiques à l'aide d'un modèle fréquence/coût moyen. Il suffira alors de diviser la charge de sinistre par la prime pour obtenir le *loss ratio*.

5.1.1 Modèle collectif

La tarification des sinistres atypiques repose sur deux éléments : le nombre de sinistres et le coût moyen d'un sinistre. Pour estimer la charge globale des sinistres atypiques, l'actuaire va donc utiliser un modèle collectif, à savoir une approche probabiliste fréquence \times sévérité.

L'objectif du modèle collectif est d'obtenir un modèle plus facile à manipuler que le modèle individuel mais ayant la même finalité, à savoir étudier la distribution de probabilité de la charge totale S de sinistres sur un portefeuille de réassurance au cours d'une période donnée.

Définition 5.1.1 (Modèle collectif)

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} représentant le nombre total de sinistres survenus au cours d'une année.

Soient X_1, \dots, X_N des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées représentant les montants des sinistres. Ces variables sont supposées indépendantes de N .

La charge totale S est donnée par :

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

L'espérance de S est donnée par :

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N] \times \mathbb{E}[X]$$

où X est une variable aléatoire de même loi que X_1, \dots, X_N .

Son écart-type est donné par :

$$\sigma(S) = \sqrt{\mathbb{E}(N) \times \sigma^2(X) + \mathbb{E}^2(X) \times \sigma^2(N)}$$

Les lois les plus utilisées pour la fréquence N sont la distribution de Poisson et la distribution binomiale négative. Dans le cadre de ce mémoire, nous nous limiterons à la loi de Poisson, puisqu'elle ne comporte qu'un seul paramètre et que nous disposons que de peu de données.

Pour modéliser les montants de sinistres, les distributions de Pareto et Pareto généralisée seront utilisées.

Toutes les lois utilisées sont définies en annexe B.

5.1.2 Choix de la distribution pour la sévérité des sinistres atypiques

Le choix de la distribution des sinistres importants se fait après avoir déterminé le seuil des atypiques, sauf dans le cas de la méthode énoncée en partie 4.3 où le seuil des atypiques et la distribution des sinistres sont déterminés de manière simultanée.

Principe de la méthode

L'actuaire en charge de la tarification dispose d'un échantillon (x_1, \dots, x_p) d'observations, qui correspondent à des montants de sinistres importants mis en *as-if*. L'hypothèse principale est que les observations sont la réalisation de variables aléatoires (X_1, \dots, X_p) indépendantes et

identiquement distribuées de même loi qu'une variable aléatoire X de fonction de répartition F . L'objectif de l'actuaire est d'approcher de la meilleure manière la distribution de probabilité de X .

La première étape est de représenter la fonction de répartition empirique F_n à l'aide des observations disponibles. Cette dernière est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{x_i \leq x}$$

La deuxième étape consiste à déterminer la distribution théorique de X . Pour la modélisation de la sévérité des sinistres atypiques, deux lois de probabilités sont utilisées : la distribution de Pareto et la distribution Pareto généralisée, définies en annexe B.

Pour un seuil fixé, il est possible de déterminer les paramètres des distributions de Pareto et Pareto généralisée en fonction de ce dernier.

Calcul du paramètre α de la distribution de Pareto

Soit (x_1, \dots, x_n) un n -échantillon indépendant et identiquement distribué suivant une loi de Pareto de paramètres α et θ .

Le paramètre θ est connu et on cherche à estimer α par la méthode du maximum de vraisemblance.

La fonction log-vraisemblance s'écrit :

$$\ln L(\alpha, \theta | x) = \ln \left(\prod_{i=1}^n \frac{\alpha \theta^\alpha}{x_i^{\alpha+1}} \right) = n \ln \alpha + n \alpha \ln \theta - \sum_{i=1}^n (\alpha + 1) \ln x_i$$

On dérive cette expression par rapport à α et on annule :

$$\frac{n}{\alpha} + n \ln \theta - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i - n \ln \theta}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de α est donc :

$$\hat{\alpha}_{EMV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{x_i}{\theta} \right)}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance est biaisé. En revanche, l'estimateur suivant, donné par Rytgaard (1990) [19], ne l'est pas :

$$\hat{\alpha} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{x_i}{\theta} \right)}$$

C'est cet estimateur que nous utiliserons par la suite.

Calcul des paramètres α et τ de la distribution de Pareto généralisée

Soit (x_1, \dots, x_n) un n -échantillon indépendant et identiquement distribué suivant une loi de Pareto généralisé de paramètres α , τ et θ .

Le paramètre θ est connu et on cherche à estimer α et τ par la méthode du maximum de vraisemblance.

La fonction log-vraisemblance s'écrit :

$$\ln L(\alpha, \tau, \theta|x) = \ln \left(\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(\alpha + \tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} \frac{\theta^\alpha x^{\tau-1}}{(x + \theta)^{\alpha+\tau}} \right)$$

c'est-à-dire :

$$\ln L(\alpha, \tau, \theta|x) = n \left[\ln \frac{\Gamma(\alpha + \tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} + \alpha \ln \theta \right] + \sum_{i=1}^n [(\tau - 1) \ln(x_i) - (\alpha + \tau) \ln(x_i + \theta)]$$

Il faut donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} n \left[\frac{\Gamma'(\alpha+\tau)}{\Gamma(\alpha+\tau)} - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \ln \theta \right] - \sum_{i=1}^n \ln(x_i + \theta) = 0 \\ n \left[\frac{\Gamma'(\alpha+\tau)}{\Gamma(\alpha+\tau)} - \frac{\Gamma'(\tau)}{\Gamma(\tau)} \right] + \sum_{i=1}^n [\ln(x_i) - \ln(x_i + \theta)] = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ce système ne sont pas explicites, une méthode numérique est donc utilisée pour approcher la solution.

En ce qui concerne le paramètre de seuil, deux approches sont possibles : soit le seuil est un sinistre existant, soit c'est un montant compris entre le sinistre minimal et le sinistre maximal, mais qui peut être différent des montants de sinistres existants. Nous avons opté pour la première option, c'est-à-dire que, dans cette méthode, le seuil sera obligatoirement égal à l'un des sinistres de la liste.

L'actuaire procède donc par itération en considérant chaque sinistre de la liste (parmi ceux inférieurs ou égal au seuil des atypiques, pour les raisons évoquées en partie 4.1) comme étant le seuil de modélisation et en calculant le ou les paramètres de la loi associée.

Il y a donc plusieurs candidats pour la distribution de la sévérité des sinistres atypiques.

Pour déterminer le meilleur ajustement, l'actuaire a le choix entre trois statistiques d'adéquation : la statistique de Kolmogorov-Smirnov, la statistique de Cramér-von Mises et enfin la statistique d'Anderson-Darling. Ces statistiques, qui sont définies dans l'annexe C, mesurent l'écart entre la fonction de répartition empirique des sinistres et la fonction de répartition théorique. La meilleure distribution est celle pour laquelle la valeur de la statistique de test choisie est la plus faible.

Normalement, pour utiliser ces statistiques de test, les paramètres des lois doivent être connus mais en pratique on doit toujours les estimer. Christian Partrat et Jean-Luc Besson (2005) [22] exposent comment adapter ces tests lorsque l'on doit estimer les paramètres des distributions théoriques considérées.

Bien que ces statistiques constituent une aide lors du choix de la loi pour l'ajustement des sinistres atypiques, le choix final ne relève que de l'expertise de l'actuaire. En effet, il peut arriver qu'une distribution ait une faible valeur de la statistique de test mais que le paramètre α associé ait une valeur aberrante par rapport aux valeurs habituelles sur le marché. De ce fait, cette combinaison ne sera pas retenue par l'actuaire, bien qu'elle soit bonne d'un point de vue de la statistique utilisée.

5.1.3 Modélisation de la fréquence des sinistres atypiques

Une fois que le seuil de modélisation a été déterminé, il est possible d'estimer simplement la fréquence des supérieurs à ce seuil pour l'année à tarifier. On suppose que la variable aléatoire N suit une loi de Poisson de paramètre λ .

En notant :

- n_{excess} le nombre de sinistres supérieurs au seuil de modélisation
- k le nombre d'années d'historique,
- P_1, \dots, P_k les primes historiques mises en *as-if* de la cédante,
- P_{k+1} le montant de primes estimé pour l'année à tarifier.

Il est possible d'estimer λ par :

$$\hat{\lambda} = n_{excess} \times \frac{P_{k+1}}{\underbrace{\sum_{i=1}^k P_i}_{\text{terme correctif}}}$$

L'estimation du nombre de sinistres supérieurs au seuil de modélisation pour l'année à tarifier est égal au nombre de sinistres supérieurs au seuil de modélisation multiplié par un terme correctif. Le terme correctif prend en compte une mesure d'exposition qui permet de

rendre compte de l'évolution du portefeuille durant les années d'historique.

L'assiette de primes est ici considérée comme une mesure d'exposition : si l'assiette de primes augmente, on peut s'attendre à une augmentation de la sinistralité. Néanmoins, il existe d'autres mesures d'exposition qui seront préférables à l'assiette de primes lorsque le réassureur dispose de l'information.

5.1.4 Simulation du loss ratio atypique

Une fois que l'actuaire a choisi la distribution de la sévérité des sinistres grâce à la statistique de test et/ou l'ajustement graphique, et qu'il a calculé le paramètre de fréquence λ de la distribution de Poisson, il peut passer à la simulation.

L'actuaire va donc simuler un n -échantillon de la variable aléatoire N qui suit une loi de Poisson de paramètre λ . Il obtient donc n valeurs du nombre de sinistres atypiques annuel.

Ensuite, pour chaque réalisation $n_i, i = 1, \dots, n$ de la variable aléatoire N , l'actuaire simule un n_i -échantillon de la loi de la sévérité. L'actuaire va pouvoir appliquer la limite définie au contrat sur chaque montant de sinistre individuel ainsi simulé.

Enfin, il pourra agréger les sinistres par année de façon à obtenir n valeurs de la sinistralité atypique annuelle, puis calculer les *loss ratios* correspondant en divisant par la prime estimée de l'année à venir (P_{N+1}).

5.2 Modélisation du loss ratio attritionnel

En ce qui concerne la sinistralité attritionnelle, l'actuaire ne dispose d'aucune information sur les sinistres individuels. Il dispose uniquement de l'historique de la sinistralité attritionnelle annuelle. Plus particulièrement, il ne dispose pas du nombre de sinistres sur l'année et il n'est donc pas possible de réaliser un modèle fréquence/sévérité.

La sinistralité attritionnelle est modélisée par une loi classique telle que la distribution log-normale ou encore la distribution gamma, définies dans l'annexe B. Il s'agit ici de simuler directement les ratio S/P annuels.

La sélection de la loi la plus adaptée se base sur les critères AIC et BIC, définis en partie 4.4. Dans le cas des lois log-normale et gamma, il n'y a que deux paramètres à estimer ($k = 2$). Les paramètres de ces lois sont calculés par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour

cela, une méthode numérique est utilisée.

Une fois la loi choisie, l'actuaire pourra en simuler un n -échantillon. Il obtient donc n valeurs du loss ratio attritionnel.

5.3 Prise en compte des frais et application des clauses

Les lois de probabilité permettent de modéliser et simuler le ratio sinistres sur primes mais de façon à déterminer la rentabilité d'un traité de réassurance, il est nécessaire de prendre en compte les clauses du traité et les différents frais à charge du réassureur.

Les frais sont de différentes natures :

- Les frais généraux, qui correspondent aux frais de gestion et de rétrocession. Ils sont estimés par une étude de rentabilité.
- Les frais de courtage, qui permettent de rémunérer l'éventuel courtier qui est intervenu sur le traité de réassurance. En général, les frais de courtage s'élèvent à 2,50%.
- Les taxes et autres charges, qui prennent en compte tous les autres frais du traité (autres que les frais de gestion et courtage).

Les frais et clauses, exprimés en pourcentage, sont à ajouter au *loss ratio* de façon à obtenir le ratio combiné. Mathématiquement, le ratio combiné du réassureur, noté CR, s'exprime comme :

$$\text{CR} = \text{LR} - \text{LC} + \text{COM} + \text{PB} + \text{Frais}$$

Le ratio combiné est un premier indicateur de la rentabilité du traité. Néanmoins, pour calculer le résultat estimé du traité, un autre élément est à prendre en compte : les produits financiers. Ces derniers correspondent à la rémunération générée par le placement des provisions du portefeuille réassuré. Leur pourcentage est déterminé par une étude de rentabilité financière.

Le résultat du traité est égal à :

$$\text{Résultat du traité} = 1 - \text{CR} + \text{Produits financiers}$$

Lors de la simulation, l'actuaire obtient n valeurs de la sinistralité annuelle. Les n années simulées sont supposées consécutives et ordonnées. L'actuaire va pouvoir appliquer les différentes clauses et ajouter les frais sur les valeurs simulées, ce qui lui permettra d'obtenir n valeurs du ratio combiné et du résultat estimé. L'estimation des différentes clauses et du résultat estimé pour l'année à tarifier est calculée par une moyenne sur les n années.

Toutes les méthodes énoncées dans cette partie sont appliquées sur un exemple concret dans la partie 6.1.

6. Application

L'objectif principal de ce chapitre est d'appliquer l'ensemble des méthodes énoncées dans les parties précédentes sur un exemple concret, à savoir détermination du seuil des atypiques (partie 4), modélisation puis simulation des ratios combinés (partie 5) et de comparer les résultats obtenus à ceux de la tarification via l'ancien outil.

6.1 Application sur données réelles

Les données utilisées dans cette partie sont des données réelles mais pour des raisons de confidentialité, le nom de la cédante n'est pas mentionné.

6.1.1 Description du traité

Le traité utilisé pour illustrer les méthodes évoquées dans ce mémoire est un bouquet proportionnel d'une cédante grecque, c'est-à-dire un programme de réassurance regroupant plusieurs sous-traités. Dans le cas d'un bouquet, le réassureur est contraint de souscrire tous les sous-traités, il ne peut pas se placer sur un seul des sous-traités. Par conséquent, l'actuaire doit tarifier individuellement chaque sous-traité puis le total, de façon à analyser la rentabilité du bouquet entier.

En l'occurrence, le programme utilisé pour cet exemple comporte 5 sous-traités, couvrant chacun des risques différents. L'analyse présentée se restreint au premier sous-traité qui couvre l'incendie. Il s'agit d'un traité combinant une quote-part et un excédent de plein. Pour plus d'informations sur ce type de traité, se référer à la partie 2.4.3.

Le sous-traité couvre différents type de risques :

- Des risques simples, qui correspondent aux biens de particuliers tels qu'une maison ou un appartement.
- Des risques commerciaux, qui correspondent à des bâtiments utilisé dans le cadre d'une activité professionnelle ou commerciale tels qu'une entreprise, un entrepôt ou encore une boulangerie par exemple.
- Des risques industriels, qui correspondent à de gros sites industriels comme des industries chimiques par exemple.

Lorsqu'on regarde les profils de portefeuille de la cédante concernant la garantie incendie, la majorité des risques ont une somme assurée entre 75 000 et 150 000€. Il y a tout de même une vingtaine de gros risques, dont la somme assurée dépasse 3 000 000€.

La figure 6.1 illustre la répartition du portefeuille en matière de somme assurée :

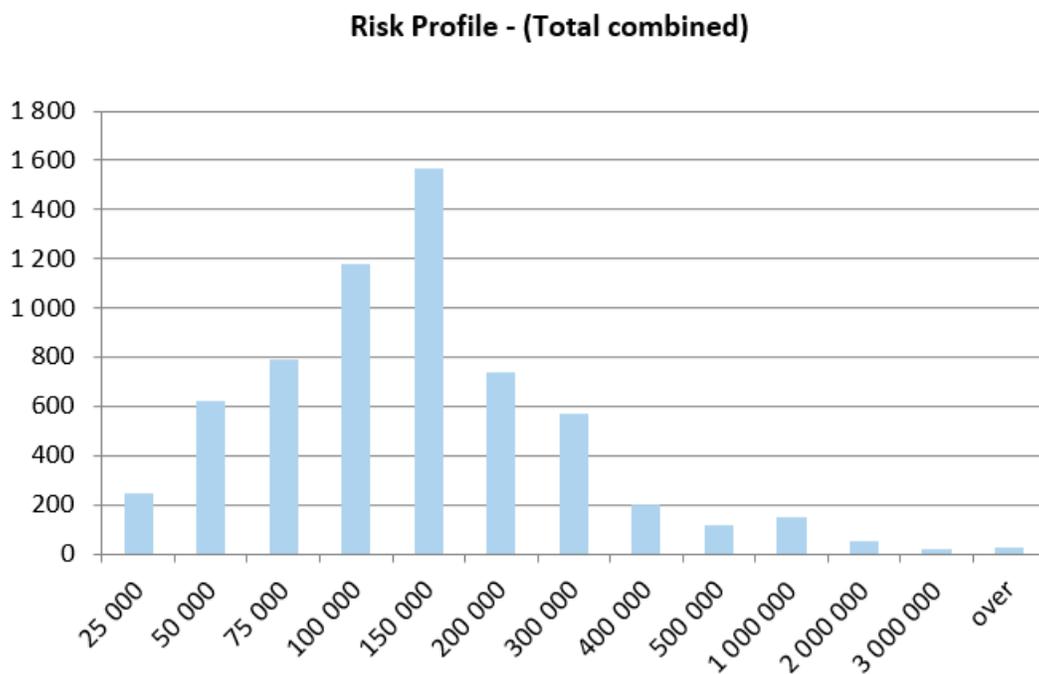


FIGURE 6.1 – Histogramme des profils de risques (tous risques confondus)

Les données contractuelles sont les suivantes :

TABLE 6.1 – Données contractuelles du sous-traité étudié

Branche	INC
Devise	EUR
Primes 2023 (est.)	354 820
Base de rattachement	Clean Cut
Courtage	2,50%
Taxes	2,00%
Frais généraux	3,20%
Produits financiers (est.)	3,30%
Limite par sinistre	5 860 000

De plus, le sous-traité comporte une commission à échelle et une participation aux bénéfices fixe :

COM		S/P	
Min	30,00%	Min	31,00%
Max	40,50%	Max	41,50%

Pourcentage PB	20,00%
Frais de réassurance	8,00%
Report de pertes	2

Enfin, il y a également un loss corridor, dont les paramètres sont :

LC	LR	
100,00%	LR min	50,00%
	LR max	60,00%

6.1.2 Revalorisation des données

On se place en novembre 2022, comme si nous tarifions cette affaire pour le renouvellement du 1^{er} janvier 2023.

La première étape consiste à revaloriser les données. L'actuaire dispose de 11 années d'historique, de 2012 à 2022. Nous n'avons pas eu d'informations sur les changements tarifaires durant ce laps de temps. Nous avons donc décidé, après discussion avec le souscripteur, de ne pas appliquer de *rate change*. De plus les données sont déjà au traité, ainsi seule l'inflation est à prendre en compte pour la mise en *as-if*.

Pour la garantie incendie, l'indice à utiliser pour la mise en *as-if* est l'indice du coût de la construction. Le tableau 6.2 présente l'indice utilisé dans cet exemple, ainsi que le facteur d'inflation associé (OLF), qui a été calculé par la méthode décrite en partie 3.2.1. Nous avons fait le choix d'utiliser le même indice pour les primes et sinistres.

TABLE 6.2 – Evolution de l'indice du coût de la construction dans le pays de la cédante

Année	Indice	Evolution	OLF
2012	103,99		1,1263
2013	104,83	0,81%	1,1173
2014	103,03	-1,72%	1,1368
2015	100,35	-2,60%	1,1672
2016	100,18	-0,17%	1,1691
2017	100,20	0,02%	1,1689
2018	100,86	0,66%	1,1613
2019	101,42	0,56%	1,1549
2020	102,22	0,79%	1,1458
2021	99,84	-2,33%	1,1731
2022	104,95	5,12%	1,116
2023 (est.)	117,13	8,50%	1,00

Le tableau ci-après indique, pour chaque année d'historique, le montant de primes et sinistres historiques à gauche, et les montants indexés à droite.

TABLE 6.3 – Indexation des données historiques

Année	Primes	Sinistres	Primes indexées	Sinistres indexés
2012	392 006	211 605	441 539	238 343
2013	352 613	90 728	393 986	101 373
2014	307 453	128 356	349 529	145 921
2015	235 937	114 593	275 389	133 755
2016	267 508	134 492	312 769	157 247
2017	270 645	153 680	316 373	179 646
2018	298 865	147 064	347 076	170 788
2019	276 997	125 921	319 903	145 426
2020	279 412	120 603	320 167	138 195
2021	298 872	265 654	350 630	311 660
2022	217 534	15 635	242 780	17 450

De plus, l'actuaire dispose d'une liste de 17 sinistres importants individuels qu'il faut également indexer. Le seuil de notification des sinistres est de 20 000€.

TABLE 6.4 – Indexation des sinistres individuels

Année	Montant du sinistre	Sinistre indexé
2012	103 900	117 028
2012	29 007	32 672
2012	21 216	23 896
2014	50 629	57 558
2014	23 291	26 478
2015	20 193	23 570
2016	30 791	36 001
2016	23 290	27 230
2017	85 999	100 529
2017	21 399	25 015
2018	48 578	56 414
2018	26 892	31 231
2019	34 962	40 378
2019	28 130	32 487
2020	25 064	28 720
2021	120 816	141 738
2021	28 632	33 591

Les données présentées sont exprimées en euro et il s’agit des données globales de la cédante (tous risques confondus). L’actuaire ne dispose pas des données par type de risque, ce qui le contraint à calculer un loss ratio global lors de la tarification. Enfin, pour rappel, il s’agit des données d’une cédante grecque, ce qui explique les montants relativement faibles.

La limite par sinistre, qui s’élève à 5 860 000€, peut paraître trop élevée compte tenu de la sinistralité observée. Néanmoins, le sous-traité est exposé à quelques risques industriels dont la somme assurée peut être très élevée. La probabilité d’un sinistre qui attend la limite est certes faible, mais non nulle.

6.1.3 Choix du seuil des atypiques

A présent que les données sont sur une même base, il est possible de commencer la tarification à proprement parler.

La première étape consiste à choisir le seuil des atypiques permettant de séparer la sinistralité atypique de la sinistralité de base. Pour cela, l’actuaire a le choix parmi 4 méthodes.

Méthode par minimisation de la variance

Cette première méthode fournit la valeur du seuil qui minimise la variance (et donc l'écart-type) du loss ratio attritionnel. Le seuil est alors un sinistre de liste.

Le tableau 6.5 ci-dessous indique la valeur de l'écart-type des loss ratio attritionnels historiques, pour chaque seuil considéré.

TABLE 6.5 – Ecart-type de la sinistralité attritionnelle pour chaque seuil considéré

Seuil considéré	Ecart-type
141 738	0.200
117 028	0.143
100 529	0.145
57 558	0.140
56 414	0.144
40 378	0.137
36 001	0.132
33 591	0.122
32 487	0.137
31 231	0.119
28 720	0.120
27 230	0.133
26 478	0.107
25 015	0.111
23 896	0.115
23 570	0.124

Le seuil pour lequel l'écart-type de la sinistralité attritionnelle est minimal est le sinistre de 26 478€. C'est donc ce dernier qui est retenu pour cette méthode.

Méthode par minimisation de la distance

Pour rappel, cette méthode correspond en réalité à la méthode utilisée pour le choix de la distribution pour modéliser la sévérité des sinistres. Elle est donc habituellement utilisée à l'étape suivante de la tarification, une fois que le seuil des atypiques a été déterminé.

Cependant, si l'actuaire souhaite choisir le seuil des atypiques de telle façon qu'il soit égal au seuil optimal de modélisation de la sévérité des sinistres, alors il pourra utiliser cette méthode à la fois pour déterminer le seuil des atypiques et la distribution de la sévérité des sinistres atypiques.

Le tableau 6.6 montre le top 10 des seuils qui minimisent la statistique de test de Kolmogorov-Smirnov pour la modélisation :

TABLE 6.6 – Minimisation de la distance sur données réelles

Distribution	Seuil	Stat	n excess	alpha
Pareto	23 570	0.111	17	1.70
Pareto	23 896	0.111	16	1.64
GPD	23 570	0.112	17	1.73
Pareto	25 015	0.120	15	1.65
GPD	23 896	0.132	16	2.02
Pareto	27 230	0.133	13	1.64
Pareto	26 478	0.133	14	1.69
GPD	25 015	0.139	15	1.98
GPD	26 478	0.139	14	1.78
GPD	27 230	0.205	13	2.09

Les valeurs du paramètre α pour les distributions de Pareto généralisée sont plus élevées que celles des distributions de Pareto.

Les valeurs de la statistique de Kolmogorov-Smirnov sont très proches pour les trois premières distributions. Néanmoins, la distribution de Pareto de paramètre $\alpha = 1.70$ et de seuil 23 570 reste, si on se base uniquement sur la statistique de test, la meilleure distribution. De ce fait, c'est cette distribution qui semble être la plus adaptée pour la modélisation de sévérité des sinistres atypiques.

En plus de la statistique de test, l'actuaire pourra confirmer son choix en comparant graphiquement la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition théorique.

Ainsi, en choisissant cette méthode, l'actuaire aura donc déterminé deux choses : la distribution de la sévérité des sinistres atypiques et, par extension, le seuil des atypiques, qui est égal au seuil de modélisation, à savoir 23 570€.

Utilisation des modèles composites

Cette méthode repose sur l'utilisation d'un modèle composite. Parmi les quatre modèles utilisés, le seuil retenu est le seuil du modèle qui minimise les critères AIC et/ou BIC.

La mise en oeuvre sur R de cette méthode se base sur les travaux de Bettina Grün et Tatjana Miljkovic [8].

Le tableau 6.7 ci-dessous regroupe les estimateurs du paramètre de seuil obtenus pour chacun des modèles, ainsi que les valeurs des critères d'information :

TABLE 6.7 – Utilisation des modèles composites sur données réelles

Modèle	Estimateur du seuil	AIC	BIC
Log-normale/Pareto	$\hat{\theta} = 33\ 777.76$	411.79	415.96
Gamma/Pareto	$\hat{\theta} = 42\ 765.76$	412.09	416.25
Log-normale/GPD	$\hat{\theta} = 42\ 209.37$	433.76	438.76
Gamma/GPD	$\hat{\theta} = 57\ 536.70$	431.43	433.60

Le paramètre de seuil θ du modèle composite est calculé numériquement par la méthode du maximum de vraisemblance. Les valeurs initiales des différents paramètres sont calculées grâce à la méthode des moments.

En se basant sur le critères AIC et BIC, le meilleur modèle parmi les quatre est le modèle Log-normale/Pareto. Les deux modèles avec la distribution de Pareto généralisée sont moins bons, ce qui fait sens puisqu'il y a un paramètre en plus et que les critères d'information pénalisent les modèles avec beaucoup de paramètres.

Le seuil fourni par cette méthode est de 33 777.76€. Néanmoins, il peut être intéressant dans la suite de tester les trois autres seuils proposés par cette méthode.

Minimisation de l'AMSE

Cette méthode numérique fournit la valeur du seuil qui minimise l'erreur quadratique moyenne asymptotique de l'estimateur de Hill. En pratique, la fonction dAMSE du package R *tea* est utilisée.

```
> tea::dAMSE(claim$CLAIM_AMT)
$second.order.par
[1] -0.4713790 -0.6526089

$ko
[1] 13

$threshold
[1] 27230.03

$tail.index
[1] 1.69115
```

FIGURE 6.2 – Minimisation de l'AMSE sur données réelles

Le seuil fourni par cette méthode est de 27 230€.

L'étude des différentes méthodes de sélection de seuil mène à retenir plusieurs candidats. Dans le cadre de cet exemple, la méthode retenue pour la détermination du seuil des atypiques est la méthode de minimisation de la variance de la sinistralité attritionnelle. Le seuil retenu est donc de 26 477,92€.

Lors de la tarification de ce traité avec l'ancien outil, le seuil des atypiques était de 23 570€.

6.1.4 Modélisation de la sinistralité et simulation

Une fois le seuil des atypiques déterminé, l'actuaire peut séparer la sinistralité atypique de la sinistralité attritionnelle :

TABLE 6.8 – Split attritionnel/atypique sur données réelles

Année	Sinistralité totale	Sinistralité attritionnelle	Sinistralité atypique
2012	238 343	88 642	149 701
2013	101 373	101 373	0
2014	145 922	61 885	84 036
2015	133 755	133 755	0
2016	157 247	94 017	63 231
2017	179 646	79 117	100 529
2018	170 788	83 143	87 645
2019	145 426	72 561	72 865
2020	138 195	109 475	28 720
2021	311 660	136 331	175 329
2022	17 450	17 450	0

L'année 2022 est incomplète et n'est donc pas représentative de la réalité. L'estimation des primes pour l'année 2022 est cohérente par rapport aux assiettes de primes réelles des années précédentes. Sa vraie valeur devrait à priori être dans le même ordre de grandeur. En revanche, il est évident que la sinistralité totale réelle sur l'année 2022 sera bien plus élevée. Nous avons donc fait le choix, dans cet exemple, d'exclure cette année de la tarification. Cette année aurait pu être projetée, mais cet aspect n'est pas abordé dans ce travail.

A présent, l'actuaire peut passer à la modélisation des sinistres. Pour rappel, la modélisation de la sinistralité attritionnelle et de la sinistralité atypique se font séparément.

Modélisation de la sinistralité attritionnelle

Pour la modélisation de la sinistralité attritionnelle, l'actuaire a le choix entre deux distributions : la distribution log-normale et la distribution gamma. Les paramètres de ces deux distributions sont déterminés par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour choisir la loi, l'actuaire se base sur les critères AIC et BIC.

TABLE 6.9 – Ajustement lois Gamma et log-normale sur données réelles

Distribution	Paramètres		AIC	BIC
Gamma	$k = 11.34$	$\beta = 0.0252$	-17.48	-16.87
Log-normale	$\mu = -1.294$	$\sigma = 0.293$	-18.01	-17.40

L'information d'Akaike et l'information Bayésienne sont minimales pour la distribution log-normale. C'est donc cette dernière qui est retenue pour la modélisation de la sinistralité attritionnelle.

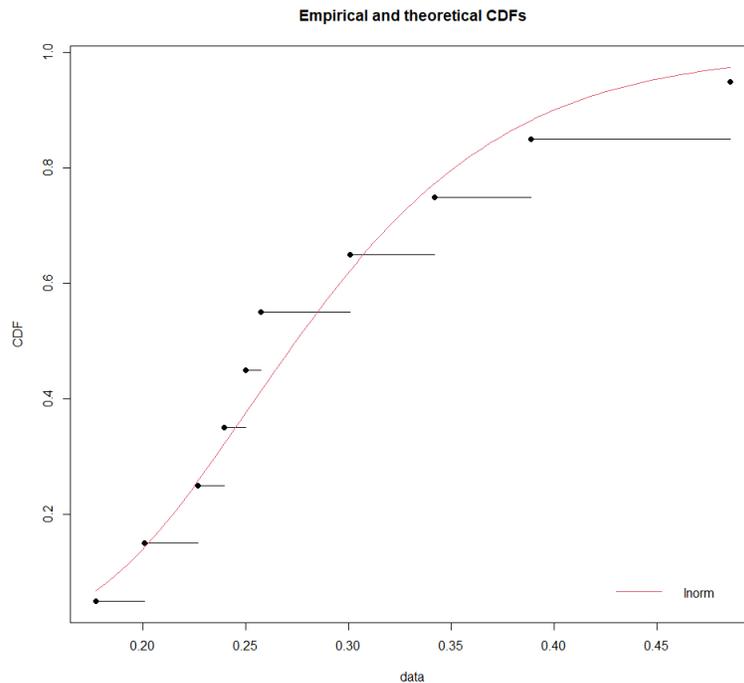


FIGURE 6.3 – Fonctions de répartition empirique et théorique du loss ratio attritionnel

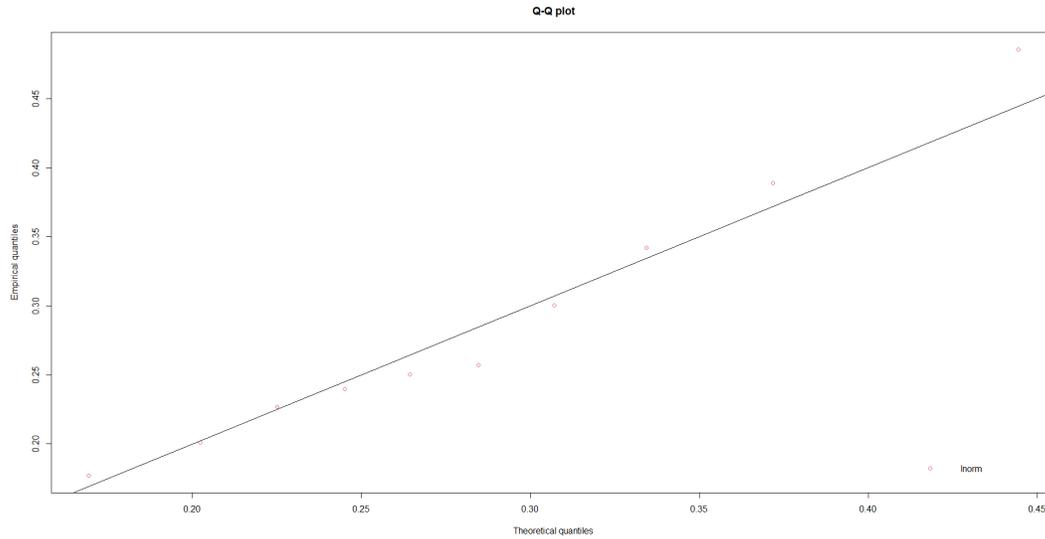


FIGURE 6.4 – QQ-plot de la loi de la sinistralité attritionnelle

Les paramètres de la loi Log-normale sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. Cette méthode permet de construire un intervalle de confiance à 95% pour les paramètres μ et σ en utilisant les propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

TABLE 6.10 – Caption

Paramètre	Valeur estimée	Intervalle de confiance à 95%
μ	-1.29	$[-1.48; -1.11]$
σ	0.29	$[0.20; 0.54]$

On simule ensuite $n = 100\,000$ valeurs d'une loi log-normale de paramètres $\mu = -1.29$ et $\sigma = 0.29$. On obtient donc n valeurs du *loss ratio* attritionnel. Il suffit alors de multiplier ces valeurs par le montant de primes 2023 pour obtenir des estimations de la sinistralité annuelle.

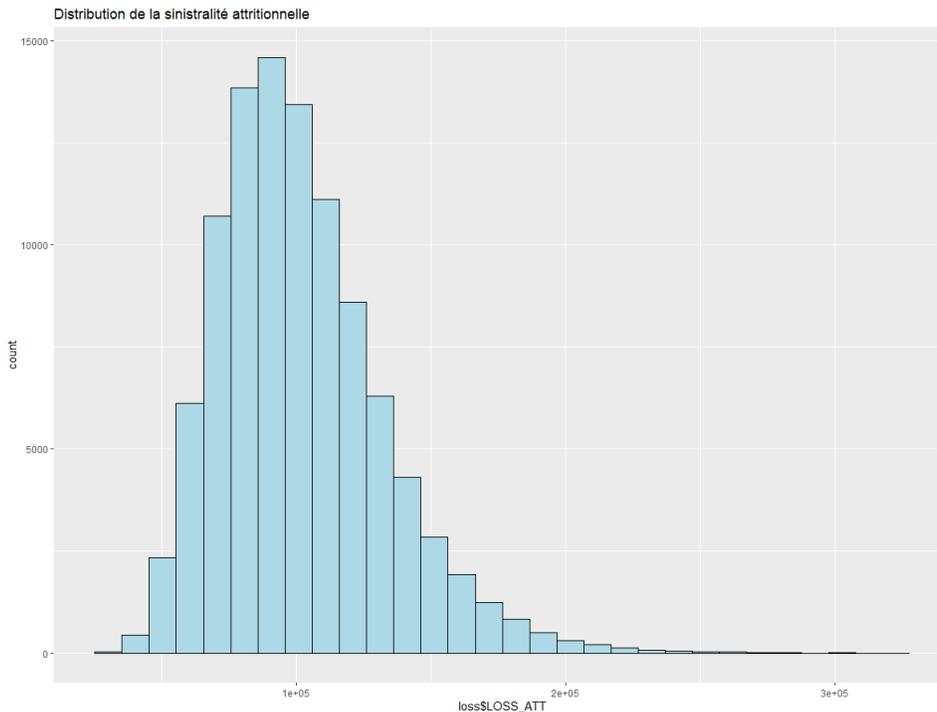


FIGURE 6.5 – Histogramme des n estimations de la sinistralité attritionnelle annuelle

Le tableau 6.11 présente quelques statistiques sur les 100 000 années de sinistralité attritionnelle simulées.

TABLE 6.11 – Statistiques sur la sinistralité attritionnelle

Statistique	Données réelles	Données simulées
Minimum	61 885	25 863
Maximum	136 331	406 214
Moyenne	88 886	101 702
Ecart-type	33 313	30 700
Médiane	88 642	97 347

Les données simulées sont bien plus dispersées. La valeur moyenne de la sinistralité attritionnelle annuelle simulée est bien supérieure à la moyenne observée. L'utilisation d'une loi log-normale pour modéliser les sinistres attritionnels est une hypothèse prudente.

Modélisation de la sinistralité atypique

Comme cela a été évoqué précédemment, cette partie est la même que la méthode de choix du seuil par minimisation de la distance. La seule différence étant que lorsqu'on utilise cette méthode uniquement pour la modélisation des sinistres atypiques, après avoir déterminé le seuil des atypiques au moyen d'une autre méthode, seuls les sinistres de la liste inférieurs ou égal au seuil des atypiques seront testés comme seuil de modélisation (pour les raisons évoquées en partie 4.1).

En l'occurrence, puisque le seuil des atypiques retenu est égal à 26 477.92€, seules les distributions pour lequel le seuil est inférieur à 26 478 sont testées. Les distributions envisageables pour la modélisation de la sévérité des sinistres sont présentées dans le tableau 6.12.

TABLE 6.12 – Minimisation de la distance sur données réelles

Distribution	Seuil	Stat	n excess	alpha
Pareto	23 570	0.111	17	1.70
Pareto	23 896	0.111	16	1.64
GPD	23 570	0.112	17	1.73
Pareto	25 015	0.120	15	1.65
GPD	23 896	0.132	16	2.02
Pareto	26 478	0.133	14	1.69
GPD	25 015	0.139	15	1.98
GPD	26 478	0.139	14	1.78

Lorsqu'on compare graphiquement la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition de chacune des distributions proposées, il est difficile de déterminer la distribution qui ajuste au mieux les sinistres. Ainsi, dans cet exemple, le choix de la distribution de la sévérité des sinistres atypiques se basera uniquement sur la valeur de la statistique de test.

La distribution retenue pour la modélisation de la sévérité des sinistres attritionnels est donc la distribution de Pareto de paramètres $\alpha = 1.70$ et de seuil 23 570. De plus, il s'agit de la loi qui a été retenue lors de la tarification du sous-traité avec l'ancien outil.

Les autres distributions seront testées dans la partie 6.1.6.

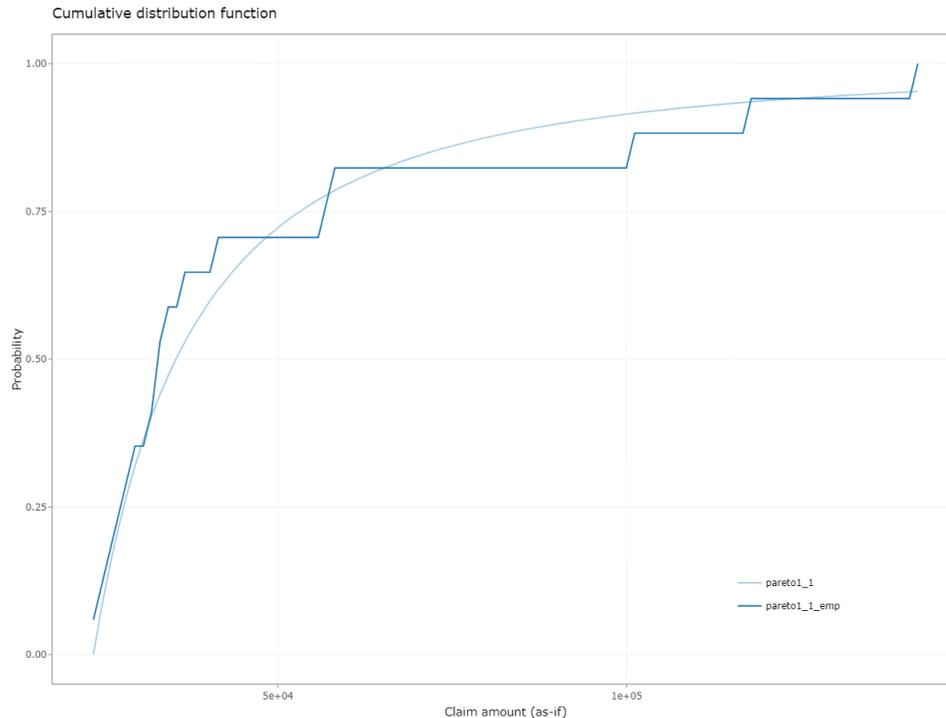


FIGURE 6.6 – Fonctions de répartition empirique et théorique de la sévérité des sinistres atypiques

En ce qui concerne la modélisation de la fréquence des sinistres atypiques, l'estimateur du paramètre λ de la distribution de Poisson vaut 1.76.

Une fois que les distributions pour la sévérité et la fréquence des sinistres atypiques ont été choisies, l'actuaire peut passer à la simulation. Pour cela, il simule un échantillon d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1.76$ de taille $n = 100\ 000$. Puis, pour chaque valeur $n_i, i = 1, \dots, n$ de la fréquence de sinistres annuelle ainsi obtenue, il simule un n_i -échantillon d'une loi de Pareto de paramètre $\alpha = 1.70$ et $\theta = 23\ 570$.

Les montants de sinistres ainsi simulés doivent ensuite être retraités. En effet, puisque le seuil d'ajustement est choisi inférieur ou égal au seuil des atypiques, parmi les sinistres simulés, certains seront compris entre le seuil de modélisation et le seuil des atypiques. Or, si un sinistre est inférieur au seuil des atypiques alors, par définition, il n'est pas considéré comme atypique. Il faut donc mettre à 0 les sinistres inférieurs au seuil des atypiques, pour ne pas avoir des sinistres attritionnels qui ont déjà été modélisé et seraient donc pris en compte deux fois. De plus, pour les sinistres simulés supérieurs au seuil des atypiques, il faut appliquer la limite définie au contrat, qui s'élève ici à 5 860 000€.

Autrement dit, en notant s_a le seuil des atypiques et L la limite par sinistres, cela revient, à un ajustement près, à calculer le coût dans la tranche d'un traité non-proportionnel en excédent de sinistres de capacité $(s_a + L)$ et de priorité s_a (équation 2.2).

La figure 6.7 permet d'illustrer la prise en compte de ces différents seuils.

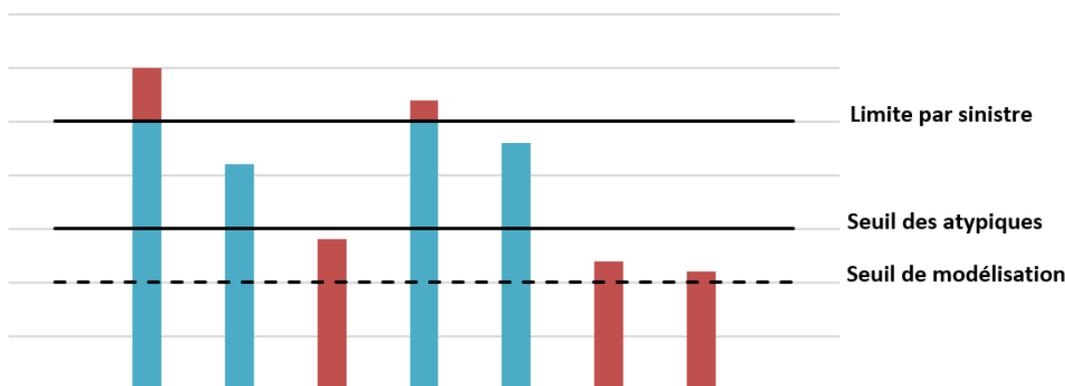


FIGURE 6.7 – Prise en compte du seuil des atypiques et de la limite sur les sinistres simulés

Une fois chose faite, l'actuaire peut ensuite agréger par année de façon à obtenir n estimations de la sinistralité atypique annuelle.

On examine la distribution de l'échantillon de valeurs simulées de la charge totale en traçant l'histogramme. Pour des raisons de lisibilité, l'échelle a été ajustée de façon à ne pas montrer les valeurs extrêmes de la sinistralité atypique simulée.

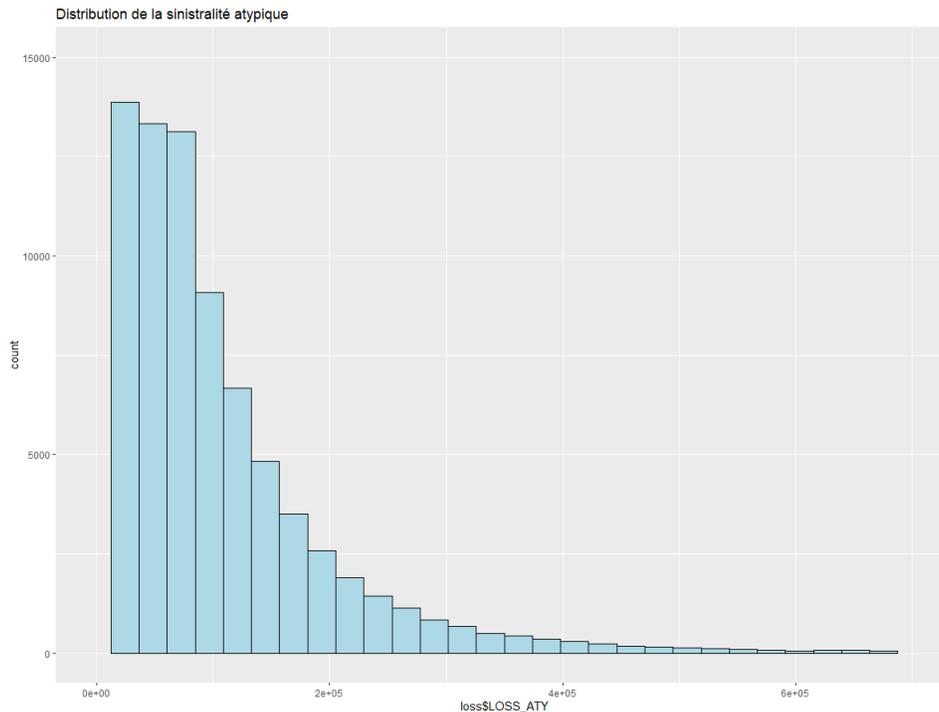


FIGURE 6.8 – Distribution de la sinistralité atypique annuelle

Le tableau 6.13 expose quelques statistiques sur les 100 000 années de sinistralité atypique simulées.

TABLE 6.13 – Statistiques sur la sinistralité atypique annuelle simulée

Statistique	Données réelles	Données simulées
Minimum	0	0
Maximum	141 738	6 212 866
Moyenne	44 827	98 587
Ecart-type	40 037	182 738

Les données simulées sont plus dispersées que les données réelles, avec un pic de sinistralité annuelle à 6 212 866 contre seulement 141 738 sur les données réelles. De plus, la sinistralité annuelle moyenne simulée est bien plus élevée que la sinistralité annuelle moyenne observée. Ceci est normal puisque le but de la simulation sur 100 000 années est d'envisager tous les scénarios possibles, y compris les pires. Néanmoins, il faut quand même vérifier que les données simulées sont cohérentes avec les risques assurés et les données réelles. Pour cela, on peut calculer les quantiles de la distribution de la sinistralité atypique annuelle simulée :

TABLE 6.14 – Quantiles des valeurs simulées de la sinistralité atypique annuelle

Niveau de confiance	Quantile
50%	61 757
75%	122 593
90%	212 450
95%	300 088
99%	652 840

Dans 90% des cas, la sinistralité atypique annuelle simulée ne dépasse pas 212 450€. Cette valeur est cohérente avec la sinistralité atypique annuelle observée.

A présent qu'on a simulé $n=100\ 000$ valeurs de la sinistralité attritionnelle et atypique annuelles, on peut diviser par la prime estimée de 2023 de façon à obtenir les loss ratio correspondant.

Le tableau 6.15 reprend les différentes valeurs des loss ratio attritionnel et atypique estimés pour l'année 2023 selon l'outil.

TABLE 6.15 – Statistiques sur la sinistralité atypique simulée

Statistique	Ancien outil	Nouvel outil
LR attritionnel	25,90%	28,66%
LR atypique	27,95%	27,78%
LR total	53,85%	56,44%

L'utilisation d'une distribution log-normale donne une sinistralité attritionnelle moyenne plus élevée que la sinistralité attritionnelle moyenne observée. La sinistralité atypique simulée moyenne est proche de la sinistralité atypique calculée dans l'ancien outil par le coût dans la tranche moyen d'une distribution de Pareto de même paramètres $\alpha = 1,70$ et de seuil 23 570, multiplié par la fréquence observée des sinistres atypiques, à savoir $\lambda = 1,76$.

On obtient donc un loss ratio total moyen plus élevé (+2,59%) avec l'approche par simulation.

6.1.5 Application des clauses et analyse de la rentabilité

L'étape suivante est bien entendu d'appliquer les clauses et les différents frais.

Tout d'abord, appliquons les différentes clauses sur les données historiques. Cela permet de voir la tendance du traité et sa rentabilité réelle sur les dernières années.

Le tableau 6.16 liste les valeurs en pourcentage de chaque clause sur les 11 années d'historique :

TABLE 6.16 – Application des clauses sur les données historiques

Année	LR	COM	LC	Rés pour PB	PB
2012	54,00%	31,00%	3,98%	22 165	1,00%
2013	25,70%	41,50%	0,00%	89 710	4,55%
2014	41,70%	31,00%	0,00%	60 301	3,45%
2015	48,60%	31,00%	0,00%	28 725	2,09%
2016	50,30%	31,00%	0,276%	27 287	1,74%
2017	56,80%	31,00%	6,78%	7 014	0,44%
2018	49,20%	31,00%	0,00%	33 987	1,96%
2019	45,50%	31,00%	0,00%	43 317	2,71%
2020	43,20%	31,00%	0,00%	50 704	3,17%
2021	88,90%	31,00%	10,00%	- 104 788	0,00%
2022	7,19%	41,50%	0,00%	23 561	1,94%

Le loss ratio de l'année 2022 est bien inférieur aux loss ratio des années précédentes. Le résultat sur cette année est donc très bon et il compense largement la perte de l'année 2021. Néanmoins, comme cela a déjà été évoqué, nous ne disposons pas de toute l'information sur la sinistralité totale de l'année 2022. Ces valeurs ne sont donc pas représentatives de la réalité et il ne faut pas en tenir compte.

Idéalement, si nous disposions de l'information réelle sur la sinistralité 2022, nous pourrions calculer avec exactitude l'éventuel report de pertes sur l'année 2023 et l'appliquer sur chacune des 100 000 années simulées. On aurait alors 100 000 scénarios possibles de l'année 2023. Malheureusement, c'est une information dont on ne dispose jamais au moment de la tarification. De ce fait, il faut calculer indépendamment les clauses sur les données simulées.

Les 100 000 années simulées sont donc supposées consécutives et ordonnées. Ceci est particulièrement important pour le calcul du report de pertes : si le résultat d'une des années simulées est négatif, il sera reporté sur les 2 années simulées suivantes.

Le tableau 6.17 illustre les différentes valeurs estimées des clauses pour l'année 2023. En ce qui concerne l'ancien outil, celles-ci sont calculées sur l'unique valeur estimée du loss ratio 2023 (cf tableau 6.15). Pour le nouvel outil, il s'agit d'une moyenne sur les 100 000 années simulées.

TABLE 6.17 – Valeurs estimées des différentes clauses pour l'année 2023 selon l'approche

Clause	Approche par simulation	Ancienne approche
Commission	34,13%	31,00%
Loss corridor	3,68%	3,86%
Report de pertes	-47 571	×
Participation aux bénéfices	1,66%	1,03%

La plus grande différence réside dans l'estimation de la commission de réassurance. La commission et la participation aux bénéfices moyennes sont plus élevées et le loss corridor moins élevé, on s'attend donc à un ratio combiné plus élevé et donc une rentabilité plus faible. Les estimations du ratio combiné et du résultat obtenues selon l'approche utilisée se trouvent dans le tableau 6.18.

TABLE 6.18 – Ratio combiné et résultat estimés selon l'approche

	Approche par simulation	Ancienne approche
Ratio combiné moyen	96,25%	89,73%
Résultat estimé moyen	7,05%	13,57%

Il y a une grande différence entre les résultats estimés par chaque méthode. L'approche par simulation fournit un résultat estimé de 7,05%, soit 6,52% de moins que le résultat estimé par l'ancienne méthode. Le sous-traité reste rentable mais l'approche par simulation est plus prudente.

On analyse la distribution du ratio combiné en traçant l'histogramme. L'échelle a été ajustée pour plus de visibilité.

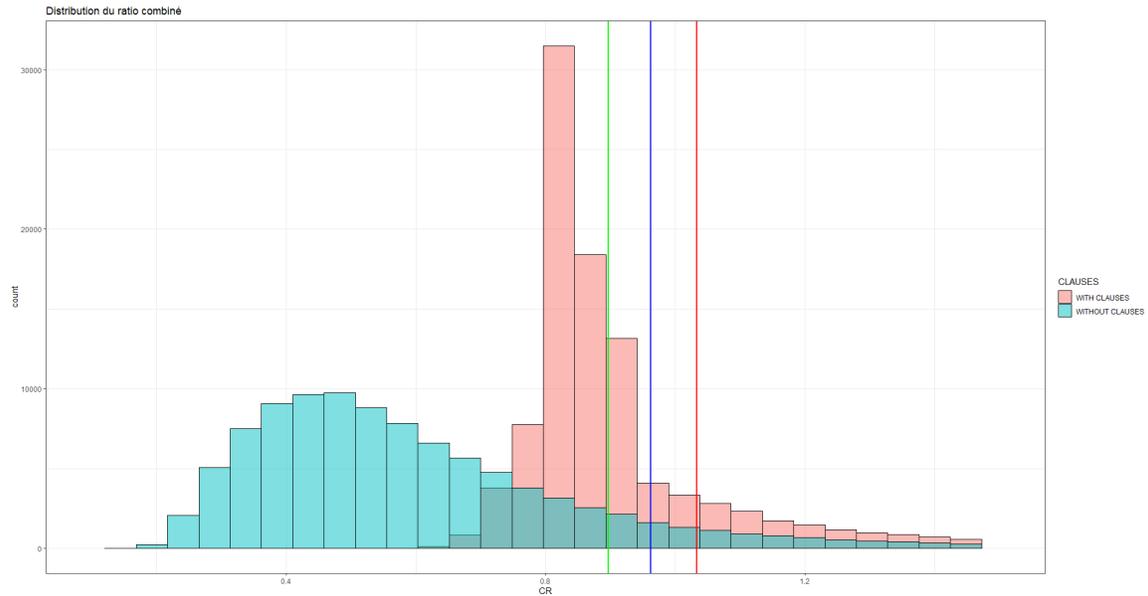


FIGURE 6.9 – Distribution du ratio combiné

La figure 6.9 représente le ratio combiné avec et sans les clauses du traité. Le trait vert indique le ratio combiné moyen obtenu avec l’ancien outil de tarification tandis que le trait bleu indique celui obtenu avec l’approche par simulation. En ce qui concerne le trait rouge, il indique le ratio combiné à partir duquel le résultat du traité est négatif, à savoir un ratio combiné d’environ 103%. Sur 100 000 années, le résultat du traité est négatif dans 17% des cas.

L’écart-type du ratio combiné est de 48,13%. Ce dernier est élevé du fait des quelques valeurs extrêmes du ratio combiné.

Les valeurs des quantiles à différents niveau de confiance sont présentées dans le tableau suivant :

TABLE 6.19 – Quantiles empiriques de la distribution du ratio combiné

Niveau de confiance	Quantile empirique
50%	87,21%
75%	93,61%
80%	99,53%
90%	118,96%
95%	143,36%
99%	241,97%

Sur les 100 000 années simulées, il y a une grande majorité de cas où le ratio combiné est compris entre 70% et 95%. Néanmoins, il y a également quelques ratios combinés très élevés qui impliquent un résultat négatif, ce qui explique qu'en moyenne, le résultat estimé est inférieur à celui obtenu dans l'ancien outil. C'est ici que réside tout l'enjeu de l'approche par simulation : tous les cas de figure sont pris en compte de façon à tenir compte de la volatilité le risque.

L'obtention d'une distribution du ratio combiné permet d'analyser plus finement l'impact des clauses.

Impact de la commission

Regardons dans un premier temps l'impact de la commission sur la distribution du ratio combiné. Les autres clauses restent inchangées.

La figure 6.10 représente les histogrammes des données simulées avec et sans commission.

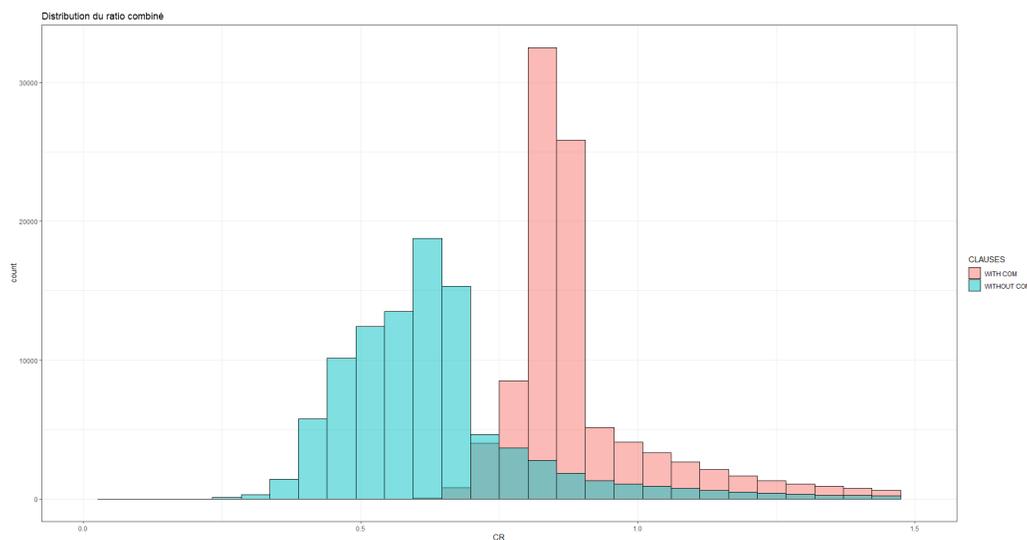


FIGURE 6.10 – Impact de la COM

L'ajout de la commission à échelle vient augmenter les valeurs du ratio combiné, ce qui explique que la distribution soit décalée vers la droite. De plus, on observe deux pics aux alentours de 80 à 90% : il y a une augmentation significative du nombre de ratio combiné compris entre 80 et 90%. Ceci est dû au fait qu'une commission à échelle permet de lisser le résultat à long terme.

Impact du loss corridor

En ce qui concerne le loss corridor, pour les ratio combinés inférieurs à environ 85% l'ajout ou non du loss corridor ne change rien puisque la clause n'agit qu'à partir d'un loss ratio de 50%.

De plus, puisque la cédante intervient dans la sinistralité lorsque le loss ratio est compris entre 50% et 60%, cela vient faire baisser la valeur du ratio combiné et il y a donc plus de ratio combinés compris entre 80 et 90%, d'où la présence des deux pics dans l'histogramme rose de la figure 6.11.

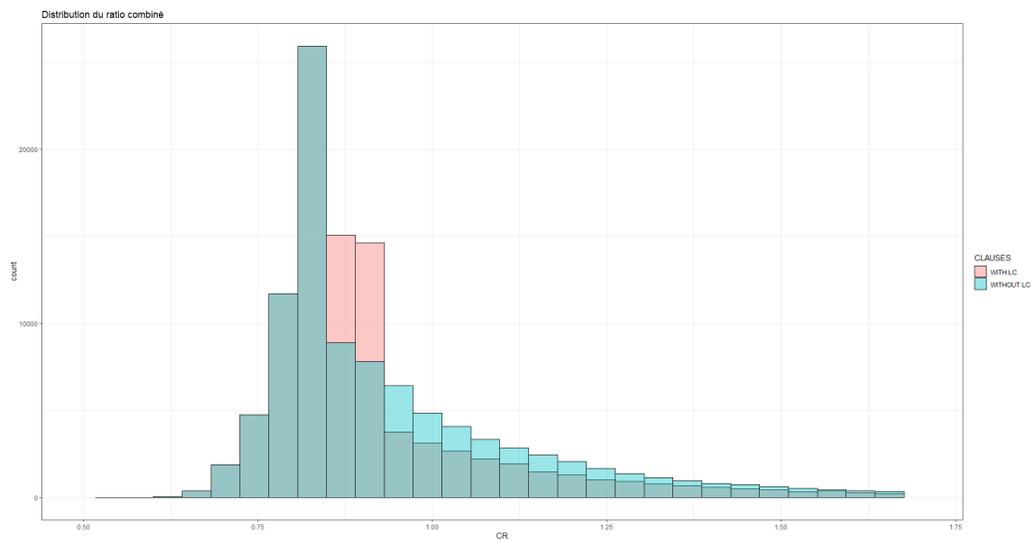


FIGURE 6.11 – Impact du LC

Impact de la participation aux bénéfices

Enfin, la clause de participation aux bénéfices joue uniquement sur les ratio combiné inférieurs à environ 94%, qui correspondent aux cas où le réassureur fait un bénéfice.

La figure 6.12 montre les histogrammes des données simulées avec et sans participation aux bénéfices.

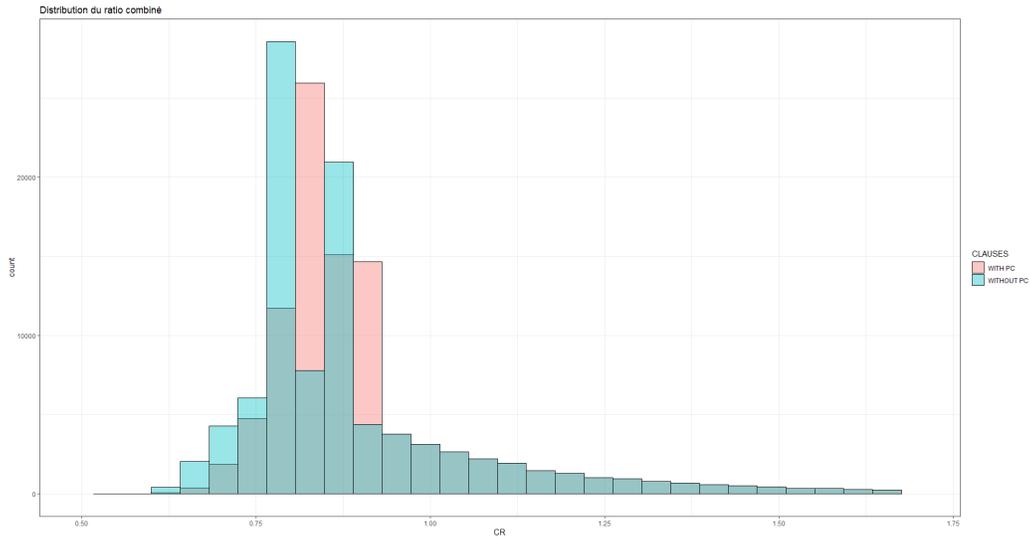


FIGURE 6.12 – Impact de la PB

6.1.6 Tests de sensibilité

L'objectif de cette partie est d'étudier la sensibilité des différents choix de l'actuaire. Cette partie se concentre essentiellement sur le choix du seuil des atypiques et son impact sur la rentabilité estimée du traité. Des tests de sensibilité sur les distributions choisies et notamment l'estimation des paramètres des lois sont réalisés en annexe G.

Lors de la détermination du seuil des atypiques, le choix s'est porté sur la méthode par minimisation de la variance de la sinistralité attritionnelle, c'est-à-dire sur un seuil de 26 478€. Dans cette partie, on va donc refaire tout le processus de tarification en considérant les seuils des atypiques proposés par les autres méthodes.

En ce qui concerne la méthode par minimisation de la distance, nous allons tester les seuils des 5 distributions de Pareto du tableau 6.6. Pour les modèles composites, nous testerons également les seuils des 4 modèles envisagés.

Les différents candidats pour le seuil des atypiques sont rappelés dans le tableau 6.20.

TABLE 6.20 – Valeur du seuil des atypiques selon la méthode choisie

Méthode	Valeur du seuil
Minimisation de la distance	
Par($\alpha = 1.70, \theta = 23\ 570$)	23 570
Par($\alpha = 1.64, \theta = 23\ 896$)	23 896
GPD ($\alpha = 1.73, \theta = 23\ 570$)	23 570
Par($\alpha = 1.65, \theta = 25\ 015$)	25 015
Par($\alpha = 1.64, \theta = 27\ 230$)	27 230
Par($\alpha = 1.69, \theta = 26\ 478$)	26 478
GPD ($\alpha = 1.98, \theta = 25\ 015$)	25 015
GPD ($\alpha = 1.78, \theta = 26\ 478$)	26 478
Modèles composites	
Lognormale/Pareto	33 778
Gamma/Pareto	42 766
Lognormale/GPD	42 209
Gamma/GPD	57 537
Minimisation AMSE	27 230

Les distributions GPD pour lesquelles le paramètre α était supérieur à 2 ont volontairement été écartées car pour la branche incendie en proportionnel, la valeur du paramètre α ne dépasse pas 2 en général.

De plus, dans ce tableau et les suivants, seuls deux des trois paramètres de la distribution de Pareto généralisée seront affichés (les paramètres α et θ).

Distribution de la sinistralité atypique

Pour les méthodes par utilisation des modèles composites et minimisation de l'AMSE, le processus pour la modélisation de la sévérité des sinistres atypique est exactement le même que précédemment : on regarde seulement les distributions dont le paramètre de seuil est inférieur ou égal au seuil des atypiques.

Ainsi, pour les mêmes raisons que précédemment, on fera toujours le choix de retenir la distribution de Pareto de paramètres $\alpha = 1,70$ et $\theta = 23\ 570$ pour ces deux méthodes. De ce fait, la distribution pour la fréquence sera également la même que précédemment, à savoir une distribution de Poisson de paramètre $\lambda = 1,76$.

En revanche, pour la méthode par minimisation de la distance, le seuil des atypiques est déterminé par le choix de la distribution pour la modélisation de la sévérité des sinistres importants. La distribution retenue pour la sévérité des sinistres, et donc la distribution pour la fréquence également, sont à priori différentes de l'exemple ci-dessus.

Le tableau 6.21 récapitule les distributions pour la fréquence et la sévérité des sinistres atypiques, pour chacun des seuils considérés par la méthode de minimisation de la distance :

TABLE 6.21 – Distribution pour la sinistralité atypique dans le cas de la méthode par minimisation de la distance

Choix retenu pour la sévérité	Distribution pour la fréquence associée
Par($\alpha = 1.70, \theta = 23\ 570$)	$\mathcal{P}(\lambda = 1,76)$
Par($\alpha = 1.64, \theta = 23\ 896$)	$\mathcal{P}(\lambda = 1,65)$
GPD($\alpha = 1.73, \theta = 23\ 570$)	$\mathcal{P}(\lambda = 1,76)$
Par($\alpha = 1.65, \theta = 25\ 015$)	$\mathcal{P}(\lambda = 1,55)$
Par($\alpha = 1.64, \theta = 27\ 230$)	$\mathcal{P}(\lambda = 1,34)$
Par($\alpha = 1.69, \theta = 26\ 478$)	$\mathcal{P}(\lambda = 1,45)$
GPD($\alpha = 1.98, \theta = 25\ 015$)	$\mathcal{P}(\lambda = 1,55)$
GPD($\alpha = 1.78, \theta = 26\ 478$)	$\mathcal{P}(\lambda = 1,45)$

Distribution de la sinistralité attritionnelle

En ce qui concerne la modélisation de la sinistralité attritionnelle, on choisira toujours la distribution, entre la log-normale et la gamma, pour laquelle les critères AIC et BIC sont minimisés.

Le tableau 6.22 récapitule les distributions pour la sinistralité attritionnelle pour chacun des seuils considérés :

TABLE 6.22 – Distribution pour la sinistralité attritionnelle selon la méthode choisie

Méthode	Distribution sinistralité attritionnelle
Minimisation de la distance	
Par($\alpha = 1.70, \theta = 23\ 570$)	Gamma ($k=9.39, \beta = 0.0282$)
Par($\alpha = 1.64, \theta = 23\ 896$)	Log-normale($\mu = -1.36, \sigma = 0.36$)
GPD($\alpha = 1.73, \theta = 23\ 570$)	Gamma ($k=9.39, \beta = 0.0282$)
Par($\alpha = 1.65, \theta = 25\ 015$)	Log-normale($\mu = -1.33, \sigma = 0.32$)
Par($\alpha = 1.64, \theta = 27\ 230$)	Log-normale($\mu = -1.26, \sigma = 0.26$)
Par($\alpha = 1.69, \theta = 26\ 478$)	Log-normale($\mu = -1.29, \sigma = 0.29$)
GPD($\alpha = 1.98, \theta = 25\ 015$)	Log-normale($\mu = -1.33, \sigma = 0.32$)
GPD($\alpha = 1.78, \theta = 26\ 478$)	Log-normale($\mu = -1.29, \sigma = 0.29$)
Modèles composites	
Lognormale/Pareto	Log-normale($\mu = -1.08, \sigma = 0.25$)
Gamma/Pareto	Gamma($k=12.51, \beta = 0.0297$)
Lognormale/GPD	Gamma($k=12.51, \beta = 0.0297$)
Gamma/GPD	Gamma($k=11.76, \beta = 0.0330$)
Minimisation AMSE	Log-normale($\mu = -1.26, \sigma = 0.26$)

Le tableau 6.23 illustre, pour chaque seuil considéré, les montants moyens des différentes clauses ainsi que le résultat estimé pour l'année à venir :

TABLE 6.23 – Résultats obtenus selon le seuil des atypiques retenu

Seuil	LR att	LR aty	LR	COM	PB	LC	CR	Rés. estimé
26 478€	28,66%	27,78%	56,45%	34,13%	1,66%	3,68%	96,25%	7,05%
23 570€	26,50%	27,78%	54,28%	34,25%	1,78%	3,58%	94,48%	8,82%
23 570€ (gpd)	26,50%	28,00%	54,50%	34,24%	1,79%	3,53%	94,69%	8,61%
23 896€	27,37%	27,89%	55,27%	34,31%	1,75%	3,61%	95,42%	7,88%
25 015€	27,88%	27,03%	54,91%	34,29%	1,76%	3,55%	95,12%	8,18%
25 015€ (gpd)	27,88%	25,79%	53,66%	34,27%	1,77%	3,55%	93,83%	9,47%
26 478€	28,66%	25,88%	54,54%	34,24%	1,76%	3,51%	94,73%	8,57%
26 478€ (gpd)	28,66%	25,79%	54,46%	34,23%	1,75%	3,53%	94,61%	8,69%
27 230€	29,41%	25,73%	55,13%	34,21%	1,74%	3,46%	95,32%	7,98%
33 778€	34,84%	23,69%	58,53%	33,62%	1,46%	3,92%	97,39%	5,91%
42 209€	37,24%	20,26%	57,50%	33,77%	1,55%	3,74%	96,77%	6,53%
42 766€	37,24%	20,44%	57,68%	33,74%	1,53%	3,78%	96,87%	6,43%
57 537€	38,87%	16,61 %	55,48%	34,11%	1,73%	3,36%	95,67%	7,63%
27 230€	29,41%	27,27%	56,68%	34,04%	1,63%	3,67%	96,38%	6,92%

L'écart-type des résultats estimés obtenus est de 1,11% et le résultat estimé moyen est de 7,84%. Quelle que soit la méthode de détermination du seuil retenue, le résultat estimé pour l'année à tarifier est bien inférieur au résultat estimé par l'ancien outil.

Le choix du seuil des atypiques joue avant tout sur les valeurs des loss ratio attritionnels et atypiques estimés : plus le seuil des atypiques est haut, plus il y a de sinistralité attritionnelle et donc plus le loss ratio attritionnel est haut par rapport au loss ratio atypique. Mais si la répartition entre attritionnel et atypique change, le loss ratio total lui est toujours compris entre 54,50% et 58,50% environ.

Impact du choix du seuil des atypiques

L'écart maximal observé entre les résultats estimés, et qui est uniquement dû au choix du seuil des atypiques, est de 2,91%. Dans cet exemple, le choix du seuil ne modifie pas la conclusion finale quant à la décision de renouveler ou non cette affaire.

Impact du choix de la distribution de la sévérité des atypiques

Certaines méthodes fournissent la même valeur pour le seuil des atypiques mais la distribution utilisée pour modéliser la sévérité des sinistres atypiques est différente. Ceci nous permet donc de mesurer l'impact du choix de la distribution des sinistres atypiques.

A un seuil donné, la distribution de Pareto généralisée sous-estime la sinistralité atypique par rapport à la distribution de Pareto. En effet, à paramètre de seuil égal, le paramètre alpha de la distribution de Pareto généralisée est supérieur au paramètre alpha de la distribution de Pareto. Une petite valeur du paramètre α implique une probabilité plus grande de grands sinistres, ce qui explique que le loss ratio atypique moyen dans le cas d'une loi de Pareto est supérieur.

Néanmoins, les deux distributions donnent des résultats similaires. L'écart le plus important entre les résultats estimés par chacune des distributions est de 1,47%.

Impact du choix d'un seuil de modélisation inférieur au seuil des atypiques

A présent, regardons plus précisément l'impact du choix d'un seuil de modélisation inférieur au seuil des atypiques. Considérons par exemple le cas de la méthode de minimisation de la variance où le seuil des atypiques est égal à 26 478 et le seuil de modélisation de la distribution de Pareto est égal à 23 570, et comparons les résultats obtenus à ceux du cas où le seuil des atypiques et le seuil de modélisation sont tous deux égaux à 26 478.

Dans le premier cas le loss ratio atypique moyen est de 27,78%, contre 25,88% dans le deuxième cas. En ce qui concerne le résultat estimé, il est de 7,05% dans le premier cas, contre 8,57% dans le deuxième cas.

On obtient les mêmes conclusions en considérant le cas de la méthode de minimisation de l'AMSE avec un seuil des atypiques à 27 230. Le fait de choisir un seuil de modélisation inférieur au seuil des atypiques et donc, dans cet exemple, plus prudent que de les choisir égaux.

Impact de l'approche par simulation

Regardons l'impact de l'approche par simulation. Pour cela, on se place dans le cas où le seuil des atypiques vaut 23 570€ et que la sinistralité atypique est modélisée par une loi de Pareto de paramètre $\alpha = 1,70$ et $\theta = 23\,570\text{€}$. On se trouve alors dans la même situation que la tarification effectuée avec l'ancien outil.

On observe une différence de 4,75% entre les résultats estimés fournis par les deux méthodes. Celle-ci provient de la modélisation de la sinistralité attritionnelle, mais surtout de l'approche par simulation, ce qui permet d'affirmer que l'approche par simulation est plus prudente que l'approche en moyenne.

En conclusion, les différences observées entre les deux outils s'expliquent avant tout par l'utilisation d'une approche par simulation. La tarification par simulation permet de tenir compte de la volatilité du risque et de voir des événements qu'on ne voyait pas sur l'historique. De ce fait, elle est à la fois plus précise et plus prudente.

Le choix de la distribution pour la sévérité des sinistres atypiques et du seuil de modélisation a un impact sur la rentabilité estimé du traité. Certains choix sont plus prudents que d'autres mais la conclusion finale quant à la souscription de ce traité reste la même quels que soient les choix de l'actuaire.

Dans certains cas, notamment lorsqu'il y a moins de 10 sinistres, les choix de l'actuaire pourraient avoir un impact plus important sur l'estimation du résultat du traité. Lorsque le nombre de sinistres est trop limité, d'autres méthodes de tarification, comme une méthode à l'exposition se basant sur les profils de portefeuille, pourront être mises en place.

6.2 Présentation de l'application RShiny

Le sujet présente un aspect opérationnel important car une application RShiny a été développée. Cette application est un outil de tarification complet qui permet d'appliquer toutes les méthodes énoncées dans ce mémoire, de la mise en *as-if*, à la modélisation et la simulation des *loss ratios* attritionnels et atypiques, pour finir par l'application des clauses et l'analyse de la rentabilité.

La contrainte à respecter lors de la création de cette application était d'avoir un outil facile d'utilisation, même pour les personnes non initiées au langage R. L'interface de l'outil est présentée dans l'annexe F.

Conclusion

Le pôle tarification de la direction de réassurance non-vie du groupe Covéa souhaitait compléter et améliorer son outil de tarification des traités proportionnels.

L'outil de tarification déjà en place permettait d'estimer le ratio combiné et, par extension, le résultat du traité pour l'année à tarifier en utilisant une approche en moyenne. Pour proposer une tarification plus précise et prendre en compte la volatilité du risque, une nouvelle approche par simulation a été implantée.

Lors de la tarification des traités proportionnels, il convient de séparer la sinistralité attritionnelle et la sinistralité atypique. Afin d'améliorer l'outil de tarification, des nouvelles méthodes de détermination du seuil permettant de séparer les deux types de sinistralité ont été implémentées. De plus, l'approche par simulation nécessite de modéliser la sinistralité attritionnelle et atypique par des lois de probabilité. Dans l'ancien outil, la sévérité des sinistres atypiques était uniquement modélisée par la loi de Pareto. Ce travail a permis d'introduire une nouvelle loi pour la modélisation de celle-ci : la distribution de Pareto généralisée. En ce qui concerne la sinistralité attritionnelle, elle est désormais modélisée par une loi log-normale ou une loi Gamma.

L'application des modèles sur les données réelles de cédantes a permis d'illustrer le fait que l'approche en moyenne proposée par l'ancien outil n'était pas assez précise et prudente.

Les méthodes implémentées présentent certaines limites. En particulier, le manque de données dont dispose le réassureur peut parfois rendre l'ajustement de la sévérité des sinistres atypiques par une loi de probabilité très compliqué. L'incertitude liée à la modélisation est donc répercutée sur les simulations. L'actuaire doit en être conscient et en tenir compte dans la tarification. Dans le cas où l'actuaire juge que la quantité de données à sa disposition est trop faible, il peut se tourner vers d'autres méthodes de tarification comme les méthodes par exposition basées sur les profils de portefeuille.

Enfin, l'étude a été limitée au cas particulier des traités pour lesquels les triangles de développement ne sont pas nécessaires. Une étude supplémentaire, basée sur les théories de provisionnement, pourra étendre les méthodes utilisées à tous types de traités.

Le développement de cette application et l'obtention d'une distribution du ratio combiné a permis d'ouvrir de nouveaux axes de réflexion qui pourront être approfondis lors d'une prochaine étude. La distribution du ratio combiné va en effet offrir à l'actuaire la possibilité d'analyser de manière approfondie l'impact des clauses sur le résultat du traité. L'objectif serait alors de répondre à la question suivante : « Quels paramètres des clauses faut-il choisir pour minimiser la volatilité du ratio combiné ? ».

Table des figures

1.1	Structure du groupe Covéa	9
1.2	Chiffre d'affaires et secteur d'activité de la DRAI	10
2.1	Les acteurs de la réassurance	12
2.2	Les cycles en réassurance	14
2.3	Principaux flux entre la cédante, le réassureur et le courtier	16
2.4	Exemple de traité de réassurance à la quote-part	19
2.5	Exemple de traité de réassurance en excédent de plein	21
2.6	Quote-part vs surplus	22
2.7	Exemple de traité de réassurance combinant quote-part et surplus	23
2.8	Taux de commission en fonction du loss ratio	24
2.9	Exemple de <i>loss corridor</i>	25
2.10	Exemple de traité de réassurance en excédent de sinistre	30
3.1	Exemple de traité de réassurance en exercice de survenance	31
3.2	Exemple de traité de réassurance en exercice de souscription	32
3.3	Exemple d'information sur les rate changes dont dispose l'actuaire	37
4.1	Illustration des trois différents seuils	45
6.1	Histogramme des profils de risques (tous risques confondus)	63
6.2	Minimisation de l'AMSE sur données réelles	69
6.3	Fonctions de répartition empirique et théorique du loss ratio attritionnel	71
6.4	QQ-plot de la loi de la sinistralité attritionnelle	72
6.5	Histogramme des n estimations de la sinistralité attritionnelle annuelle	73
6.6	Fonctions de répartition empirique et théorique de la sévérité des sinistres atypiques	75
6.7	Prise en compte du seuil des atypiques et de la limite sur les sinistres simulés	76

6.8	Distribution de la sinistralité atypique annuelle	77
6.9	Distribution du ratio combiné	81
6.10	Impact de la COM	82
6.11	Impact du LC	83
6.12	Impact de la PB	84
6.13	Exemple de la méthode du parallélogramme	106
6.14	Importation des données	108
6.15	Indice pour la mise en <i>as-if</i>	108
6.16	Choix du seuil	109
6.17	Modélisation de la sinistralité attritionnelle	109
6.18	Modélisation de la sinistralité atypique	110
6.19	Résultats sur données simulées et distribution du CR	110

Liste des tableaux

2.1	Les quatre formes de réassurance	15
2.2	Exemple de loss corridor	25
2.3	Exemple de participation aux bénéfices fixe	28
3.1	Cas où il y a besoin des triangles de primes et sinistres	33
3.2	Calcul des facteurs d'inflation	35
3.3	Exemple de changement de taux de quote-part sur l'historique	36
3.4	Calcul des primes à 100%	36
3.5	Exemple de données dont dispose le réassureur	39
3.6	Séparation des sinistres selon leur type	40
4.1	Exemple de choix du seuil par minimisation de la variance	47
6.1	Données contractuelles du sous-traité étudié	64
6.2	Evolution de l'indice du coût de la construction dans le pays de la cédante	65
6.3	Indexation des données historiques	65
6.4	Indexation des sinistres individuels	66
6.5	Ecart-type de la sinistralité attritionnelle pour chaque seuil considéré	67
6.6	Minimisation de la distance sur données réelles	68
6.7	Utilisation des modèles composites sur données réelles	69
6.8	Split attritionnel/atypique sur données réelles	70
6.9	Ajustement lois Gamma et log-normale sur données réelles	71
6.10	Caption	72
6.11	Statistiques sur la sinistralité attritionnelle	73
6.12	Minimisation de la distance sur données réelles	74
6.13	Statistiques sur la sinistralité atypique annuelle simulée	77
6.14	Quantiles des valeurs simulées de la sinistralité atypique annuelle	78
6.15	Statistiques sur la sinistralité atypique simulée	78

6.16	Application des clauses sur les données historiques	79
6.17	Valeurs estimées des différentes clauses pour l'année 2023 selon l'approche . . .	80
6.18	Ratio combiné et résultat estimés selon l'approche	80
6.19	Quantiles empiriques de la distribution du ratio combiné	81
6.20	Valeur du seuil des atypiques selon la méthode choisie	85
6.21	Distribution pour la sinistralité atypique dans le cas de la méthode par minimi- sation de la distance	86
6.22	Distribution pour la sinistralité attritionnelle selon la méthode choisie	87
6.23	Résultats obtenus selon le seuil des atypiques retenu	87
6.24	Proportion de polices à chaque niveau de taux de primes pour chaque année .	106
6.25	Facteurs de niveau à appliquer aux polices selon leur taux de prime	107
6.26	Calcul du rate change annuel	107
6.27	Estimateurs des moments pour la distribution de la sinistralité attritionnelle .	111
6.28	Statistiques sur les 200 valeurs du ratio combiné et du résultat estimé obtenus par bootstrap	112
6.29	Calcul de l'AIC et BIC pour les différentes distributions pour la sinistralité atypique	112

Bibliographie

- [1] Walhin, J. -F. (2012). *La réassurance* (2e édition). Larcier.
- [2] Deelstra, G., & Plantin, G. (2006). *Théorie du risque et réassurance*. Economica.
- [3] Pierre, A. (2021). *Modélisation de la sévérité des traités en excédent de sinistre, approche par la théorie des valeurs extrêmes* [Mémoire d'actuariat]. Université de Strasbourg, DUAS. <https://www.institutdesactuaires.com/docs/mem/041daa0eb690433ee9a213879ff2ddb.pdf>
- [4] Clark, D. R. (1996). *Basics of reinsurance pricing*. CAS Study Note, 41-43. https://www.casact.org/sites/default/files/2021-03/8_Clark.pdf
- [5] Mlynarczyk, E & Reibell F. (2018). *La Réassurance, Mémo technique* (Edition 2021). Strada Conseil.
- [6] Homer. D & Li, M. (2017). *Notes on Using Property Catastrophe Model Results*. In Casualty Actuarial Society E-Forum (Vol. 2, pp. 1-15). https://www.casact.org/sites/default/files/2021-02/2017_most-practical-paper_homer-li.pdf
- [7] Klugman, S. A., Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (2012). *Loss models : from data to decisions* (Vol. 715). John Wiley Sons.
- [8] Grün, B. & Miljkovic, T. (2019). *Extending composite loss models using a general framework of advanced computational tools*. Scandinavian Actuarial Journal. <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/03461238.2019.1596151>
- [9] Dutang, C. & Pigeon, M. (2018). *actuar : An R package for actuarial science*. Journal of Statistical Software. <https://www.jstatsoft.org/article/view/v025i07>
- [10] Guillou, A., & Hall, P. (2001). *A Diagnostic for Selecting the Threshold in Extreme Value Analysis*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology), 63(2), 293–305. <http://www.jstor.org/stable/2680600>
- [11] Akaike, H. (1973). *Information theory and an extension of the maximum likelihood principle*. Second International Symposium on Information Theory.

- [12] Schwarz, G. (1978). *Estimating the dimension of a model*. Annals of Statistics (Vol. 6, n°2).
- [13] Caeiro, F. and Gomes, M. (2016). *Threshold Selection in Extreme Value Analysis*, 69-86. Chapman and Hall/CRC 2007.
- [14] Brown, R. L., & Gottlieb, L. R. (2007). *Introduction to ratemaking and loss reserving for property and casualty insurance*. Actex Publications.
- [15] Privault, N. (2019). *Notes on Financial Risk and Analytics*. Lecture notes, 137-178. https://personal.ntu.edu.sg/nprivault/MH8331/expected_shortfall.pdf
- [16] Davison, A. C., & Smith, R. L. (1990). *Models for Exceedances over High Thresholds*. *Journal of the Royal Statistical Society*. Series B (Methodological), 52(3), 393–442.
- [17] Leadbetter, M. R. (1991). *On a basis for 'Peaks over Threshold' modeling*. Statistics and Probability Letters.
- [18] Cooray, K. & Ananda, M. (2005). *Modeling actuarial data with a composite lognormal-pareto model*. Scandinavian Actuarial Journal.
- [19] Rytgaard, M. (1990). *Estimation in the Pareto distribution*. ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA, 20(2), 201-216.
- [20] Gardes, L. (2020). *Théorie des valeurs extrêmes* [Notes de cours]. Université de Strasbourg. https://irma.math.unistra.fr/~gardes/Resume_Cours_extreme.pdf
- [21] Article L111-3 du Code des Assurances. https://www.legifrance.gouv.fr/codes/article_lc/LEGIARTI000019013303
- [22] Partrat, C. & Besson J-L. (2005). *Assurance Non-Vie, Modélisation, Simulation*. Economica.

Annexes

A Méthodes d'estimation des paramètres

La méthode des moments

La méthode des moments consiste à égaliser les moments théoriques d'une loi de probabilité avec les moments empiriques correspondant.

Soit un échantillon (X_1, \dots, X_n) indépendant et identiquement distribué de loi de probabilité P_θ de paramètre inconnu θ .

Soit k la dimension du paramètre θ . On sélectionne k moments théoriques de la loi, qui sont des fonctions du paramètre θ , que l'on égalise à leur version empirique. Cela signifie que l'on remplace le i -ème moment théorique par la quantité :

$$\hat{m}_i = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n x_s^i$$

On obtient donc un système à k équations permettant d'estimer les différents paramètres de la loi.

La méthode du maximum de vraisemblance

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de paramètre θ inconnu.

Si X est une variable discrète, on pose $f(x, \theta) = \mathbb{P}_\theta(X = x)$, la fonction de masse de X .

Si X est une variable continue, on pose $f(x, \theta) = f_\theta(x)$, la fonction densité de X .

Soit un n -échantillon (x_1, \dots, x_n) indépendant et identiquement distribué de même loi que X . La fonction de vraisemblance L est défini par :

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

On définit également la log-vraisemblance par :

$$l(x_1, \dots, x_n; \theta) = \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \theta)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance est l'estimateur $\hat{\theta}$ qui maximise la vraisemblance (ou la log-vraisemblance), à (x_1, \dots, x_n) fixé :

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L(x_1, \dots, x_n; \theta)$$

B Lois usuelles en réassurance

Distribution de Poisson

Une variable aléatoire X , à support dans \mathbb{N} , suit une distribution de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, si elle admet une fonction de masse de la forme :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

L'espérance et la variance d'une loi de Poisson sont données par :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \lambda \\ \mathbb{V}(X) = \lambda \end{cases}$$

Distribution log-normale

Une variable aléatoire X suit une distribution log-normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, si elle admet une densité de la forme :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Le moment d'ordre $n \in \mathbb{N}$ d'une loi log-normale est donné par :

$$\mathbb{E}(X^n) = e^{n\mu + n^2\sigma^2/2}$$

En particulier, l'espérance et la variance sont données par :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = e^{\mu + \sigma^2/2} \\ \mathbb{V}(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2} \end{cases}$$

Distribution Gamma

Une variable aléatoire X suit une distribution Gamma de paramètres $k > 0$ et $\beta > 0$, si elle admet une densité de la forme :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{x^{k-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(k)\beta^k}$$

où Γ est la fonction gamma définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(z) > 0, \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

La fonction de répartition associée s'exprime pour tout $x > 0$ par :

$$F(x) = \frac{\gamma(k, \frac{x}{\beta})}{\Gamma(k)}$$

où γ est la fonction gamma incomplète définie, pour un paramètre complexe a de partie réelle strictement positive, par :

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$$

Le moment d'ordre n est donné par :

$$\mathbb{E}(X^n) = \beta^n \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k)}$$

En particulier, l'espérance et la variance d'une loi Gamma sont données par :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = k\beta \\ \mathbb{V}(X) = k\beta^2 \end{cases}$$

Distribution de Pareto

Une variable aléatoire X suit une distribution de Pareto de paramètres $\alpha > 0$ et $\theta > 0$, si elle admet une densité de la forme :

$$\forall x > \theta, f(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

La fonction de répartition associée s'exprime pour tout x par :

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha$$

Le moment d'ordre n est donné par :

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{n\theta^n \Gamma(n) \Gamma(\alpha - n)}{\Gamma(\alpha)}, \quad -1 < n < \alpha$$

En particulier, l'espérance et la variance sont données par :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{\alpha-1} \\ \mathbb{V}(X) = \frac{2\theta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} - \frac{\theta^2}{(\alpha-1)^2} \end{cases}$$

Distribution de Pareto généralisée

De même que la loi de Pareto, la distribution de Pareto généralisée est définie ici telle que dans le livre *Loss models : from data to decisions* [7].

Une variable aléatoire X suit une distribution de Pareto généralisée de paramètres $\alpha > 0$, $\tau > 0$ et $\theta > 0$, si elle admet une densité de la forme :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} \frac{\theta^\alpha x^{\tau-1}}{(x + \theta)^{\alpha+\tau}}$$

La fonction de répartition associée s'exprime pour tout x par :

$$F(x) = \beta(\tau, \alpha, u), \quad u = \frac{x}{x + \theta}$$

où β est la fonction beta incomplète :

$$\beta(a, b, x) = \frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^x t^{a-1} (1 - t)^{b-1} dt$$

Le moment d'ordre n est donné par :

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{\theta^n \Gamma(\tau + n) \Gamma(\alpha - n)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\tau)}, \quad -\tau < n < \alpha$$

En particulier, l'espérance et la variance sont données par :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \frac{\theta\tau}{\alpha-1} \\ \mathbb{V}(X) = \frac{\theta^2(\tau+1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)} - \frac{\theta^2\tau^2}{(\alpha-1)^2} \end{cases}$$

Pour $\tau = 1$, on retrouve une distribution de Pareto.

C Tests d'adéquation

Les tests d'adéquation permettent de mesurer la qualité d'un ajustement. Dans le cadre de ce mémoire, trois tests seront utilisés : le test de Kolmogorov-Smirnov, le test de Cramér-von Mises et enfin le test d'Anderson-Darling.

Test de Kolmogorov-Smirnov à un échantillon

Le test de Kolmogorov-Smirnov à un échantillon est un test d'hypothèse utilisé pour déterminer si un échantillon suit bien une loi donnée, connue par sa fonction de répartition.

Le principe est de comparer la fonction de répartition de la loi théorique F à la fonction de répartition empirique F_n du n -échantillon. Si la différence entre les deux courbes est inférieure à un certain seuil, alors l'hypothèse que l'échantillon suive bien cette loi est conservée.

La statistique du test de Kolmogorov-Smirnov est donnée par :

$$KS = \max_x (F(x) - F_n(x))$$

Il s'agit donc de mesurer l'écart maximal entre les deux fonctions de répartition.

Test de Cramér-von Mises

Le test de Cramér-von Mises est également un test d'hypothèse utilisé pour déterminer si un échantillon suit bien une loi donnée.

Soit F_n la fonction de répartition empirique du n -échantillon et F la fonction de répartition de la loi théorique de référence.

La statistique du test de Cramér-von Mises est donnée par :

$$CvM = n \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n(x) - F(x))^2 dF(x)$$

Le test de Cramér-von Mises peut être vu comme une version plus puissante du test de Kolmogorov-Smirnov. En effet, les deux tests se basent sur l'écart entre les deux fonctions de répartition que l'on souhaite comparer mais le test de Kolmogorov-Smirnov utilise seulement la valeur maximale de l'écart tandis que le test de Cramér-von Mises utilise la somme des différences en calculant une aire.

Test d'Anderson-Darling à un échantillon

Le test d'Anderson-Darling est semblable au test de Cramér-von Mises, à la seule différence qu'il y a désormais une fonction de pondération égale à $w(x) = [F(x)(1 - F(x))]^{-1}$ dans l'intégrale.

La statistique du test d'Anderson-Darling est ainsi donnée par :

$$AD = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F_n(x) - F(x))^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x)$$

L'ajout de cette fonction de pondération permet d'accorder plus de poids à la queue de la distribution que la statistique de Cramér-von Mises.

Le test de Kolmogorov-Smirnov est assez sensible à la médiane tandis que le test d'Anderson-Darling est plus sensible sur l'étendue de la distribution et en particulier sur la queue de la distribution.

Les tests de Cramér-von Mises et d'Anderson-Darling semblent plus adaptés pour savoir si les données simulées modélisent bien les données observées sur toute leur étendue.

D Brèves notions de la théorie des valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes permet d'étudier la queue de distribution d'une loi. C'est donc une notion essentielle en réassurance, notamment pour la modélisation des sinistres dits atypiques. Seules quelques notions de la théorie des valeurs extrêmes seront mentionnées, puisque nécessaires pour comprendre certaines méthodes utilisées dans ce mémoire. Pour plus de détails sur la théorie des valeurs extrêmes, se référer aux notes de cours de Laurent Gardes [20].

La distribution de Pareto généralisée dans l'approche POT

En théorie des valeurs extrêmes, une autre définition de la Pareto généralisée est couramment utilisée. Davison et Smith (1990) [16] et Leadbetter (1991) [17] ont proposé une approche qui consiste à analyser les dépassements au-delà d'un seuil u (en anglais POT pour *Peak Over the Threshold*).

Définition 6.2.1 (GPD)

Une variable aléatoire X suit une distribution de Pareto généralisée (GPD) de paramètres $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, si elle admet une fonction de répartition de la forme :

$$\forall x > 0 \text{ et tel que } 1 + \frac{\gamma x}{\sigma} > 0, G_{\gamma, \sigma}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{\gamma x}{\sigma})^{-\frac{1}{\gamma}} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\sigma}} & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

Pickands (1975) montre que la distribution de Pareto généralisée (GPD) donne une bonne approximation de la distribution de l'excédent $X - u | X > u$.

La GPD peut donc être vue comme la distribution asymptotique des excédents au-delà de grands seuils. En ce sens, elle peut être redéfinie à une transformation affine près. La fonction de répartition s'écrit alors :

$$\forall x > 0 \text{ et tel que } 1 + \frac{\gamma(x-u)}{\sigma} > 0, G_{\gamma, u, \sigma}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{\gamma(x-u)}{\sigma})^{-\frac{1}{\gamma}} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{(x-u)}{\sigma}} & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

L'espérance d'une Pareto généralisée telle que définie ci-dessus est donnée par :

$$\forall \gamma < 1, \mathbb{E}(X) = u + \frac{\sigma}{1 - \gamma}$$

Sa variance est donnée par :

$$\forall \gamma < \frac{1}{2}, \mathbb{V}(X) = \frac{\sigma^2}{(1 - \gamma)^2(1 - 2\gamma)}$$

La distribution de Pareto dans la théorie des valeurs extrêmes

Il existe plusieurs manières de définir la distribution de Pareto. En théorie des valeurs extrêmes, la définition suivante est souvent utilisée.

Une variable aléatoire X suit une distribution de Pareto de paramètres $\gamma > 0$ et $a > 0$, si elle admet une fonction de répartition de la forme :

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$$

où γ est appelé indice des valeurs extrêmes.

La fonction de répartition de la distribution de Pareto appartient au domaine de Fréchet, c'est-à-dire que l'indice des valeurs extrêmes est strictement positif : $\gamma > 0$.

L'estimateur de Hill

L'estimateur de Hill est l'estimateur le plus populaire pour estimer la valeur de l'indice des valeurs extrêmes γ .

Définition 6.2.2 (Estimateur de Hill)

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et de même fonction de répartition F appartenant au domaine d'attraction de Fréchet avec un indice des valeurs extrêmes $\gamma > 0$. L'estimateur de Hill de γ est :

$$\hat{\gamma}_n^{(H)}(k_n) = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{X_{(n-i+1)}}{X_{(n-k_n)}} \right)$$

où $1 \leq k_n \leq n$ est une valeur choisie par l'utilisateur.

Le choix de k_n , c'est-à-dire du nombre d'observations considérées, est crucial. Si k_n est trop grand, l'approximation par une loi de Pareto sera mauvaise et l'estimateur de Hill aura un biais important. Au contraire, si k_n est trop petit, il n'y aura pas assez d'observations pour le calcul et l'estimateur aura une forte variance.

Pour que l'estimateur de Hill soit consistant (i.e. $\hat{\gamma}_n^{(H)} \xrightarrow{p} \gamma$), il faut choisir la suite k_n telle que $k_n \rightarrow +\infty$ et $k_n/n \rightarrow 0$.

E La méthode du parallélogramme

La méthode du parallélogramme est utilisée pour ajuster les primes historiques par un facteur moyen afin de mettre les primes à niveau. Cette méthode, tirée des travaux de Brown et Gottlieb (2007) [14], vise à obtenir un *rate change* annuel, dans le cas où le réassureur ne dispose que de l'information de l'augmentation du taux de primes à une date précise.

Pour comprendre cette méthode, considérons l'exemple suivant. Soit P le taux de primes en vigueur au 01/01/2019. On suppose que des augmentations de taux, appliquées aux nouvelles polices ou aux renouvellements, ont été introduites comme suit :

- +25% effectif au 01/07/2020
- +28% effectif au 01/04/2021

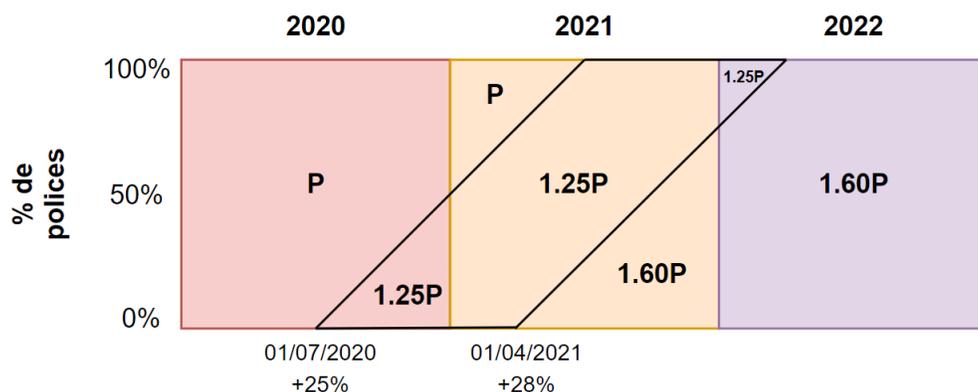


FIGURE 6.13 – Exemple de la méthode du parallélogramme

Les parallélogrammes sont utilisés pour calculer le pourcentage de primes acquises appartenant à chaque niveau de taux. Il s'agit d'un simple calcul d'aire.

Les résultats obtenus se trouvent dans le tableau suivant :

TABLE 6.24 – Proportion de polices à chaque niveau de taux de primes pour chaque année

Année	2020	2021	2022
Taux de prime			
P	87,50%	12,50%	0,00%
$1,25P$	12,50%	59,375%	3,125%
$1,60P$	0,00%	28,125%	96,875%

Pour être mises à niveau, un facteur d'augmentation doit être appliqué sur les primes. Le tableau suivant regroupe les valeurs du facteur à appliquer à la proportion des polices selon leur taux de primes.

TABLE 6.25 – Facteurs de niveau à appliquer aux polices selon leur taux de prime

Taux de prime	Facteur de niveau
P	$1,25 \times 1,28 = 1,60$
1,25P	1,28
1,6P	1

Le calcul du *rate change* annuel pour chaque année est détaillé dans le tableau 6.26.

TABLE 6.26 – Calcul du rate change annuel

Année	Rate change annuel
2020	$1,60 \times 0,875 + 1,28 \times 0,125 = 1,56$
2021	$1,60 \times 0,125 + 1,28 \times 0,59375 + 1 \times 0,28125 = 1,24125$
2022	$1,28 \times 0,03125 + 1 \times 0,96875 = 1,00875$

F Présentation de l'outil de tarification RShiny

Le sujet présente un aspect opérationnel important puisqu'une application RShiny a été développée. Cette annexe présente l'interface du nouvel outil de tarification.

La première feuille de l'application permet à l'utilisateur de sélectionner le fichier Excel contenant toutes les informations nécessaires à la tarification. L'outil récupère l'ensemble des données et les affiche.



FIGURE 6.14 – Importation des données

La deuxième feuille concerne la mise en *as-if* des données. Les indices utilisés pour les sinistres et les primes sont affichés et il est possible d'y effectuer des modifications si besoin. Les données indexées sont ensuite gardées en mémoire pour la suite de la tarification.



FIGURE 6.15 – Indice pour la mise en *as-if*

La troisième feuille concerne la modélisation de la sinistralité. Elle est divisée en trois sous-feuilles. La première permet à l'utilisateur de choisir le seuil des atypiques selon l'une

des quatre méthodes proposées. La deuxième et troisième permettent de sélectionner respectivement la distribution pour la sinistralité attritionnelle et la distribution pour la sinistralité atypique.

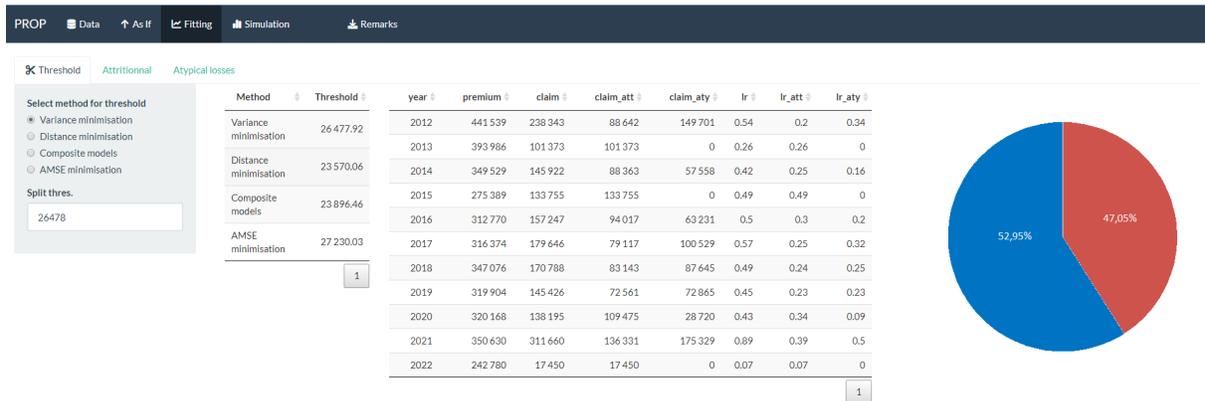


FIGURE 6.16 – Choix du seuil

Les paramètres des lois sélectionnées sont indiqués à l'utilisateur et le graphique de la fonction empirique et de la loi choisie est tracé.

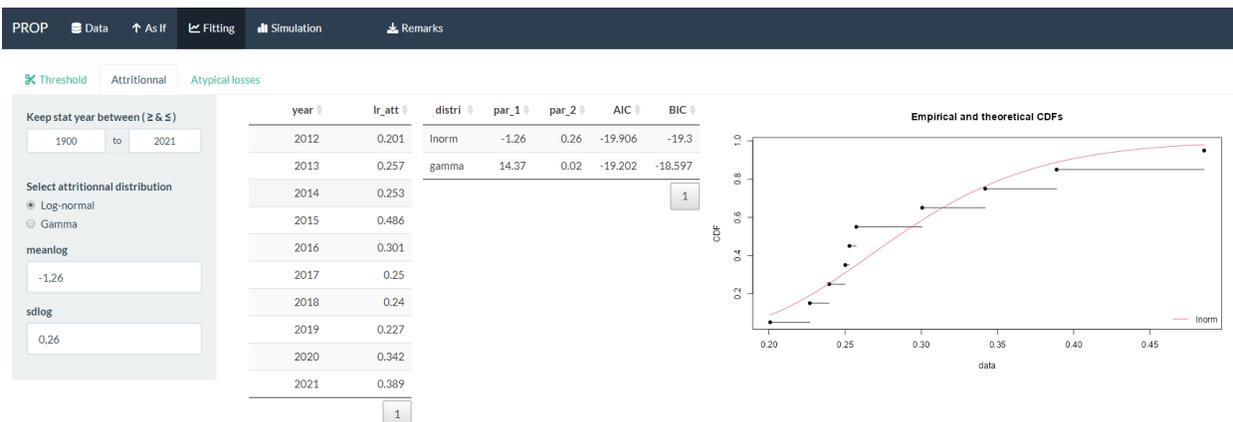


FIGURE 6.17 – Modélisation de la sinistralité attritionnelle

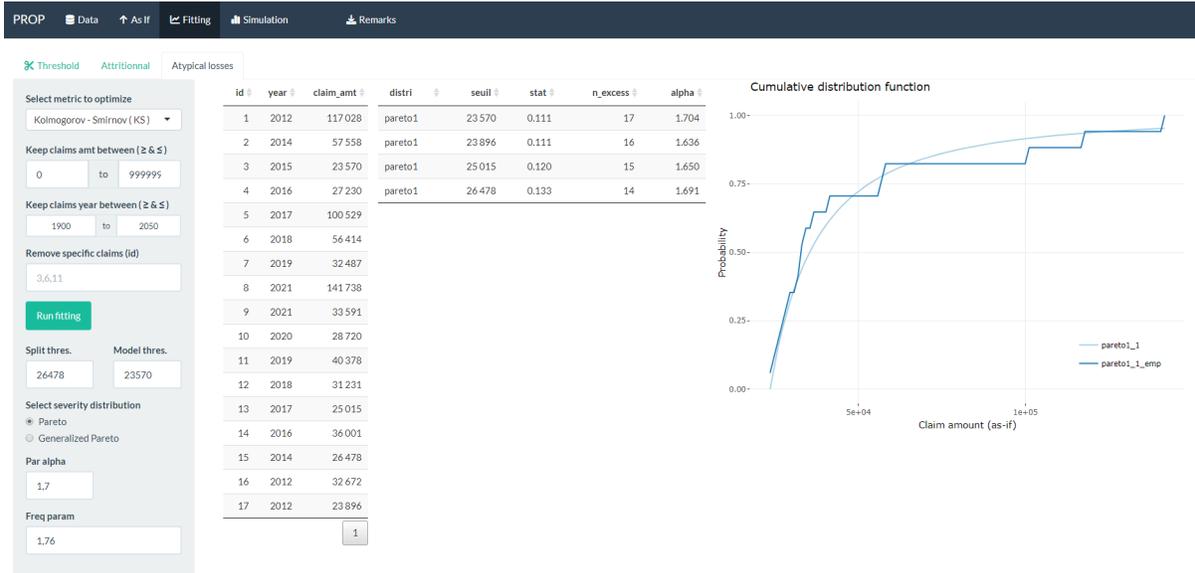


FIGURE 6.18 – Modélisation de la sinistralité atypique

La quatrième feuille permet de lancer la simulation. Les valeurs moyennes des différentes clauses, ainsi que le ratio combiné et le résultat estimé moyens y sont affichés. L'utilisateur peut également observer l'histogramme de la distribution du ratio combiné.

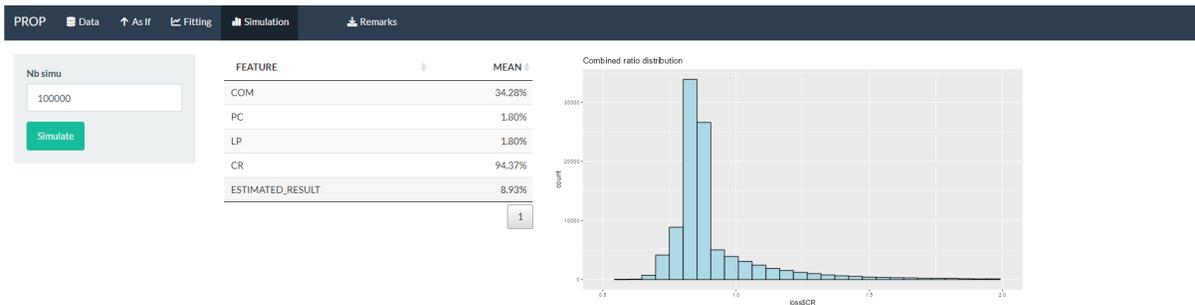


FIGURE 6.19 – Résultats sur données simulées et distribution du CR

La dernière feuille permet à l'utilisateur de rajouter des commentaires et de sauvegarder la cotation.

G Tests sur les distributions choisies

Choix des paramètres pour la distribution de la sévérité attritionnelle

Lors du choix de la distribution de la sinistralité attritionnelle, les paramètres des distributions log-normale et gamma ont été calculés par maximum de vraisemblance.

Estimateurs des moments

Nous allons chercher à mesurer l'impact du choix des paramètres de la distribution attritionnelle sur le résultat de la tarification. Dans un premier temps, regardons les résultats obtenus avec les estimateurs de la méthode des moments :

TABLE 6.27 – Estimateurs des moments pour la distribution de la sinistralité attritionnelle

Distribution	Paramètres		AIC	BIC
Gamma	$k = 10.20$	$\beta = 0.0281$	-18.01	-17.40
Log-normale	$\mu = -1.295$	$\sigma = 0.305$	-17.48	-16.97

On retient la distribution log-normale. En ce qui concerne la distribution des sinistres atypiques, on garde la même que dans l'exemple à savoir la distribution de Pareto de paramètres $\theta = 23\,570$ et $\alpha = 1.70$.

On obtient finalement un ratio combiné moyen de 96,29% sur les 100 000 années simulées et un résultat estimé de 7,01%. Pour rappel, avec les estimateurs de maximum de vraisemblance on avait obtenu un ratio combiné de 96,24% et un résultat estimé de 7,05%, la différence est donc minime.

Bootstrap

Comme l'historique des données pour l'estimation des paramètres de la distribution de la sinistralité attritionnelle annuelle est très limité (une dizaine d'années au maximum), il peut être judicieux d'effectuer un bootstrap.

A partir de notre ensemble de données initial, on va générer 200 échantillons bootstrap en tirant aléatoirement n observations avec remplacement à chaque fois. On peut donc calculer des estimateurs des paramètres de nos lois log-normales et gamma à partir de échantillons, puis en simuler 100 000 années (la distribution des sinistres atypiques restant inchangée). Après avoir calculer le ratio combiné moyen et le résultat estimé moyen sur ces 100 000 années simulées, on se retrouve finalement avec 200 valeurs du ratio combiné moyen et du résultat estimé moyen.

Quelques statistiques sur les années simulées à partir des estimations sur les échantillons bootstrap sont exposées dans le tableau 6.28.

TABLE 6.28 – Statistiques sur les 200 valeurs du ratio combiné et du résultat estimé obtenus par bootstrap

	Log-normale	Gamma
CR moyen	94,37%	94,32%
Résultat estimé moyen	8,94%	8,98%
Ecart-type	0,50%	0,48%

On obtient donc en moyenne un ratio combiné d'environ 94% pour les deux lois, soit 2% de moins que le ratio combiné obtenu dans l'exemple. Quoiqu'il en soit, le résultat estimé reste nettement inférieur à celui obtenu avec l'ancienne approche par moyenne.

Choix de la distribution de la sinistralité atypique

Pour comparer les différentes distributions possibles pour la sinistralité atypique, le choix s'est porté sur l'utilisation de statistiques de test permettant de mesurer l'écart entre la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition théorique.

Critères AIC et BIC

De même que pour le choix de la distribution de la sinistralité attritionnelle, nous aurions pu utiliser les critères AIC et BIC pour classer nos distributions. Le tableau 6.29 montre les résultats ainsi obtenus :

TABLE 6.29 – Calcul de l'AIC et BIC pour les différentes distributions pour la sinistralité atypique

Distribution	Seuil	alpha	AIC	BIC
Pareto	23 570	1.70	378.96	380.62
Pareto	23 896	1.64	359.19	360.86
GPD	23 570	1.73	380.97	383.47
Pareto	25 015	1.65	337.75	339.41
GPD	23 896	2.02	380.67	383.18
Pareto	26 478	1.69	315.82	317.48
GPD	25 015	1.98	378.33	380.83
GPD	26 478	1.78	374.58	377.09

Le classement est différent que lors de l'utilisation de la statistique de Kolmogorov-Smirnov. Avec les critères AIC et BIC, la distribution qui ressort première est la distribution de Pareto de seuil 26 478 et de paramètre alpha égal à 1.69.

Quel que soit le critère utilisé (AIC, BIC ou l'une des statistiques de test), les distributions de Pareto sont toujours, dans cet exemple, plus adaptées que les distributions de Pareto généralisée.