Mémoire présenté devant le CNAM
pour l'obtention du diplôme du Master Droit Economie Gestion mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires
le 24/01/2022

Par : Yoram Loeb

Titre: Des Solutions d'investissement en Actions pour des Assureurs et des Fonds de pension Européens

Confidentialité : ☐ NON ■ OUI (Durée : ☐ 1 an ■ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires	signatures	*Entreprise :*
Steve BAUMANN		Nom : HSBC
Mohamed Ayoub OUAJJOU		
Maryse LE PEVEDIC		*Directeur de mémoire en entreprise :*
Membres présents du jury de la filière du CNAM :		*Nom : NA*
Sandrine LEMERY (Présidente)		*Signature :NA*
Olivier DESMETTRE		*Invité :*
Nathanael ABECERA		*Nom :*
Francois WEISS		*Signature :*

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Yonathan Ebguy, Deputy head GBM
HSBC Continental Europe
(voir feuille de garde précédente)

Secrétariat

Signature du candidat

Bibliothèque :

CNAM, 40 rue des jeuneurs, 75002 Paris

Des Solutions d'investissement en Actions pour des Assureurs et des Fonds de pension Européens

Yoram LOEB

Yoram LOEB

Master actuariat CNAM-Institut des Actuaires

Mots clés : Placements en actions, SCR, Low Vol Anomaly, produits dérivés, Stratégies à volatilité contrôlée

Résumé :
Les assureurs et fonds de pensions ont d'importants engagements à long terme. Face à ce passif, ils doivent allouer des actifs performants et se conformer aux régulations proposées par l'EIOPA (Solvabilité 2...). Avec des rendements en baisse sur le marché de la dette, nous nous sommes intéressés aux placements en actions. Un bon placement est un placement offrant de bons rendements, une volatilité économique et comptable réduite en cours de vie et à terme, et un SCR acceptable pour les entreprises concernées. La conception du portefeuille peut faire intervenir l'analyse fondamentale de chaque action et/ou faire partie d'un processus de création de portefeuille. Souvent il s'agit encore d'optimiser le rendement contre le risque. Cependant, nous avons rappelé l'existence de la "Low Vol Anomaly" qui semble permettre un gain sur les deux tableaux. Cette anomalie associée à des produits dérivés peut permettre la mise en place de programmes d'investissements optimisés. Une autre approche est d'utiliser un portefeuille dynamique d'actions et d'actifs sans risque afin d'obtenir un niveau de risque et de volatilité constant. Cette ambition de garder un risque constant peut aboutir à des coûts de couverture stables dans le temps et attrayants, même s'il faut prendre en compte certains surcoûts liés aux modèles de valorisation du marché.

Introduction :

L'industrie européenne de l'assurance et les fonds de pensions évolue dans un contexte en forte évolution. D'un côté, l'environnement règlementaire finit sa mue vers Solvabilité II. Cette évolution a été rendue d'autant plus nécessaire et urgente que les crises financières des subprimes en 2008 et obligations souveraines européennes en 2010 ont mis en évidence le besoin d'une compréhension et une prise en compte accrue des risques de marché. Si Solvabilité I était basée sur l'idée de provisions techniques suffisantes pour le règlement intégral des engagements vis-à-vis des assurés ou bénéficiaires de contrats, Solvabilité II est une réglementation beaucoup plus précise et complète basée sur trois piliers : quantitatif, qualitatif, transparence. Ces modifications ne sont pas sans conséquence sur les placements des assureurs. Les sociétés d'assurances vont passer d'une problématique de taux de couverture avec des règles assez simples en termes de classes d'actifs et de concentrations, à une problématique de quantification du risque par le calcul du risque de perte à 0.5%. Cette mesure de risque est appelée VAR (Value at Risk) à 99.5%. Cette contrainte concerne toutes les classes d'actifs : obligation, immobilier, action…. De l'autre côté, les rendements des obligations et autres produits de dettes, historiquement très largement représentés dans l'actif de ces entreprises, ne cessent de baisser... Il est donc naturel et nécessaire de chercher des alternatives. Les actions apparaissent comme des candidates potentielles mais souffrent de la méthode de calcul du risque associé. Il est donc opportun de revenir aux bases de la théorie des portefeuilles et de l'adapter aux nouvelles contraintes de réduction du risque, de la volatilité, du SCR. Dans cette logique de réduction des risques, l'utilisation des produits dérivés peut aussi être d'une grande aide. Travaillant dans une salle de marché d'une banque internationale, j'ai eu l'occasion de travailler, d'échanger, de proposer et de traiter différentes solutions.

I. Le cadre règlementaire :

1) Un cadre européen :

Dès les années 70, l'Union Européenne (CEE à l'époque) s'est impliquée dans la régulation des assurances. Au départ, l'ambition était déjà la mise en place des conditions permettant la création d'un marché européen de l'assurance tout en minimisant les distorsions de concurrence entre opérateurs et de garantir aux assurés le versement des prestations prévues. Cela aboutit en 1973 et en 1979 par la rédaction et l'adoption de directives relatives à l'assurance non vie et à l'assurance vie. Cette régulation évoluera progressivement à l'aide de directives cadres telles que la « libre prestation de service », « passeport européen », Solvabilité 1 et finalement Solvabilité II. En 1998 la directive « libre prestation de service » prévoit (définition ACPR) :

La liberté de prestation de services est la faculté pour un organisme, dont le siège social ou une succursale est situé dans un État membre de l'Espace économique européen, d'offrir ses services sur le territoire d'un autre État membre. Il s'agit donc de la faculté d'une entreprise de garantir à partir de l'État membre dans lequel elle est implantée un risque situé dans un autre État.

L'environnement réglementaire de l'Union européenne est décrit dans la législation communautaire, mais aussi et toujours dans les **législations nationales.** Ainsi, la compagnie d'assurances exerçant une activité en LPS (Libre Prestation de Service) doit respecter les dispositions légales d'intérêt général en vigueur dans l'Etat membre de l'engagement (pays du souscripteur). Cette directive sera suivie en 2002 par la Directive sur l'Intermédiation en Assurance (DIA) et Solvabilité I. Si Solvabilité I décrit les règles de solvabilité des assureurs, DIA se concentre sur le renforcement du marché unique. On rappelle que le périmètre du marché unique européen englobe les 28 États de l'Union européenne (UE), auxquels s'ajoutent l'Islande, le Liechtenstein et la Norvège. L'article 6-1 de la DIA précise que tout intermédiaire en assurance régulièrement inscrit sur le registre de son pays d'origine a la faculté d'exercer dans un autre pays en libre prestation de services (LPS) ou libre établissement (LE). L'intermédiaire n'a qu'une seule formalité à accomplir : informer l'autorité de son pays d'origine tenant le registre, à charge pour cette dernière de le notifier à l'autorité du pays cible. Un mois après cette notification, l'intermédiaire est autorisé à exercer sur le territoire du pays cible : on parle de « passeport européen ».

2) Solvabilité I :

Ce cadre de contrôle de la solvabilité des assurances s'est mis en place progressivement à partir des années 70. Ce cadre s'organise sur trois axes :

- la constitution de provisions techniques suffisantes (hypothèses prudentes)
- des actifs sûrs, diversifiés, liquides et rentables
- un niveau de fonds propres supérieur à un niveau minimal (appelé Exigence de Marge de Solvabilité, EMS)

La constitution des provisions techniques est réglementée aussi bien dans le cadre de l'assurance vie que de l'assurance non-vie. Les calculs sont basés sur des hypothèses prudentes. En assurance vie, l'actualisation des flux se fait sur la base, jusqu'à huit ans, du minimum entre le taux fixe de 3.5% et 75% du TME. Le TME correspond au taux moyen de rendement des emprunts d'État et des obligations assimilables du Trésor (OAT) émises par l'État français. Au-delà de huit ans, ce ratio est même rabaissé à 60%. Un autre élément décisif dans le cadre du calcul des provisions d'assurance vie est réglementé par Solvabilité I : la table de mortalité. Le choix est contraint par l'article A.335-1 du code des assurances :

a) Tables homologuées par arrêté du ministre de l'économie et des finances, établies par sexe, sur la base de populations d'assurés pour les contrats de rente viagère, et sur la base de données publiées par l'Institut national de la statistique et des études économiques pour les autres contrats ;

b) Tables établies ou non par sexe par l'entreprise d'assurance et certifiées par un actuaire indépendant de cette entreprise, agréé à cet effet par l'une des associations d'actuaires reconnues par l'autorité mentionnée à l'article L 310 12.
Les tables mentionnées au b sont établies d'après des données d'expérience de l'entreprise d'assurance, ou des données d'expérience démographiquement équivalentes.

L'assurance non-Vie n'échappe pas à ces « principes de précaution » à travers ses différentes composantes : provisions pour prime non acquises, provisions pour sinistres à payer, provisions pour participation aux bénéfices, provisions mathématiques des rentes…. Les provisions mathématiques des rentes se calculent avec le cadre déjà décrit pour l'assurance-vie. Les provisions pour sinistres à payer (PSAP) se calculent aussi avec des hypothèses précautionneuses, l'inflation sera prise en compte dans le cas de cadences de règlements longues, alors que la législation interdit l'usage de tout taux d'escompte afin d'actualiser les PSAP.

Les exigences de fonds propres étaient alors calculées à l'aide de critères simples : proportions des primes ou proportions des sinistres annuels passés en vie, proportions des provisions mathématiques en non-vie. En assurance vie, ce besoin de fonds propre est calculé en prenant 4% des provisions mathématiques. Ce montant est corrigé par un coefficient multiplicateur prenant en compte taux de cession en réassurance (jusqu'à hauteur de 15%). En assurance non-vie, le calcul des exigences de fond propres se fait par le maximum entre deux approches : primes et sinistres. L'approche par les primes est calculée par proportion des primes émises avec un seuil : 18% des primes jusqu'à 61.3M€, puis 16%. Ce montant est impacté par le taux de réassurance (dans la limite de 50%). L'approche par les sinistres a un fonctionnement très semblable : il s'agit de prendre 26% des sinistres jusque 42.9M€ puis 23% au-delà. Une fois de plus cette exigence est diminuée par la réassurance jusqu'à 50%. On notera que dans l'approche par sinistre, il est prévu une majoration de 50% pour les sinistres de Responsabilité Civile.

Ces règles, en plus d'être incomplètes, avaient de nombreux effets indésirables. Une entreprise ayant une approche conservatrice de ses provisions mathématiques verra son bilan doublement impacté par sa prudence : sur le calcul de ses provisions et sur son exigence en fonds propres. De même un assureur choisissant une approche moins agressive de son marché, en augmentant ses tarifs, verra aussi ses exigences de solvabilité augmenter.

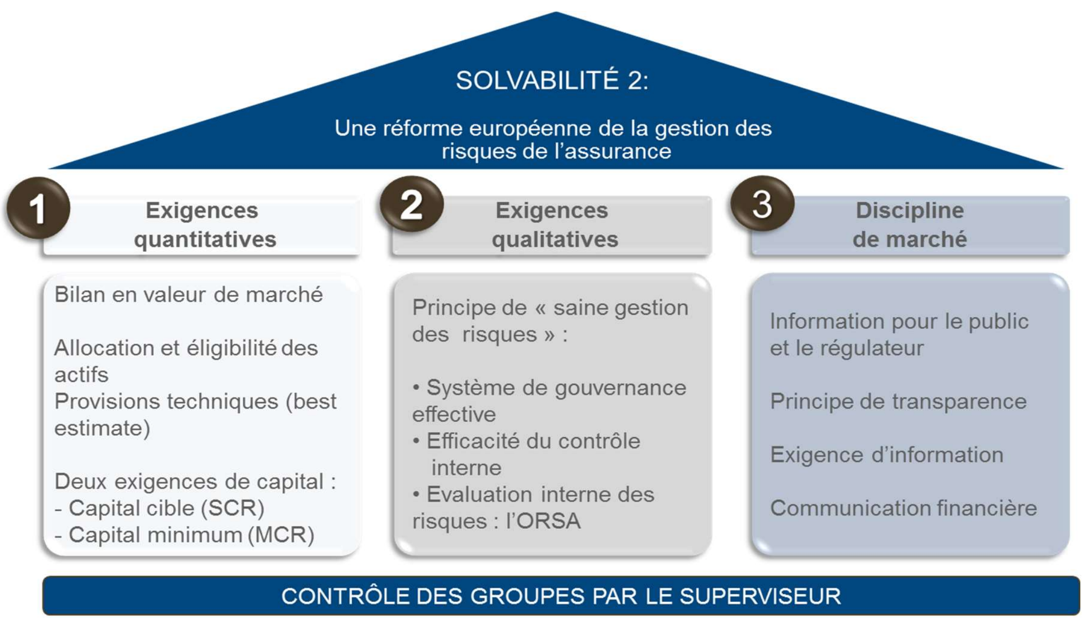
Le cadre règlementaire prévoie des contraintes d'allocation, de couverture des engagements règlementés Les engagements considérés ici sont les engagements de l'assureur envers les assurés, l'Etat et ses salariés. Face à ses engagements, l'assureur doit détenir des actifs « en quantité suffisante, de qualité suffisante et suffisamment dispersés ».

3) <u>Solvabilité II :</u>

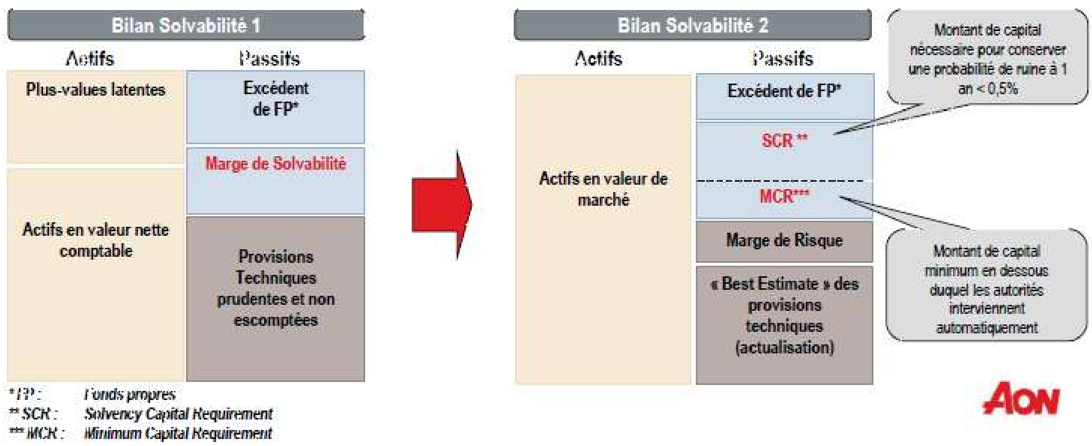
Les différentes évolutions du métier de l'assurance et sa perspective transnationale dans l'espace économique européen ont rendu nécessaire le renforcement de cet environnement réglementaire. Ainsi est née à partir de 2005 la nouvelle directive Solvabilité II. La gestation de cette directive s'est révélée complexe et longue. Après que l'actualité économique, par l'intermédiaire des crises financières des subprimes et des dettes souveraines, a rappelé cette urgence, l'implémentation de cette directive est quasiment achevée. De 2005 à 2011, le CEIOPS (Committee of European Insurance and Occupational Pension Supervisors) puis l'EIOPA (European Insurance and Occupationnal Pensions Authority), en charge de cette réglementation, ont organisé cinq études d'impacts (QIS :Quantitative Impact Study) auprés des différentes parties prenantes.

A. <u>Principes de Solvabilité II : trois piliers</u>

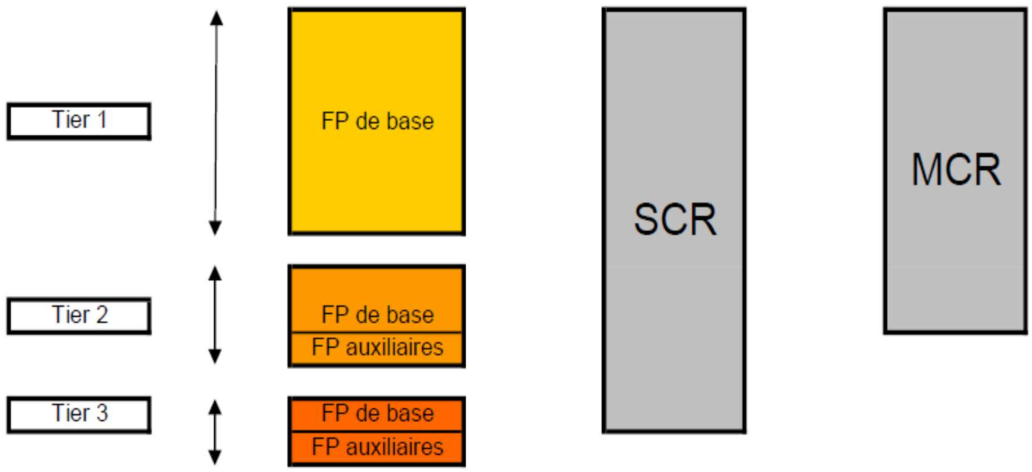
Le cadre de régulation de Solvabilité II est basé sur trois piliers.



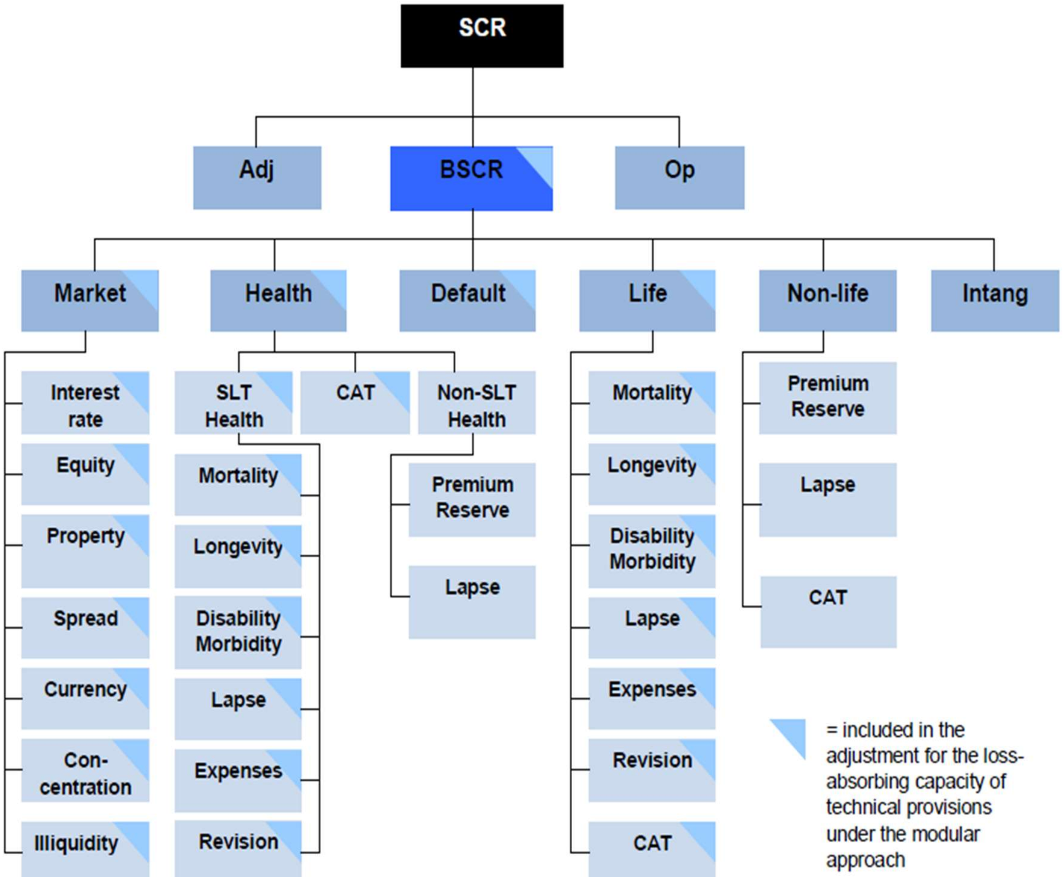
▪ Pilier quantitatif : Ce pilier est une suite de la directive Solvabilité I. Elle correspond aux règles de prudence appliquées dans le cadre des calculs actuariels. Concernant le calcul des actifs on passe d'un principe de valeur comptable à valeur de marchés. Pour le passif, la valeur comptable est remplacée par l'addition du « Best Estimate » et d'une marge de risque. Le « Best Estimate » étant défini comme la valeur à laquelle les engagements pourraient être cédés. L'ancienne exigence de marge solvabilité est remplacée par deux outils de pilotage de la solvabilité : le SCR et le MCR. Le MCR est le Minimum Capital Requirement (Capital Minimum Requis), calculé avec des règles simples n'incluant pas les modèles internes. Le non-respect du MCR entraîne automatiquement l'intervention des autorités. Le SCR (plus grand que le MCR) est le "Solvency Capital Requirement". Il s'agit du capital nécessaire pour absorber le choc provoqué par un risque majeur. Il est défini d'un point de vue probabiliste comme la VAR à 99.5% sur un an, c'est à dire la probabilité de perte annuelle à 0.5%. Une VAR à 99.5% de A implique qu'à horizon de 1 an, la probabilité de perte supérieure à A est 0.5% (100%-99.5%). Si la directive prévoit des formules standard d'estimation, elle autorise (sous conditions) l'utilisation documentée des modèles internes aux assureurs. De ces nouvelles exigences réglementaires est née une nouvelle représentation du bilan prudentiel.



Le calcul de ces différents ratios s'accompagne de contraintes sur leur couverture en capital. On s'intéresse ici à la qualité des fonds propres utilisés, il s'agit de décomposer en « Tier ». Les critères retenus par le CEIOPS lors du QIS4 pour cette classification sont : la subordination du montant total de l'élément financier, l'absorption totale des pertes en cas de liquidation, une durée de vie suffisante et déterminée, remboursement du nominal, l'absence de charges financières obligatoires fixes (intérêts, remboursements…), absences de restrictions sous formes de garanties ou d'hypothèques. Deux types de fonds propres sont concernés par ces calculs : les fonds propres de base et les fonds propres auxiliaires. Les fonds propres de bases sont présents au bilan de l'assureur et correspondent au capital économique en valeur de marché et des passifs subordonnés. Les fonds propres auxiliaires comprennent divers éléments, autres que les fonds propres de base, qui peuvent être appelés pour absorber les pertes, comme par exemple la partie non versée du capital ou, dans le système mutualiste, les rappels de cotisations. Ces fonds propres vont ensuite être classés en « Tier », du « Tier 1 » de meilleure qualité au « Tier 3 » de qualité inférieure, en passant par le « Tier 2 » de qualité intermédiaire. Le premier « Tier » correspond aux éléments des fonds propres de base étant à la fois disponibles, subordonnés, de maturité suffisante et exempt de charges, de contraintes ou de remboursement. Le second « Tier » est composé des fonds propres auxiliaires répondant au critère du « Tier 1 » et des fonds propres de base subordonnés et exemptés. Le dernier « Tiers » de qualité moindre, est composé des fonds propres restants. Lors du QIS5, en 2009, plus de 90% des fonds propres des assureurs français étaient considérés comme de qualité supérieure, de qualité « Tier 1 ». Dans le cadre de Solvabilité II, les fonds propres de « Tier 1 » doivent valoir plus de 80% du MCR et 50% du SCR. Les fonds propres de « Tier 3 » ne sont pas utilisés dans le calcul du respect du MCR et ne doivent pas représenter plus de 15 % du SCR. Les fonds propres de « Tiers 2 » complètent ceux du « Tier 1 » dans le calcul des deux contraintes de solvabilité.



Le calcul du SCR se fait par l'intermédiaire du BSCR (Basic Solvency Capital Requirement) de « bloc » de risques correspondant aux différents aléas de l'activité assurantielle : Santé, Vie, Non-Vie, Crédit, Marché. Ces blocs sont eux même décomposé en sous-blocs de SCR détaillant les risques. Dans le cas du bloc Vie nous distinguons les risques de mortalité, de longévité, de rachat, etc... Le bloc Marché est lui composé par les risques actions, change (FX), taux d'intérêt, spread de crédit, inflation…



Nous reviendrons plus particulièrement sur le risque actions. La directive prévoit aussi la prise en compte des « effets croisés » des risques. Les risques ne sont pas uniquement évalués séparément mais aussi dans leur globalité en prenant en compte les interactions des variations de marchés, de la corrélation entre les facteurs de risques.

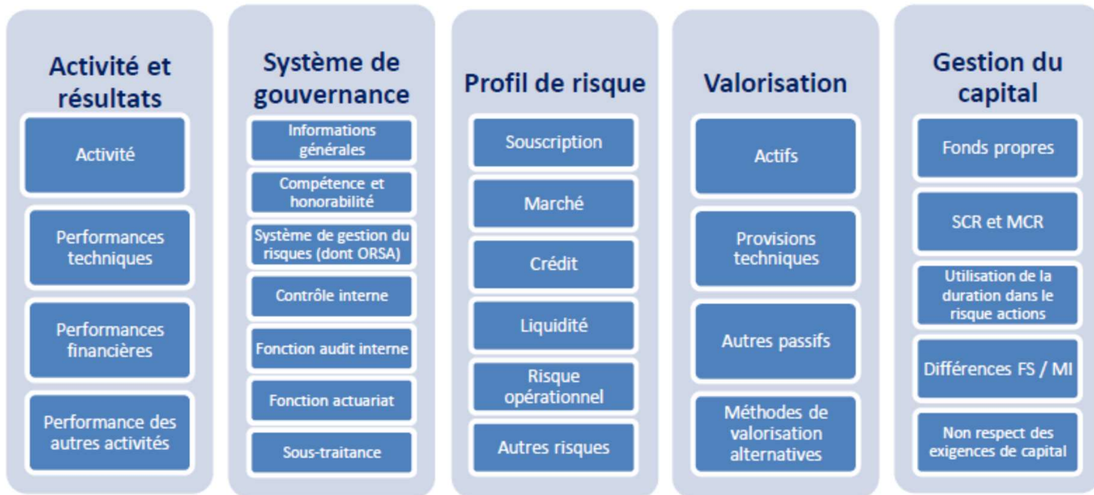
Le BSCR se calcule de la façon suivante afin d'agréger l'ensemble de ces risques :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{ij} Corr_{ij} \times SCR_i \times SCR_j} + SCR_{intangibles}$$

avec : SCRi = SCR du module de risque i (sauf le SCR du risque intangible)
Corr(i,j) = Coefficient de la matrice de corrélation entre les modules de risque i et j

- Exigence qualitative : Il s'agit ici de la mise en place de dispositifs internes permettant de maitriser les différents risques auxquels un assureur peut être confronté, qu'il soit financier, technique ou opérationnel. Si le calcul des risques par les SCR traduit déjà quantitativement les contraintes solvabilité, le pilier 2 vise à structurer les fonctions et les "reportings" au sein de l'entreprise. Ce seront ces fonctions qui seront capables de fournir durablement les chiffres, les analyses, les décisions qui permettront à l'assureur de durablement faire face aux enjeux de la solvabilité. Ainsi elle prévoie la mise en place d'un certain nombre de fonctions ainsi que des systèmes afférents. On parle ici de l'actuariat, de l'audit interne, de la conformité et de la gestion des risques. C'est tout un process de gouvernance qui doit être mis en place. Si certaines fonctions peuvent être externalisées dans la production, la responsabilité ne peut être transmise en dehors de l'entreprise d'assurance. L'ensemble de ces fonctions doivent agir en accord avec les principes de « personne prudente ». On demande à l'entreprise d'agir avec bon sens, chaque risque doit pouvoir être : identifié, mesuré, suivi, géré, contrôlé et déclaré de manière adéquate. Aussi, chaque assureur doit produire au moins annuellement l'ORSA : Own Risk and Solvency Assessment. Ce document définit l'ensemble des processus contribuant à l'évaluation régulière du besoin global de solvabilité interne à l'entreprise, faisant partie intégrante de la stratégie commerciale et tenant compte du profil de risque spécifique de l'assureur. Les exigences relatives à l'ORSA laissent volontairement un espace de liberté. Il ne s'agit pas d'inviter l'assureur à l'imprécision ou à un manque de rigueur. Au contraire il s'agit de lui laisser l'occasion de faire preuve de liberté dans son analyse et la description de ses risques qui lui sont propres correspondant à son business model, à son activité commerciale, de son appétit au risque. Il s'agit ici de s'éloigner de l'évaluation et à la cartographie standardisée du pilier 1. Il doit néanmoins toujours comporter trois évaluations distinctes : le besoin global de solvabilité, le respect permanent des exigences réglementaires, l'adéquation du profil de risque aux hypothèses sous-jacentes de la formule standard. Cette identification du profil de risque propre à l'assureur est le levier pour une gouvernance efficace. En s'appuyant sur l'ORSA, l'entreprise pourra mettre en évidence des risques additionnels et envisager des mesures de risque alternatives. L'objectif pour l'assureur est d'être en mesure de construire des indicateurs propres à ses besoins internes en vue d'améliorer le reporting et le suivi des risques suivant une approche agrégée et prospective de la solvabilité. Il s'agit d'un document prospectif qui doit contenir également des éléments du plan stratégique de l'assureur. Le rapport ORSA doit être approuvé par le conseil d'administration ou le conseil de surveillance.

- Communication financière : Ce pilier précise les publications requises pour l'assureur vis avis du régulateur et du public. Certains documents sont dits « narratifs » : c'est une vision descriptive de la politique mise en place par l'assureur. Le régulateur recevra le document le plus complet, il s'agit du RSR (Regulator Supervisory Report). Le RSR remplace les actuels rapports de solvabilité et de contrôle interne. Le RSR devra être publié dans son intégralité au minimum tous les trois ans. Une version simplifiée devra être fournie annuellement. Le public aura accès au SFCR (Solvency Financial and Condition Report). Le SFCR et RSR ont le même plan, qui est donné dans l'annexe 20 du règlement délégué de la Commission Européenne. Les organismes peuvent demander l'autorisation au superviseur de ne pas publier certaines informations dans le SCFR. Les rapports SFCR et RSR décrivent l'activité de l'organisme, son système de gouvernance, son profil de risque et complètent la remise des états quantitatifs annuels, en donnant notamment des informations sur les méthodes de valorisation utilisées ainsi que des précisions sur la gestion du capital :



Source: ACPR

En plus de ces deux documents, l'assureur devra fournir des reporting quantitatifs appelés QRT (Quantitative Reporting Template). Définis par l'EIOPA, ces tableaux rassemblent jusqu'à 5000 données couvrant les principaux domaines de l'activité de l'assureur : gestion d'actifs, provisions techniques, fonds propres, bilan, réassurance… Ces données seront fournies avec une périodicité allant de 3 mois à un an.

B. Réglementation des placements :

Solvabilité I prévoyait par le passé des règles assez simples concernant la couverture des engagements de l'assureur envers l'Etat (taxes), ses assurés et ses employés. La couverture se fait par l'intermédiaire des différentes classes d'actifs, en respectant des règles de concentration des risques, d'émetteurs…. Le ratio entre ces engagements réglementés et les actifs de couvertures est ensuite calculé.

Avec la nouvelle directive, la problématique a évolué. Il s'agit maintenant d'une approche probabiliste en prenant en compte les SCR de chaque classe d'actif tout en prenant en compte les interactions entres classe d'actifs. A ce titre on utilise la matrice ci-dessous :

Matrice de corrélation du SCR Market

CrrMkt	Interest	Equity	Property	Spread	Currency	Concentration
Interest	100%	0%	0%	0%	25%	0%
Equity	0%	100%	75%	75%	25%	0%
Property	0%	75%	100%	50%	25%	0%
Spread	0%	75%	50%	100%	25%	0%
Currency	25%	25%	25%	25%	100%	0%
Concentration	0%	0%	0%	0%	0%	100%
Illiquitdity	0%	0%	0%	-50%	0%	0%

En rouge, dans le cas où le risque de taux est à la hausse 0 sinon 0.5

Dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons principalement à la classe d'actifs « Equities » (actions). Le modèle standard prévoit de calculer le SCR actions par l'intermédiaire d'un choc à 39% pour les actions des pays de l'OCDE. La taille de ce choc sera portée à 49% pour les autres actions (des pays émergeants). Le choix de cette amplitude est totalement en ligne avec l'idée génératrice de la VAR à 99.5%. En effet, il est d'usage de modéliser la distribution probabiliste d'une action par une loi log-normale. La variation relative du cours d'une action suit une loi normale :

$$S(1) = S(0)\exp(\sigma * X - 0.5\sigma^2)\text{avec} X \sim N(0;1)$$

La loi normale est une loi de probabilité dont plusieurs définitions équivalentes existent : par la densité de probabilité la fonction de répartition, la fonction caractéristique, etc. La loi normale dépend de deux paramètres : la moyenne et l'écart type. La loi normale est symétrique, aussi afin de déterminer la VAR à 99.5% nous allons calculer l'intervalle de confiance à 99%. Pour une loi normale de moyenne μ et de volatilité (écart type) σ :

$$\mathbb{P}_r = \mathbb{P}[\mu - r\sigma \leq Y \leq \mu + r\sigma] = 2\Phi(r) - 1 \text{ pour } Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

r	**0,0**	**0,5**	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**	**3,5**
$\mathbb{P}_r$	0,00	0,3829	0,6827	0,8664	0,9545	0,9876	0,9973	0,9995

Ainsi en prenant comme l'intervalle de à 99%, avec une moyenne de 0 et un écart type de 20%, la valeur basse de l'intervalle de confiance de S(1) :

S(0) exp(-2.54*σ- σ^2/2) = S(0) exp (-2.54*20%-20%^2/2) = 61.3% S(0) ≈ (100-39%) S(0)

On retrouve ici l'origine du choc à 39% imposé aux actions des pays développés. Nous avons vu qu'une des hypothèses déterminantes à l'obtention de ce résultat a été l'utilisation d'un écart-type à 20%. Ce choix est en ligne avec la volatilité annualisée des marchés actions des pays développés. Dans la mesure où l'écart type, aussi appelé volatilité dans un cadre financier, est déterminant dans l'évaluation du risque, il est naturel qu'il fasse l'objet de toutes les attentions de la part des investisseurs…et assureurs. Il est donc bien naturel que les modèles internes donnent une large place à ce paramètre et que sa minimisation devienne un enjeu crucial.

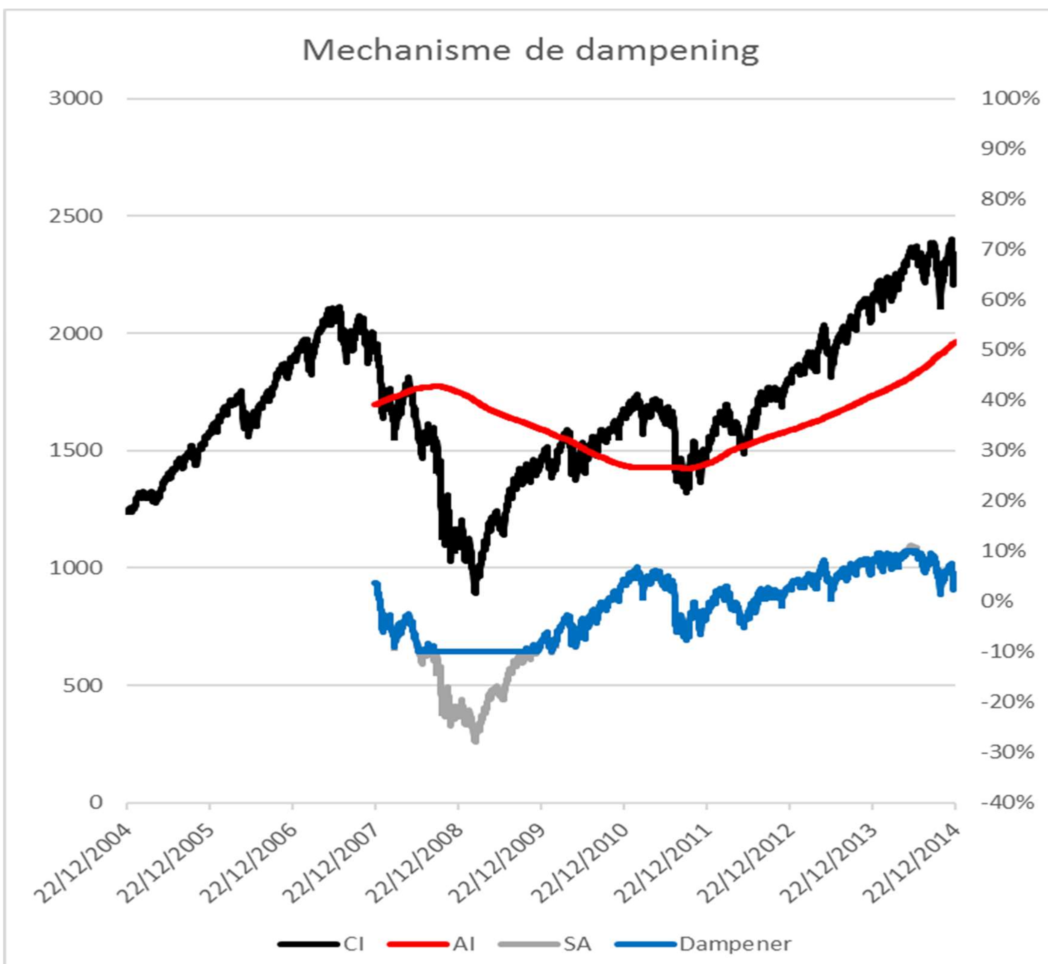
Il va de soi que le choix d'une représentation de la fluctuation des actifs financiers sous la forme d'une diffusion log-normale est extrêmement simplificatrice. Nous aurons l'occasion d'y revenir car cette modélisation est très insuffisante, notamment lorsqu'on cherche à étudier les phénomènes extrêmes (on parle de tail distribution). Ces derniers sont insuffisamment représentés dans ce modèle. De même le choix du seuil de 99.5% est assez arbitraire. Il s'agit ici de fixer une limite à un événement d'occurrence rare. L'utilisation d'une modélisation, reconnue comme très imparfaite et imprécise pour les événements rares est assez surprenante pour calculer une probabilité de perte « exceptionnelle ». Cette métrique a le mérite d'exister et d'être facilement compréhensible, même si le seuil est arbitraire et le modèle simplifié.

On notera que la classe d'actif « Action » bénéficie d'un autre retraitement correctif : le « dampener ». L'objectif est d'encourager un comportement anticyclique sur les investissements en actions. Les marchés sont régulièrement victimes de comportements que l'on pourrait qualifier de « moutonniers ». Les investisseurs essayent de suivre la tendance. Si cette attitude agace moins dans les périodes haussière (en cas de « bulle » par exemple), les conséquences sont potentiellement beaucoup plus problématiques en cas de baisses, de chutes, voir…de krachs. L'idée du dampener est d'atténuer le choc exercé sur les actions en cas de marché baissier et de l'augmenter en cas de marché haussier. Le « dampener » diminue le coût en risque des actions lorsque que la variation de ces dernières est défavorable pour l'investisseur et, au contraire, en augmente le coût lorsque que l'investissement est fructueux. Si on comprend le besoin p1olitique de soutenir des institutionnels dans leur positionnement sur le marché des actions pour la stabilité du marché, on remarque aussi une certaine « croyance » en un retour à la moyenne du marché à plus ou moins long terme. Cette estimation relative du marché se fait par écart à la moyenne mobile. Le calcul du SCR de l'investissement en action se fera dorénavant sur la base du choc précédemment prévu (39% pour des actions de pays de l'OCDE) auquel on ajoutera le dampener. Le calcul du dampener se fait en deux étapes : l'ajustement symétrique, puis en capant/floorant le résultat précèdant.

SA=($\frac{\text{CI}-\text{A}}{\text{AI}} - 8\%$)×0.5 avec CI =niveau actuel de l'indice et AI = moyenne journalière sur trois ans de l'indice.

Dampener=MAX[MIN[SA ; 10%] ; -10%]

Concrètement dans le cas du S&P Europe 350 on obtient :



Comme attendu, la moyenne mobile a un profil plus lisse que l'indice lui-même. On observe bien le mécanisme d'atténuation : ce dernier est négatif pendant la crise de 2008 des subprimes, puis devient positif au fur et à mesure que le marché rebondit. On constate que l'encadrement de l'ajustement symétrique n'est pas sans conséquence. En 2008, alors que l'ajustement symétrique s'approche de -30%, le dampener attenue le choc action de seulement 10%.

Enfin, il est à noter que Solvabilité II prévoie un régime prudentiel particulier pour les « participations stratégiques ». Ces dernières ne seront soumises qu'à un choc de 22%. Une des difficultés attenantes à ce cas est la définition de son cadre. Qu'est-ce que le régulateur entend par « participations stratégiques » ? Un certain nombre d'acteurs du monde de l'assurance ont insisté sur le danger de laisser trop de liberté dans l'appréciation stratégique d'une participation. Pour l'EIOPA, afin de démontrer que la nature du placement est stratégique, les entreprises participantes devront :

- Indiquer la période durant laquelle il est prévu d'appliquer la stratégie de détention de la participation
- Tenir compte de l'impact des conditions de marché sur les principales politiques
- Identifier tout facteur important affectant la capacité de l'entreprise participante à maintenir sa stratégie ou imposant des contraintes sur cette capacité ainsi que la façon dont il pourrait y être remédié

Comme déjà mentionné, l'EIOPA est aussi bien en charge des assureurs (le I de Insurance) que des fonds de pensions (OP de Occupation Pension). Dans la mesure où la retraite peut sur certains segments se comparer à de l'assurance Vie, ce segment rencontre des problématiques de placement similaires avec la nécessité de générer des revenus pour honorer des obligations futures.

4) Les systèmes de retraite et les fonds de pensions :

A. Les systèmes de retraite en Europe :

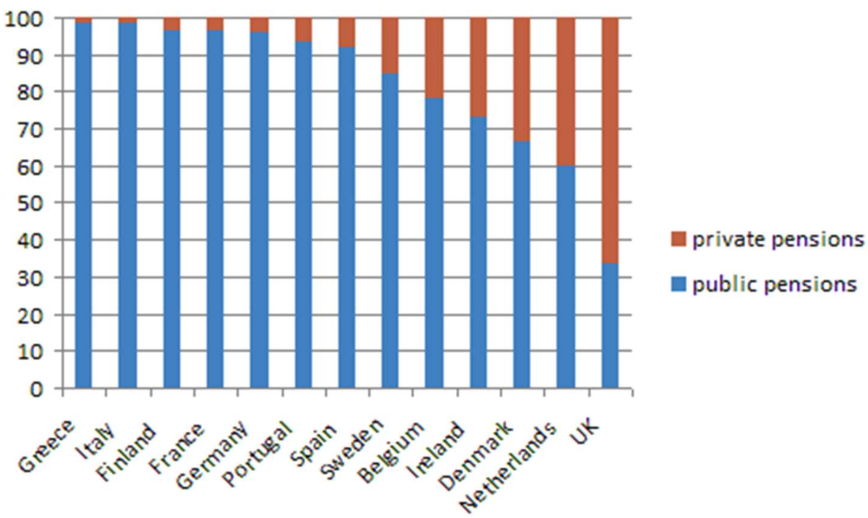
Il est d'usage de décomposer l'ensemble de chaque système de retraites en 3 piliers :

-Le pilier 1 est le régime obligatoire centralisé. Ce régime est centralisé par l'état et repose très souvent sur un système de redistribution intergénérationnelle (dite PAYG : Pay as You Go). Les travailleurs actuels payent des cotisations au système de retraite national, ces cotisations sont redistribuées aux retraités. La fixation des pensions et cotisations est l'affaire de l'état et des gouvernements, elles peuvent être modifiés par la voie législative. Dans ce type de régime, il n'y pas ou peu de place faites aux réserves, la redistribution étant immédiate.

-Le pilier 2 est composé de régimes privés obligatoires. Dans cette catégorie il s'agit d'une épargne mise en place par l'employeur à destination de ses employés. Les règles de contributions relatives entre l'employeur et l'employé varient d'un pays à l'autre et même parfois d'une entreprise à une autre. Ce type de structure est très répandu dans les pays anglo-saxons, il s'agit des fonds de pension. En fonction de la taille de l'entreprise, de l'employeur, le fonds de pension peut être individuel (au sens de l'entreprise, une entreprise met en place son propre fonds de pension à destination de ses employés) ou collectif (plusieurs entreprises contribuent au même fonds). Dans les deux cas, ce qui différencie le fonds de pensions du pilier 2 des régimes de retraite du pilier 1 est que le fonds de pension est une structure privée.

-Le pilier 3 est composé des autres mécanismes qui permettent aux épargnants de préparer leurs retraites sur la base du volontariat dans des structures privées. Parmi ces structures, on peut trouver des assurances.

La répartition entre les différents piliers varie d'un pays à un autre. Cependant, en Europe, le pilier 1 reste l'élément majoritaire du système de retraite en termes de contribution, le seul pays à déroger est le Royaume Uni. Les deux pays où les parts des piliers 2 et 3 (organismes privés) sont importantes sont les Pays-Bas et le Royaume-Uni où elles atteignent de l'ordre de 40 et 65% de l'effort d'épargne pour la retraite.



Source: Boeri et al (2006) and CEA(2007)

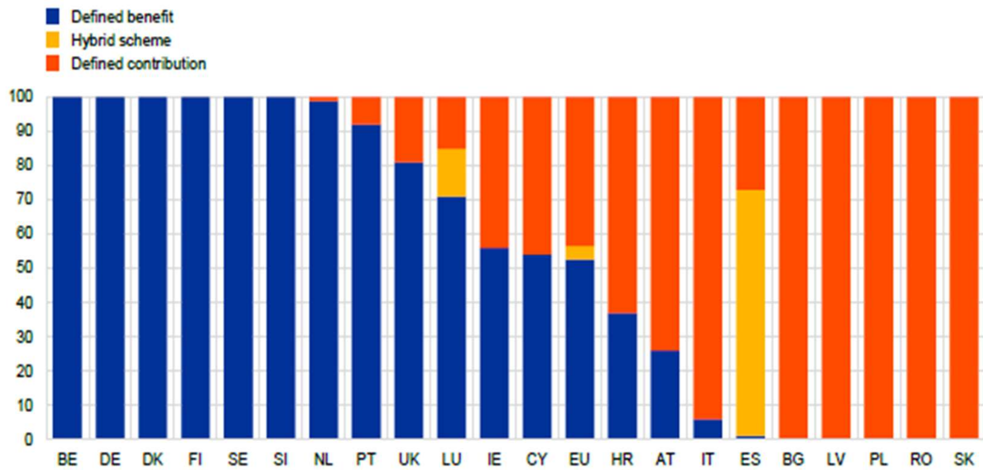
B. <u>La solvabilité des systèmes de retraite :</u>

L'enjeu évident d'un système de retraite est d'être en capacité d'honorer les futures pensions. Dans les régimes du pilier 1, l'enjeu de solvabilité est moindre car le "pay as you go" est basé sur la redistribution immédiate et l'état garantit implicitement ou explicitement le paiement des pensions. Au pire, le gouvernement peut recourir à l'arbitrage législatif et changer le montant des pensions. La situation des piliers 2 et 3 est très différente car il s'agit de systèmes privés liés contractuellement aux contributeurs.

A l'intérieur des piliers 2 et 3, on différencie les régimes à contributions définies des régimes à prestations définies. Les régimes à prestations définies prévoient le montant de la pension qui sera versée ultérieurement. Cette pension est contractuelle et le fonds de pension doit être prêt à l'honorer. Il s'agit d'un engagement dans le temps avec une obligation de résultats. Dans le cas des régimes à contributions définis, ce sont les cotisations versées par le travailleur (ou son employeur) qui sont contractuellement définies, les prestations au moment de la retraite dépendront de la performance des investissements réalisée entre les deux moments. La contrainte, au sens actuariel, est moindre. Il existe bien-sûre une grande diversité de régimes "hybrides".

Classification of Pillar 2 pension schemes across countries

(percentages)



Source: European Insurance and Occupational Pensions Authority (2015).

Les entreprises impliquées dans ces deux piliers sont des entreprises privées. En général, il s'agit de fonds de pensions ou d'assurances. Les assurances vont voir leurs engagements et leurs placements contraints par solvabilité 2 dès 2016. Initialement, l'EIOPA envisageait de déployait le même cadre de régulation de solvabilité pour les fonds de pensions. Cependant, les fonds de pensions déploient d'importants efforts de lobbying pour éviter les contraintes de solvabilité du pilier quantitatif. Il n'est pas étonnant de retrouver le Royaume-Uni très active dans le camp en faveur de l'allègement des contraintes. A l'inverse, les Pays-Bas, là où le système de retraite repose largement sur les piliers privés et sur des prestations définies, a pris le parti de s'impliquer localement dans la solvabilité des fonds de pensions et a mis en place un cadre national en 2015. La contrainte fixée par le "Financial Assessment Framework" néerlandais prévoit que le ratio de solvabilité doit rester au-dessus de 100% avec une probabilité de 97.5%. Ce seuil de 97.5% est légèrement plus accommodant que celui prévu dans Solvabilité 2 (99.5%). Concrètement dans le cas des actions, cela réduit le choc simulé de 39% à 34%.

Maintenant que nous avons défini l'environnement réglementaire et les contraintes de solvabilité qui accompagnent les investissements ou placements en actions, nous allons nous intéresser à la construction de portefeuilles d'actions et d'indices. Si certains acteurs de l'assurance et des fonds de pensions délèguent une partie de la gestion à des asset managers, d'autres préfèrent internaliser intégralement le processus de gestion et la construction de portefeuilles. C'est par exemple le cas de plusieurs fonds de pensions néerlandais.

II. Théorie du portefeuille et volatilité

L'approche même de chaque action peux varier d'un investisseur à un autre. Elle peut être considérée comme un sous-jacent abstrait avec quelques éléments descriptifs (rendements historiques, volatilité, capitalisation...) ou être l'objet d'une véritable réflexion sur sa valorisation, son bilan, son résultat... Nous allons voir des éléments correspondant à différentes approches et à la théorie du portefeuille. Il s'agit souvent de faire un arbitrage entre rendement et risque. Cependant nous introduirons l'existence d'une anomalie qui peux être une opportunité pour les investisseurs, fonds de pensions ou assureurs.

1) Actions et valorisation :

Une action est un titre de propriété délivré par une société de capitaux (par exemple une société anonyme ou une société en commandite par actions). Elle confère à son détenteur la propriété d'une partie du capital, avec les droits qui y sont associés : intervenir dans la gestion de l'entreprise et en retirer un revenu appelé dividende. L'action est un élément de base de la composition capitalistique d'une entreprise. En effet une entreprise a principalement deux alternatives pour composer son capital : l'émission d'actions ou l'émission d'obligations. Une obligation est une créance sur son émetteur, elle est donc représentative d'une dette financière à moyen, long terme, parfois même à perpétuité. Cette dette est émise dans une devise donnée, pour une durée définie et elle donne droit au paiement d'un intérêt fixe ou variable. En cas de liquidation, les créanciers qui sont prêteurs de deniers ont un droit de priorité sur les actionnaires qui se répartissent un boni de liquidation après désintéressement de l'ensemble des créanciers. Un investisseur souscrivant à une émission d'obligations va donc recevoir des coupons variables (souvent indexés à une référence de taux) ou fixes, recevra le remboursement du principal en cas d'absence de faillite et sera remboursé de façon prioritaire en cas de faillite ou liquidation. A l'inverse, en souscrivant à une émission d'action, l'investisseur ne sera pas prioritaire en cas de difficultés. Par contre l'investisseur en actions pourra profiter de « bons » résultats sous formes de dividendes et sera sensible à la variation de valorisation de l'action. Mais quels sont les éléments de valorisations d'une action ?

A. Approches « économiques » :

a) L'évaluation par l'actif net corrigé pour valoriser une entreprise selon l'approche patrimoniale

Cette méthode consiste à évaluer la valeur patrimoniale d'une entreprise. Sur la base du bilan comptable le plus récent de l'entreprise, il convient de reprendre tous les postes de l'Actif et du Passif, de les analyser et d'apporter les corrections nécessaires afin d'avoir une image la plus fiable possible de la réalité économique du bilan. La différence entre l'Actif corrigé et le Passif corrigé correspondra à l'Actif Net Corrigé.

L'actif est composé de nombreux éléments : immobilisations corporelles, des stocks, des créances, de la trésorerie, des placements…Certains éléments comme la trésorerie sont facilement évaluables. D'autres sont plus difficiles à évaluer. On peut essayer d'utiliser le « marché ». Par exemple pour les placements et les immobilisations corporelles, le marché est supposé refléter la valeur de cession. D'autre constituants de l'actifs sont encore plus difficiles à évaluer. Par exemple la valorisation des stocks est toujours un peu ardue. L'estimation est souvent elle-même dépendante des méthodes logistiques utilisées par l'entreprise….

Exceptionnellement, certains points forts d'une entreprise pourraient être valorisés, comme la disposition d'un réseau propre de distribution, l'acquisition d'un véritable know-how interne (de brevets), etc…

En ce qui concerne le passif, seront retenus pour le calcul des dettes : les provisions, les dettes financières, les dettes d'exploitation et hors exploitation.

Au final, l'approche patrimoniale, consiste à valoriser une entreprise par la différence entre l'actif et le passif comptabilisé préalablement. Cette vision, si elle prend en compte une valorisation statique des biens, a tendance à donner une vision très figée de la valeur d'une entreprise et ne met pas en avant la capacité de l'entreprise à générer du résultat et des bénéfices.

b) L'évaluation par un multiple de résultat pour valoriser une entreprise en fonction de sa rentabilité

On considère qu'une entreprise vaut par sa capacité à générer de l'argent, sur la base d'un multiple de ses résultats (résultat net, résultat d'exploitation, marge brute d'autofinancement ou autre). Le choix du résultat ou indicateur choisi peux varier afin d'éviter certains écueils. On peut partir du bénéfice net, approche qui a le mérite de la simplicité mais qui peut être faussée par le jeu des charges et profits exceptionnels. D'autres préfèrent se focaliser sur le résultat brut d'exploitation ou sur le résultat courant (résultat d'exploitation + résultat financier). Une vision plus anglo-saxonne nous orienterait davantage vers l'EBIT (« earning before interest and tax », c'est-à-dire résultat net avant frais financiers, éléments exceptionnels et impôt sur les sociétés) ou l'EBITDA (« earning before interest, tax, depreciation and amortization », le même que le précédent auquel on rajoute les amortissements).On peut se référer, suivant les cas, aux performances du dernier exercice, aux prévisions de l'année en cours ou encore à la moyenne des résultats de plusieurs exercices.

Dans la mesure où un investisseur ne bénéficiera pas seulement du résultat d'une seule année, sans rentrer dans de longues projections, il est normal de multiplier le résultat par un coefficient multiplicateur. Le coefficient multiplicateur dépend en premier lieu du secteur d'activité : plus ce dernier est considéré comme risqué, plus le multiple est faible. Et surtout, une société est d'autant mieux valorisée qu'elle possède un fort potentiel de croissance. Quand cela est possible on comparera le coefficient choisi à celui d'autres entreprises comparables.

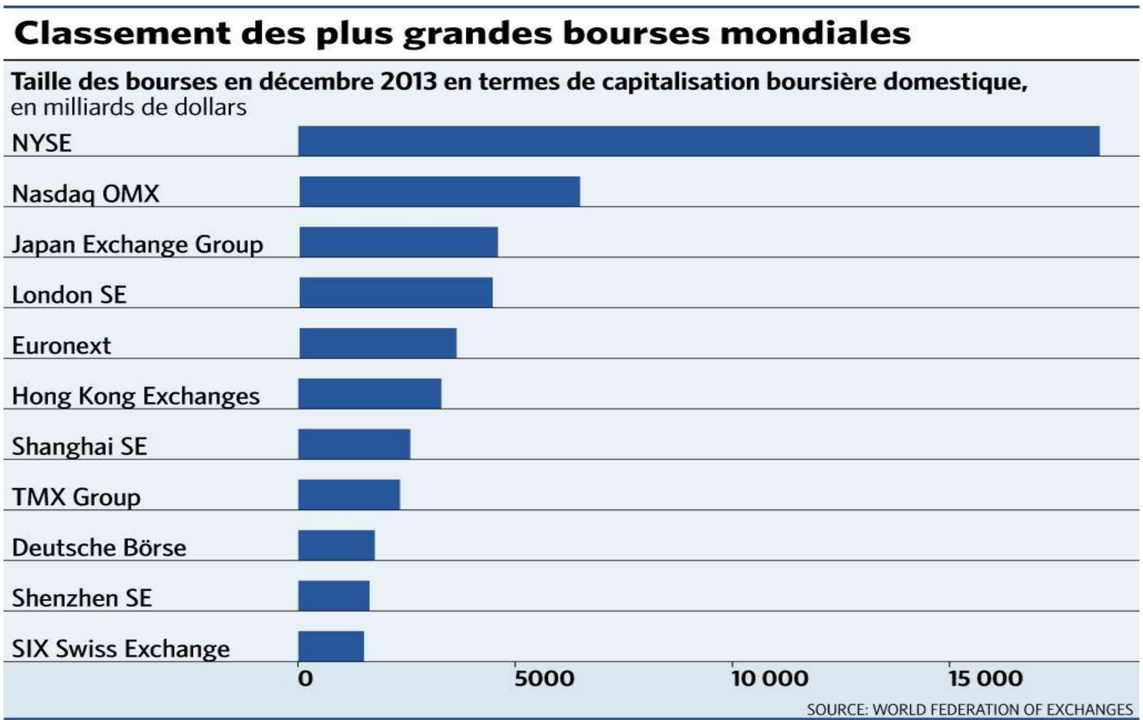
c) L'évaluation par les flux de trésorerie prévisionnels pour valoriser une entreprise selon ses perspectives d'avenir

Dans cette approche, on considère que la valeur de l'entreprise est égale à la somme des flux de trésorerie (cash-flows) prévisionnels susceptibles d'être dégagés dans le futur. Les cashflows peuvent ici designer le résultat ou les dividendes. Après avoir défini quels cash-flows seront pris en compte, il s'agit de les projeter dans le temps, en faisant un scénario d'évolution dans le temps. Un certain nombre d'hypothèses sont donc nécessaires à ce stade : quel horizon considérer (5 ans, 10 ans …perpétuité), quelle évolution…etc. Et ce n'est pas tout : une fois calculés les cash-flows résultant de ces projections, il reste à les actualiser. Ici aussi il faudra faire un choix sur le taux à utiliser. Par défaut on prendra souvent le taux, ou plus souvent les taux (ou courbe de taux) correspondant aux obligations d'Etat émises dans la monnaie locale.

La valorisation par les flux de trésorerie a été, pendant un temps, favorable aux entreprises affichant des pertes mais supposées dotées d'un très fort potentiel de développement. C'est elle qui a permis aux start-ups de drainer d'énormes montants de capital-risque.

B. Le « marché », la bourse :

Une bourse, au sens économique et financier, est une institution, privée ou publique, qui permet de découvrir et d'afficher le prix d'actifs standardisés et d'en faciliter les échanges dans des conditions de sécurité satisfaisante pour l'acheteur et le vendeur. Le fonctionnement de la bourse est guidé par un mécanisme d'offre et de demande. Le carnet d'ordre représente l'accumulation des ordres d'achats et de ventes à des niveaux définis par les participants. Les actifs cotés en bourse peuvent être de différentes natures : actions, matières premières, taux d'intérêt, devises….



La bourse, de nos jours, peux être un lieu physique et/ou une plateforme électronique immatérielle. La plus grande bourse est la bourse américaine de New York, elle est située à Wall Street. Elle fait partie des bourses à avoir encore une activité physique en parallèle de son système électronique. En Europe, la tendance est clairement vers la suppression des échanges physiques en faveur de l'électronique. On ne voit plus beaucoup de « corbeilles » (pits en anglais) en Europe. A Paris, la bourse anciennement située au palais Brongniart, est maintenant dématérialisée et a fusionné avec les bourses belge, néerlandaise et portugaise. L'organisation d'une bourse inclut toujours une infrastructure gérant le traitement, l'exécution, l'enregistrement et l'allocation des transactions. Le choix du lieu de cotation peut dépendre de nombreux facteurs : pays d'origine, contraintes règlementaires (toutes les places n'imposent pas les mêmes contraintes réglementaires, comptables...). Il n'est pas rare de voir les plus grosses entreprises cotées sur plusieurs marchés.

Le rôle de la bourse est devenu de plus en plus important aujourd'hui du fait des volumes échangés colossaux, mais aussi de l'obligation de plus en plus présente dans les régulations et normes de comptabilité de valoriser les actifs à la valeur de marché (marked to market).

2) Théorie de la gestion de portefeuille

A. Notations :

Il s'agit ici de présenter les principales théories de gestion de portefeuilles afin de les utiliser dans nos réflexions liées à Solvabilité II. Commençons par un certain nombre de notations et hypothèses.

- Nous allons considérer un univers de N sous-jacents (ou N actions).
- Les actions sont supposées se comporter avec une distribution normale (au sens statistique).
- Les rendements relatifs de ses actifs seront notés r_1, $\ldots r_i \ldots$, r_N ($1 \leq i \leq N$). Nous noterons rf le rendement dit « sans risque » (risk free rate) (souvent un instrument de taux)
  $\boldsymbol{r}=(r_1,\ldots,r_N)^T$ est le $N\times 1$ vecteur colonne des rendement marginaux.
  $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_N)^T=E(\boldsymbol{r})$ est un $N\times 1$ vecteur tel que $E(r_i)=\mu_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq N$
- $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\ldots,\sigma_N)$) est un $N\times 1$ vecteur tel que $\mathrm{Var}(r_i)=\sigma_i 2$ pour tout i, $1 \leq i \leq N$
  Il s'agit du vecteur volatilité des N sous-jacents.
- $\boldsymbol{S}=(s_1,\ldots,s_N)T$ est un $N\times 1$ vecteur des ratios de Sharpe tel que $s_i=\mu_i/\ \sigma_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq N$
  Nous reviendrons plus tard sur ce point, mais le ratio de Sharpe est une mesure de performance. On compare l'espérance de rendement à la volatilité. L'idéal est d'avoir la plus grosse espérance de rendement avec une volatilité (et donc un risque) minimale. On cherche donc le plus gros ratio de Sharpe.
- $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\sigma_i)$ est une $N\times N$ matrice diagonale tel que $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{S}$
- $\boldsymbol{C}=(\rho_{ij})_{N\times N}=\mathrm{Corr}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})$ est matrice de corrélation de taille $N\times N$
  $\rho_{ii}=1$ pour tout i, $1 \leq i \leq N$
- $\boldsymbol{\Sigma}=(\sigma_{ij})_{N\times N}=\mathrm{Cov}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})$ est la matrice de covariance de taille $N\times N$ telle que $\sigma_{ij}=\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$
- $\boldsymbol{w}=(w_1,\ldots,w_N)^T$ est le $N\times 1$ vecteur colonne des poids des actifs. Il s'agit ici de la définition de la composition d'un portefeuille choisi dans notre univers d'actions.
- $\mathbf{1}=(1,,\ldots,,1)^T$ est le $N\times 1$ vecteur colonne d'unité (il n'y a que des 1)
- $^2\mathbf{1}_j=(0,\ldots,1\ldots,0)^T$ est le $N\times 1$ vecteur colonne dont le j-ième élément est 1. Tous les autres éléments valent 0
- Avec les notations définies ci-dessus on aura un rendement de portefeuille :

$r_p=\sum_{i=1}^{N} \mathrm{wi\ ri}$

Cette formule représente simplement que la performance de notre portefeuille correspond aux performances des actions de notre univers pondéré par les poids **w** du portefeuille.

L'espérance de rendement et la variance du portefeuille sont données par :

$\mu_p=E(r_p)=\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i = \boldsymbol{w}T\boldsymbol{\mu}$

$\sigma_p{}^2=\mathrm{Var}(rp)=\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j\ \sigma_{ij} = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$

- $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_N)^T=\boldsymbol{\Sigma w}/\sigma_p^2$ est un vecteur de taille N*1, βi est le beta du i-ième sous-jacent par rapport au portefeuille.
- Les poids $\boldsymbol{w}$ peuvent être contrainst $\sum_{i=1}^{N} w_{\ i} = \sum_{i=1}^{N} w^T \ 1_i = 1 = \boldsymbol{w}^T\mathbf{1}=1$
  La somme des poids égale à 1.
  A l'inverse, on peut faire le choix de ne pas le contraindre en incluant un sous-jacent sans risque pouvant être prêté ou emprunté librement

B. Optimisation moyenne/variance (MVO):

L'optimisation moyenne/variance (Mean Variance Optimization (MVO)) a été proposée par Markowitz (1952). Plus précisément, la méthode permet de résoudre le problème d'optimisation de portefeuille en maximisant une fonction d'utilité simple visant des rendements plus élevés et un risque plus faible. Concrètement, un MVO cherche à maximiser :

Espérance de rendement du portefeuille−(λ/2) × Variance attendue du portefeuille

$$\max_{\boldsymbol{w}}[E(\boldsymbol{R})-(\lambda/2)\mathrm{Var}(\boldsymbol{R})] = \max_{\boldsymbol{w}}[\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\mu}-(\lambda/)2\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma w}]$$

Un facteur d'aversion au risque (λ , valeur positive) est utilisé pour équilibrer le compromis risque-rendement. Plus le facteur d'aversion au risque λ est grand, plus l'investisseur pénalise la prise de « risque ». Lorsque λ est égal à 0, une MVO mettra 100 % en poids dans le meilleur actif en rendement sans prendre en compte la volatilité. A l'inverse, lorsque le facteur d'aversion pour le risque est très grand, l'optimisation ne prend plus en compte les rendements, il s'agit simplement de minimiser le risque du portefeuille-résultant dans un portefeuille avec la plus faible volatilité possible

En absence de contraintes, la résolution directe de la MVO (en prenant la dérivée au premier ordre par rapport à $\boldsymbol{w}$ et en résolvant les cas où la dérivée s'annule) mène au résultat :

$$\boldsymbol{w}=(\lambda\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

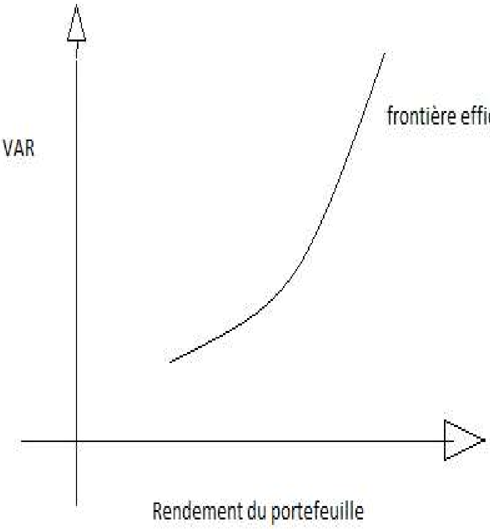
Le rendement et la variance de ce portefeuille sont :

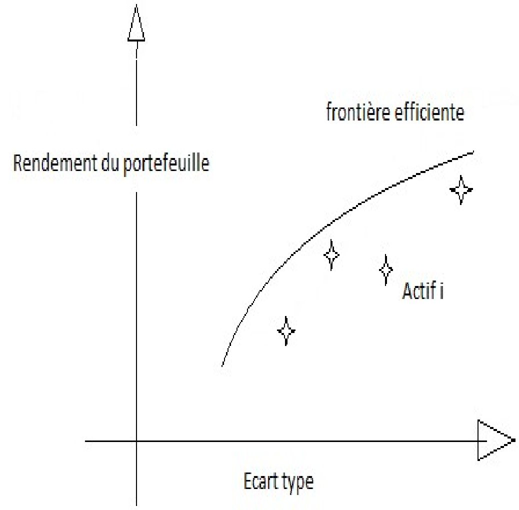
$$\mu_p=E(r_p)=\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\mu}=((\lambda\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\mu}$$
$$\sigma_p^{\ 2}=\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma w}=((\lambda\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}\ (\lambda\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\mu}=1/\lambda^2\ \boldsymbol{\mu}^T\ (\boldsymbol{\Sigma}^{-1})^T\ \boldsymbol{\mu}$$

En faisant varier l'aversion au risque λ on obtient la frontière d'efficience de la forme :

$$\lambda \rightarrow (\ \mu_p(\lambda), \sigma_p^{\ 2}(\lambda)) = (\ \mu_p(\lambda), \mu_p(\lambda)^2\ (\ \boldsymbol{\mu}^T\ (\boldsymbol{\Sigma}^{-1})^T\ \boldsymbol{\mu})^{-1})$$

On retrouve ici la forme quadratique caractéristique de la frontière d'efficience de Markowitz : une parabole. Tout investisseur rationnel choisira un portefeuille efficient sur cette frontière.





On peut remarquer une propriété de ces portefeuilles efficients. Pour un portefeuille efficient donné, le ratio de la contribution marginale au rendement par le ratio de contribution marginal à l'écart type est identique pour chaque sous-jacent.

$$\frac{\frac{\partial \mu_p}{\partial w_i}}{\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i}} = \frac{\frac{\partial \mu_p}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial w_i}}{\frac{\partial \sigma_p}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial w_i}}$$

Or on a pour tout portefeuille

$$\frac{\partial \mu_p}{\partial w} = \frac{\partial w^T \mu}{\partial w} = \mu$$

Et

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial w} = \frac{\partial \sqrt{w^T \Sigma w}}{\partial w} = \frac{1}{2\sigma_p}\frac{\partial w^T \Sigma w}{\partial w} = \frac{\Sigma w}{\sigma_p}$$

En remplaçant w et σ_p par leurs valeurs dans le cas d'un portefeuille efficient, on obtient :

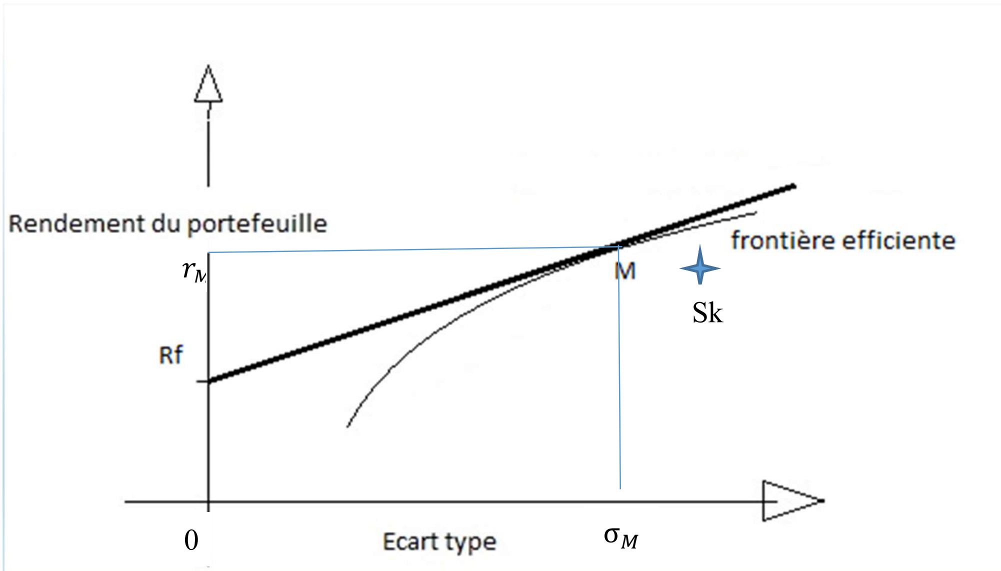
$$\frac{\frac{\partial \mu_p}{\partial w_i}}{\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i}} = \sqrt{\mu^T \Sigma \mu}$$

C. Capital Asset Pricing Model:

Le Capital Asset Pricing Model CAPM) est un modèle de valorisation des actifs développé dans les années 60 à la suite des premières conclusions liées à la frontière efficiente de Markowitz. Il s'agit ici d'estimer le taux de rentabilité attendu par le marché pour un actif financier en fonction de son risque systématique. Avant de développer le modèle nous allons revenir sur les hypothèses que nous avons déjà utilisées et que nous considèrerons valides dans ce qui suit :

- *Il n'y a pas de coûts de transaction (pas de commission ni de marge bid-ask)* : Cette hypothèse simplifie tous les calculs. En réalité chacun pourra comprendre qu'elle est erronée. Si sur des actions « liquides », l'investisseur peut espérer traiter « at market », là où les offres d'achat et de vente s'équilibrent, il est quasi impossible de traiter sans commission ou courtage. On peut néanmoins constater qu'avec la concurrence des places d'échanges, on se rapproche de plus en plus de cette situation…mais nous nous en approchons 50 ans après l'expression de cette hypothèse.
- *Un investisseur peut acheter ou vendre à découvert n'importe quelle action sans que cela ait une incidence sur le prix de l'action* : ici, il y a en réalité deux hypothèses. La première est la non incidence sur le prix. En réalité cela ne peut être valable que sur l'exécution de petits volumes et sûrement pas dans le cadre d'un phénomène global. La deuxième hypothèse est sur l'autorisation de vendre à découvert (vendre un titre sans en être propriétaire au préalable) sans coût. Cette condition est très rarement vérifiée dans la réalité la majorité des régulateurs imposent des contraintes sur la vente à découvert. Aussi il existe des marchés de pré-emprunt afin de permettre à des investisseurs de vendre à découvert des titres tout en honorant leurs obligations règlementaires. Bien sûr le pré-emprunt a un coût…
- *Il n'y a pas de taxes (notamment pour les plus-values et les dividendes)* : là aussi il s'agit d'une hypothèse qui se vérifiera rarement. Par exemple, la majorité des pays impose des impôts sur les plus-values. Les dividendes sont eux aussi souvent taxés, on parle souvent par exemple de la "withholding tax". S'il s'agit au départ de taxer des investisseurs dont on ne sait pas s'ils payent des impôts dans leur pays de résidence (par exemple les Holdings luxembourgeoises), c'est devenu en réalité une taxe sur les dividendes quasi systématique. Les dernières règles édictées depuis la crise de 2008, et le renforcement de la lutte contre l'évasion fiscale qui a suivi, ont renforcé cette tendance de taxation des investissements (plus-value ou dividendes).
- *Les investisseurs peuvent prêter ou emprunter de l'argent au taux sans risque* : La littérature et les modèles financiers font une très large place à un élément que nous introduisons ici : le taux sans risque. Une définition serait le rendement d'un actif sans risque, mais cet actif existe-t-il réellement ? Un candidat naturel serait, dans chaque zone monétaire, les obligations d'Etats, mais que faire dans une zone internationale telle la zone Euro. On y trouve 19 pays membres, autant d'émetteurs de dettes, mais peut-on parler d'actif sans risque ? Naturellement on peut se tourner vers les mécanismes liés aux banques centrales et à leur taux de refinancement. Il est d'usage de considérer qu'une banque centrale oriente et influence les conditions de financement du marché et de l'économie par l'intermédiaire de ses taux : taux de dépôt, taux de refinancement et taux marginal. Ce taux marginal guide largement les conditions de financement sur une nuit (overnight) entre les banques, on parle de l'EONIA (**E**uro **O**ver**N**ight **I**ndex **A**verage) en EURO. On trouvera des équivalents dans les autres monnaies.

Même si nous convenons que ces hypothèses sont très imparfaites nous les supposerons acquises. Le CAPM s'intéresse au lien entre rendement d'un portefeuille et le risque systémique. Le risque systémique est le risque lié au portefeuille dit de marché. Ce portefeuille est au niveau de l'intersection tangentielle entre la courbe d'efficience de Markowitz et la droite linéaire passant par le taux sans risque. On retrouve ici quelques caractéristiques naturelles : le portefeuille de marché est un portefeuille efficient au sens de Markowitz. La courbe passant par les points (r_f,0) et (μ_M, σ_M) représente les portefeuilles possibles entre un actif sans risque et le portefeuille de marché. Le point (r_f,0) est le portefeuille sans risque intégralement investi en actif non risqué. Les points entre (r_f,0) et (μ_M, σ_M) sont les portefeuilles partiellement alloués en portefeuille de marché. Au-delà (à droite) il s'agit des portefeuilles nécessitant l'emprunt d'actif sans risque. Cette droite est appelée droite de marché des capitaux. Le portefeuille de marché représente le portefeuille vers lequel tous les investisseurs sont supposés converger.



Considérons un portefeuille constitué d'un actif S_k et du portefeuille de marché, de poids respectif (1- ϖ) et ϖ. Les rendements et variance du portefeuille sont :

$$\mu_P = E(P) = \varpi\, \mu_M + (1-\varpi)\, \mu_k$$

$$\sigma_P^2 = Var(P) = \varpi^2\, \sigma_M^2 + (1-\varpi)^2\, \sigma_k^2 + 2\varpi\,(1-\varpi)\, \sigma_{Mk}$$

D'où

$$\frac{\partial \mu_P}{\partial \sigma_P} = \frac{(\mu_k-\mu_M)\left[\varpi 2\, \sigma_M^2+(1-\varpi)2\, \sigma_k^2+2\varpi\,(1-\varpi)\sigma_{Mk}^2\right]^{0.5}}{\left[\varpi\, \sigma_M^2+(1-\varpi)\, \sigma_k^2+(1-2\,\varpi)\sigma_{Mk}\right]}$$

En l'appliquant au portefeuille de marché M, avec un un poids ϖ égal à 1 :

$$\frac{\partial \mu_p}{\partial \sigma_P}_{\varpi=1} = \frac{(\mu_M-\mu_k)\,\sigma_M}{(\sigma_M^2-\sigma_{Mk})}$$

Or nous avons construit le portefeuille de marché avec la droite passante par le taux sans risque et tangente à la courbe d'efficience en M. Donc,

$$\frac{(\mu_M-\mu_k)\,\sigma_M}{(\sigma_M^2-\sigma_{Mk})} = \frac{(\mu_M-r_f)}{\sigma_M}$$

et finalement

$$\mu_k = r_f + \frac{\sigma_{Mk}}{\sigma_M^2}(\mu_M - r_f) = r_f + \beta_k(\mu_M - r_f)$$

βk est le beta de l'actif k par rapport au marché. Le modèle CAPM, par l'intermédiaire de l'équation ci-dessus, met en relation le lien entre le rendement d'un sous-jacent et son beta au marché. Plus le beta est élevé et plus l'espérance de rendement sera importante. On remarquera que le beta est croissant avec la volatilité de l'actif et avec la corrélation entre le marché et l'actif. À l'équilibre, les rendements espérés de tous les titres doivent se trouver sur la droite passant par le portefeuille de marché : la droite de marché des titres. Si le rendement attendu est supérieur à la valeur d'équilibre, on dit que le titre est sous-évalué. Au contraire, si le rendement attendu est au-dessous de la valeur d'équilibre le titre est surévalué. On calcule souvent la valeur alpha :

$\alpha = E(r_k) - E^*(r_k)$

où $E^*(r_k)$ est la valeur d'équilibre selon le modèle CAPM.

3) Le marché des investisseurs :

A. Indices Boursiers :

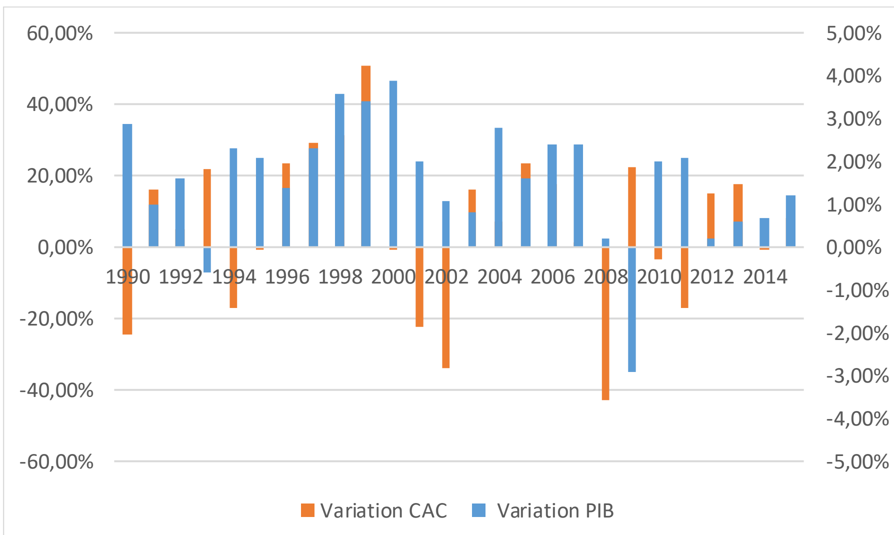
Nous avons introduit avec le modèle CAPM la notion de portefeuille de marché. Ce portefeuille de marché est souvent représenté, pour un univers donné, par un indice. Il en existe une infinité, ils correspondent souvent à la représentation des entreprises d'une zone géographique donné : Monde, Europe, Etats-Unis, Japon, France…Le poids de chaque action dans un indice est généralement défini relativement à sa capitalisation boursière. Plus la capitalisation d'une entreprise est importante, plus son poids dans un indice sera gros. En effet plus une entreprise est « grosse » plus elle a de chance d'être dans le portefeuille d'un investisseur. Cette logique correspond bien à ce que doit être le portefeuille de marché : le portefeuille moyen vers lequel converge les investisseurs. Pour rappel les principaux indices sont :

Dow Jones Euro Stoxx 50	50 plus fortes capitalisations boursières de la zone euro
DAX30	30 plus fortes capitalisations boursières en Allemagne
FTSE 100	100 plus fortes capitalisations boursières en Angleterre
Dow Jones	30 valeurs principales aux Etats-Unis sur le NYSE
S&P 500	500 valeurs représentatives aux Etats-Unis sur le NYSE
Nasdaq Composite	Toutes les valeurs aux Etats-Unis qui sont cotées sur le Nasdaq (bourse des New Techs)
Nikkei 225	225 valeurs représentatives au Japon

Bien sûr, parmi les nombreux autres indices, il y a l'indice « phare » de la bourse de Paris : le CAC40. Ce dernier est constitué de 40 entreprises sélectionnées parmi les entreprises dont le marché de référence est Euronext Paris, sur la base de leur capitalisation flottante et de leur volume quotidien. Ci-dessous les 5 plus grosses et les 5 plus petites capitalisations du CAC40 (au 15 septembre 2015) :

Valeur	Capitalisation en M€
TOTAL	103
L'OREAL	92,9
SANOFI	88,9
LVMH	74,9
BNP PARIBAS	56,9
PEUGEOT	10,7
SOLVAY	10,4
ACCORHOTELS	10
BOUYGUES	9,7
TECHNIP	6,2

Il est important de clarifier certaines interprétations simplistes de ces indices, dont le CAC. La première, souvent véhiculée par le « marketing », un indice national n'est pas une mesure de la performance économique d'un pays. Le CAC40 ne reflète pas la performance de la France, mais celle de ses plus grosses entreprises.



On constate facilement que le PIB et le CAC ne représentent pas la même chose. Le CAC40 a fluctué entre -40% et +50% en performance annuelle, alors que la croissance n'a fluctué qu'entre et -3% et 4% depuis 1990. Heureusement, il n'y a eu que deux récessions (variation négative du PIB) au cours de ces trente-cinq dernières années, alors qu'il y a eu sept années de performances négatives sur cette même période. Ce découplage est d'autant plus flagrant en 2009, lorsque le PIB a chuté de près de 3% alors que le marché rebondissait de 20%. De façon générale, une période de forte croissance en France est quand même souvent propice à une hausse du CAC, par exemple de 1995 jusqu'à l'éclatement de la bulle internet en 2001. A l'inverse, les bonnes performances du CAC40 depuis 2009, n'ont pas permis à la croissance française de décoller.

Par ailleurs, la sélection des entreprises du CAC40 par la capitalisation flottante n'est pas sans conséquence sur la représentativité de l'indice. Le rapport entre la plus grosse et la plus petite capitalisation du CAC40 est de l'ordre de 15 !!! De plus toutes les entreprises françaises de capitalisation inférieure à 6 milliards d'euros sont exclues de l'indice : nous parlons ici des petites et moyennes entreprises (y compris celle cotées en bourse). Le CAC40 ne représente donc pas l'ensemble des titres cotés sur la bourse de Paris. De plus, il ne faut pas confondre l'évolution à long terme du CAC 40 et celle à long terme de l'ensemble des valeurs cotées sur cette bourse : les valeurs en difficulté finissent par être remplacées dans la composition de l'indice par d'autres ayant pris l'avantage sur elles….

Sans entrer dans le détail de chaque indice, on peut dire qu'il existe pléthore d'indices, la majorité prenant en compte la capitalisation flottante. Parmi les différents fournisseurs d'indices on notera le rôle important de MSCI et de ses méthodologies.

B. Les mesures de performances :

Nous avons présenté le cadre global de la gestion de portefeuille. Nos économies modernes ont très largement recouru au capital et à l'épargne. Cette épargne est partiellement confiée à des professionnels de la gestion. Il est normal de chercher à évaluer la performance de chacun.

- Le ratio de Sharpe (Sharpe W. (1966), « Mutual Fund Performance », J. of Business):

Nous l'avons déjà abordé précédemment, la fonction d'utilité de n'importe quel agent est croissante avec le rendement et décroissante avec le risque. Aussi il n'est pas incohérent de regarde le ratio du résultat (return) par le risque (la volatilité) : $\frac{\mu_p}{\sigma_P}$.

- Ratio d'information (Sharpe (1994), « The Sharpe Ratio », J. Portfolio Mgt):

Il s'agit ici d'une évolution du Sharpe ratio. Nous avons introduit précédemment l'idée de portefeuille efficient et /ou benchmark. Le ratio d'information mesure le rendement et la volatilité du portefeuille face à son benchmark : $\frac{\mu_p - \mu_B}{\sigma\ (\mu_p - \mu_B)}$.

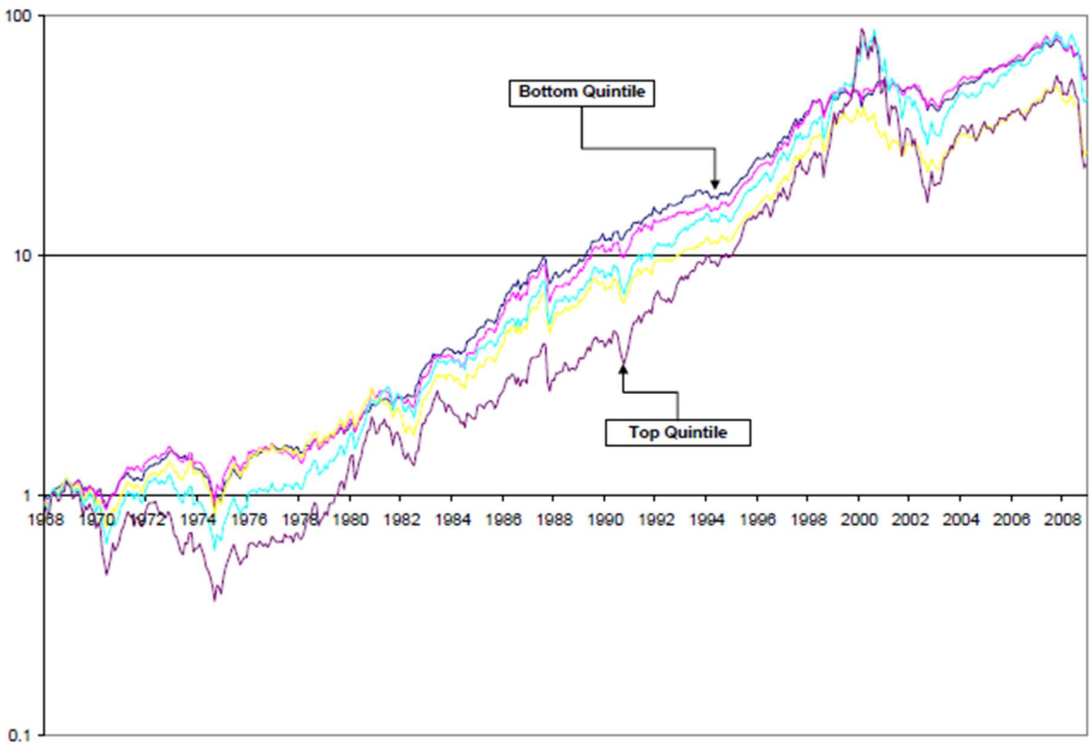
- Max drawdown :

Le ratio de Sharpe met en avant la volatilité et le rendement. Cette représentation est assez simpliste et parfaitement adaptée à une représentation probabiliste normale ou log-normale. Comme discuté précédemment, la distribution gaussienne est insuffisante pour visualiser les phénomènes extrêmes. Il s'agit ici plus d'une mesure de risque que d'une mesure de performance. Le « Max drawdown » est la perte maximum observée sur le portefeuille.

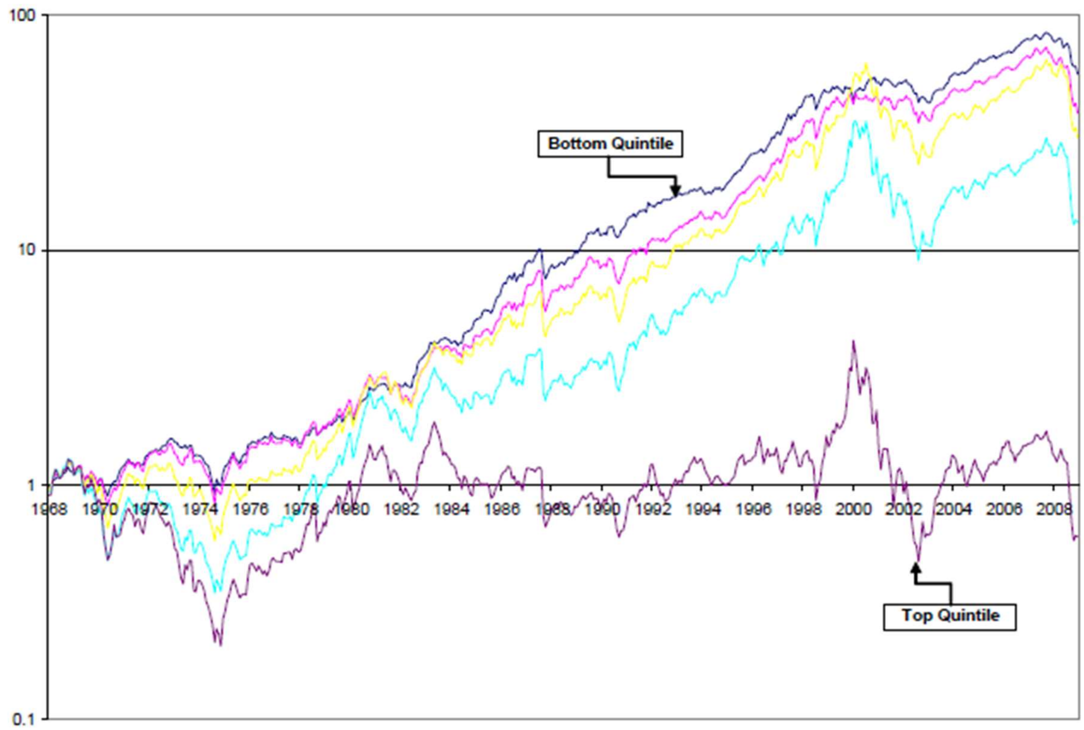
4) Optimisation de la volatilité :

A. Low Vol Anomaly :

Nous avons vu précédemment que le choix d'un portefeuille était largement basé sur un arbitrage entre la volatilité et le résultat espérés. Une allocation trop importante en actifs de risque moindre est supposée être moins performante. Or un grand nombre d'études académiques ont mis en évidence que cette hypothèse, pourtant essentielle aux théories précédemment présentées, n'est souvent pas vérifiée. Mieux, il apparait qu'historiquement, une volatilité moindre contribue à une meilleure performance. Nous allons nous appuyer sur les résultats publiés dans « Benchmarks as Limits to Arbitrage: Understanding the Low Volatility Anomaly » (Malcolm Baker, Harvard Business School and NBER). Il s'agit ici d'une étude sur les différentes actions disponibles sur le marché américain de 1968 à 2009. L'auteur distingue deux univers d'actions : les 1000 plus grosses capitalisations et l'ensemble des actions disponibles. Pour chaque univers, chaque trimestre, les actions sont triées par rapport à leur volatilité sur le trimestre précèdent. Une fois triées, les actions sont reparties en cinq quantiles : des actions les plus volatiles aux moins volatiles. Il s'agit ensuite de comparer les portefeuilles composés et recomposés par chaque quantile en partant de 1$ en 1968 et en supposant nuls les coûts de transaction. Le portefeuille « bottom quantile » est celui composé par les actions les moins volatiles. A l'inverse le portefeuille « top quantile » est composé des actions les plus volatiles. Sur les plus grosses capitalisations (ci-dessous), on observe que le « bottom quantile » est le portefeuille le plus performant. En réalité, on constate que les deux derniers quantiles sont les plus performants, le gain entre le dernier et l'avant dernier existe mais est minime. A l'inverse, on voit clairement que le « top quantile » sous-performe significativement.



Sur l'univers constitué par l'ensemble des actions disponibles :



Cette fois-ci la hiérarchie entre portefeuille est encore plus claire. La performance est décroissante avec la volatilité. Le portefeuille « bottom quantile » vaux 59.55$ en 2009 alors que le « top quantile » a perdu de la valeur en dollar. Nous pouvons ici faire deux remarques en comparant les deux univers. La performance du « bottom quantile » est légèrement supérieure sur l'ensemble des actions disponibles que sur les 1000 plus grosses capitalisations (59.55$ vs 54.12$). Ce gain peut être vu comme une illustration de l'intérêt d'investir dans toutes les actions et pas seulement sur les plus grosses compagnies. Il existe une quantité non négligeable d'études sur le sujet que nous ne développerons pas ici. La deuxième remarque concerne les « top quantiles ». Si dans le cas des grosses capitalisations, le « top quantile » affiche tout de même une performance raisonnable, sur l'univers le plus large, le « top quantile » a une performance globale négative. En fait, les petites compagnies, dont les actions ont une forte volatilité, représentent des investissements très spéculatifs dont une proportion non négligeable finit par disparaitre….

L'ensemble du phénomène qui voit les actifs les moins volatiles mieux performer est appelé : Low Vol Anomaly. Une interprétation économique de ce phénomène serait la non rémunération du risque sur certains investissements risqués. Parmi les investissements spéculatifs en actions il y a un certain nombre d'entreprises qui ne survivront pas.

Cette stratégie de gestion semble adaptée à la réduction des risques et du capital lié aux normes prudentielles et semble offrir une opportunité évitant de renoncer aux actions performantes.

B. Minimum Variance et Low Volatility

Depuis le début de l'étude nous avons choisi d'utiliser une fonction de la forme :

$$\text{Esperance de rendement du portefeuille} - (\lambda/2) \times \text{Variance attendue du portefeuille}$$

Dans cette représentation, un investisseur très averse au risque aura un λ très élevé. Dans ce cas l'optimisation de la fonction de l'utilité reviendra à minimiser uniquement la variance attendue du portefeuille. On passe alors du programme d'optimisation $\max_{\boldsymbol{w}}[\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\mu}-\lambda/2\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}]$ à $\max_{\boldsymbol{w}}[\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}]$**.** La résolution de cette optimisation aboutit, lorsque la somme des poids est égale à 1, à la pondération définie par :

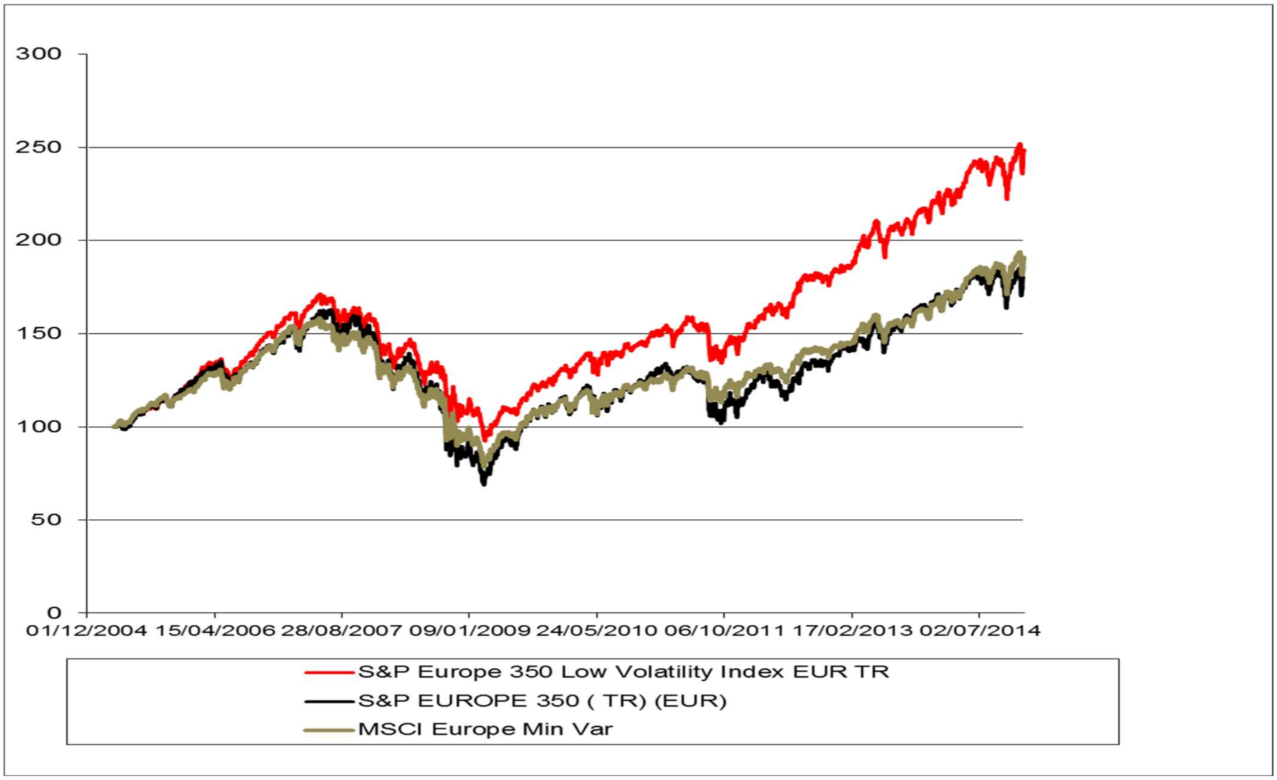
$$\boldsymbol{w}{*}=\frac{\Sigma^{-1}1}{1^T\Sigma^{-1}1}$$

Le choix du portefeuille correspondant à une variance minimum nécessitera l'inversion de matrice de variance/covariance. Quand l'univers considéré s'agrandit, l'optimisation peut devenir un problème et peut nécessiter certaines méthodes numériques sophistiquées.

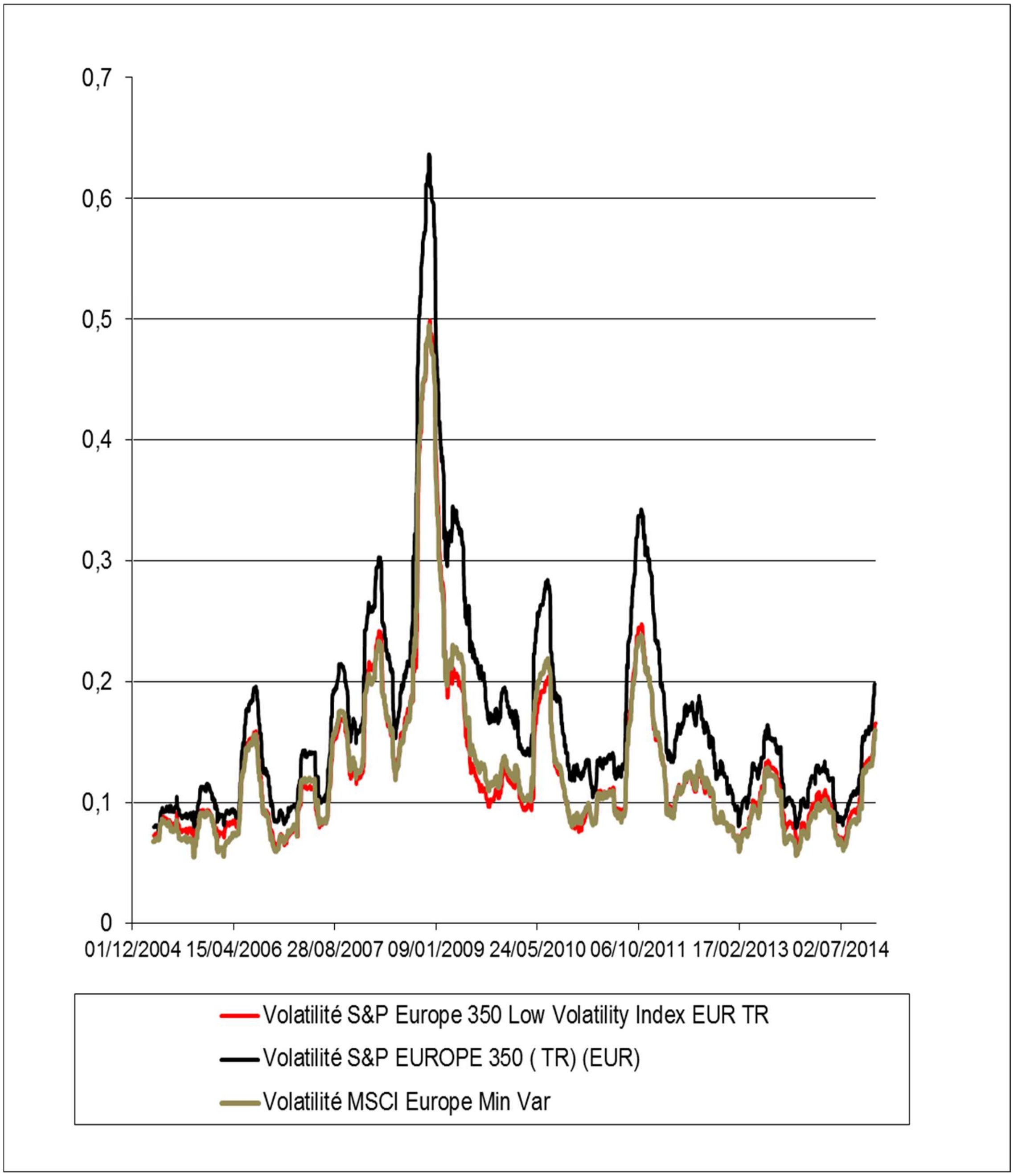
Un cas particulier simplifie les choses. Si l'on suppose l'ensemble des corrélations entre actions nulles la matrice de variance/covariance est une matrice diagonale. Et l'inversion de la matrice devient triviale :

$$\Sigma^{-1} = \begin{matrix} 1/\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_n \end{matrix}$$

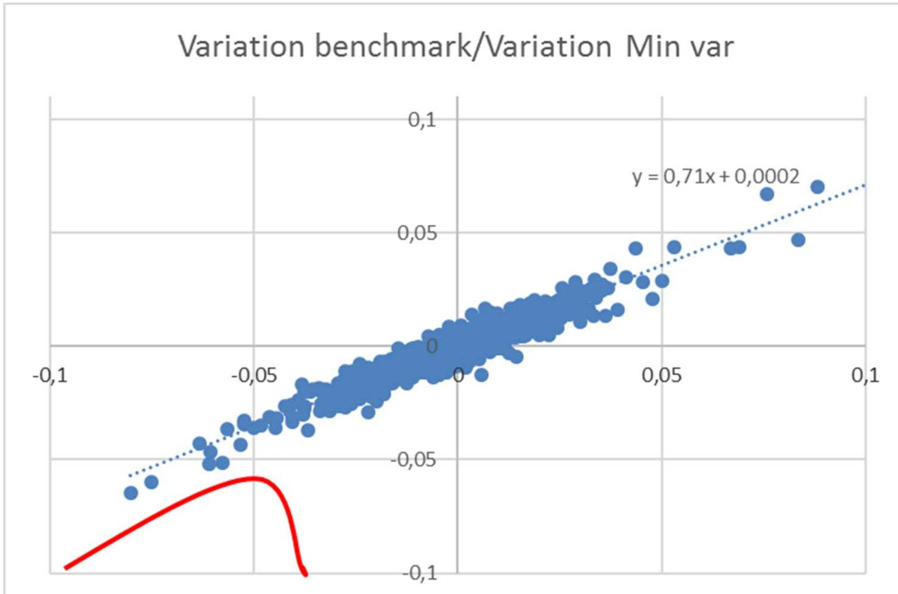
Le poids de chaque action dans le portefeuille est égal à : $\frac{1/\sigma_i}{\Sigma 1/\sigma_i}$. Le dénominateur étant constant, le poids de chaque sous-jacent est inversement proportionnel à la volatilité. Ce choix n'est pas forcément handicapant au vu de la Low Vol Anomaly. Afin de tirer le meilleur profit de cette anomalie, en plus d'utiliser une pondération inversement proportionnelle à la volatilité, nous allons introduire un portefeuille utilisant cette pondération et une sélection des actions les moins volatiles. Le portefeuille issu de l'optimisation en minimisant la variance sera appelé « min variance », alors que celui issue de l'optimisation avec l'hypothèse de corrélations nulles et la sélection des actions les moins volatiles, sera appelé « min volatilité ».



On constate que les deux stratégies « min volatilité » et « min variance » surperforment le benchmark. Par contre, on note un écart significatif entre les deux mécanismes. Observons les volatilités de chaque portefeuille (nous utiliserons des mesures de volatilité trimestrielle) :



Les deux portefeuilles ont bien une volatilité inferieure au portefeuille de marché. On remarque que malgré un mécanisme ne prenant pas en compte la corrélation et un nombre de composantes moins grand (dû à la sélection des actions), l'écart de volatilité entre les deux mécanismes n'est pas significatif. Le gain en termes de volatilité n'est pas constant en valeur absolue. Il s'agit plutôt d'un ratio : en moyenne les deux mécanismes ont un gain de 25% de la volatilité réalisée. Dans la mesure où les portefeuilles ont une corrélation proche de 1 avec le benchmark, cela revient à dire que ces stratégies ont un beta de l'ordre de 75% avec le marché. Cette mesure moyenne n'est pas forcement suffisante dans le cadre prudentiel. Avoir un portefeuille avec une volatilité réduite est une bonne chose encore faut-il que cela se vérifie dans toutes les conditions. Nous allons vérifier que c'est bien le cas à l'aide d'un graphique : pour chaque journée où les portefeuilles sont calculés, les points sont définis en abscisse par la performance du portefeuille de marché et en ordonnée par la performance du portefeuille « min var ».



Il n'y a aucun point situé en dessous de la courbe rouge. Cela signifie que les mécanismes de minimisation de la variance et de la volatilité fonctionnent, y compris en cas de forte correction de marché. Nous pouvons finalement regarder les différentes mesures de performance de nos portefeuilles :

	Return	Volatilité	Ratio de Sharp	Ratio information	Max drawdown
Portefeuille de marche	8,1%	19,5%	0,42		-57,7%
S&P Europe 350 Low Volatility Index EUR	10,4%	14,5%	0,71	0,33	-42,8%
MSCI Europe Min Var	7,8%	14,6%	0,53	0,01	-45,6%

Il apparait que le portefeuille « min volatilité » est le plus performant d'après toutes nos mesures.

.

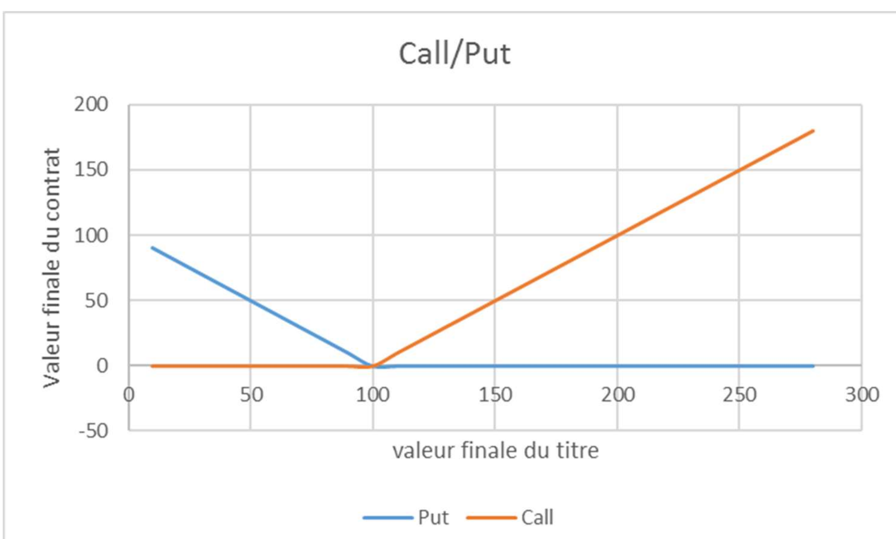
5) Produits dérivés et SCR :

A. Produits dérivés :

Nous avons abordé différentes façons de créer une allocation de portefeuille, que ce soit de façon standard avec un portefeuille de marché ou en utilisant la volatilité comme un critère de sélection et de pondération. La théorie utilisée jusque-là suppose un investissement standard en actions et/ou en cash d'un montant donné (éventuellement autofinancé) de façon statique. Nous allons maintenant nous intéresser à un autre domaine des mathématiques financières et de nos marchés financiers : les produits dérivés. Les produits dérivés peuvent être définis comme un contrat entre un acheteur et un vendeur dont la valorisation dépend d'un ou de plusieurs prix d'actif financier à une ou plusieurs dates de constatation. La valorisation de ces produits se fait par calcul de la valeur anticipée.

Le produit le plus simple est le « future » : il s'agit d'un contrat qui à terme (ce que nous appellerons maturité) a pour valeur le niveau de l'actif sous-jacent désigné. Prenons un exemple : le future sur CAC40. Le CAC40 est l'indice des plus grosses capitalisations françaises, il est coté sur le marché NYSE Euronext. Ce même marché propose donc des futures sur le CAC40. Les maturités disponibles sont des maturités mensuelles, pour être précis le troisième vendredi de chaque mois. Prenons donc le future de maturité décembre 2016, il expirera le vendredi 16 décembre 2016 à 16h. Notons que la répétition du chiffre 16 est fortuite, quel que soit la date, le future expirera à 16h. Lorsqu'il expire, le future CAC vaut la moyenne arithmétique des cotations de l'indice CAC40 entre 15h40 et 16h. La cote du future CAC40 sera, avant sa maturité, guidée par la valeur finale anticipée du contrat. Sans rentrer dans les détails, on peut comprendre que la valorisation du futur sera guidée entre autres par les variations de l'indice et du dividende. Si le CAC40 monte on peut considérer que toutes choses égales par ailleurs, la valeur anticipée monte aussi. Pour être précis le futur se valorise du même ordre de grandeur que l'indice de référence. Il en va de même à la baisse. On parle de « Delta 1 ». Concernant l'impact des dividendes, il s'agit simplement des tombés de dividendes des différentes actions représentées dans le CAC. Une action est supposée perdre la valeur du dividende à la date de son paiement : la trésorerie de l'entreprise se vide du montant du dividende payé aux actionnaires.

En réalité nous allons concentrer notre étude sur les produits ayant de la convexité, n'ayant pas un delta constant : on parle d'options. Un contrat option est un contrat donnant un droit sans obligation. Les options de base les plus utilisées sont les calls et les puts. Un call est un contrat qui donne le droit (mais pas l'obligation) d'acheter un titre à un niveau donné à une maturité donnée, il s'agit d'un contrat d'achat. Réciproquement, un put est un contrat qui donne le droit (mais pas l'obligation) de vendre un titre à un niveau donné à une maturité donnée, il s'agit d'un contrat de vente. Le niveau mentionné par le contrat est appelé « strike ». Observons le profil de chaque contrat à maturité (strike=100) :



Nous pouvons faire quelques commentaires sur les profils de ces contrats. La valeur finale d'un call augmente avec la valeur du titre. A l'inverse, la valeur du put décroit avec la valeur du titre. Dans la mesure où le titre ne peut pas avoir une valeur négative, le gain d'un put ne peux dépasser son strike.

L'usage du marché est de distinguer les options dites « américaines » de celles dites « européenne ». Une option « européenne » ne donne droit qu'à maturité du contrat, alors que l'option américaine peut être exercée à tout moment. A mi-chemin entre ces deux types, on trouve occasionnellement les options « bermudéennes » : le contrat ne peut être exercé qu'à quelques dates préalablement spécifiées par le contrat.

Les options ou contrats peuvent être échangés de façon OTC ou « listed ». « Listed » correspond à la transaction de produits standardisés et échangés sur un exchange. Il s'agit souvent des mêmes places de marchés que celles dont nous avons déjà parlé. Les produits/options disponibles pour transaction sont listés (listed) par l'exchange. Les contrats sont standardisés par la maturité, les strikes. En général, ce type de marché « listed » s'accompagne de tout un environnement : des market makers, une plateforme de clearing, des appels de marges. Les market makers sont des intervenant financiers qui ont l'obligation de fournir des prix sur les contrats proposés par le marché. La plateforme de clearing permet l'enregistrement et le suivi des positions prises par tous les intervenants admis sur le marché. Certaines plateformes permettent même de savoir quels contrats sont échangés et à quels prix. En plus d'une certaine transparence, les contrats listés présentent un autre avantage : chaque intervenant a pour contrepartie l'exchange lui-même. C'est à l'exchange d'honorer le terme du contrat y compris en cas de défaut d'un intervenant.

Afin d'y parvenir, le marché fera des appels de marges auprès des intervenants. Lorsqu'un intervenant voit sa position face au marché évoluer défavorablement, il doit progressivement apporter des contreparties correspondantes. « OTC » est un acronyme pour designer « Over The Counter » ou « grés à grés ». Il s'agit d'un contrat entre deux contreparties, les détails du dit contrat peuvent être modifiés afin de correspondre au besoin exact de l'un (au moins) des contractants. L'existence et le détail de ces contrats n'est souvent pas rendu public, que ce soit sur l'existence du contrat, sur les tailles engagées, les conditions, le prix…Ces contrats sont souvent vus comme un obstacle à la transparence des marchés financiers. Un autre problème intrinsèquement présent dans les transactions OTC est le risque de contrepartie. Que faire si l'un des contractants fait défaut et/ou n'est capable d'honorer les termes du contrat. Le choix de sa contrepartie n'est donc pas anodin lors d'une transaction OTC. Pour faire face à ce risque, les grandes institutions ont mis en place entre elles des CSA (Collateral Swap Agreement). Il s'agit d'un mécanisme permettant un transfert temporaire d'actifs représentant les évolutions de la valorisation des contrats entre les contreparties. Comme les contrats OTC, ces CSA sont négociés contrepartie par contrepartie et peuvent diverger par la fréquence de calcul, les titres éligibles aux transferts, la présence de seuils….

B. Valorisation d'une option: Black and Scholes:

L'introduction et le développement de ces produits optionnels a rapidement dû s'accompagner de travaux sur la tarification, la valorisation et le risk-management de ces contrats. En 1973, Fisher Black, Myron Scholes et Robert Merton publient leurs travaux sur la façon de couvrir une option grâce à la détention du sous-jacent et du cash, afin de construire un portefeuille sans risque, tout en donnant une formule d'évaluation des options. Le modèle peut s'appliquer à un actif suivant un processus stochastique. En 1997, Merton et Scholes se voient finalement récompensés par le prix Nobel d'économie (Black ne pouvait être éligible car décédé en 1995).

a) Hypothéses et valorisations

Commençons par rappeler les hypothèses utilisées dans leurs travaux :

- Le prix de l'actif sous-jacent St suit un mouvement brownien géométrique avec une volatilité constante σ et une dérive μ constante :

$$dSt= \mu\ St\ dt+ \sigma\ St\ dWt \quad \text{ou} \quad \frac{dSt}{St}= \mu\ dt+ \sigma\ dWt$$

où W_t est un processus de Wiener (ou mouvement Brownien). On rappelle qu'un processus stochastique (W_t |$t \geq 0$) est un mouvement Brownien (ou processus de Wiener) de volatité σ si :

  - ✓ $W_0 = 0$
  - ✓ W_t suit une loi normale de moyenne 0 et de variance σ^2 t :(N (0, σ√ t))
  - ✓ (W_t) est un processus à accroissement stationnaire, c'est à dire que, pour s < t, la distribution de l'accroissement $W_t - W_s$ ne dépend que de la valeur de t − s. Ainsi $W_t - W_s$ (qui a la même distribution que $W_{t-s} - W_0 = W_{t-s}$) suit une normale de moyenne 0 et de variance σ^2 (t − s) : N (0, σ√ t − s)
  - ✓ (W_t) est un processus à accroissements indépendants, c'est à dire que pour toute séquence de temps $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$, les accroissements « non imbriqués » : $W_{t2} - W_{t1}$, $W_{t3} - W_{t2}$, ..., W_{tn}-W_{tn-1} sont des variables aléatoires indépendantes.

Plus simplement, la variation relative de l'action est l'addition d'une tendance et d'un aléa. L'aléa ayant toujours la même distribution et est indépendant des aléas passés et futurs.

- Il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage (« No free Lunch ») : il n'existe pas de stratégie autofinancée ayant un résultat toujours positif et une probabilité strictement positive d'avoir un résultat non nul.

- Le temps est une fonction continue.
- Il est possible d'effectuer des ventes à découvert.
- Il n'y a pas de coûts de transaction.
- Il existe un taux d'intérêt sans risque, connu à l'avance et constant.
- Tous les sous-jacents sont parfaitement divisibles (on peut par exemple acheter 1/100e d'action).

Une fois de plus, il est peu vraisemblable que toutes les hypothèses soient vérifiées dans la réalité, mais elles nous permettent de mettre un environnement favorable à la théorisation mathématique du problème. Ces hypothèses vont nous permettre de valoriser les options Call et Put dont nous avons parlé. L'hypothèse d'absence d'arbitrage en temps continu a permis de démontrer l'existence d'une probabilité dite « risque neutre » qui nous permet d'écrire la valorisation de tout produit dérivé déterminé pas son « Payoff » sous la forme :

$$P=E^{risqueneutre}(e^{-r*T}\ Payoff\ (S_T))$$

La valeur de tout produit est l'espérance de gain ou de perte du produit sous la probabilité risque neutre. Sous cette probabilité tous les sous-jacents sont supposés « drifté » au taux risque neutre r. Le terme en « e^{-r*T} » correspond à l'actualisation du résultat.

Sous cette probabilité, le prix du call européen (et respectivement du put) sur le sous-jacent S, de maturité K et de maturité T, pourra s'écrire :

$$C=E^{risqueneutre}\,(e^{-r*T}\ \mathrm{Max}\,(S_T-K,0))$$

De plus, on aura : $\frac{dSt}{St}$= r dt+ σ dW_t (la dérive μ a été remplacée par le taux sans risque r). Donc on peut écrire la distribution de S à maturité : $S_T=S_0e^{(rT+\sigma\, W_T-\frac{1}{2}\sigma^2T)}$ où W_T suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart type $\sqrt{T}$. Dans la mesure ou la distribution d'une loi normale est connue, on peut remplacer l'écriture de prix en espérance par une intégrale. Finalement on obtient :

$$C\,(S_0, K, r, T, \sigma)=S_0N\,(d_1) - Ke^{(-r\ \ )}\,N\,(d_2)$$

où N représente la fonction de répartition d'une loi normale centrée et réduite

$$d_1=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\ \sigma\right)T\right] \text{ et } d_2= d_1- \sigma\sqrt{T}$$

De la même manière, on peut écrire le prix du Put : $-S_0N\,(-d_1) + Ke^{(-rT)}\,N\,(-d_2)$.

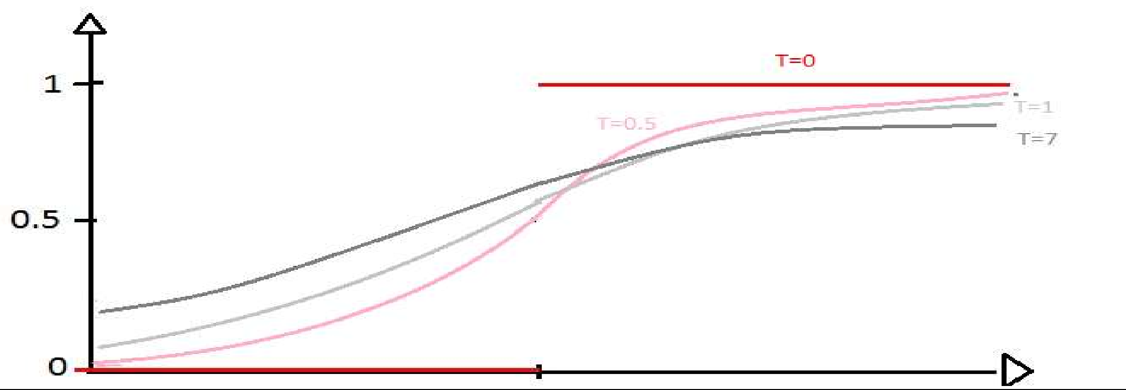
b) Sensibilités du prix : grecques

Maintenant que nous avons un cadre de valorisation des options, il est intéressant d'étudier l'impact des différents paramètres utilisés dans la valorisation afin d'en déduire le comportement du prix en cours de vie et le risk-management lié à ces produits. Ces sensibilités sont appelées « grecques » :

- Le delta, la sensibilité du prix de l'option (ici du call) à la variation de prix de l'action S :

$$\Delta=\frac{\partial C}{\partial S}=N\,(d_1)$$

Etudions le profil du delta en faisant varier le spot et la maturité résiduelle d'une option de strike K :

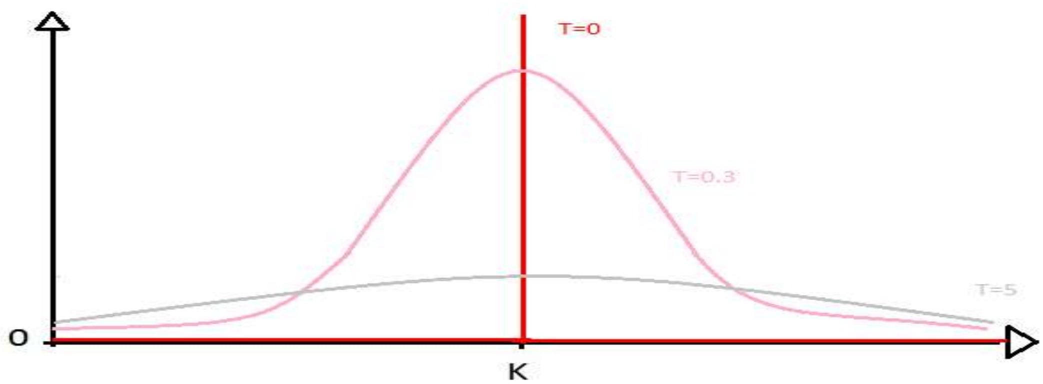


Le delta d'un call varie de 0 à 1. A maturité, le delta est digital : zéro en dessous du strike (le call est dit Out The Money) et un au-dessus (le call est dit In The Money). Le profil est de moins en moins digitalisé lorsque que la maturité restante augmente et que la variance restante est grande. Notons que le delta est proche de 0.5 lorsque le spot est proche du strike.

- Le gamma, la convexité du prix de l'option (ici du call) à la variation de prix de l'action S :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial^2 S} = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} N'(\,d_1)$$

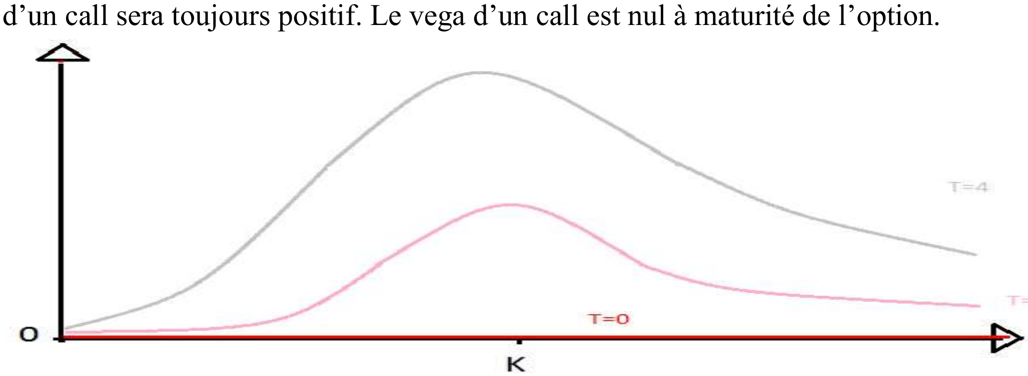
Pour rappel N est la fonction de répartition d'une loi normale réduite, sa dérivée N' est donc la densité de la loi centrée réduite : la fameuse « cloche gaussienne ». A maturité, nous avons vu que le delta est digitalisé entre 0 et 1. Le gamma sera alors une Dirac. Avant maturité le profil du gamma ressemble à une cloche, plus la maturité et la volatilité sont petits et plus la cloche est « étroite » mais haute : le gamma est grand mais localisé. Remarquons que le gamma d'un call est toujours positif.



- Le vega, la sensibilité du prix de l'option (ici du call) à la variation de la volatilité de l'action σ :

$$\text{Vega} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}\,N'(\,d_1)$$

Le vega va aussi avoir un profil en forme de cloche gaussienne déformée par la multiplication par le spot. La hauteur va être croissante linéairement $\sqrt{T}$. Notons que le vega d'un call sera toujours positif. Le vega d'un call est nul à maturité de l'option.



- Le theta, la variation du prix de l'option (ici du call) avec le passage du temps :

$$\text{Theta}=\Theta= -\frac{S\,\sigma}{2\sqrt{T}}\, N'(\, d_2) - Ke^{(-rT)}\, N\,(d_2).$$

N' étant une densité (celle de la loi normale) et N sa fonction de répartition, les deux fonctions sont positives sur tout leur domaine de définition. En conséquence, le theta sera négatif sur un call dans toutes les situations.

Il est d'usage de décompose le P&L (Profit and Loss) d'un portefeuille de produits dérivés à l'aide des grecques, le résultat lié au spot s'écrit :

$$P\&L = \Delta dS \; + \frac{1}{2}\,\Gamma\,(dS)^2$$

Le delta d'un portefeuille étant facilement annulable sur un portefeuille de produits dérivés (il suffit d'acheter ou vendre les actions), le P&L résiduel est guidé par le gamma. Si le gamma est positif, le résultat sera forcément positif. Or nous avons vu préalablement que le gamma d'un call est toujours positif. Cela signifie-t-il que la détention d'un call génère systématiquement un résultat positif ? La réponse est négative bien sûr. L'acquisition d'un call nécessite le paiement d'une prime. La valeur de cette prime correspond au prix du call au début de l'investissement. Le temps passant, le prix du call va disparaitre petit à petit, c'est le theta. L'équation de P&L devient donc :

$$P\&L = \Delta dS \; + \frac{1}{2}\,\Gamma\,(dS)^2 - \Theta$$

Un portefeuille d'options qui est gamma positif pendant toute la durée de l'investissement (jusqu'à maturité) et quel que soit l'évolution du marché aura un theta négatif.

En cas de gamma positif, le P&L d'un portefeuille est croissant de façon quadratique avec la variation du spot. Sur une trajectoire, et en espérance, ce terme quadratique va être lié avec la variance du sous-jacent. Plus un sous-jacent a une variance (ou volatilité) élevée et plus le P&L lié au spot sera élevé. Par principe de non arbitrage, ce gain sera donc compensé par un plus gros theta et une prime plus élevée. Une hausse de la volatilité d'un sous-jacent fera donc croître la prime de l'option. Dans le cas d'un call, on comprend donc facilement que le vega est positif (chose que nous avions déjà vu avec la formule de Black&Scholes). Un call ou un put sera donc plus ou moins cher selon la volatilité du sous-jacent.

Si l'on rapporte cette propriété, à nos résultats sur les stratégies à basse volatilité, il est probable que ces stratégies, en plus de mieux performer, aient des primes de Put plus petites que des options de protection équivalentes sur les portefeuilles de marché.

C. Normes comptables, d'IAS 39 à IFRS 9 :

L'opportunité d'un placement se mesure par sa performance, son niveau de risque, de volatilité. Or cette dernière doit aussi prendre en compte le traitement comptable qui est réservé à l'investissement. Depuis le début des années 2000, la norme IAS 39 a été mise en place pour standardiser la comptabilité des actifs financiers : tant au bilan qu'au compte de résultat. Nous avons vu, que ces éléments sont primordiaux dans l'analyse du fonctionnement et la valorisation d'une entreprise. La norme IAS 39 distingue quatre catégories d'actifs/passifs financiers :

- Les actifs financiers et passifs financiers à la juste valeur par le biais du compte de résultat (held-for-trading)

- Les placements détenus jusqu'à leur échéance, qui sont des actifs financiers non dérivés, assortis de paiements fixes ou déterminables et d'une échéance fixe, que l'entité a l'intention manifeste et la capacité de conserver jusqu'à leur échéance (comptabilisé en coût amorti)
- Les prêts, créances et dettes émis par l'entreprise comptabilisés en coût amorti
- Les actifs financiers disponibles à la vente : actifs financiers non dérivés qui sont désignés comme étant disponibles à la vente ou ne sont pas classés dans l'une des 3 catégories ci-dessus. Les éventuelles variations de ces actifs sont comptabilisées directement dans le bilan par variation des fonds propres.

Avec les normes IAS 39 et IFRS 7, les produits dérivés sont inscrits au bilan sous la forme d'actifs "juste valeur par le compte de résultat". Pour comparaison, avant ces normes, les produits dérivés étaient valorisés et informés hors bilan. Les éventuels flux ou écarts de flux étaient comptabilisés par le compte de résultat. La lecture comptable n'était pas aisée en cas de variations du sous-jacent : l'actif pouvait être amené à varier en plus-value ou moins-value, le dérivé (de couverture) lui n'apparait pas au bilan (même si sa variation de valorisation est informée) et les flux du dérivé (positifs ou négatifs) sont inclus dans le compte de résultat. Avec les normes IAS39 et IFRS 7, il y a une avancée. Cependant ces normes laissent de la liberté sur certains choix de classification. Par exemple, dans le cas de placements en actions, cet investissement peut être enregistré en actif financier à la juste valeur, ou être classé dans les actifs financiers disponibles à la vente. Il apparait que beaucoup d'entreprises ont fait le choix de classer une partie significative d'actifs "disponibles à la vente". Ces actifs ne sont donc pas évalués à la juste valeur et ont une valorisation moins volatile. Certes, en cas de forte variations, l'entreprise devra passer des provisions (pour dépréciation durable par exemple), mais le processus est moins systématique, et laisse plus de souplesse à l'équipe dirigeante pour la gestion du bilan…sans conséquences sur le compte de résultat. C'est probablement cette liberté qui peut encourager la classification en "actifs disponibles à la vente". Cependant, une entreprise peut quand même choisir de mettre en place des produits dérivés de couverture pour pérenniser l'activité et réduire le risque. Ces produits dérivés seront valorisés à la juste valeur et impacteront le compte de résultat. Il y a donc toujours un risque d'asymétrie entre l'actif qui impacterait le bilan (et potentiellement de façon asynchrone) et la couverture qui impacte le résultat. Cette asymétrie est d'autant plus problématique qu'elle peut créer un aléa moral dans le processus décisionnaire de l'équipe dirigeante : une stratégie prudente d'achat de protections va très probablement impacter défavorablement le compte de résultat les années favorables à l'activité. Or, beaucoup de dirigeant sont rémunérés sur la base du résultat annuel. L'approche prudente peut donc être découragés du fait de sa comptabilisation.

La norme IAS 39 prévoit un régime dérogatoire de "comptabilité de couverture". Ce régime dérogatoire est très rigide. Il doit être largement documenté. Il est nécessaire d'identifier précisément quel actif ou passif est couvert, de démontrer la corrélation régulière et significative entre la ligne à couvrir et son produit de dérivés de couverture. La "comptabilité de couverture" prévois trois types de couverture :

- Couverture de la juste valeur : risque de variation de la valeur d'un actif ou d'un passif.
- Couverture de flux : protection contre les flux futurs d'un actif ou d'un passif.
- Couverture d'investissement dans une opération internationale définie dans l'IAS 21.

Dans ce régime dérogatoire, la partie efficace de la couverture est alors allouée au bilan, alors que la partie inefficace reste allouée au compte de résultat. Il est à noter que, malheureusement, les assurances ont été exclues de ce régime dérogatoire au titre de la macrocouverture, les gains et pertes ne pouvant être rattachés à un instrument couvert clairement identifié.

L'IAS 39 prévoit aussi un régime optionnel de juste valeur. L'entreprise peut choisir de valoriser certains instruments financiers préalablement catégorisés en dehors de "juste valeur" à la juste valeur. Cette option est rendue possible si elle apporte une meilleure information et transparence sur les risques financiers encourus. Il appartient alors à l'entreprise de documenter ce choix. Dans ce cas de figure, l'ensemble des variations de l'actif/passif en juste valeur (dérivés inclus) sont passés dans le compte de résultat. Cependant ce choix, s'il fait disparaitre l'asymétrie entre variation du bilan et compte du résultat, peux engendrer plus de volatilité. En effet, l'ensemble des actifs à la juste valeur vont varier (avec le marché par exemple) et entrainer une forte volatilité du résultat, notamment en période de crise. Ce choix est donc optionnel et peux dissuader certains dirigeants.

Face au manque d'homogénéité entre entreprises créé par ces choix de classement et ses régimes dérogatoires ou optionnels, une nouvelle norme est en cours de rédaction et devrait rentrer en vigueur en 2018 : IFRS 9. Les actifs financiers sont dans cette norme classés en trois catégories (en fonction du "business model" et de la caractéristique des flux de trésorerie), et chaque catégorie a sa méthode de valorisation :

- Détention d'instrument financier pour encaisser des flux de trésorerie contractuels : ces instruments sont comptabilisés en "Coût amorti".
- Objectif double de collecter des flux contractuels et revendre l'actif : ces instruments sont comptabilisés par variation des fonds propres dans le bilan.
- Autres actifs financiers : les instruments sont valorisés en juste valeur par le compte de résultat.

Concrètement, dans le cas des actions, il n'y a plus d'ambiguïté possible entre actifs valorisés à la juste valeur ou actifs disponibles à la vente en variation des fonds propres dans le bilan. Dans IFRS 9, elles sont dans la troisième catégorie, comptabilisées en juste valeur par le compte de résultat. Dans le cas de contrat hybride ("embedded derivative") impliquant le contrat hôte et un produit dérivé, IFRS 9 prévoit (comme IAS 39) une décomposition du contrat. Lorsque que cela n'est pas possible, l'instrument sera classé dans la troisième catégorie. Il est à noter que la norme IFRS 9 prévoit toujours un dispositif de couverture avec la même classification, mais avec un assouplissement des contraintes. Bien sûr, il reste nécessaire de documenter les choix faits avec la gestion des risques qui les accompagne.

D. Utilisation des instruments de couverture et Solvabilité II :

a) Couverture par le put :

Comme déjà décrit préalablement, Solvabilité II aborde le risque de marché action par l'intermédiaire d'un test de résilience à un choc de 39%. Ce choc peut bien sûr varier en fonction du « dampener ». Un assureur peut cependant recourir aux produits dérivés afin de protéger son portefeuille et réduire son SCR action. L'instrument le plus naturel pour le faire est le put, une option de vente.

Etudions le comportement d'un put de strike 95% de maturité variant de 1 mois à 12 mois en fonction de la variation du spot. Nous considérons ici une volatilité fixée à 20%, des taux nuls (vraisemblable en Europe actuellement) et l'absence de dividende (ou portefeuille dit « total return ») :

delta	-40%	-35%	-30%	-25%	-20%	-15%	-10%	-5%	0%	5%	10%	15%	20%
1m	100%	100%	100%	100%	100%	97%	82%	49%	18%	4%	1%	0%	0%
3m	100%	100%	100%	99%	95%	86%	69%	48%	29%	15%	6%	2%	1%
6m	100%	100%	98%	95%	87%	76%	62%	47%	33%	22%	13%	8%	4%
9m	99%	98%	95%	90%	82%	71%	59%	47%	35%	25%	18%	12%	8%
12m	99%	96%	92%	86%	78%	68%	57%	46%	36%	27%	20%	15%	10%

En réalité ce qui nous intéresse, plus que le delta, c'est la variation de PNL de cette couverture, expliqué par le delta initial :

	-40%	-35%	-30%	-25%	-20%	-15%	-10%	-5%	0%	5%	10%	15%	20%
1m	7%	6%	5%	4%	4%	3%	2%	1%	0%	-1%	-2%	-3%	-4%
3m	11%	10%	9%	7%	6%	4%	3%	1%	0%	-1%	-3%	-4%	-6%
6m	13%	12%	10%	8%	7%	5%	3%	2%	0%	-2%	-3%	-5%	-7%
9m	14%	12%	11%	9%	7%	5%	4%	2%	0%	-2%	-4%	-5%	-7%
12m	14%	13%	11%	9%	7%	5%	4%	2%	0%	-2%	-4%	-5%	-7%

D'après ce tableau, si le put se valorise bien à la baisse du spot, le gain généré par le delta du put semble assez peu important. Si l'on se rappelle l'équation de PNL, en plus du PNL généré par le delta il faut ajouter (entre autres) le gamma. Si l'on revalorise l'option avec une formule Black and Scholes lorsque le spot varie, on obtient :

variation de prix	-40%	-35%	-30%	-25%	-20%	-15%	-10%	-5%	0%	5%	10%	15%	20%
1m	34%	29%	24%	19%	14%	9%	5%	2%	0%	0%	-1%	-1%	-1%
3m	33%	28%	23%	18%	13%	9%	5%	2%	0%	-1%	-2%	-2%	-2%
6m	32%	27%	22%	17%	12%	8%	5%	2%	0%	-1%	-2%	-3%	-3%
9m	30%	26%	21%	16%	12%	8%	5%	2%	0%	-2%	-3%	-3%	-4%
12m	30%	25%	20%	15%	11%	8%	5%	2%	0%	-2%	-3%	-4%	-4%

Le gain généré par l'option est donc bien plus important que prévu par le delta, en écart :

	-40%	-35%	-30%	-25%	-20%	-15%	-10%	-5%	0%	5%	10%	15%	20%
1m	27%	23%	19%	15%	11%	7%	3%	1%	0%	0%	1%	2%	3%
3m	22%	18%	15%	11%	8%	4%	2%	0%	0%	0%	1%	3%	4%
6m	18%	15%	12%	9%	6%	3%	1%	0%	0%	0%	1%	2%	4%
9m	16%	13%	10%	7%	5%	3%	1%	0%	0%	0%	1%	2%	3%
12m	15%	12%	9%	6%	4%	2%	1%	0%	0%	0%	1%	2%	3%

On peut remarquer que la variation du résultat du put est toujours plus favorable avec la revalorisation complète qu'avec simplement le delta (Cf Quels instruments financiers est-il important de revaloriser précisément dans le calcul du SCR Marché ? De Noémie Hadjadj-Gomes). L'effet mesuré ici est bien sûr le gamma et la convexité de l'option. Le gamma du put étant toujours positif ou nul, la variation du PNL est toujours plus favorable qu'avec simplement le delta. A la hausse, la perte liée au delta est limitée par ce gamma. Concrètement le propriétaire du put ne peux pas perdre plus que la prime de l'option. A la baisse, le gamma contribue à augmenter le delta de l'option. Cet effet est visible dès le premier tableau. Le gamma d'une option courte étant plus important, c'est sur le put de maturité 1 mois que le delta converge le plus vite vers 100%.

C'est donc le put 1 mois qui apporte le plus de protection. Cependant, pour protéger le portefeuille tout au long de l'année il sera nécessaire d'en acheter mensuellement quel que soit les conditions de marchés : y compris lors de période de stress effectif du marché où les protections seront plus chères. De plus l'utilisation de protection trop courtes ne sont pas efficiente lors de baisse progressives du marché. Par exemple, des baisses de 5% tous les mois aboutiront à une baisse d'environ 60% annuellement, mais le détenteur de put 95% mensuel ne recevra aucun flux positif. Pour profiter du gamma de l'option encore faut-il traverser le strike de l'option de couverture. Il faut donc faire un choix entre couverture immédiate et à terme. Le cas extrême de ce type de couverture est l'utilisation de crash put cliquet : une protection sur une journée déclenchée par un krack boursier. Si le coût de cette protection est relativement faible et protège le portefeuille en cas de choc unique de 39%, cette protection est en réalité inefficace dans la majorité des scénarios de marché. Ce type de couverture a donc été exclu du cadre de Solvabilité II sauf justification que son usage correspond bien à la couverture d'un risque présent dans le portefeuille, un CPPI par exemple.

L'assureur devra donc faire un arbitrage entre la maturité, le coût de l'option, les coûts de transaction, l'assurance d'être couvert dans le futur et les niveaux de protection souhaités. En supposant qu'un investisseur a déjà choisi de se couvrir à l'aide d'un put 1 an, il doit encore choisir le strike optimal. Pour ce faire utilisons les prix de marchés à spot initial donné et considérant que le cout d'exécutions sera de 0.1% quel que soit le strike et donc la prime de l'option.

Strike	prime spot intiale	Prime spot @ 80%	Prime spot @ 61%	prime initale avec cout	Ratio gain SCR/prime initiale	ratio prime 80/prime initiale
55	0,53%	1,82%	5,95%	0,63%	9,43	2,89
60	0,76%	2,59%	8,10%	0,86%	9,42	3,01
65	1,05%	3,57%	10,69%	1,15%	9,26	3,09
70	1,12%	4,27%	13,30%	1,22%	10,90	3,50
75	1,52%	5,76%	16,88%	1,62%	10,44	3,56
80	2,03%	7,64%	20,93%	2,13%	9,82	3,58
85	2,70%	10,00%	25,38%	2,80%	9,05	3,57
90	3,92%	13,19%	30,16%	4,02%	7,50	3,28
95	5,52%	16,88%	35,06%	5,62%	6,24	3,00
100	7,57%	21,00%	40,02%	7,67%	5,22	2,74
105	10,12%	25,47%	45,00%	10,22%	4,40	2,49
110	13,20%	30,19%	50,00%	13,30%	3,76	2,27
115	16,80%	35,06%	55,00%	16,90%	3,25	2,07

Dans ce test, nous avons pris les prix de marchés, déduit les volatilités correspondantes, et recalculé avec les mêmes volatilités les valeurs des options avec un spot diffèrent (80% et 61%). Le but principal étant d'optimiser le gain en SCR fourni par l'option de couverture à moindre coût, on regarde donc le ratio entre la prime dépensée initialement et sa valeur après le choc de 39%. D'après ce ratio, il est optimal (au sens du SCR) de choisir un strike aux alentours de 70%. Si, de plus, on regarde le gain apporté par la couverture au portefeuille dans le cadre d'un choc intermédiaire (20%), il apparait que le strike optimal se situe à 80%. Au final, il est raisonnable de choisir un strike dans la zone entre 70% et 80%.

b) <u>D'autres exemples de transactions :</u>

Comme indiqué ci-dessus, la transaction la plus courante est l'utilisation de put sur l'indice le plus liquide servant de référence sur la zone concernée. Cependant, nous avons mentionné l'existence de portefeuilles historiquement plus performants en termes de rendement et risque : les portefeuilles dits "low volatility". Certains assureurs et fonds de pensions ont déplacé une partie de leur allocations actions vers ce genre de portefeuilles. Cela a créé un appétit pour des produits OTC permettant d'investir et de se couvrir sur ces portefeuilles. Une première approche de l'investisseur pourrait être de mettre une couverture en place sur l'indice de référence. Cependant, une telle couverture laisserait un risque de base et la prime dépensée plus importante. En effet la volatilité de l'indice de référence est par définition plus importante que celle de l'indice ou portefeuille "low volatility". Même s'il y a un surcout lié à la liquidité moindre de cet indice, la prime résultante d'un put de couverture ressort généralement moins élevée que celle de l'indice de référence. Ainsi, il arrive de voir des appels d'offres de plusieurs centaines de millions d'euros sur des indices 'low volatility' (SXLV5T par exemple) où l'assureur achète des put 80%.

De façon générale, si les assureurs utilisent de plus en plus ces indices "low volatility" dans leurs politiques de placement, ils ne l'accompagnent de dérivés que lorsqu'ils achètent la volatilité (ils achètent le vega). Par exemple il n'est pas rare de voir des assureurs (français), utiliser ces indices dans des investissements pour compte propre dans des EMTN (Euro Medium Term Note) associés à une structure de produits dérivés. L'assureur achète de la performance sur l'indice "low volatility" avec un risque en capital (sur la partie action) nul ou limité. En effet sur ces structures, l'assureur ne vend pas de put sur les actions, il se contente d'acheter des calls ou assimilables. Ce remplacement de positions physiques en actions par des positions sur des calls s'appelle du "call replacement". Cette opération n'est possible que parce que le call (ou assimilable) sera moins cher grâce à une volatilité réduite. La prime du dérivé sera financée par le crédit de l'émetteur. L'investisseur est intégralement en risque de perte de capital en cas de défaut de l'émetteur. La transaction doit se décomposer comptablement en deux parties :

- Un "zéro-coupon" de l'émetteur de l'EMTN (qui correspond au remboursement du nominal à échéance du produit) qui est un produit de dette et sera comptabilisé en conséquence.
- Le produit dérivé qui donne une participation à la hausse de l'indice.

Par exemple, l'assureur achète une note à 100€, mais la valeur du zéro-coupon ne sera que de 85% car il y a un effet de d'actualisation (proche de zéro actuellement) et du spread de crédit de l'émetteur. Les 15% restant permettront d'acheter un call ou un autre produit dérivé.

Ces investissements nécessitent un double traitement comptable en séparant la partie obligation et le dérivé action. Les assureurs gèrent de façon dynamique et tactiques ces placements. Lorsque le gain généré par le dérivé est suffisant ou maximal, beaucoup d'assureurs restructurent la note pour la transformer uniquement en un titre obligataire. Cette opération nécessite de s'accorder sur la valeur du dérivé. Cet accord n'est pas toujours évident, dépendant d'un mark-to-market sur des paramètres peu liquides et transparents. Une des solutions mis en place par les investisseurs est d'utiliser des produits dérivés où il est plus simple d'avoir des points de repères. Par exemple un call spread (l'investisseur a acheté le call de strike bas et a vendu un call de strike plus haut) à la place d'un call permet d'avoir une meilleure idée de la valorisation lorsque le marché a fortement monté, une fois le strike supérieur nettement dépassé, la valeur du call-spread doit converger vers l'écart des strikes (actualisé). Une amélioration possible et observée dans le marché est l'utilisation de call dit "Max Out" ou "Best-of" : durant la durée de vie du produit, à une fréquence de constatation déterminée, le niveau du sous-jacent est observé. Le call "Max Out" sera calculé sur le plus haut niveau observé (et non sur le niveau final comme habituellement).

$$\text{CallMaxOUT}(K, S_0, ., S_i, ., S_T) = \underset{i \in 0[0;T]}{\text{Max}}\left(\text{Max}\left({}^{S_i}\!/_{S_0} - K, 0\right)\right)$$

Combiné en call-spread, dès qu'une observation est faite au-delà du strike haut, le produit devient automatiquement un pur produit de dette. Ce produit est le parfait exemple d'une utilisation optimisée d'indices "low volatility" dans une logique de placement d'assureur :

- Historiquement, l'indice "low volatility" performe mieux.
- La volatilité étant plus basse, la prime de ce produit sera nettement moindre que son équivalent sur un indice de référence.
- Une fois la vue de l'assureur réalisée (l'assureur peux même calibrer l'écart des strikes en fonction de son opinion), la performance est enregistrée, le produit perd tout ou partie de ses facteurs de risques et sa valorisation devient plus facile.
- Une performance observée suffisamment haute permet une transition automatique vers un produit uniquement de dette.

III. Stratégie à volatilité contrôlée

Un placement en actions se fait toujours en espérant tirer le meilleur rendement à niveau de risque minimum. Cette optimisation est l'essence même du modèle de Markowitz vu précédemment. En progressant dans la théorie du portefeuille avec le modèle CAPM nous avons identifié le portefeuille de marché : le portefeuille situé à l'intersection entre la parabole du modèle de Markowitz et la droite qui passe par le point de l'actif sans risque. Ce point définit donc un rendement et une volatilité (niveau de risque) de référence. Nous allons maintenant présenter une stratégie d'allocation qui va se déplacer dynamiquement sur la droite entre l'actif sans risque et le portefeuille de marché (l'actif risqué choisi de façon plus générale) pour garantir un niveau de risque/volatilité constant. La volatilité jouant un rôle de premier ordre dans la valorisation des produits dérivés, y compris des produits de couverture, ce type de stratégie peut s'accompagner de couvertures à un prix réduit et stable. L'ensemble de cette analyse a été faite par moi-même, en utilisant les outils disponibles (souvent développés pour d'autres usages), dans le cadre de la mise en place d'un processus de valorisation de ces produits.

1) Description :

A. Fonctionnement :

Ces stratégies sont basées sur un niveau de risque déterminé pour l'investisseur, dont il est déduit une allocation adéquate. Ces stratégies consistent à gérer un portefeuille composé d'un actif dit sans risque et d'un actif risqué. L'actif non risqué est souvent de type monétaire (rémunéré ou non) : il s'agit souvent de simples dépôts rémunérés selon les références bien connues du monde des taux "overnight" ou à terme sur des maturités courtes. On peut par exemple citer l'EONIA et le Fedfund pour les références "overnight" (dépôt à 1 jour) en euro et en US dollar, et le Euribor3m et Libor3m pour les dépôts à terme 3 mois. L'actif risqué est le sous-jacent sur lequel l'investisseur souhaite avoir une exposition et tirer des bénéfices. Ce sous-jacent sera pour nous un sous-jacent actions (souvent un indice), mais ce type de stratégies peut être utilisé quelle que soit la nature de l'actif sous réserve d'avoir une certaine liquidité. Tout l'intérêt de la stratégie repose dans le choix de l'allocation entre les deux actifs : cette allocation est gérée dynamiquement en fonction de la volatilité. Cette dernière est évaluée à l'aide d'estimateurs dont la définition peut varier. Une fois la volatilité réalisée calculée, le poids de l'actif risqué est inversement proportionnel à cette volatilité. Pour un objectif de volatilité et de risque de niveau σ, on définit :

-Proportion de l'investissement en actif risqué $= \omega_{risqué} = \dfrac{\sigma}{\sigma_{realisepaλactifrisque}}$

-Poids en actif non risqué = $(1- \omega_{risqué})$

-Return= $\omega_{risqué}$ * (return de l'actif risqué) + $(1 - \omega_{risqué})$*(return actif non risqué)

La variance de ce portefeuille est définie dans le cadre de la théorie d'un portefeuille de deux sous-jacents par :

$$\omega^2_{risque} * \sigma^2_{actifrisque} + 2 * \omega^2_{risque} * (1-\omega^2_{risque}) * \rho * \sigma_{actifrisque} * \sigma_{actifsansrisque} + (1-\omega^2_{risque})^2 * \sigma^2_{actifsansrisque}$$

où :

- $\sigma^2_{actifrisque}$ est la variance de l'actif risqué
- $\sigma^2_{actifsansrisque}$ est la variance de l'actif non risqué
- ρ est la corrélation entre les deux actifs

En rappelant que la volatilité de l'actif sans risque est nulle, on obtient une volatilité du portefeuille égale à :

$$\sigma \frac{\sigma_{actifrisque}}{\sigma_{realiseparlactifrisque}} = \sigma$$

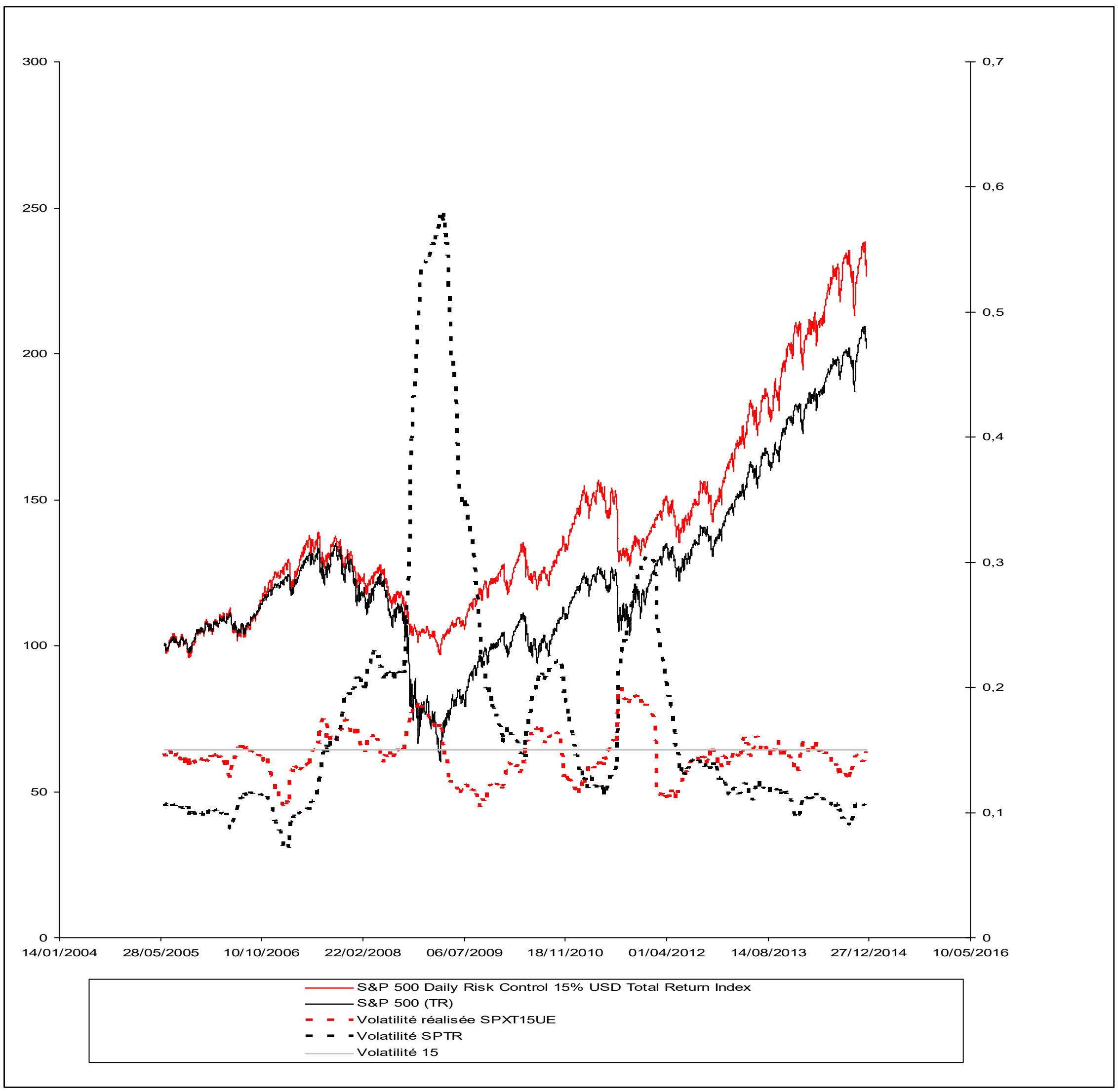
Nous avons ici supposé que la volatilité de l'actif risqué est bien la volatilité réalisée du sous-jacent. Il ne s'agit pas par exemple de la volatilité implicite (paramètre de volatilité dans le modèle Black and Scholes) dont nous avons pu parler précédemment. Mais il est abusif de considérer que la volatilité d'un actif est constante dans le temps. En réalité, la volatilité réalisée est recalculée chaque jour et le poids en actif risqué est ajusté en conséquence, l'allocation de la stratégie est dynamique. Le poids $\omega_{risqué}$(T-1) en actif risqué entre la clôture du marché du jour T-1 et la clôture T est défini par :

$$\omega_{risqué}(T-1) = \frac{\sigma}{Volatiltiémesurée(T-1-d)}$$

« d » est le délai qui peux exister entre la mesure de la volatilité et son impact sur l'allocation. Idéalement, d vaut zéro, cela signifie qu'une variation de la volatilité impactera immédiatement l'allocation. En réalité ce n'est pas toujours possible. Une réallocation immédiate est toujours un peu délicate sur un actif dans la mesure où la moindre variation du niveau de clôture impacte l'allocation sur l'actif et donc modifie les ordres à exécuter sur ce même niveau de clôture…On peut imaginer ce type de solution lorsque l'actif dispose, par exemple, d'un futur encore ouvert quelques minutes après la clôture du marché, le résiduel des ordres sera exécuté sur des futures. Cependant, dès que le sous-jacent risqué de la stratégie comprend des actifs de différentes zones géographiques l'absence de délai n'est pas possible : le niveau final des actifs américains sera connu 12h après la fermeture de certains marchés asiatiques…A minima d sera alors fixé à 1 : la volatilité sera calculée à la clôture des marchés américains et l'allocation sera modifiée aux clôtures des différents marchés le jour suivant. L'écart entre le calcul de la volatilité réalisée et les premiers ordres sur le marché sera alors de seulement quelques heures. En termes opérationnels ce n'est pas évident à gérer. Il est donc plus simple de choisir un « d » valant 2 :

-en T-3, après la fermeture des marchés, les cours de clôtures sont connus.
-en T-2, un operateur calcule la volatilité sur les cours de la veille et envoie les ordres à exécuter à la clôture de T-1
-en T-1, l'ordre de réallocation est exécuté
-en T, la valorisation de la stratégie se fait en prenant en compte la nouvelle allocation

Observons le comportement d'une de ces stratégies calculées par Standard&Poors. Il s'agit d'une stratégie « Vol contrôlée » à 15% sur le S&P 500 total return. Une observation rapide du graphe ci-dessous nous permet de voir que sur les dix dernières années la performance de la stratégie à volatilité contrôlée est très proche et même supérieure à celle de son benchmark. En réalité on s'aperçoit que la principale raison de cette surperformance est la plus grande résilience de la stratégie en 2008 en période de forte volatilité et de marché décroissant. En effet, le mécanisme de contrôle de la volatilité a limité l'exposition de la stratégie en actif risqué. A l'inverse on s'aperçoit que la volatilité réalisée de la stratégie est plus importante que celle du benchmark en période de faible volatilité. En effet le mécanisme d'allocation permet une exposition supérieure à 100% lorsque la volatilité de l'actif risqué est inférieure à 15%. Cette exposition en actif risqué peut monter jusqu'à 150%. Globalement, la performance de la stratégie est d'autant plus intéressante qu'elle s'accompagne d'une volatilité de la stratégie inférieure à celle de son Benchmark sur une période de 10 ans. Conformément à son mécanisme, la stratégie a réalisé une volatilité annualisée avoisinant 15%.



En plus des éléments décrits plus haut, la stratégie dynamique peut être enrichie de plusieurs mécanismes. L'allocation en actif risqué dépend du niveau de risque choisi et de la volatilité réalisée. En période de faible volatilité, la volatilité réalisée de l'actif risqué peut être inférieure au niveau de risque prévu, il peut donc être prévu d'autoriser une allocation en actif supérieur à 100%. Une telle allocation nécessitera bien sûr d'avoir recours à un emprunt, le poids sur l'actif non risqué sera négatif. Il n'est pas rare que cet emprunt soit facturé par un spread en plus du taux de l'actif sans risque. Cette possibilité de « leverager » la stratégie est souvent contractuellement limitée quand elle est proposée. Souvent l'allocation est limitée à 150 ou 200%. Réciproquement, on peut discuter du choix du niveau de risque et de volatilité choisie relativement au choix de l'actif risqué. Le choix d'un niveau de risque trop bas par rapport à la volatilité réalisée de l'actif empêchera d'avoir une allocation significative. Il n'est en général pas intéressant de structurer cette stratégie lorsque la volatilité réalisée du sous-jacent est toujours très significativement supérieure au niveau de risque prévu. Il vaut mieux privilégier un équilibre entre le niveau de risque voulu et la volatilité réalisée de l'actif risqué. Idéalement la stratégie doit avoir une allocation en actif risqué proche ou supérieure à 100% plus de la moitié du temps, en cas de situation de marché normale.

B. Estimateurs de volalitilé :

a) Estimateur de volatilité standard

Les stratégies dynamiques que nous avons décrites ont une allocation en actif risqué dépendant de la volatilité réalisée de l'actif. Pour calculée cette volatilité, STOXX Ltd propose d'utiliser l'estimateur de volatilité standard :

$$Realizedvolatility_{t,n} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum\left[Ln\left(\frac{S_u}{S_{u-1}}\right)\right]^2} * \sqrt{252}$$

Il s'agit donc simplement du produit de l'écart type du rendement de l'actif sur la période donnée et un facteur permettant d'annualiser la volatilité. Il est d'usage de considérer qu'il y a 252 jours de marchés dans une année. Mais sur quel échantillon n la volatilité réalisée va-t-elle être calculée ? Il est fréquent d'utiliser et de calculer sur deux échantillons et d'utiliser la plus grande volatilité réalisée. Le premier échantillon sera un petit échantillon de l'ordre de 20 observations. C'est la volatilité réalisée « courte », le petit échantillon permet d'être extrêmement réactif en cas de variation significative du marché. En supposant que les 19 premières observations étaient des variations correspondant à 10% de volatilité annuelle, l'impact de la dernière observation :

Dernière variation	0,0%	0,5%	1,0%	1,5%	2,0%	2,5%	3,0%	3,5%	4,0%	4,5%	5,0%	5,5%	6,0%
Volatilité mesurée	9,7%	9,9%	10,4%	11,1%	12,1%	13,2%	14,4%	15,8%	17,2%	18,7%	20,2%	21,8%	23,4%

Le deuxième estimateur aura un échantillon plus grand, au minimum 60 observations (presque 3 mois). Il s'agit de l'estimateur de volatilité « longue ». Il est par définition plus stable. Lors du calcul de l'allocation en actif risqué, la plus grande des deux mesures de volatilité sera utilisée :

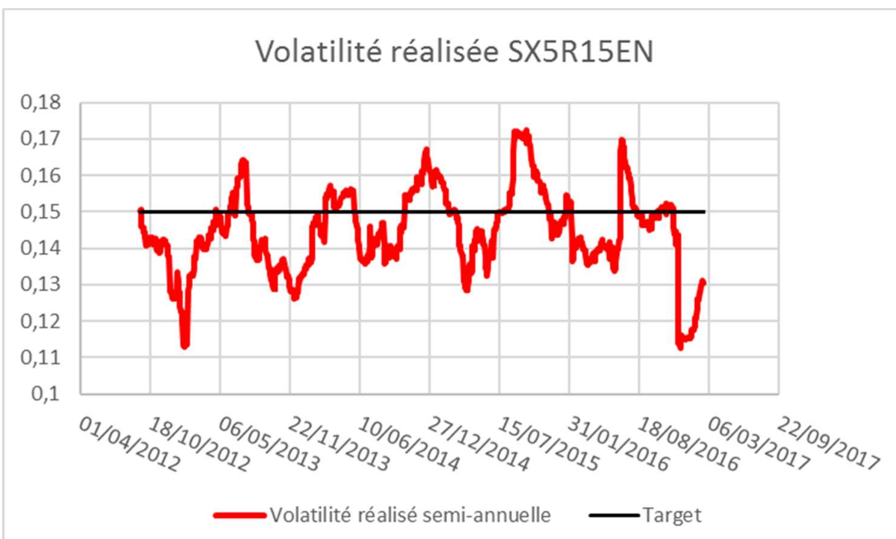
$$\omega_{risqué} = \frac{\sigma}{\max(\text{Realizedvdatility}_{t,20}, \text{Realizedvdatility}_{t,60})}$$

Schématiquement, l’estimateur de volatilité courte va guider l’allocation en cas de stress du marché : dès les premiers à-coups du marché, la volatilité réalisée va croitre et provoquer la dés-allocation en actif risqué. Lorsque le marché se normalise, l’estimateur de volatilité « courte » diminue rapidement, puis l’estimateur de volatilité « longue » converge progressivement permettant une réallocation progressive en actif risqué.

D’un point de vue mathématique, on peut rappeler que les estimateurs que nous avons utilisés sont des estimateurs biaisés. En effet, l’estimateur non biaisé de l’écart type et donc de la volatilité est :

$$Volatilité = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left[Ln\left(\frac{S_u}{S_{u-1}}\right)\right]^2} * \sqrt{252}$$

Les estimateurs sont donc biaisés à la baisse, la volatilité réalisée est sous-évaluée de 2.6% (relativement) sur la volatilité « courte » et 0.8% sur la volatilité longue. En utilisant ces estimateurs sur l’eurostoxx 50 (les 50 plus grosses capitalisations de la zone euro) et un objectif de 15% de volatilité, STOXX ltd publie le SX5R15EN. Sur les cinq dernières années la volatilité moyenne de l’indice s’établit à 14.5% soit légèrement en dessous de l’objectif. On constate que la volatilité semi-annuelle réalisée a fluctué entre 11% et 17%.



b) Variance exponentielle

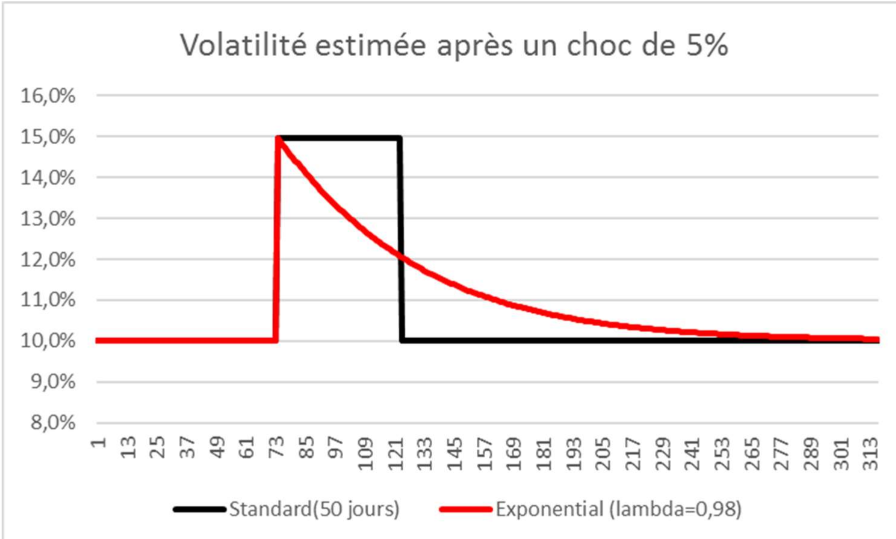
Cette autre méthode d’évaluation de la volatilité réalisée est utilisée (entre autres) par les stratégies publiées par Standard & Poors. Le calcul de la volatilité réalisée, passe ici par le calcul d’une variance. La variance est initialisée à un instant t=0, puis défini par une formule de récurrence :

$$Var_t = \lambda\, Var_{t-1} + (1-\lambda)\left[ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\right]^2$$

La variance est égale à la variance du jour précédant ajustée d’un facteur de décroissance ($\lambda\ est\ inferieur$ à 1) à laquelle on ajoute le carré de la dernière variation. Plus le facteur λ est petit et plus la mesure de variance sera sensible aux dernières fluctuations de l'actif. En réalité, λ est souvent choisi entre 0.9 et 1. Dans le cadre de cette estimation, on peut aussi choisir de garder deux estimateurs plus ou moins sensibles pour guider l'allocation de la stratégie : il suffit de choisir deux λ différents. Les variances (et volatilité) sont calculées avec les deux paramètres et seule la plus grande volatilité est retenue pour le calcul de l'allocation en actif risqué. Regardons l'impact d'une variation de marché avec une variance précédente équivalente à 10% de volatilité et un λ variant de 0.9 à 1.0. Dans le cas extrême où λ vaux 1, l'estimateur est bien-sûr constant à 10%. L'estimateur est bien plus sensible avec λ à 0.9. Dans ce cas une simple variation de 3.5% suffira à doubler la valeur de l'estimateur, de 10% à 20%.

choc\lambda	0,9	0,92	0,94	0,96	0,98	1
0,0%	9,5%	9,6%	9,7%	9,8%	9,9%	10,0%
0,5%	9,8%	9,9%	9,9%	9,9%	10,0%	10,0%
1,0%	10,7%	10,6%	10,4%	10,3%	10,2%	10,0%
1,5%	12,1%	11,7%	11,3%	10,9%	10,5%	10,0%
2,0%	13,8%	13,1%	12,4%	11,7%	10,9%	10,0%
2,5%	15,7%	14,8%	13,7%	12,6%	11,4%	10,0%
3,0%	17,8%	16,5%	15,2%	13,7%	12,0%	10,0%
3,5%	20,0%	18,4%	16,7%	14,8%	12,6%	10,0%
4,0%	22,2%	20,4%	18,3%	16,0%	13,4%	10,0%
4,5%	24,5%	22,4%	20,0%	17,3%	14,1%	10,0%
5,0%	26,8%	24,4%	21,7%	18,7%	15,0%	10,0%
5,5%	29,2%	26,5%	23,5%	20,0%	15,8%	10,0%
6,0%	31,6%	28,6%	25,3%	21,4%	16,7%	10,0%

Pourquoi choisir un estimateur plutôt qu'un autre ? L'estimateur de volatilité standard a le mérite de correspondre avec ce que tout un chacun a l'habitude de considérer lorsqu'on parle de volatilité. En réalité, une majorité d'investisseurs préfère utiliser l'estimateur par variance exponentielle. En effet ce dernier a deux avantages. Le premier est d'ordre numérique. Les manipulations et calculs de variances sont plus faciles à grande échelle avec l'estimateur exponentiel. Le deuxième est qu'en cas de choc, la propagation dans le futur et la disparition de l'impact dans l'estimateur se fait progressivement. Tous les jours, l'impact du choc est atténué d'un facteur λ. Dans l'estimateur standard, sa contribution identique jusqu'au jour où le choc sort de l'échantillon. Concrètement, l'estimateur par variance, après le choc, va diminuer l'allocation en actif risque. Puis cette allocation va recroitre petit à petit. Avec l'estimateur standard, le choc va aussi entrainer une dés-allocation. Toutes choses égales par ailleurs, l'allocation ne changera plus jusqu'à ce que le jour du choc sorte de l'échantillon. A ce moment, l'allocation va bondir brutalement.



c) *Reallocations*

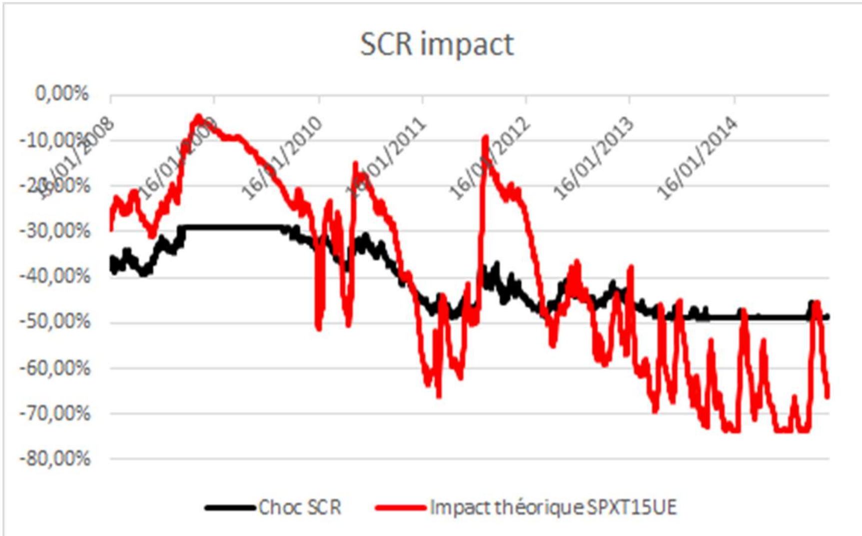
Comme défini par la stratégie dynamique, les variations de volatilité réalisée ont un impact sur l'allocation en actif risqué. En partant d'une volatilité de 10%, en prenant un λ égal à 0.9, faisons varier la volatilité « target » et le choc de l'actif risqué :

choc\target	8%	10%	12%	14%	16%	18%
0,0%	84,3%	105,4%	126,5%	147,6%	150,0%	150,0%
0,5%	81,5%	101,9%	122,3%	142,7%	150,0%	150,0%
1,0%	74,5%	93,2%	111,8%	130,4%	149,1%	150,0%
1,5%	66,1%	82,6%	99,1%	115,6%	132,1%	148,6%
2,0%	57,9%	72,4%	86,9%	101,4%	115,8%	130,3%
2,5%	50,9%	63,6%	76,3%	89,0%	101,7%	114,4%
3,0%	44,9%	56,2%	67,4%	78,7%	89,9%	101,1%
3,5%	40,1%	50,1%	60,1%	70,1%	80,1%	90,1%
4,0%	36,0%	45,0%	54,0%	63,0%	72,0%	81,1%
4,5%	32,7%	40,8%	49,0%	57,1%	65,3%	73,5%
5,0%	29,8%	37,3%	44,7%	52,2%	59,6%	67,1%
5,5%	27,4%	34,3%	41,1%	48,0%	54,8%	61,7%
6,0%	25,3%	31,7%	38,0%	44,3%	50,7%	57,0%

A un niveau de volatilité donné, l'allocation en actif risqué croit bien avec le niveau de volatilité « target ». Nous avons ici choisi d'introduire une allocation maximum à 150%. On voit bien qu'entre 16% et 18%, l'allocation sature à 150% en absence de choc. En cas de choc, l'allocation décroit bien. Un choc de 3.5%, en doublant la valeur de l'estimateur de volatilité, divise par deux l'allocation en actif risqué.

d) *Volatilité contrôlée et SCR :*

Les investisseurs mettant en place ce type de stratégies le font sur de longues durées. L'idée est souvent de mettre en place un "programme". Le nominal alloué peux varier, l'existence ou non d'une couverture peux évoluer de façon tactique, mais la définition du programme est peu malléable dans le temps. L'investisseur devra choisir un niveau de risque/de volatilité moyen, mais est-ce suffisant pour garantir une consommation de SCR stable dans le temps ?



La réponse est clairement non. Le choc du SCR est lui-même dépendant du dampener. Le dampener augmente le choc après une période de marché haussier et le réduit suite à une correction. Or, la tendance du marché est souvent corrélée avec la volatilité : un marché baissier s'accompagne souvent d'une plus grande volatilité et inversement, un marché haussier s'accompagne d'une volatilité plus basse. Dans le cas d'une stratégie à volatilité contrôlée (ici SPXT15UE: "target" 15% sur le S&P500), le choc du SCR est amplifié ou diminué par l'exposition en risque. Dans des marchés baissiers et nerveux, l'impact du choc SCR sur la stratégie sera réduit et assez faible. A l'inverse, dans un marché haussier et calme, l'impact de la stratégie en SCR peux exploser jusqu'à atteindre le produit du 49% (39%+10%) multiplié par l'exposition maximale prévue par la stratégie (ici 150%). Le coût en SCR est très volatile, malgré un objectif de volatilité constant. L'investisseur peut voir ce mécanisme comme contracyclique (en période difficile le coût sera réduit), où choisir de ne pas subir les variations aussi fortes de SCR sur son bilan et mettre en place des couvertures optionnelles.

2) Valorisation d'options :

Il n'est pas rare de voir ce genre de stratégies mis en place dans un programme de placement pluriannuel. La couverture peut être mise en place à la discrétion de l'assureur ou du fonds de pension, il peut choisir de protéger tout ou partie de son programme. Des investisseurs demandent à avoir cette flexibilité (en taille) contractuellement définie avec la possibilité de mettre en place dans le futur des protections à un prix défini. La volatilité étant figée, la prime devrait être stable dans le temps. Mais à quel niveau ? Quels facteurs peuvent impacter le coût de la protection ?

A. Black and Scholes :

Nous avons déjà abordé précédemment l'intérêt de mettre en place des stratégies de couverture pour protéger le portefeuille de l'investisseur et réduire son risque et donc son risque en capital. Pour rappel, la stratégie la plus simple est l'achat d'un put (une option de vente). Le prix de cette option est croissant avec la volatilité du sous-jacent. Dans la mesure où nous avons fixé sur notre stratégie « vol-contrôlée » un budget de risque inférieur au niveau de risque du marché, il est pertinent de penser que le coût d'une protection sur la stratégie sera réduit. Utilisons le modèle de Black and Scholes pour valoriser cette option. Il s'agit d'introduire une probabilité risque neutre. Sous cette probabilité l'actif suit une diffusion log-normale, croit au taux sans risque, et fluctue avec une volatilité σ. Nous n'avons pour l'instant pas beaucoup insisté sur le choix de ce paramètre. Dans notre cas il parait pertinent de choisir σ égal à notre niveau de volatilité « target ». En supposant que le cash utilisé dans la stratégie est bien rémunéré au taux sans risque, la stratégie « vol contrôlée » se situe bien dans les hypothèses de diffusion du modèle de Black and Scholes. Nous pouvons donc déduire aisément les prix des options. A titre d'exemple, pour une stratégie avec un volatilité « target » à 10%, de maturité 1 an (nous utiliserons des taux supposés nuls dans cet exemple et pour la suite) :

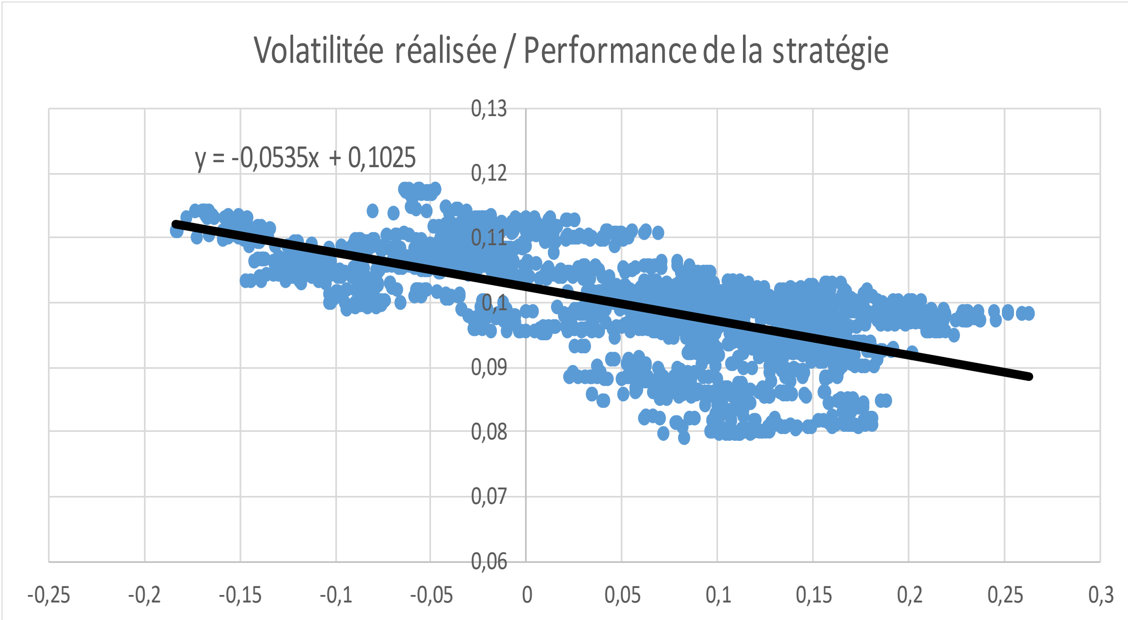
Strike	65%	70%	75%	80%	85%	90%	95%	100%	105%	110%	115%
Prix Put/Call	0,00%	0,00%	0,01%	0,04%	0,20%	0,71%	1,89%	3,99%	2,06%	0,95%	0,39%
Volatilité implicite	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%

On peut comparer ces résultats avec les prix des options de même maturité sur MSCI world :

Strike	65%	70%	75%	80%	85%	90%	95%	100%	105%	110%	115%
Prix Put/Call	1,05%	1,12%	1,52%	2,03%	2,70%	3,92%	5,52%	7,57%	5,12%	3,20%	1,80%
Volatilité implicite	32%	28%	26%	24%	22%	21%	20%	19%	18%	17%	16%

Comme attendu, les prix des options de la stratégie vol-contrôlée sont moins chers que les prix sur le benchmark du marché. Ceci est juste une illustration de notre niveau de risque (choisi) moindre. Par ailleurs, on observe que les volatilités correspondantes au prix de marché des options sur MSCI world ne sont pas constantes. Pour l'instant, dans le cadre du modèle de Black and Scholes nous avons utilisé un unique paramètre de volatilité σ. L'observation des prix de marchés montre qu'un unique paramètre de volatilité ne permet pas de valoriser correctement tous les prix de marchés. On observe notamment que les prix des put sont plus chers. Il est devenu commun d'utiliser les prix de marché et d'en déduire avec la formule de Black and Scholes la volatilité équivalente au prix pour chaque strike observé. On parle de volatilité implicite. Sur les options il est usuel d'observer un skew avec des volatilités implicites plus élevées sur les strikes à la baisse que sur les strikes à la hausse (du marché). Cela traduit une impression des intervenants que le marché aura plus tendance à « corriger » brutalement, qu'à croitre…De même, on peut observer dans le marché que les volatilités implicites sont plus élevées sur les ailes, sur des niveaux assez éloignés de la valorisation actuelle du sous-jacent. En fait lorsqu'on regarde les primes, cette « courbature » permet une revalorisation d'options qui seraient proche de zéro : « no free lunch ». Dans l'utilisation que nous avons faites du modèle de Black and Scholes nous n'avons rien de tout cela : pas de skew, des primes proches de zéro…est-ce normal ?

Etudions donc le comportement de la volatilité d'une stratégie « vol-contrôlée » en fonction du spot. Pour ce faire nous allons représenter la volatilité réalisée par la stratégie relativement à la performance de la stratégie sur une période de 1 an. Pour l'exemple nous allons étudier le SPXT10UE : la stratégie publiée par S&P, sur le SPX 500 (les 500 plus grandes capitalisation américaines), avec un objectif de volatilité à 10%.



La stratégie réalise bien une volatilité autour de 10%. Par contre on constate qu'elle varie de 8% à 12%. On peut même observer une certaine dépendance entre la performance de la stratégie et la volatilité réalisée, lorsque le marché baisse cette dernière est plus élevée. Ces données historiques suggèrent l'existence d'un skew. Il est d'autant plus important de le prendre en compte que lorsqu'on parle d'option de protection de la stratégie (Put), c'est dans les mouvements baissiers qu'il faut gérer la convexité du profil de l'option. Une première approche peut être de simplement introduire un « skew de volatilité implicite » lors d'un pricing d'options en Black&Scholes. On rappelle que le marché d'options sur ces stratégies représente plusieurs dizaines de milliards d'euro d'encours et concerne largement les assureurs et fonds de pensions. Les options ainsi traitées sont échangées de grè à grè (OTC), avec les avantages et les inconvénients que nous avons déjà abordés.

B. Volatilité locale :

Nous avons vu précédemment les limites du modèle de Black & Scholes, son paramètre de volatilité unique et la réalité des prix de marchés. Une solution « tactique » régulièrement utilisée par le marché est l'utilisation de nappes de volatilités implicites pouvant prendre en compte la terme-structure (dépendance à la maturité) et le skew du marché (dépendance au strike) : il s'agit de définir une fonction σ (T,K) telle que l'utilisation de la valeur de la fonction dans la formule de Black & Scholes en lieu et place du paramètre de volatilité permette de valoriser correctement l'option. Cette solution n'est que « tactique », dans le sens où il ne s'agit pas de décrire une diffusion du sous-jacent. L'absence de modèle et de diffusion devient rapidement problématique dès que l'on cherche à valoriser des instruments financiers qui ne sont pas de simples options (vanilles).

Dans le cadre des options sur les stratégies à volatilité contrôlée, nous souhaiterions diffuser les trajectoires (jour par jour) du sous-jacent risqué, et donc de la stratégie.

Une solution est apparue dans les années 90, il s'agit de proposer une fonction $\sigma(t,S_t)$ telle que :

$$dS_t = r\, S_t\, dt + \sigma(t, St)\, S_t\, dW_t$$

a) Formule de Dupire

La fonction $\sigma(t,S_t)$ est déterminée par la formule de Dupire de façon à vérifier l'ensemble des prix de marchés. Pour rappel, le prix d'un call de maturité T et de strike K est $C(T,K)=E(e^{-rT}(S_T-K)^+)$.

La démonstration repose sur l'application de la formule d'Itô à la semi martingale $e^{-rt}(S_t - K)^+$. Puisque la fonction $f(x) = x^+$ n'est pas C^2, la formule d'Itô classique ne s'applique pas directement. Nous allons régulariser la fonction à l'aide de f_ε

$$f_\varepsilon(x) = \frac{(x+\varepsilon/2)^2}{2\varepsilon}1_{-\varepsilon/2\leq x\leq\varepsilon/2} + x1_{x>\varepsilon/2}$$

Il est clair que f_ε est 2 fois différentiable et différente de f seulement si $|x| < \varepsilon/2$. De plus, on a :

$$f'_\varepsilon(x) = \frac{(x+\varepsilon/2)}{\varepsilon}1_{-\varepsilon/2\leq x\leq\varepsilon/2} + 1_{x>\varepsilon/2} \text{ et } f''_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}1_{-\varepsilon/2\leq x\leq\varepsilon/2}$$

L'application de la formule d'Itô standard à $e^{-rt}f_\varepsilon(S_t - K)$ entre T et T + θ donne :

$$e^{-r(T+\theta)} f_\varepsilon(S_{T+\theta} - K) - e^{-rT}f_\varepsilon(S_T - K) = -r\int_T^{T+\theta} e^{-rt}f_\varepsilon(S_t - K)dt + \int_T^{T+\theta} e^{-rt}f'_\varepsilon(S_t - K)dS_t + \frac{1}{2}\int_T^{T+\theta} e^{-rt}f''_\varepsilon(S_t - K)\,\sigma(t,St)^2S_t^2dt$$

En prenant l'espérance de chaque terme, on trouve :

$$e^{-r(T+\theta)} E[f_\varepsilon(S_{T+\theta} - K)] - e^{-rT} E[f_\varepsilon(S_T - K)] = -r\int_T^{T+\theta} e^{-rt}E[f_\varepsilon(S_t - K)]dt + \int_T^{T+\theta} e^{-rt}E[f'_\varepsilon(S_t - K)S_t]rdt + \frac{1}{2}\int_T^{T+\theta} e^{-rt}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} (K+x)^2\,\sigma(t,St)^2p(t,K+x)\,dxdt$$

où p est la densité de S.
En passant à la limite ε → 0 :

$$C(T+\theta, K) - C(T,K) = -r\int_T^{T+\theta} C(t,K)dt + r\int_T^{T+\theta} e^{-rt}E[S_t1_{St\geq K}]dt + \frac{1}{2}\int_T^{T+\theta} e^{-rt}(K)^2\,\sigma(t,K)^2p(t,K)dt$$

$$= rK\int_T^{T+\theta} e^{-rt}P(S_t\geq K)dt + \frac{1}{2}\int_T^{T+\theta} e^{-rt}(K)^2\,\sigma(t,K)^2p(t,K)dt$$

En divisant les deux parties par θ et en passant à la limite θ → 0 :

$$\frac{\partial C}{\partial T} = rKe^{-rt}P(S_T\geq K) + \frac{1}{2}e^{-rt}(K)^2\,\sigma(T,K)^2p(T,K)$$

En observant que :

$$e^{-\mathrm{rt}}\mathrm{P}(S_T \geq \mathrm{K}) = -\frac{\partial C}{\partial K} \text{ et } e^{-\mathrm{rt}}\mathrm{p}(\mathrm{T},\mathrm{K}) = \frac{\partial^2 C}{\partial^2 K}$$

On en déduit la formule de Dupire :

$$\sigma\,(\mathrm{T},\mathrm{K}) \quad = \sqrt{2\frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK\frac{\partial C}{\partial K}}{K^2\frac{\partial^2 C}{\partial^2 K}}}$$

En supposant que le marché donne un continuum de prix de marché quelque soient le strike et la maturité, il est possible de calculer les dérivées partielles et donc de calculer la volatilité locale, puis d'utiliser cette volatilité locale dans des diffusions et le pricing de produits dérivés.

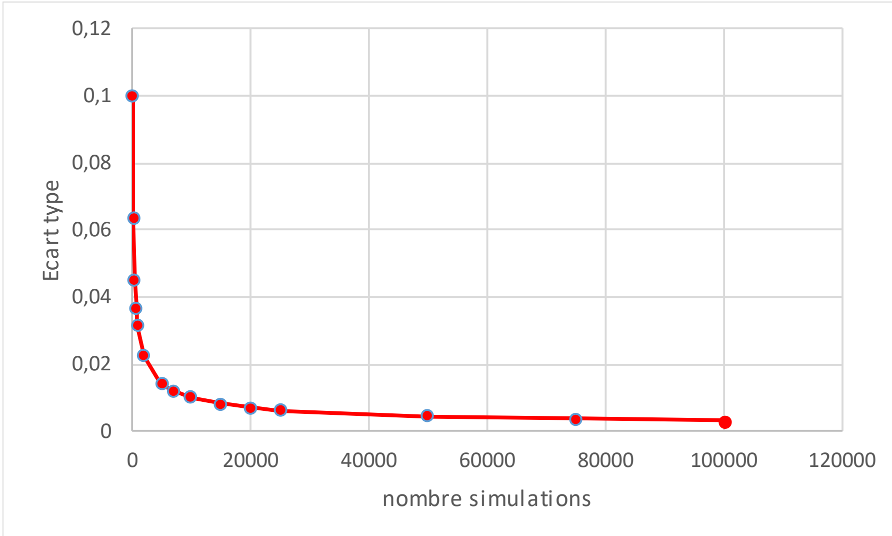
b) Méthode de Monte Carlo :

L'utilisation d'une volatilité locale nous a permis de déduire la diffusion complète du sous-jacent risqué vérifiant les prix d'options vanilles de marché. A partir de cette diffusion comment allons-nous valoriser les options sur les stratégies à volatilité contrôlée ? Jusqu'ici, avec le modèle de Black and Scholes nous avons pu utiliser une formule dite fermée. Ici nous allons recourir à une autre méthode numérique : les simulations de Monte Carlo. Cette méthode est basée sur le théorème central limite.

En fait, nous nous intéressons au pricing d'un seul flux. Pour un produit dérivé payant $f(S_T)$, à la date T, le prix peut s'écrire $B(t,T)E[f(S_T)]$. B(t,T) représente la valorisation en t d'un « zero bond » qui paye 1 à la maturité T. Sa valorisation dépend de la courbe de taux d'actualisation des flux. Cette valeur sera supposée déterministe dans notre cas. S_T représente ici la valeur du sous-jacent ou de la stratégie à maturité. Il est donc nécessaire d'estimer E[f(ST)]. Sous l'hypothèse que le moment d'ordre 2 est fini, du théorème central limite :

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(S_T^i) - \mathrm{E}[\mathrm{f}(S_T)]\right) \rightarrow \mathrm{N}(0,\mathrm{var}(\mathrm{f}(S_T)))$$

Où $S^i{}_T$ (i = 1....n) sont des tirages aléatoires respectant la distribution de S_T et la convergence est en loi. De façon moins abstraite on peut dire que la moyenne des observations converge vers l'espérance de la variable, vers le prix que l'on cherche. Ci-dessous, un profil de convergence des simulations vers l'espérance recherchée.



Pour rappel, la diffusion de l'actif risqué dans le modèle de volatilité locale est :

$$dS_t = r\,S_t\,dt + \sigma\,(t, S_t) S_t\,dW_t$$

On se rappelle que dW_t représente ici les variations incrémentales d'un processus de Wiener de variations normales, indépendantes entre elles et identiquement distribuées. Ce sont ces variations qu'il va falloir générer de façon aléatoire afin de simuler une trajectoire de l'actif risqué puis reproduire de nombreuses fois des simulations pour converger vers l'espérance.

En réalité, nous ne cherchons ici pas simplement à simuler l'actif risqué trajectoire par trajectoire mais la stratégie dynamique à volatilité contrôlée :

$$\begin{cases} \mathrm{dSt} = \mathrm{r\,St\,dt} + \sigma\,(\mathrm{t,St})\mathrm{St\,dWt} \\ R(t) = RealisedVolatility\,(t) \\ Ut = U(t-1)(\dfrac{targetvol}{R(t-1)}\mathrm{dSt} + \left(1 - \dfrac{targetvol}{R(t-1)}\right) r\,dt) \end{cases}$$

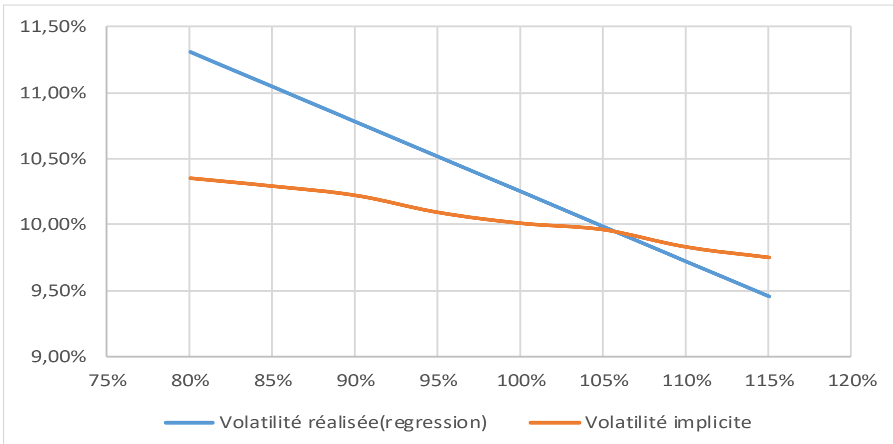
Ainsi nous avons la possibilité de valoriser un grand nombre de payoffs. Une des principales limites de cette méthode est sa consommation en temps. Il existe des méthodes pour avoir une variance plus faible, mais dans la mesure où nous n'avions un usage du programme qu'à des fins d'étude, aucune de ces méthodes n'a été implémentée. On remarque ici que l'estimateur de volatilité exponentielle se prête mieux à cet exercice qu'un estimateur standard.

c) Valorisation en Volatilité locale :

Par construction, la volatilité locale va vérifier la valorisation des options vanilles du sous-jacent (de l'indice) concerné. En utilisant les méthodes de simulations de Monte Carlo, on peut donc valoriser des options sur les stratégies à volatilité contrôlée. En utilisant la formule de Black and Scholes, on implicite les volatilités par strike :

Strike	65%	70%	75%	80%	85%	90%	95%	100%	105%	110%	115%
Volatilité implicite	NA	NA	NA	10,35%	10,29%	10,22%	10,09%	10,01%	9,96%	9,83%	9,75%

On remarque que cette modélisation permet d'introduire un léger skew sur les prix des options. Pour obtenir une certaine stabilité des prix, notamment sur les strikes éloignés de la monnaie, il a été nécessaire d'augmenter très significativement le nombre de trajectoires simulées (plus de 200 000). En effet, le nombre de trajectoires valorisant ces options est assez faible. En dessous de 80%, les primes sont trop proches de zéro pour permettre une implicitation de la volatilité. En comparant ces prix avec la régression que nous avions obtenue sur le nuage de points composés par les performances et volatilités réalisées passées, on obtient :



Attention, l'utilisation du nuage de points ne permet pas de donner une vraie méthode de valorisation, mais elle permet de donner une idée du résultat en portage de la gestion de l'option relativement à la performance finale. Par exemple, on constate que la majorité des trajectoires en dessous de 90% se sont réalisée avec une volatilité supérieure à 10.75%. Dans le cadre de la valorisation d'une option de strike 90%, la majorité des trajectoires donnant de la valeur à l'option ont bien une volatilité réalisée supérieure à l'objectif de 10%. Cet effet, sera légèrement compensé par les trajectoires n'aboutissant pas à une performance inférieure à -10%, ces trajectoires ont une volatilité réalisée moins importante. Pour autant, ce gain sera limité par une convexité moindre de l'option sur ces trajectoires.

Finalement, l'introduction de la volatilité locale a permis de revaloriser les options de vente, mais cette revalorisation ne semble pas suffisante au vu des données historiques.

C. Volatilité stochastique :

a) Description :

Une observation statistique des séries temporelles des rendements de la majorité des indices met en évidence une propriété statistique simple : l'amplitude des mouvements de marché est plus importante dans les mouvements baissiers. De plus cet excès d'amplitude (et donc de volatilité) perdure plusieurs jours. Une vision discrète permettrait d'introduire des modèles de GARCH. Dans le cadre des modèles de diffusion, il s'agit de modèles à volatilité stochastique. Etudions le plus connu d'entre eux, le modèle de Heston. Le spot suit une diffusion de type :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^S$$

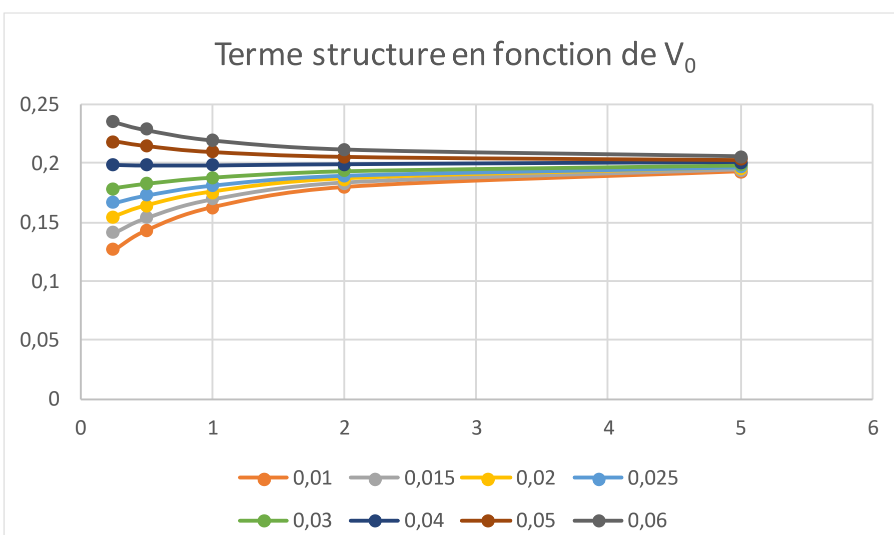
et la variance instantanée suit elle-même une diffusion dite « process CIR » :

$$dV_t = k(V_\infty - V_t)dt + \lambda \sqrt{V_t} dW_t^V$$

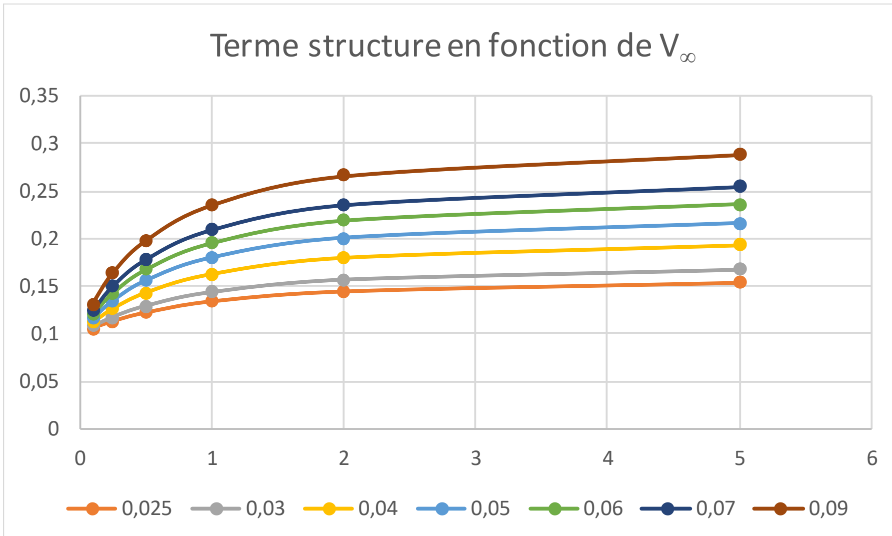
- W^S *et* W^V *sont des processus de Wiener de correlation* ρ,
- V_∞ est la variance longue, ou la variance moyenne à long terme. Lorsque t tend vers l'infini l'espérance de la variance instantanée est V_∞.
- k est le taux de convergence de V_t vers V_∞
- λ est la volatilité de la volatilité, ou **vol de vol**, et détermine la variance de la variance instantanée.
- Si les paramètres vérifient la condition $2kV_\infty > \lambda^2$ (connue comme la condition de Feller) alors le processus est strictement positif

b) Calibration :

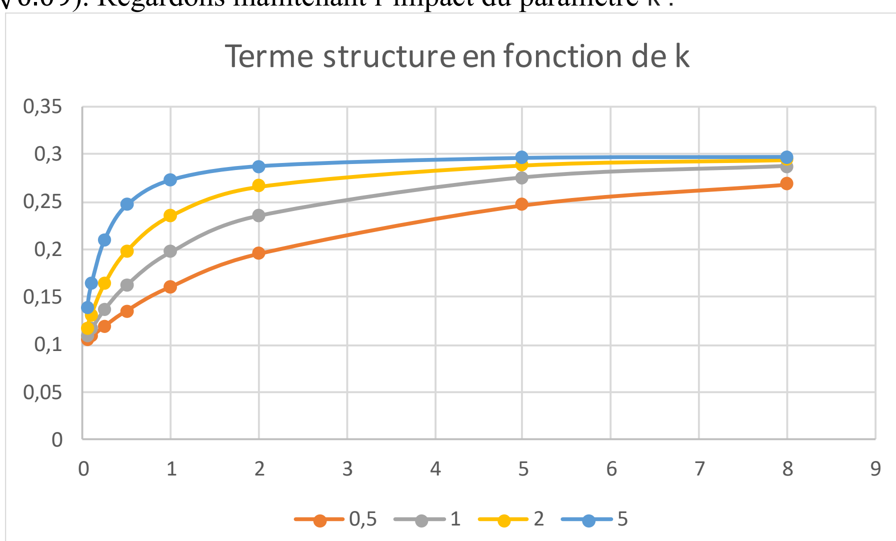
Précédemment dans le cadre de la volatilité locale, par construction de la diffusion, les prix des options vanilles étaient systématiquement vérifiés. Dans cette nouvelle diffusion, rien n'assure que la diffusion Heston vérifie bien les prix des options vanilles visibles dans le marché. Il est donc nécessaire de calibrer les paramètres du modèle Heston de façon adéquate. Pour ce faire nous allons utiliser une minimisation des écarts de prix au carré. Un des avantages du modèle Heston est qu'il permet aussi d'avoir une valorisation des options vanilles avec des formules fermées. Cette propriété est très utile pour un usage intensif du modèle. Observons l'impact des paramètres du modèle à volatilité stochastique sur les prix d'options. Le premier paramètre à définir dans ce modèle est la valeur de V_0, la valeur initiale de la variance. Faisons varier cette valeur de 0.01 à 0.06 et observons les volatilités implicites du modèle pour les options ATM (At The Money, le strike est égal au forward) de maturité variant de 3 mois à 5 ans :



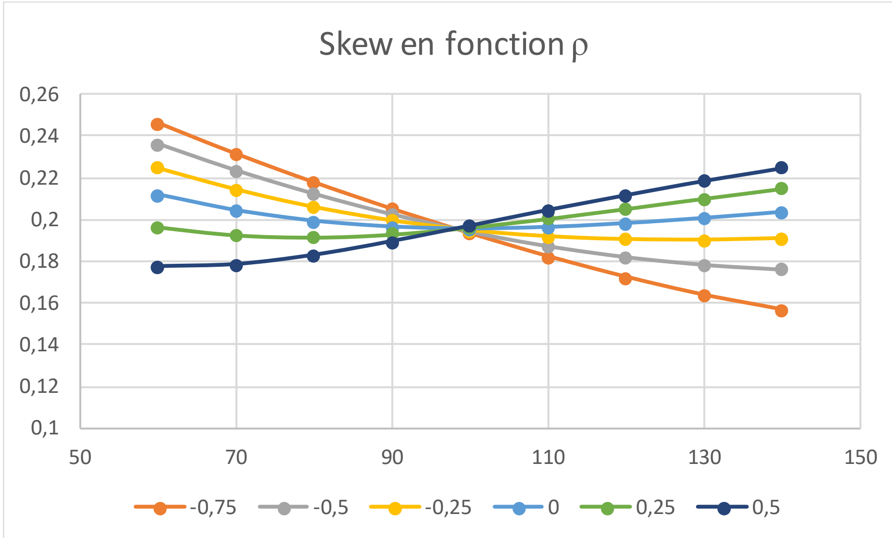
Le paramètre V_0 impacte principalement les prix des options de petites maturités. V_0 correspond à la variance d'une option de maturité 1 jour avant que la variance puisse elle-même diffuser. Avec le temps elle converge vers le paramètre V_∞. On devine que dans notre exemple V_∞ vaut 0.04. Réciproquement faisons varier la valeur de V_∞ :



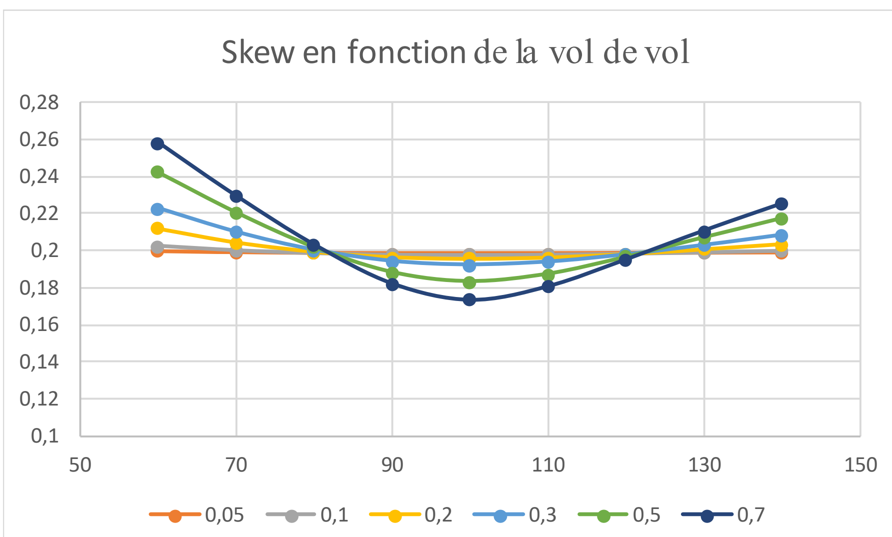
Cette fois-ci le paramètre V_∞ semble guider la volatilité des options de longues maturités. Pour un paramètre V_∞ de 0.09, la volatilité implicite semble bien converger vers une volatilité de 30% ($\sqrt{0.09}$). Regardons maintenant l'impact du paramètre k :



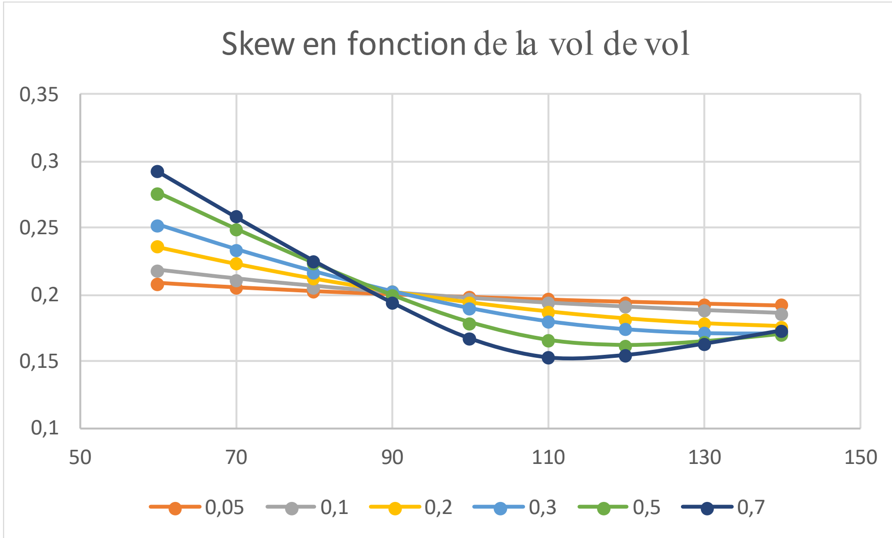
C'est le paramètre k, le taux de convergence, qui va déterminer la vitesse de convergence du paramètre V_0 vers V_∞. Plus ce taux est élevé et plus la terme structure convergera rapidement vers V_∞. Nous n'avons pour l'instant uniquement parlé de la terme structure de la volatilité implicite ATM générée par le modèle Heston. Nous allons maintenant étudier les paramètres relatifs au skew.



Le paramètre de corrélation ρ entre les processus a un impact significatif sur le skew généré. Lorsque la corrélation est négative, la variance monte lorsque le sous-jacent baisse, et les options de strike inférieures au forward seront donc revalorisées. Dans le monde des actions, il est donc habituel de voir des calibrations avec des corrélations négatives. Dans d'autres classes d'actifs, le skew ressemble plus à un smile (sourire) qu'à un skew (simple pente). Regardons si le dernier paramètre peut permettre de reproduire ce cas de figure. S'il n'y a pas de corrélation et de vol de vol, le modèle perd tout simplement tout son intérêt : tous les strikes ont la même volatilité implicite. Dès que la « vol de vol » n'est plus nulle, la diffusion Heston génère un smile, de la convexité.



En associant les paramètres de corrélation et de vol de vol, la calibration des skew peux s'enrichir. Avec une corrélation négative de 50%, on peut obtenir :



Au final nous calibrerons les paramètres V_0, V_∞ et k afin de vérifier la terme structure du marché concerné, et les paramètres de corrélation et de vol de vol seront utilisés afin d'être au plus proche du skew des prix de marchés.

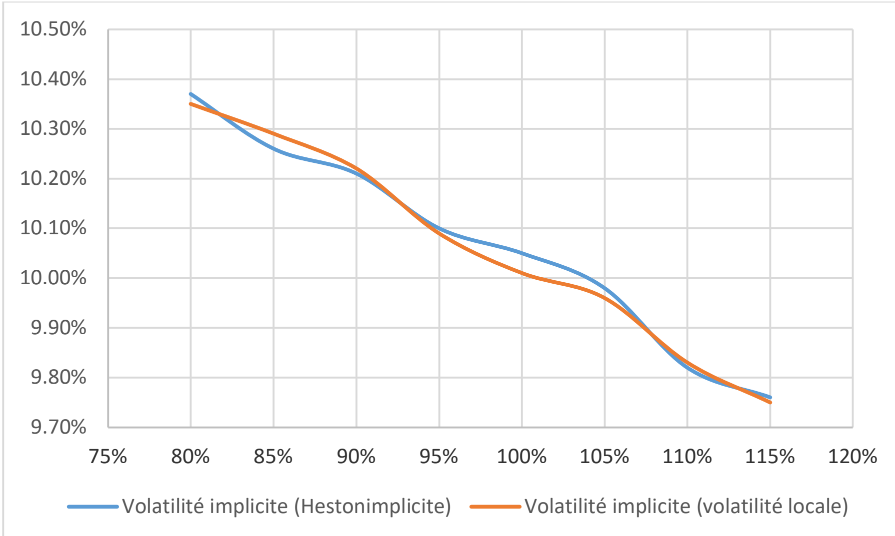
c) Prix des options

Une première approche de calibration du modèle Heston consiste à calibrer les paramètres du modèle sur les prix de marché des options. Pour ce faire, on va valoriser les options à l'aide d'une formule fermée.

L'utilisation de cette formule permettra une calibration aisée à l'aide d'une optimisation par moindre carré. En calibrant le modèle sur des prix d'options de maturité 1 an. La calibration aboutit à un set de paramètre :

$$\begin{cases} \rho = -59\% \\ \lambda = 118\% \\ k = 74\% \\ V_\infty = 0.06 \end{cases}$$

Avec cette calibration, et à l'aide de la méthode de simulations de Monte Carlo, on peut aisément calculer les prix des options sur les stratégies à volatilité contrôlée de maturité 1 an.

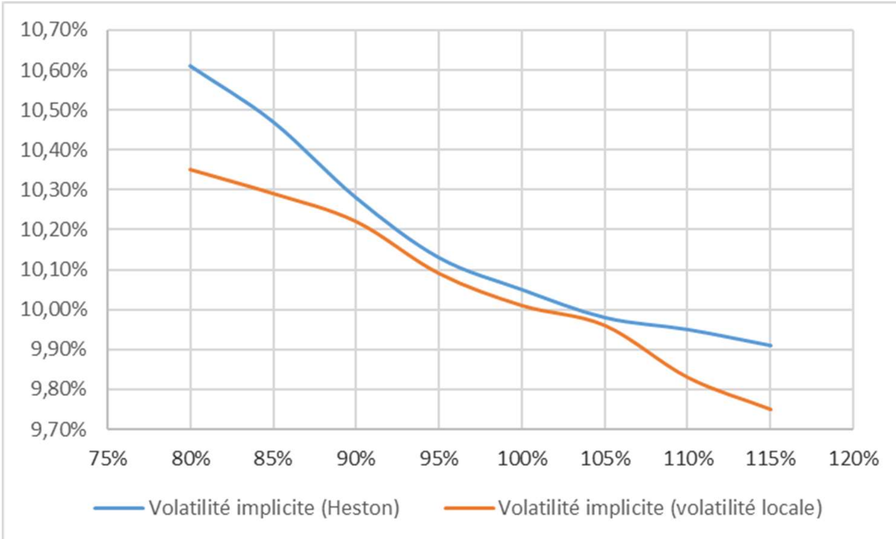


Les résultats obtenus avec cette calibration sont assez décevants. En calibrant le modèle sur le prix de vanilles de marchés, les modèles de volatilité locale et de Heston aboutissent à des prix très proches.

Dans la mesure où l'impact observé jusque-là est quasi inexistant, nous allons procéder à une deuxième calibration qui laisse plus de place à l'effet de modèle en calibrant le modèle sur l'historique des variations de la nappe de volatilité implicite. Les inputs seront donc les variations des volatilités implicites ATM du sous-jacent (SPX). L'outil de calibration a été développé pour calibrer le modèle dans l'étude d'autres payoffs fortement dépendant au modèle de volatilité stochastique (Autocall, cliquet...) mais conviendra à notre étude. Le résultat de cette calibration :

$$\begin{cases} \rho = -81\% \\ \lambda = 243\% \\ k = 106\% \end{cases}$$

Ces résultats suggèrent que la réalisation du skew est supérieur à celle implicitée par le marché. De même, cette calibration suggère plus de convexité (car plus de vol de vol) que la nappe de volatilité implicite du marché.

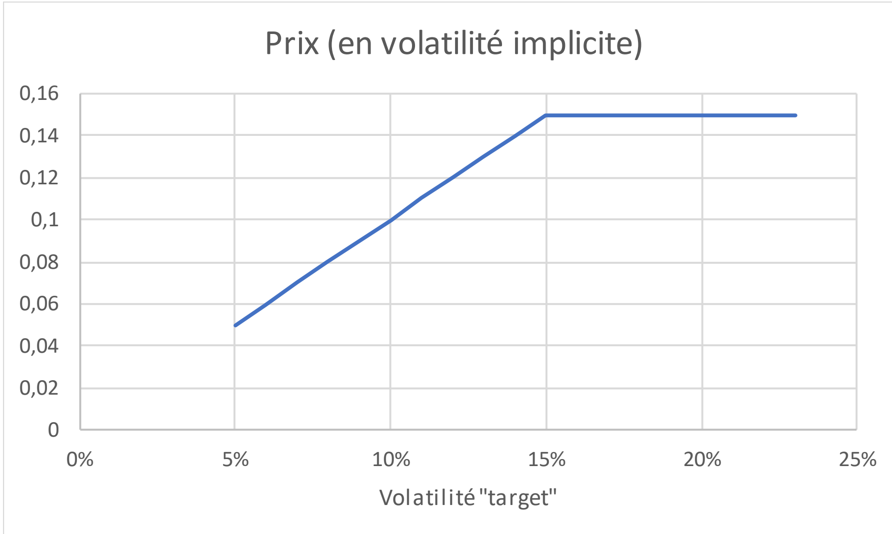


Le modèle de Heston avec cette nouvelle calibration a permis de légèrement revaloriser le prix des options. En réalité cet impact est très limité : moins de 0.1 volatilité sur le strike 90% (à peine 4 bp sur la prime) et 0.25 point de volatilité sur le strike 80% (à peine 2 bp de prime). On remarque que le modèle de Heston a permis de revaloriser les puts mais aussi les calls : le modèle a introduit un peu plus de skew mais aussi un peu plus de « smile ».

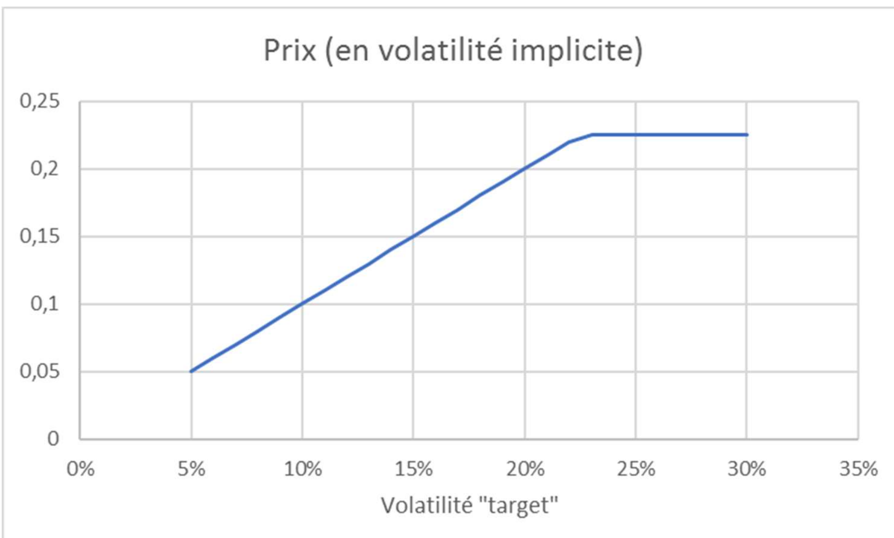
d) Volatilité attendue et exposition maximale

Jusqu'ici nous avons toujours observé des prix d'options de stratégie à volatilité contrôlée dont les primes (ou volatilités implicites) sont proches de la volatilité « objectif ». En réalité, ceci n'est pas systématique, c'est le résultat du choix des niveaux de volatilité recherché relativement au niveau de volatilité du sous-jacent risqué et du niveau d'exposition maximum.

Considérons une stratégie à volatilité contrôlée sur un sous-jacent risqué ayant une nappe de volatilité plate à 15%. En supposant une exposition maximum à 100%, faisons varier le niveau de la volatilité de la stratégie et observons les variations du prix du put à la monnaie de maturité 1 an. Le prix est bien-sûr croissant avec le niveau de risque. Cependant on observe que le prix se stabilise dès que le niveau de risque excède le niveau de volatilité du sous-jacent risqué. En effet, dans le cas d'une exposition maximale à 100% et d'un niveau de risque supérieur à celui de l'actif risqué, la stratégie sera en permanence complètement allouée en actions et l'option sur la stratégie est équivalente à une option vanille sur l'actif risqué. Quel est l'intérêt de choisir une stratégie ayant un niveau de risque supérieur au niveau actuel de la volatilité du sous-jacent ? D'une part cela peut être un choix délibéré d'un investisseur pour profiter de la dés-allocation automatique en cas de correction de marché. Par ailleurs, cela peut aussi être un élément permettant la systématisation d'une stratégie de couverture. En effet les options de protection ne varieront pas (ou peu) en fonction des conditions de marchés, là ou une option vanille peut varier librement. Par exemple l'investisseur pourra anticiper un budget quasi fixe pour la couverture d'une telle stratégie dans les années à venir.



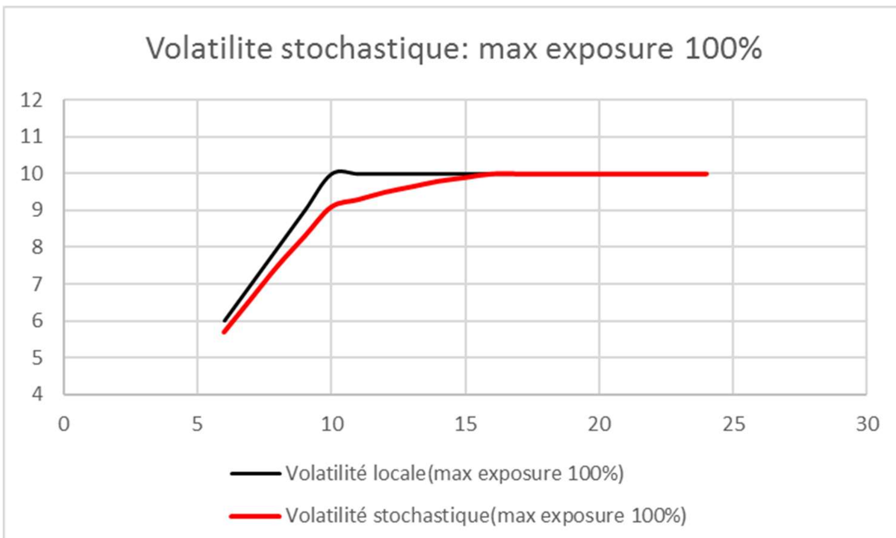
Une des particularités du cas précèdent est d'avoir fixé l'exposition maximum à 100%, là où le marché s'autorise souvent une part de leverage avec une exposition maximum à 150% (voir 200%). Répétons donc l'exercice précèdent avec une exposition maximum à 150% :



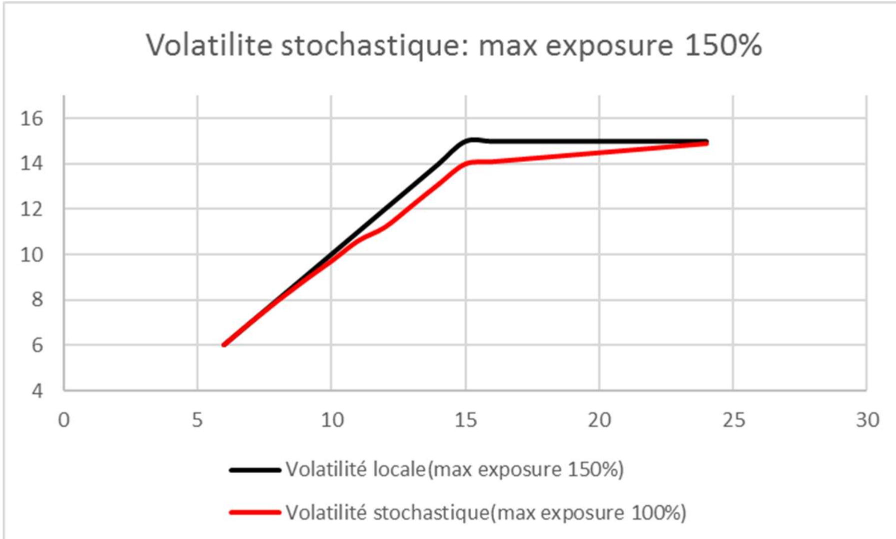
Cette fois-ci, la stabilisation des prix ne se fait plus à 15% de volatilité mais à partir de 22.5%, soit une fois et demie la volatilité de l'actif risqué. C'est à ce niveau que la stratégie s'alloue en permanence en actif risqué.

Nous avons regardé l'impact du choix de la volatilité « target » sur le prix (ou la volatilité implicite), nous pouvons regarder réciproquement l'impact du niveau de volatilité implicite du marché de l'actif risqué (15% précédemment) sur le prix de l'option sur la stratégie à volatilité contrôlée. Des résultats précédents, on peut anticiper (à raison) que lorsque le niveau « target » choisi est inférieur au niveau théorique d'allocation maximale (niveau de volatilité de l'actif risqué multiplié par l'exposition maximale), l'option sur la stratégie n'a pas de vega : la variation du niveau de volatilité de l'actif risqué n'impactera pas le prix de l'option sur la stratégie. A l'inverse lorsque le niveau target est supérieur au niveau théorique d'allocation maximale, le profil de vega de l'option sur stratégie est similaire à celui d'une option vanille.

Pour illustrer, prenons l'exemple d'une stratégie avec une volatilité « target » à 10% et une exposition maximale à 100%. Si la volatilité de l'actif risqué est supérieure à 10%, l'option sur la stratégie n'a pas de vega. Dès que la volatilité de l'actif risqué devient inférieure à 10%, l'option affiche le même vega qu'une option vanille sur l'actif risqué, de même maturité et de même strike. Concrètement, si l'investisseur ayant acheté l'option sur la stratégie choisit de gérer le vega de sa position, ce dernier va être long vega lorsque la volatilité est inférieure à 10% et n'aura pas de position de vega si la volatilité est supérieure à 10%. Si l'investisseur traite les options vanilles afin de couvrir son vega, il vendra des options lorsque la volatilité est basse et devra racheter ces options lorsque la volatilité monte. Ces « aller-retour » lui seront très défavorables. En réalité, l'investisseur ou l'assureur ne gère que très rarement sa position de vega. Par contre, sa contrepartie –souvent une banque- gère la position inverse et bénéficie des « aller-retour ». Ce gain peut être rendu à l'acheteur de l'option dans le prix initial. En utilisant un actif risqué ayant une volatilité de 10%, en faisant varier le niveau de la volatilité « target », pour une option à la monnaie de maturité 1 an, nous obtenons en volatilité stochastique :



La volatilité stochastique donne bien un gain de valorisation au vendeur de l'option. Pour une volatilité « target » de 10% (égale à la volatilité de l'actif risqué), le gain obtenu avec le modèle de volatilité stochastique (et la calibration précédente), est de l'ordre d'un point de volatilité. Ce niveau de volatilité, où la diffusion de la volatilité impact la valorisation va varier avec l'exposition maximale de la stratégie. Avec une exposition maximale en actif risqué fixée à 150% :



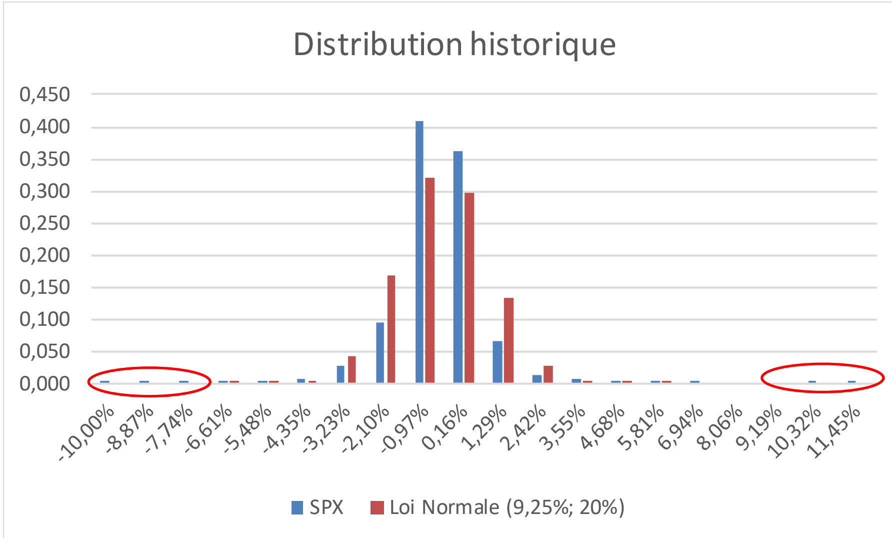
Cette fois-ci, l'impact de la volatilité stochastique se matérialise autour de 15% de volatilité « target », soit 150% de la volatilité de l'actif risqué. En réalité cet effet n'est visible que dans quelques rares cas de structuration de la stratégie. En effet, nous avons choisi une volatilité de l'actif risqué fixée à 10% et nous avons fait varier la volatilité « target » avec des valeurs bien supérieures : cela correspond à des cas assez rares. La majorité des investisseurs préfèrerons choisir des niveaux de volatilité « target » inferieurs au niveau de volatilité implicite de l'actif risqué. L'investisseur minimise la prime de l'option et évite de payer la surprime de risque comprise dans la volatilité implicite de l'actif risqué.

D. Modèle à saut :

a) Présence de sauts :

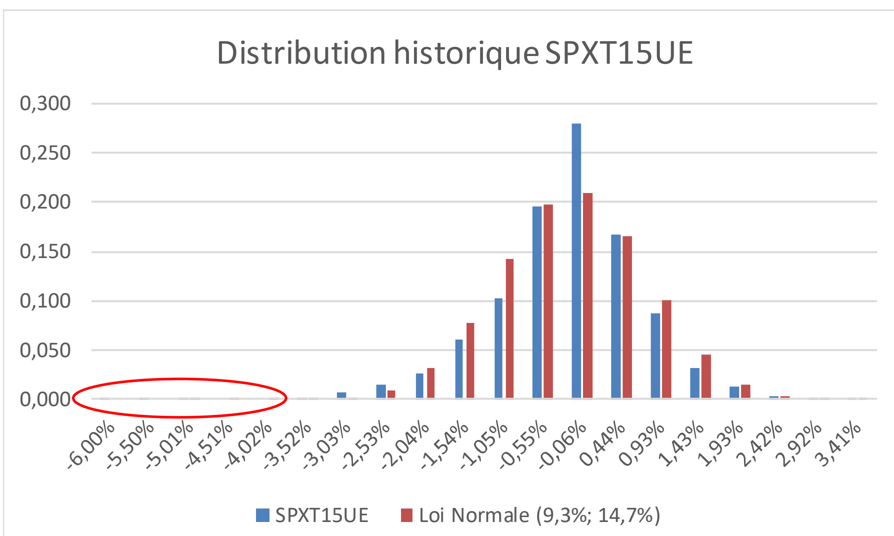
1) Evidence statistique :

Nous avons jusque-là toujours utilisé les modèles mathématiques de diffusion sans même regarder les distributions historiques des rendements de l'actif risqué ou de la stratégie elle-même. Regardons les distributions des rendements quotidiens entre 2004 et 2014.



Nous avons comparé ces rendements et leur distribution à celle d'une loi normale de moyenne 9.25% et volatilité 20% (annuellement). Ces paramètres correspondent aux estimateurs de moyenne et de volatilité de l'actif risqué sur cette période. La moyenne de 9.25% suggère que globalement, l'actif risqué (le SPX total return) a monté (même en incluant la crise des subprimes). La volatilité réalisée est en réalité de 20.25% sur cette période que nous avons approximé par 20% sur le graphique). Comme attendu, la distribution historique ne correspond pas exactement à une distribution normale : on peut voir des réalisations « extrêmes » autour de -10% et +10%. Ces réalisations ne sont pas attendues par une loi normale.

Observons la distribution historique de la stratégie à volatilité contrôlée : SPXT15UE, le S&P 500 total return avec une volatilité target à 15%.



Comme discuté précédemment, le rendement moyen de cette stratégie est quasi identique à celui de l'actif risqué avec un risque (une volatilité) réduite : 14.7% au lieu de 20.25%. On constate que les réalisations très négatives restent trop fréquentes relativement à une distribution normale mais elles sont réduites en amplitude. En effet, sur l'actif risqué nous avons vu des observations de « krack » de l'ordre de 10%, ce qui aurait pu impacter la strategie jusqu‘à 15% sur la stratégie du fait d’une exposition maximale à 150%. Il n’en est rien, la correction la plus forte est de l’ordre de 6% : le mécanisme de contrôle du risque a bien fonctionné, il a permis une désallocation de la stratégie avant le « krack ». A l’inverse, on observe que les fortes progressions observées sur l’actif risqué - jusqu’à +10% - ont disparu sur la stratégie. En réalité il s’agit de mouvement de « rebond » du marché après une forte correction. Ces « rebonds » ne sont pas captés par la stratégie qui a déjà réduit son allocation en actif risqué.

Nous avons qualifié les variations extrêmes d’ « inattendues ». Certes, au cours des dix années de 2004 à 2014, il y a eu quelques observations non compatibles avec une distribution normale, mais peut-on conclure à l’incompatibilité de la distribution normale d’un point de vue statistique. Nous avons procédé à un test du khi2.

Test du khi² :	
Khi² (Valeur observée)	1222605871567570,000
Khi² (Valeur critique)	27,587
DDL	17
p-value	< 0,0001
alpha	0,05

Classe	Borne inférieure	Borne supérieure	Effectif (Données)	Effectif (Distribution)	Khi²
1	-0,100	-0,089	2	0,000	748523647,633
2	-0,089	-0,077	1	0,000	551419,937
3	-0,077	-0,066	3	0,000	31095,590
4	-0,066	-0,055	3	0,022	406,997
5	-0,055	-0,044	12	0,778	161,829
6	-0,044	-0,032	16	13,244	0,574
7	-0,032	-0,021	70	108,040	13,394
8	-0,021	-0,010	237	424,783	83,013
9	-0,010	0,002	1031	808,378	61,309
10	0,002	0,013	914	746,308	37,679
11	0,013	0,024	163	334,157	87,668
12	0,024	0,035	35	72,361	19,290
13	0,035	0,047	18	7,543	14,495
14	0,047	0,058	4	0,376	34,878
15	0,058	0,069	4	0,009	1780,936
16	0,069	0,081	1	0,000	9934,512
17	0,081	0,092	0	0,000	0,000
18	0,092	0,103	0	0,000	0,000
19	0,103	0,115	1	0,000	642743427203,172
20	0,115	0,126	1	0,000	1221962379021560,000

Le test du KHI2 confirme que la distribution n'est pas normale. De même nous pouvons procéder à un test du KHI2 sur la stratégie à volatilité contrôlée.

Test du khi² :	
Khi² (Valeur observée)	397357,614
Khi² (Valeur critique)	27,587
DDL	17
p-value	< 0,0001
alpha	0,05

La distribution de la stratégie n'est pas non plus normale. Le refus de cette représentation s'explique assez facilement par la distribution sur les ailes, les tails distributions. Il est donc normal d'introduire des sauts dans la diffusion pour diffuser correctement l'actif risqué et la stratégie.

2) *Evidence du marché*

Il s'agit ici de rechercher dans les produits dérivés déjà existants sur le marché et les sous-jacents les plus liquides les indicateurs permettant de valoriser les variations extrêmes. Parmi les possibilités, on pourrait regarder les prix des options de très courtes maturités ou les Varswap.

Les sous-jacents les plus liquides ont maintenant des maturités de l'ordre de la semaine voire tous les deux jours le S&P 500. Les diffusions de types Black & Scholes, volatilité locale et à volatilité stochastique prévoient que les primes des options qui ne sont pas dans la monnaie convergent vers zéro lorsque l'échéance approche. En réalité, on observe que la valeur temps de ces options disparait plus lentement qu'attendu et qu'il est rare de voir un put valant vraiment zéro. Les varswaps sont des produits permettant de traiter la variance réalisée d'un sous-jacent. Chaque jour le varswap enregistre le carré de la variation du sous-jacent. Une variation de 10% est donc 100 fois plus grosse qu'une variation de 1% dans la formule du varswap. Ce produit peut dont être sensible aux sauts. En réalité l'analyse de l'impact des sauts sur ces payoffs est assez complexe car il nécessite de séparer l'impact de la distribution de type volatilité locale de celle des sauts.

On va donc préférer utiliser des produits qui nous donnent beaucoup d'informations sur les sauts et uniquement sur les sauts : les « daily crash puts ». Le produit est défini par son sous-jacent, sa maturité maximale, son niveau d'exercice : si une variation quotidienne est plus basse que le niveau d'activation, le produit s'active et paye un put de maturité immédiate et ayant le niveau d'activation comme strike. La formule peut s'écrire :

$$1_{\frac{S_t}{S_{t-1}}<K}\,1_{min_{u<t}\left(\frac{S_u}{S_{u-1}}\right)>K} Max(0, K - \frac{S_t}{S_{t-1}})$$

Ces produits sont fréquemment cotés dans le marché et s'échangent à hauteur de quelques centaines de millions de dollars par semaine. Les principaux sous-jacents disponibles sont le SPX, le SX5E et le MSCI World. Les maturités traitables varient de 3 mois à 12 mois. Par exemple en décembre 2014, les prix des options sur le SPX de maturité 1 an étaient :

Prix de crash put 1 an SPX				
Strike	Mid market	B&S 15%	Volatilité locale	Volatilité stochastique
60	0,10%	0%	0%	0%
65	0,15%	0%	0%	0%
70	0,22%	0%	0%	0%
75	0,34%	0%	0%	0%
80	0,50%	0%	0%	0%
85	0,75%	0%	0%	0%
90	1,08%	0%	0,01%	0,01%
95	1,90%	0,01%	0,20%	0,23%

On constate que les prix de marchés ne sont pas du même ordre de grandeur que les prix obtenus avec les autres modèles. Dès le strike 90%, les modèles décrits précédemment valorise l'option à quasiment zéro alors que le marché l'évalue à 1.08%. La probabilité d'avoir de grosses variations négatives et donc des sauts est bien sous-évaluée par les modèles décrits.

b) Modèle Heston Bates

1) Diffusion

Ce modèle a été proposé par David Bates en 1996. Il s'agit d'une évolution du modèle Heston que nous avons déjà vu :

$$dS_t = (\mu - f\mu_j)S_t dt + \sqrt{V_t}S_t dW_t^S + J_t S_t dN_t$$
$$dV_t = k(V_\infty - V_t)dt + \lambda\sqrt{V_t}dW_t^V$$
$$\ln(1 + Jt) \sim N(\ln(1 + \mu_J) - 0.5\,\sigma^2_J\ ,\ \sigma^2_J\ )$$

- W^s et W^v sont des processus de Wiener de corrélation ρ
- V_∞ est la variance longue, ou la variance moyenne à long terme. Lorsque t tend vers l'infini l'espérance de la variance instantanée est V_∞.
- k est le taux de convergence de V_t vers V_∞
- λ est la volatilité de la volatilité, ou **vol de vol**, et détermine la variance de la variance instantanée.
- N_t est un processus de Poisson d'intensite f donnant une probabilité d'un saut sur l'intervalle [t ; t+dt] égal à fdt
- J_t est le saut aléatoire, le logarithme de J_t suit une loi gaussienne

Dans la mesure où nous avons montré que la diffusion de vol de vol n'avait pas un grand impact sur les stratégies à volatilité contrôlé, nous utiliserons les paramètres de Heston déjà calibrés précédemment et nous nous concentrerons sur la calibration des paramètres supplémentaires liés aux sauts.

2) Calibration

Il s'agit ici de déterminer les paramètres ad-hoc au modèle de saut d'Heston Bates. Comme développé plus haut, nous allons faire cette calibration afin d'être au plus proche sur les prix de crash put. Nous allons montrer ci-dessous qu'en utilisant les hypothèses de base du modèle (indépendance entre chaque saut, distribution du saut connu) et en faisant quelques hypothèses supplémentaires nous pouvons trouver une formule fermée pour valoriser les « daily crash puts ».

Pour commencer, et comme déjà discuté nous n'allons pas prendre en compte la diffusion liée à la stochasticité de la volatilité. Pour faire simple, le prix ne sera guidé que par les sauts. Les prix vus au-dessus confirment que cette hypothèse est valable dès les strike 90%. Tandis que pour le strike 95% il s'agira d'une approximation. En supposant qu'il n'y a qu'un saut activant le crash put possible, on obtient :

$$P=\sum_{i=1}^{T} e^{-ri}X(K)\ \alpha(K)(1-\alpha(K))^{i-1} = e^{-r}X(K)\ \alpha(K)\frac{1-(1-\alpha(K))^{T}e^{-rT}}{1-(1-\alpha(K))e^{-r}}$$

avec :

$$\hat{J} = \ln\left(1+J\right)$$

$$\alpha(K)= P\left(\ln K > \hat{J}\,1_{N_{t+1}-N_t\neq 0}\right)$$

$$X(K)= E\left(K - e^{\widehat{(J_t)}1_{N_{t+1}-N_t\neq 0}} \middle| \widehat{(J_t)}1_{N_{t+1}-N_t\neq 0} < \ln K\right)$$

La formule se comprend assez facilement. Le "crash put" n'a de valeur intrinsèque que lors du premier saut journalier plus grand que la distance au strike. On valorise donc le "crash put", en sommant sur chaque jour jusqu'à la maturité la probabilité qu'il y ait un saut suffisamment grand α(K), qu'il soit le premier depuis le début du produit ($(1-\alpha(K))^{i-1}$ pour le i -ème jour), et la valeur du "crash put” une fois activée est représentée par la valeur X(K). La diffusion de J étant gaussienne, les espérances sont facilement calculables.

Avec cette formule de valorisation fermée, il sera donc possible de calibrer facilement les paramètres de saut par minimisation des écarts au carré.

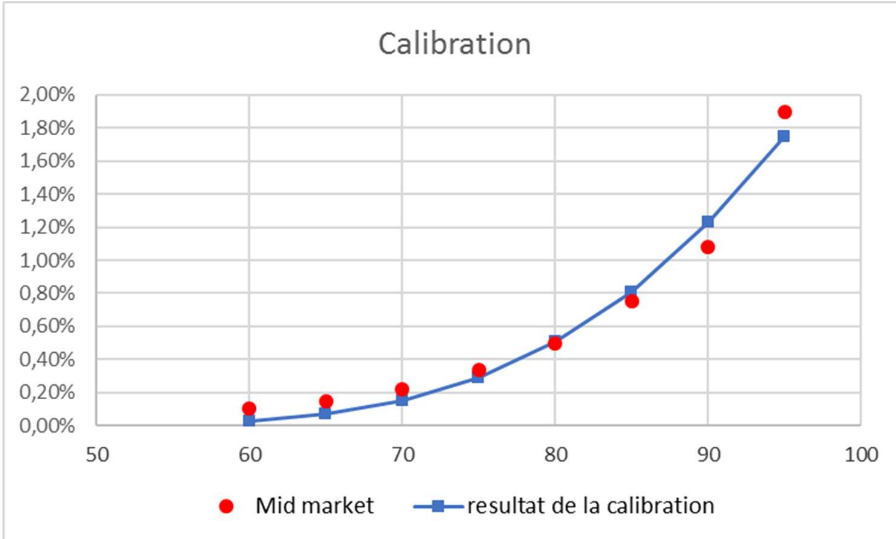
Cependant comme indiqué plus haut, nous disposons (grâce au marché) de prix sur plusieurs maturités sur les différents strikes. Regardons les prix sur les options de maturités 6 mois et 12 mois :

Strike	6 mois	12 mois
60	0,05%	0,10%
65	0,07%	0,15%
70	0,11%	0,22%
75	0,17%	0,34%
80	0,25%	0,50%
85	0,38%	0,75%
90	0,53%	1,08%
95	0,95%	1,90%

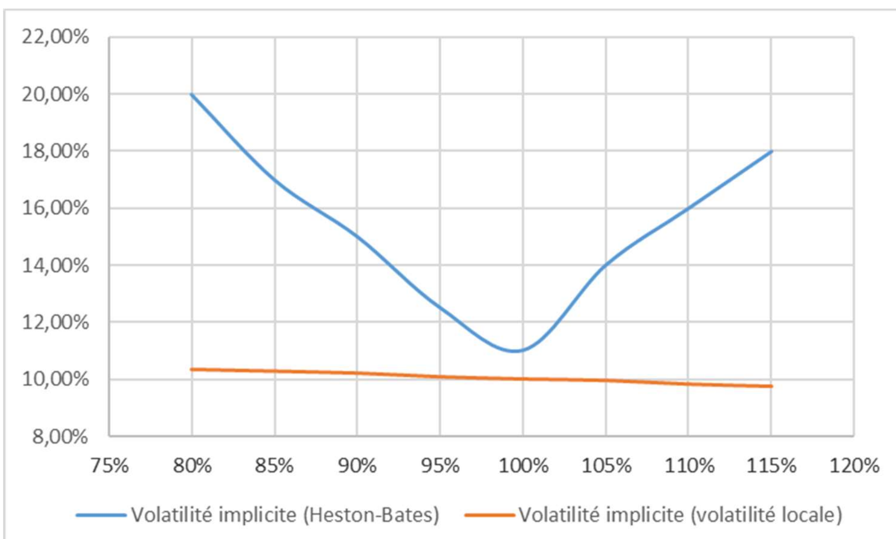
En réalité, ces deux séries de prix nous montrent que notre modèle reste partiellement insuffisant pour vérifier tous les prix en même temps. En effet les prix des « daily crash puts » semblent linéaires avec la maturité. Les prix des options de maturités 12 mois sont presque exactement deux fois plus grands que les prix de maturité 6 mois. Ce résultat est incompatible avec un paramètre de poisson f constant : en effet un évènement de saut lors des 6 premiers mois annule la protection pendant les 6 derniers mois. Une option de maturité 12 mois est la somme d’une option de maturité 6 mois et d’une option de maturité 6 mois commençant dans 6 mois en absence de saut pendant cette période « d’attente ». Cette condition devrait dévaloriser le prix de l’option 12 mois et aboutir à une valeur inférieur à deux fois la valeur de l’option 6 mois. Il ne sera donc pas possible de calibrer tous les « daily crash puts » en même temps. Nous ferons donc le choix de ne calibrer que les options de même maturité que les options sur stratégie à volatilité contrôlée étudiées.

c) *Prix des options*

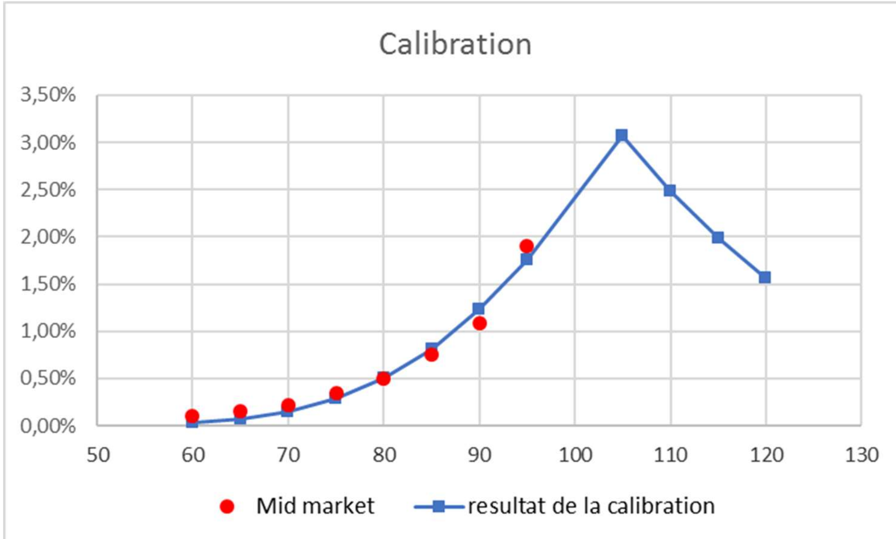
Nous pouvons maintenant procéder à la calibration en utilisant une méthode des moindres carrés. Il s’agit de calibrer les trois paramètres de fréquence de saut, amplitude moyenne du saut et variance du saut sur les prix des différents strikes des options de maturité un an.



La calibration semble bien fonctionner, tous les prix calibrés sont très proches des prix de marché. Nous allons donc pouvoir évaluer les options sur stratégie avec volatilité contrôlée. Nous allons utiliser une stratégie ayant une volatilité « target » de 10% et une volatilité sur l'actif risqué de 10%.



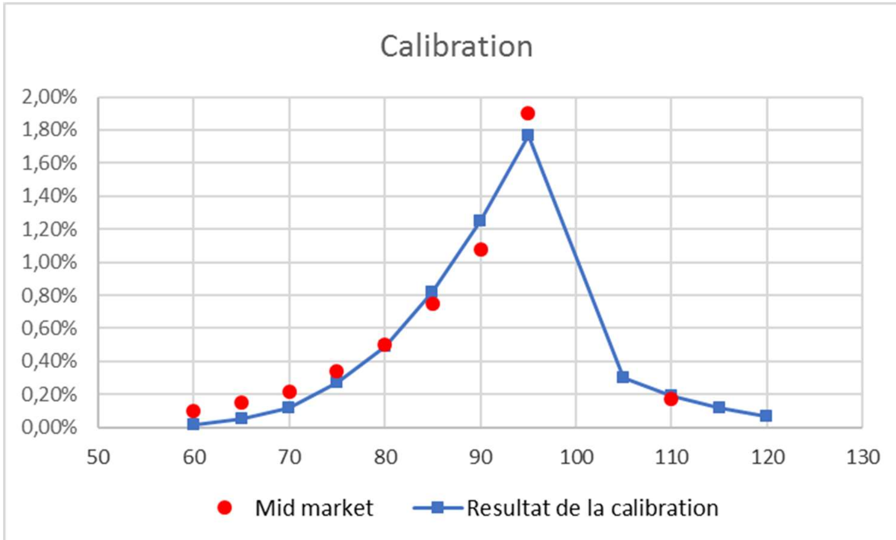
Nous constatons que la présence de sauts a revalorisé toutes les options. Sur les options à la monnaie, le prix s'est renchéri d'un point de volatilité : la présence de sauts implique une volatilité réalisée supérieure à la volatilité « target ». De plus ce modèle permet de revaloriser les puts, de créer un skew sur les puts, ce qui est conforme à nos attentes. Cependant, on peut être quelque peu surpris par le « smile » sur les calls. Pourquoi une calibration revalorisant les « daily crash puts » fait aussi monter la valeur des calls ? Revisitons la calibration, les prix des « daily 'crash' call » et les paramètres calibrés.



$$\begin{cases} f = 32.36\% \\ \mu_J = 1.48\% \\ \sigma_J = 24.8\% \end{cases}$$

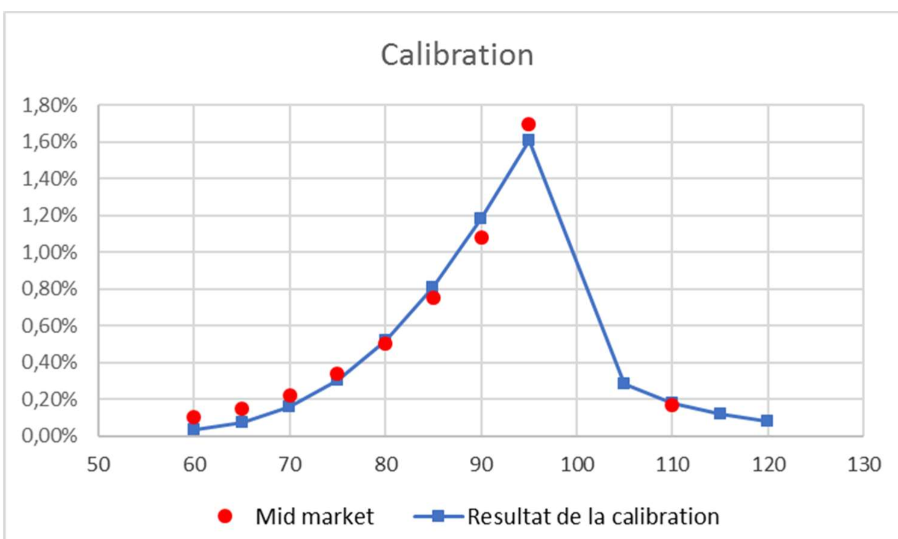
Cette calibration pose finalement un gros problème : bien que n'étant pas des données de calibration, les « daily 'crash' call » sont plus valorisés que les puts...Sur les paramètres cela se traduit par un saut moyen positif, mais avec une grosse volatilité pour valoriser aussi les « daily crash puts ». Assez curieusement, le marché des « daily 'crash' call » est quasi inexistant. Il est très rare de voir des prix sur les calls, alors que les puts traitent plusieurs fois par semaine. L'intérêt de traiter et d'avoir un marché actif sur les puts s'explique par la nécessité de couvrir certains scenarios extrêmes de certains intervenants de marchés et notamment des institutionnels gérant des portefeuilles de CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance). Il est assez instinctif de comprendre l'intérêt d'acheter de la protection contre les scénarios de baisses extrêmes. A l'inverse, à la hausse, il est assez rare de voir de fortes amplitudes. De plus ces types de mouvements sont rarement spontanés : ils suivent en général une correction de marché. Cette configuration laisse donc le temps aux opérateurs de se préparer. L'intérêt pour des « daily 'crash' call » est donc moins évident. Les quelques marchés observés semblent suggérer un prix sur le call 110 de l'ordre de 15 à 20 points de base.

Nous allons donc recalibrer les prix des options « daily » en imposant une valeur de 17 bp sur le call de strike 110 de maturité 1 an. Cette option a bien-sûr une valeur nulle en volatilité locale. La calibration est moins élégante mais plus réaliste :



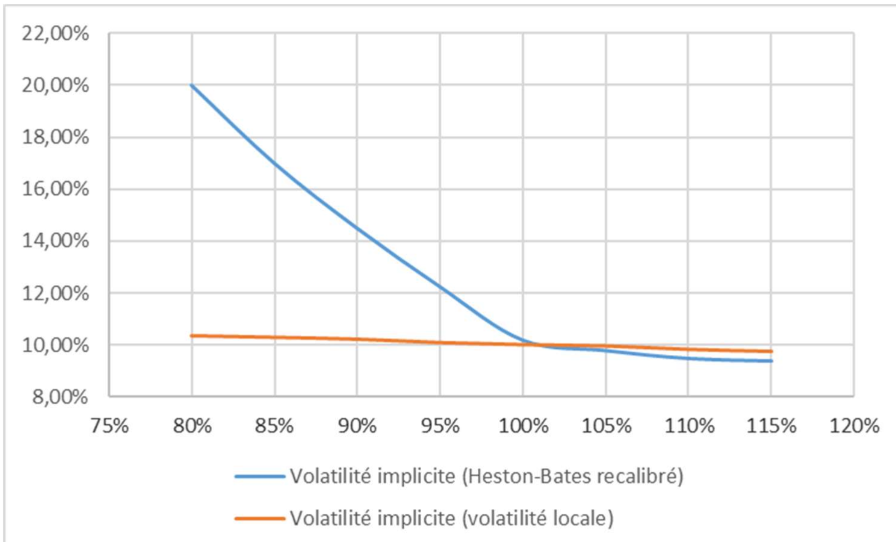
$$\begin{cases} f = 17.93\% \\ \mu_J = -13.9\% \\ \sigma_J = 18.44\% \end{cases}$$

L'amplitude moyenne des sauts est bien négative. Cependant on constate que la calibration est de moins bonne qualité sur les puts. Le prix du put de strike 95 ne semble pas coïncider avec la pente des prix sur les options de strike plus bas. En réalité il est probable que l'utilisation du modèle à saut par les intervenants de marchés (et donc de ceux qui sont market maker) soit un peu plus subtile que notre diffusion sur la « partie brownienne ». On se rappelle que le prix du put 95% n'était pas nul en volatilité locale. Le prix de cette option est donc la somme entre sa valeur dans une diffusion classique et la valeur en présence de sauts. Cela revient à dire que, dans notre calcul aboutissant à la formule fermée des « daily crash puts », l'hypothèse que nous avons faite en supprimant la composant classique est imprécise. Pour éviter de surévaluer la composante de saut, nous allons recalibrer en retranchant de la valeur du put 95% la valeur en volatilité locale : 20 bp. La calibration semble être plus proche des prix sur les puts de strike inférieur ou égal à 90%.



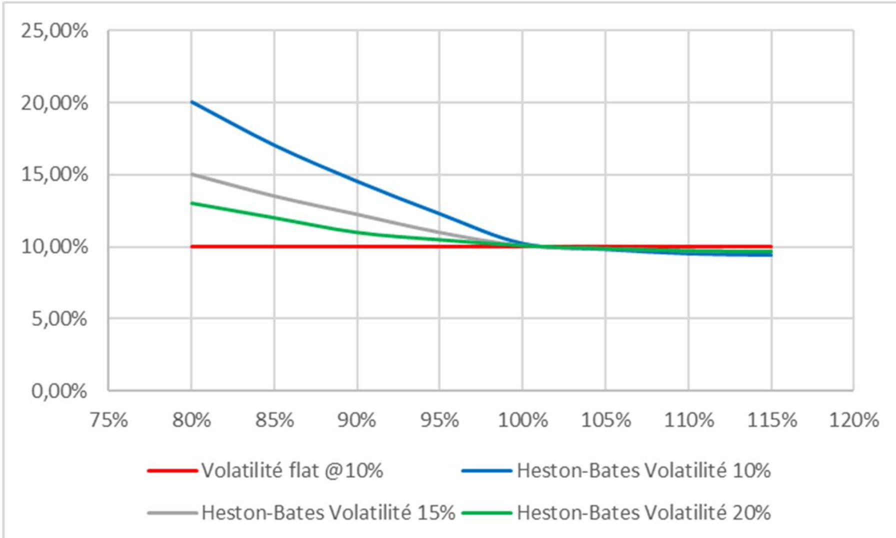
$$\begin{cases} f = 14.27\% \\ \mu_J = -15.58\% \\ \sigma_J = 20.41\% \end{cases}$$

Nous pouvons donc recalculer les prix des puts sur la stratégie à volatilité contrôlée et recalculer les volatilités implicites correspondantes :



Cette fois-ci l'option à la monnaie est à peine plus chère, l'excès de volatilité lié au saut est encore présent mais les sauts sont moins fréquents et la variance du saut est moindre. Nous avons toujours une forme de skew sur les puts. Cette fois ci les valeurs des calls n'ont pas été renchéries par le modèle à saut.

Nous avons fait ces calculs sur la base d'une stratégie à volatilité « target » à 10% et une volatilité (Black & Scholes) à 10%. En réalité cette seconde hypothèse n'est pas forcément adéquate dans la mesure où les volatilités implicites des principaux indices valent plus souvent de l'ordre de 15% ou 20% sur la maturité un an. Cette hypothèse a en plus des conséquences significatives dans nos calculs de prix d'options. Recalculons les prix avec des volatilités à 15% et 20%.



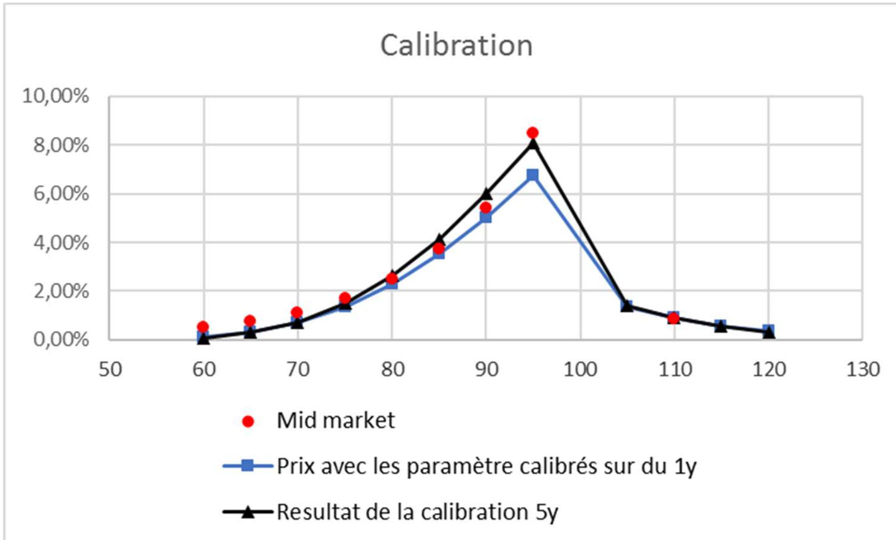
L'impact des sauts est maximal lorsque la volatilité est à 10%. Le choix d'une volatilité plus haute dans le modèle d'Heston-Bates atténue fortement l'impact des sauts dans les prix des options sur la stratégie. En réalité cet effet est assez prévisible : le niveau de la volatilité dans la diffusion brownienne va directement impacter l'allocation moyenne en actif risqué de la stratégie à volatilité contrôlée. Pour une « target » de 10% et une volatilité de 10%, l'allocation moyenne va être autour de 100%. Cette allocation moyenne sera de 66% pour une volatilité à 15% (la « target » reste à 10%) et de seulement 50% lorsque la volatilité est à 20%.

Nous avons très largement illustré l'impact de nos modèles en calculant directement la volatilité implicite correspondant aux prix trouvés. Cette démarche correspond aux usages sur la valorisation et l'étude des options vanilles. Cette représentation est d'autant plus appropriée dans notre étude, que cette nappe de volatilité donne immédiatement le surcoût généré par le modèle utilisé relativement à la volatilité « target ». Ce surcoût serait de 5 points de volatilité sur un strike de 80% : cela représente 50% du niveau de volatilité visé !!!! Quel est l'ordre de grandeur de l'impact en terme de prime ? Aussi est-il nécessaire d'illustrer ces niveaux de volatilité implicite avec les primes et les surcoûts correspondants. Quantifions ces impacts dans le cas de la volatilité « target » 10% et d'une volatilité du sous-jacent risqué à 15%.

Strike	80	85	90	95	100	105	110
Volatiltié implicite Heston Bates	15,00%	13,50%	12,25%	11,00%	10,10%	9,90%	9,75%
Primes correspondantes	0,41%	0,69%	1,24%	2,23%	4,06%	2,03%	0,88%
Primes Black & Scholes (10%)	0,04%	0,20%	0,71%	1,89%	3,99%	2,06%	0,95%
Surcout	0,37%	0,49%	0,53%	0,34%	0,07%	-0,04%	-0,07%

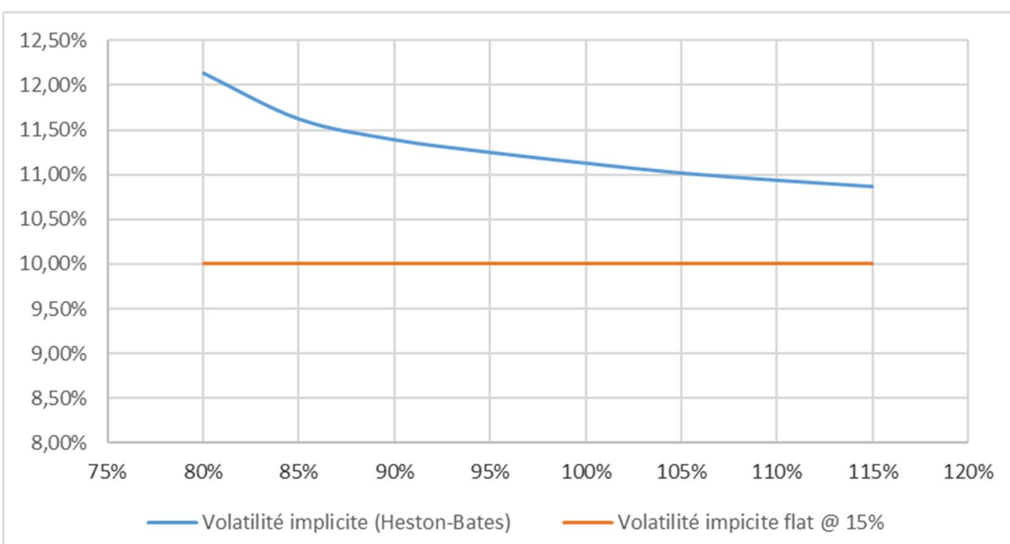
On constate que le surcoût est maximum en valeur absolue pour le strike 90%. En réalité, le surcoût relatif augmente lorsque le strike baisse. La présence de sauts revalorise très fortement les options qui n'ont quasi aucune valeur en cas de diffusion classique. La prise en compte de ces effets extrêmes est d'autant plus significative lorsque la valeur économique dans des conditions de marché normal est limitée.

Maintenant que nous avons trouvé un modèle qui permet d'avoir une meilleure valorisation des options sur stratégie à volatilité contrôlée de maturité d'un an, il est possible de procéder à des tests similaires sur des options plus longues, avec une maturité de cinq ans par exemple. La calibration aboutit à :



$$\begin{cases} f = 19.47\% \\ \mu_J = -15.25\% \\ \sigma_J = 18.59\% \end{cases}$$

Remarquons qu'en recalculant les prix obtenus avec la dernière calibration sur « daily crash puts » de maturité 1an, les « daily crash puts » de maturité 5 ans ne sont pas assez valorisés. Cette calibration supplémentaire est donc bien nécessaire. Cette recalibration impacte principalement le paramètre de fréquence des sauts ; ce dernier augmente de 35% alors que les autres paramètres sont stables. Il est donc possible de valoriser les options de maturité cinq ans sur une stratégie avec une « target » à 10% et une volatilité de l'actif risqué fixée à 15%.



Strike	80	85	90	95	100	105	110
Volatiltié implicite Heston Bates	12,13%	11,62%	11,39%	11,25%	11,13%	11,02%	10,94%
Primes correspondantes	2,84%	3,94%	5,51%	7,56%	10,01%	7,85%	6,09%
Primes Black & Scholes (10%)	1,72%	2,87%	4,46%	6,50%	9,00%	6,94%	5,27%
Surcout	1,12%	1,07%	1,05%	1,06%	1,01%	0,91%	0,82%

On retrouve la présence d'un skew, mais ce dernier est plus léger. Par contre on constate que toutes les options ont été revalorisées y compris les strikes supérieurs ou égaux à 100. La probabilité qu'il y ait au moins un saut augmente avec la maturité. Quelque soit la diffusion (un marché à la hausse ou à la baisse), il est très probable que la trajectoire inclura un saut et donc une sur-réalisation de la volatilité. Cet effet va donc revaloriser tous les strikes. Mais l'impact du modèle de saut est beaucoup plus homogène sur les diffèrent strikes. L'amplitude entre les strike en points de volatilité est plus faible, par contre l'impact en prime a augmenté avec la maturité. La valorisation de ce genre d'option pourrait donc être faite de façon plus grossière en rajoutant de l'ordre de 1% à la prime.

Le modèle de Heston-Bates nous a permis d'introduire des sauts et de calculer leur impact sur la valorisation des options sur les stratégies à volatilité contrôlé. L'existence de ces sauts est une réalité historique, mais c'est aussi un phénomène valorisé par le marché. Cette approche est d'autant plus utile qu'elle permet aussi d'impacter dans le prix des options des coûts relatifs à la VAR et stressed-VAR calculés sur les portefeuilles des banques (qui sont les principales pourvoyeuses de put).

Finalement ce n'est que sur ces niveaux de prix incluant l'impact des sauts, que les investisseurs (et donc les assureurs et fonds de pensions) peuvent espérer trouver une couverture qui leur permettra de garder une exposition aux marchés actions tout en minimisant le coût en SCR. De plus ce coût en prime sera stable dans le temps ce qui permettra à l'assureur de piloter sereinement sa couverture dans le temps.

3) Utilisations :

Certains investisseurs (fonds de pension ou assureurs) choisissent de mettre en place des programmes de placement en volatilité contrôlée. Ils peuvent faire le choix d'externaliser la gestion et l'allocation de la stratégie. Ce choix permet d'éviter le risque opérationnel et de réduire les coûts de gestion et de transaction : ces derniers seront à la charge de la contrepartie (une banque en général). La transaction se fait sous forme de TRS (Total Retrun Swap). L'investisseur reçoit la performance de la stratégie en échange de flux intermédiaires calculés sur un taux de référence et un "spread". L'évaluation de ce "spread" est l'enjeu des appels d'offres sur ce genre de transactions. Il est intéressant de noter que ces transactions ne font pas intervenir le déploiement du nominal lors de l'investissement ; la trésorerie de l'investisseur n'est pas utilisée. Nous avons vu que la stratégie de volatilité contrôlée est contracyclique en terme de consommation de SCR mais peut consommer beaucoup de SCR...

Une alternative plus courante est donc de mettre en place une stratégie associant un TRS avec un ou plusieurs puts. Quelque soit l'allocation de la stratégie, le SCR de l'ensemble est majorée par la distance du strike de couverture. En général, le strike choisi est 90% ou 85% sur des options de maturité 1 an. Ces stratégies sont souvent mises en place sur des sous-jacents globaux : MSCI world, MSCI Emerging Market, combinaison des deux... L'avantage de ces sous-jacents est une forte diversification et une volatilité réalisée moindre. De plus l'investisseur peux profiter du biais lié à l'asynchronisme entre la clôture des marchés asiatiques et américains. Toutes les banques n'ont pas les mêmes critères dans l'évaluation des prix. Les niveaux de volatilité "target" utilisés sont souvent entre 10 et 12%. L'allocation maximum de ces programmes est souvent supérieure à 100%. Les investisseurs qui choisissent 100% sont souvent ceux qui s'imposent des contraintes de non "leveraging". D'autres préfèrent autoriser des allocations à 150% voire 200%, même si cela renchérit le prix de la protection.

Un cas particulier et intéressant de cette structuration de plan d'investissement est la mise en place de stratégies de volatilité contrôlée sur un indice "low volatility" avec une allocation maximum à 100%. Avec un niveau "target" de 12% par exemple, les stratégies seront très souvent intégralement allouées en actions, mais l'absence de "leverage" et le gain dont nous avons discuté précédemment permettra d'obtenir un coût de couverture stable dans le temps majoré légèrement plus haut que le niveau "target" et sera souvent valorisé (en modèle Black and Scholes) en deçà du niveau "target". Cela semble être un compromis particulièrement intéressant pour les investisseurs ; certains investisseurs français et étrangers ont mis en place ce genre de programme d'investissement.

De plus, comme déjà abordé précédemment, certains assureurs ont la possibilité d'utiliser des EMTN pour investir à la fois en actions et sur les titres de dettes de banques. Si l'assureur souhaite le faire sans risque de capital (sur le risque action), il doit le faire en achetant un produit dérivé ayant un flux minimal à zéro. Ces payoffs sont souvent long vega et ont par définition une prime positive. En environnement de taux proches de zéro, il peut devenir difficile de financer cette prime. Une alternative observée est de réduite le coût de l'achat de la volatilité en achetant le payoff sur une stratégie vol contrôlée. Comme déjà indiqué, le choix de la "target" doit se faire en lien avec le niveau de volatilité observée, nous rappelons qu'il n'est pas très pertinent de choisir un niveau de 10% si la volatilité réalisée est en permanence autour de 50%. Ce genre de structure est pertinente lorsqu'il y a un écart significatif entre la volatilité réalisée moyenne et la volatilité implicite. C'est par exemple le cas sur le SPX :

- La présence de 500 entreprises dans l'indice contribue à réduire la volatilité de l'indice (diversification)
- Le déséquilibre sur le marché des options de maturité longues génère des volatilités implicites assez élevées : les assureurs et fonds de pensions achètent de grosses tailles de puts, et les produits d'investissement distribués génèrent aussi des positions vendeuse de volatilité dans les portefeuilles des banques et market-maker.

Le SPX et les indices globaux sont en général choisis par opposition au SX5E. Ce dernier n'a que 50 entreprises (diversification moindre) et les produits d'investissement distribués en Europe génèrent majoritairement des positions longues de volatilité dans les portefeuilles des acteurs du marché. L'équilibre entre volatilité réalisée et volatilité implicite est donc moins favorable. Une fois de plus il est possible de mettre en place ces montages sur les indices "low volatility" qui contribueront à une meilleure allocation en actions, une performance potentiellement et en tout cas historiquement meilleure, et évitera le surcoût lié au manque de liquidité sur le marché de la volatilité de ces indices.

Conclusion :

L'implémentation de la nouvelle règlementation Solvabilité II et les nouvelles conditions du marché de la dette poussent les assureurs et fonds de pensions européens (régulés par l'EIOPA) à faire preuve d'innovation dans leurs placements, notamment en actions. Les placements se doivent d'être performants, le moins risqué possible à terme, le moins volatile en cours de vie, et avoir un coût en capital règlementaire (SCR) acceptable. Il est donc devenu nécessaire de mettre en place des stratégies de couverture, de protection ou de reconsidérer la nature même de l'investissement. Il est par exemple possible d'optimiser l'investissement dans le seul but de diminuer la volatilité. Cela réduit par définition le risque et allège aussi le coût en cas de couverture. D'après les modèles d'allocation d'actifs de base, un tel choix est supposé réduire la performance de l'investissement. En réalité des études académiques ont démontré qu'il n'en était rien. Sur le long terme, un investissement se concentrant sur les actions à faible volatilité performe mieux. Ceci contribue à valider cette solution afin de maintenir une exposition aux actions.

Une autre alternative peut consister à mettre en place une stratégie à volatilité contrôlée. Cette gestion permet à l'investisseur de choisir son niveau de risque et de le maintenir stable dans le temps. Cette stratégie aura tendance à maximiser l'exposition en actions dans des marchés calmes et à diminuer l'exposition en cas de marchés agités. Ce niveau de risque limité et stable dans le temps peut aussi permettre de trouver des protections à la baisse (des put) à prix réduits et stables dans le temps. Cette stabilité est un atout pour planifier ses stratégies dans le temps et mettre en place des programmes de placements. Le prix réduit sera bien-sûr un atout, mais l'investisseur devra recourir à des modèles à sauts pour quantifier quel sera le gain réel en terme de prix et évaluer les niveaux des prix qu'il pourra trouver auprès de contreparties institutionnelles.

Il est possible d'utiliser simultanément ces deux solutions afin d'essayer de maximiser l'investissement. On peut cependant s'interroger sur certains risques relatifs à ces deux solutions. L'investissement dans un portefeuille à volatilité minimisée se fera-t-il sans surcoût relativement à un investissement dans un portefeuille plus standard ? L'investissement massif dans les sous-jacents à moindre volatilité ne risque-t-il pas de résorber la "Low Vol Anomaly" ? La diffusion des stratégies à volatilité contrôlée ne crée-t-elle pas un risque systémique ? L'utilisation par de nombreux investisseurs, pour des montants considérables, de méthodes de gestion similaires risque de créer des « résonnances » dans le marché avec des trous de liquidité. Ces stratégies ont été montrées du doigt lors de la correction de marché en août 2015 : en cas de faible réalisation de la volatilité une première correction de marché peut créer un effet boule de neige lorsque les stratégies se dés-allouent brutalement.

Quoiqu'il en soit ces stratégies gardent le vent en poupe et sont utilisées dans la majorité des classes d'actifs, voire dans des investissements diversifiés regroupant plusieurs classes d'actifs.

Bibliographie :

ACPR Banque de France. « Préparation à Solvabilité II Les rapports Solvabilité II ». 13 mai 2015 – version 1.0

COMMISSION EUROPÉENNE. « Systèmes de type « Risk-based capital ». Ref MARKT/2027/01 ». 11 octobre 2001.

AMRAE. « Impacts de SOLVABILITÉ 2 sur vos contrats d'assurances ». 22 SEPTEMBRE 2011

MARCIN FEDOR. « L'objectif de la réglementation prudentielle et son rôle dans l'allocation de l'épargne des sociétés d'assurance vie ». Janvier 2009

OPTIMIND : Les dossiers techniques d'information Optimind. « Solvabilité II : La mobilisation générale du marché ». Janvier 2011

Banque de France. « Placements financiers des sociétés d'assurance – France ». Juillet 2014

Lans Bovenberg, Casper Van Ewijk, 'Private pensions for Europe',20 Novembre 2011

Markowitz, H.M. (March 1952). "Portfolio Selection". The Journal of Finance. 7 (1): 77–91. JSTOR 2975974. doi:10.2307/2975974.

Black, Fischer., Michael C. Jensen, and Myron Scholes (1972). The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests, pp. 79–121 in M. Jensen ed., Studies in the Theory of Capital Markets. New York: Praeger Publishers.

Malcolm Baker, Harvard Business School and NBER.« Benchmarks as Limits to Arbitrage: Understanding the Low Volatility Anomaly ». Financial Analysts Journal Volume 67 • Number 1 ©2011 CFA Institute

Harry Markowitz. (1952). Portfolio Selection, Journal of Finance, 7 (1), 77-91.

Black, Fischer., Michael C. Jensen, and Myron Scholes (1972). The Capital Asset Pricing Model : Some Empirical Tests, pp. 79–121 in M. Jensen ed., Studies in the Theory of Capital Markets. New York: Praeger Publishers.

JP MORGAN. « Systematic Strategies Across Asset Classes Risk Factor Approach to Investing and Portfolio Management ». December 2013

Fischer Black & Myron Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy (1973).

Noémie Hadjadj-Gomes, "Quels instruments financiers est-il important de revaloriser précisément dans le calcul du SCR Marché ?", https://www.next-finance.net/Quels-instruments-financiers-est,7515?dssr=108

Philippe Foulquier, Philippe Touron, “Dérivés et comptabilité de couverture en IFRS : vers une (mé)connaissance des risques ?”, Dans Comptabilité Contrôle Audit 2008/3 (Tome 14), pages 7 à 38

Optimind Winter, “DE LA NORME IAS 39 À IFRS 9”, 13 novembre 2014, https://www.optimind.com/fr/newsroom/publications/2014/11/17/de-la-norme-ias-39-a-ifrs-9/

Bruno Dupire (1994). "Pricing with a Smile". Risk."Archived copy" *(PDF). Archived from* the original *(PDF) on 2012-09-07*. Retrieved 2013-06-14.

Heston, Steven L. *(1993). "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options". The Review of Financial Studies. 6 (2):*

David S Bates. Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in deutsche mark options. Review of Financial Studies, 9(1):69–107, 1996

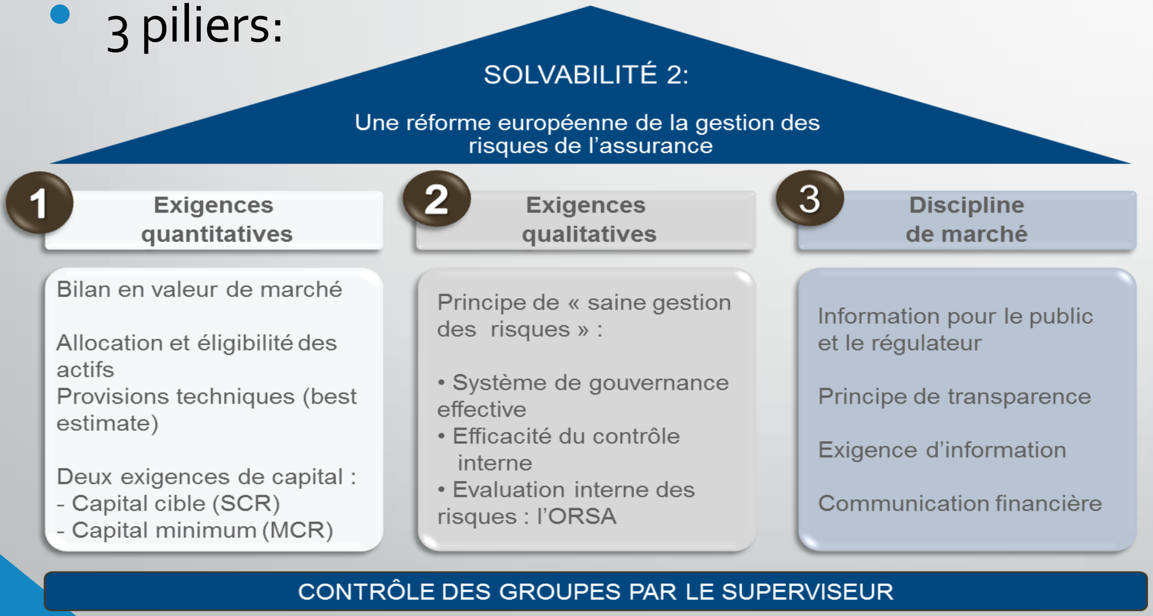
Des solutions d'investissement en actions pour des assureurs et des fonds de pension Européens

Yoram LOEB

Master actuariat CNAM-Institut des actuaires

Directive Solvabilité 2:

- En discussions depuis 2005: CEIOPS puis EIOPA
- Prise d'effet le 1e Janvier 2016
- 3 piliers:



Provisions:

- Best Estimate: valeur à laqulle l'engagement peux être cedé
- Marge de risqué

Fonds propres:

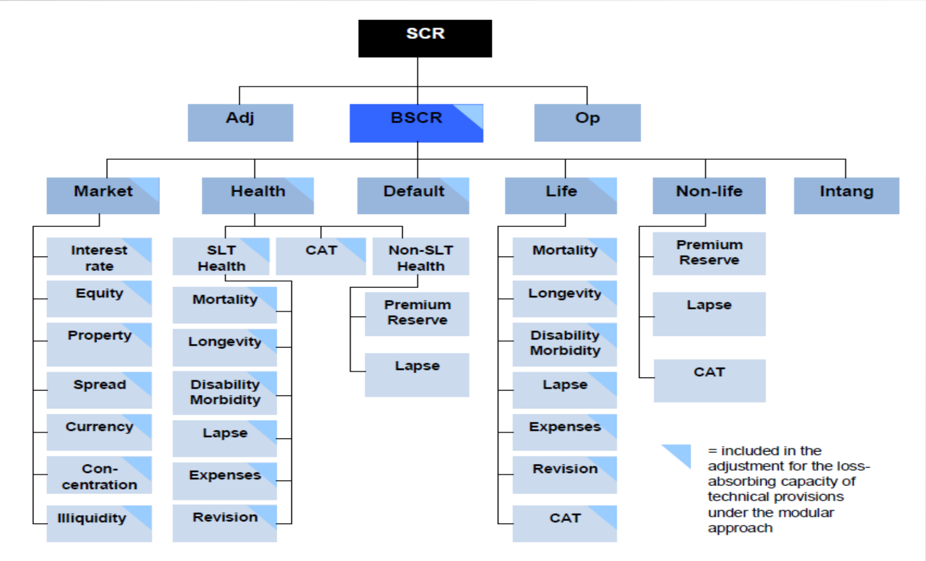
- SCR: Solvency Capital requirement (VAR @ 99.5%)
- MCR: Minimum Capital Requirement
- Tiering
- SCR>MCR
- Non respect du MCR provoque automatiquement l'intervention des autorités

SCR:

- Calcul:

$$BSCR = \sqrt{\sum_{ij} Corr_{ij} \times SCR_i \times SCR_j} + SCR_{intangibles}$$

- Modules/sous modules:



- Marché:

Matrice de corrélation du SCR Market

CrrMkt	Interest	Equity	Property	Spread	Currency	Concentration
Interest	100%	0%	0%	0%	25%	0%
Equity	0%	100%	75%	75%	25%	0%
Property	0%	75%	100%	50%	25%	0%
Spread	0%	75%	50%	100%	25%	0%
Currency	25%	25%	25%	25%	100%	0%
Concentration	0%	0%	0%	0%	0%	100%
Illiquitdity	0%	0%	0%	-50%	0%	0%

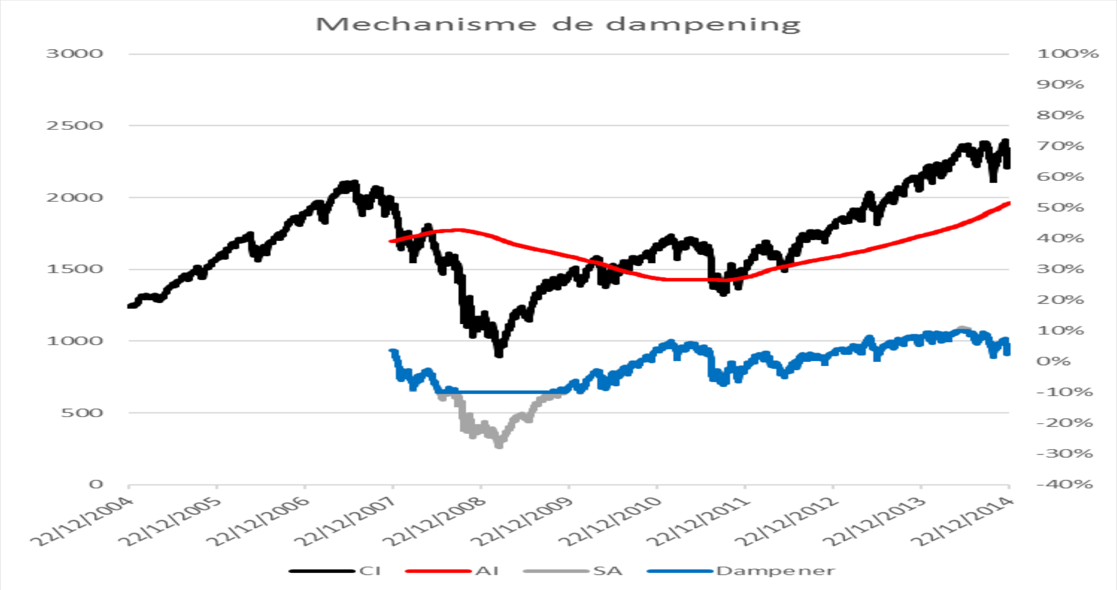
En rouge, dans le cas où le risque de taux est à la hausse 0 sinon 0.5

- VAR 99.5% à 1 an sur les actions:
  - Hypothèse de distribution log-normale
  - Volatilité de 20% pour les actions des pays de l'OCDE: choc de 39%
  - Volatilité de 25% pour les autres actions: choc de 49%

Actions:

- Une alternative aux rendements faible du marché obligataire/credit
- Mécanisme de « dampener »:

  Le choc utilisé pour le SCR est amplifiée ou atténuée de façon à créer une incitation anticyclique. Cette correction se fait par calcul de l'écart à la moyenne mobile 3 ans, et a une amplitude maximum de 20%



- Participation Stratégique (durée, capacité de résilience…): choc 22%

- Juin 2019 (LTEI): classe d'actions « de long terme » choqué à seulement 22%
  - ALM
  - Identification/séparation
  - Détention moyenne 5 ans
  - Capacité à tenir au moins 10 ans sans vendre en cas de tension
  - Actions EEA
  - Actions directs, fonds entreprenariat sociales éligible, fonds de capital-risque éligibles, fonds européens d'investissement à long terme, fonds d'investissements alternatifs ne recourant pas à l'effet de levier

Fonds de pensions: IORP 2

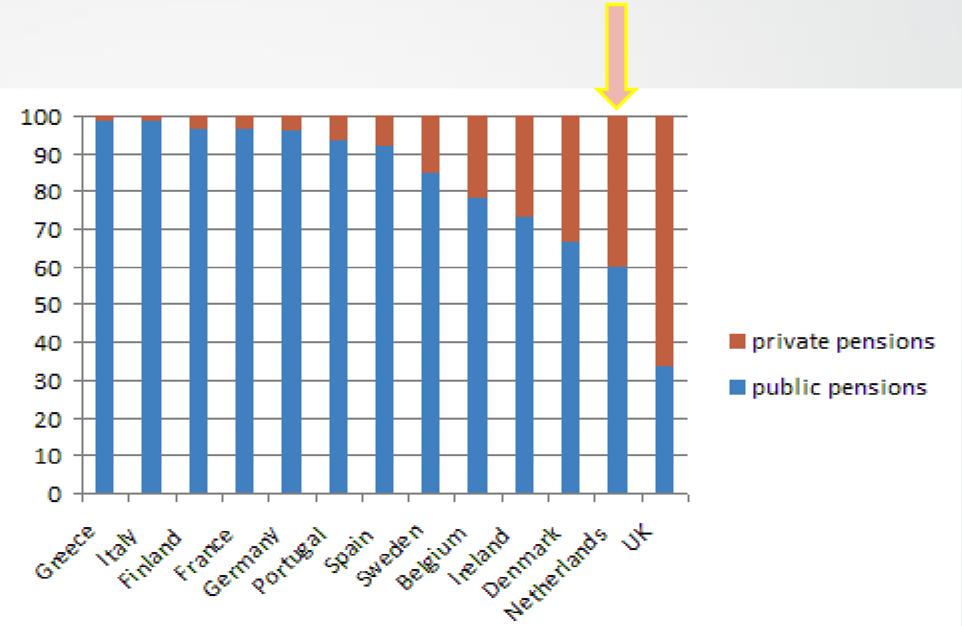
Fonds de pensions sont sous l'autorité de l'EIOPA: vont ils être soumis à Solvabilité 2?

Engagement à long termes (« defined benefit » or « defined contribution »), actifs très significatif (1 500 bio Eur pour les Pays-Bas, quasiment 200% du PIB)

IORP2, novembre 2016: Les fonds de pensions échappent au pilier quantitatif de Solvency2. Les principes des piles « qualitatif » et « transparence financière » sont gardés.

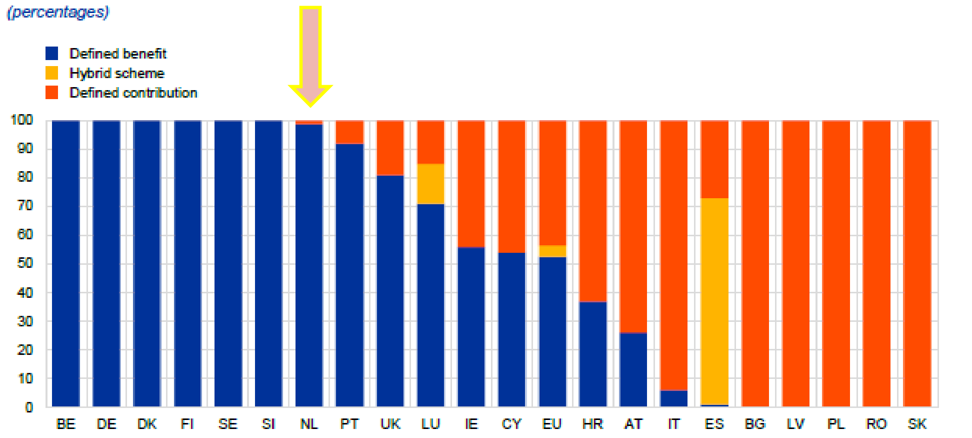
Pays-Bas, 2015:Financial Assessment Framework. Utilisation d'une VAR 97.5% sur le ratio de solvabilité supérieur à 100%.

Dans la réalité, les fonds de pensions UK ont une approche souvent aussi défensive…



Classification of Pillar 2 pension schemes across countries

(percentages)



Source: European Insurance and Occupational Pensions Authority (2015).

Normes comptables, d’IAS 39 à IFRS 9

IAS39, classification des actifs financiers:

- Les actifs financiers et passifs financiers à la juste valeur (compte de résultat)
- Les placements détenus jusqu'à leur échéance, qui sont des actifs financiers non dérivés, assortis de paiements fixes ou déterminables et d'une échéance fixe (comptabilisé en coût amorti)
- Les prêts, créances et dettes émis par l'entreprise (comptabilisé en coût amorti)
- Les actifs financiers disponibles à la vente : actifs financiers non dérivés qui sont désignés comme étant disponibles à la vente ou ne sont pas classés dans l'une des 3 catégories ci-dessus (variation des fonds propres).

Cette dernière catégorie était souvent l'origine d'un "excès" de liberté.

Régimes dérogatoires:

- “comptabilité de couverture”: Couverture de la juste valeur, couverture de flux (actif ou passif), couverture d’investissement dans une opération internationale (Les assurances étaient exclues de cette dérogation)
- régime optionnel de juste valeur: sous réserve de documentation appropriée

Normes comptables, d'IAS 39 à IFRS 9

IFRS 9 (2018), classification des actifs financiers:

- Détention d'instrument financier pour encaisser des flux de trésorerie contractuels : ces instruments sont comptabilisés en "Coût amorti".
- Objectif double de collecter des flux contractuels et revendre l'actif : ces instruments sont comptabilisés par variation des fonds propres dans le bilan.
- Autres actifs financiers : les instruments sont valorisés en juste valeur par le compte de résultat.

Contrat hybride ("embedded derivative"):

- Decomposition si possible
- Catégorie 3 (juste valeur par le compte de résultat) sinon

Couverture par le put

- Put 95% delta:

delta	-40%	-35%	-30%	-25%	-20%	-15%	-10%	-5%	0%
1m	100%	100%	100%	100%	100%	97%	82%	49%	18%
3m	100%	100%	100%	99%	95%	86%	69%	48%	29%
6m	100%	100%	98%	95%	87%	76%	62%	47%	33%
9m	99%	98%	95%	90%	82%	71%	59%	47%	35%
12m	99%	96%	92%	86%	78%	68%	57%	46%	36%

- Varation de pnl lié au delta initial:

	-40%	-35%	-30%	-25%	-20%	-15%	-10%	-5%	0%
1m	7%	6%	5%	4%	4%	3%	2%	1%	0%
3m	11%	10%	9%	7%	6%	4%	3%	1%	0%
6m	13%	12%	10%	8%	7%	5%	3%	2%	0%
9m	14%	12%	11%	9%	7%	5%	4%	2%	0%
12m	14%	13%	11%	9%	7%	5%	4%	2%	0%

- Variation de pnl du put:

variation de prix	-40%	-35%	-30%	-25%	-20%	-15%	-10%	-5%	0%
1m	34%	29%	24%	19%	14%	9%	5%	2%	0%
3m	33%	28%	23%	18%	13%	9%	5%	2%	0%
6m	32%	27%	22%	17%	12%	8%	5%	2%	0%
9m	30%	26%	21%	16%	12%	8%	5%	2%	0%
12m	30%	25%	20%	15%	11%	8%	5%	2%	0%

- Utilisation de put maturité 1 an et SCR:

Strike	prime spot intiale	Prime spot @ 80%	Prime spot @ 61%	prime initale avec cout	Ratio gain SCR/prime initiale	ratio prime 80/prime initiale
55	0,53%	1,82%	5,95%	0,63%	9,43	2,89
60	0,76%	2,59%	8,10%	0,86%	9,42	3,01
65	1,05%	3,57%	10,69%	1,15%	9,26	3,09
70	1,12%	4,27%	13,30%	1,22%	10,90	3,50
75	1,52%	5,76%	16,88%	1,62%	10,44	3,56
80	2,03%	7,64%	20,93%	2,13%	9,82	3,58
85	2,70%	10,00%	25,38%	2,80%	9,05	3,57
90	3,92%	13,19%	30,16%	4,02%	7,50	3,28
95	5,52%	16,88%	35,06%	5,62%	6,24	3,00
100	7,57%	21,00%	40,02%	7,67%	5,22	2,74
105	10,12%	25,47%	45,00%	10,22%	4,40	2,49
110	13,20%	30,19%	50,00%	13,30%	3,76	2,27
115	16,80%	35,06%	55,00%	16,90%	3,25	2,07

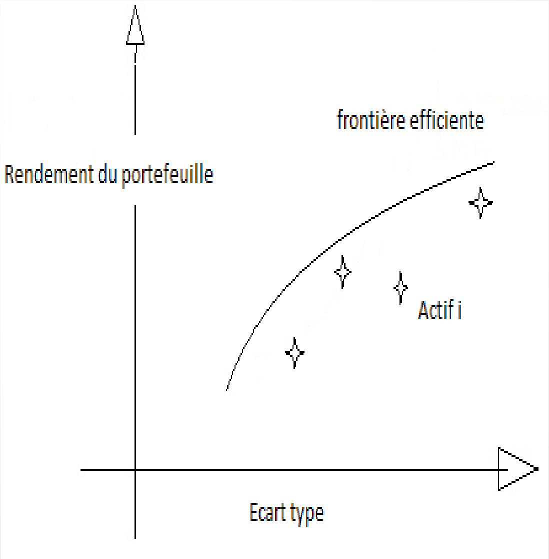
Le meilleur compromis semble se situer dans l'achat de put de strike 70/80%

Théorie du portefeuille: Markowitz

- Optimisation: Mean Variance Optimization

$\max_{\boldsymbol{w}}[E(\boldsymbol{R}) - (\lambda/2)\mathrm{Var}(\boldsymbol{R})]$

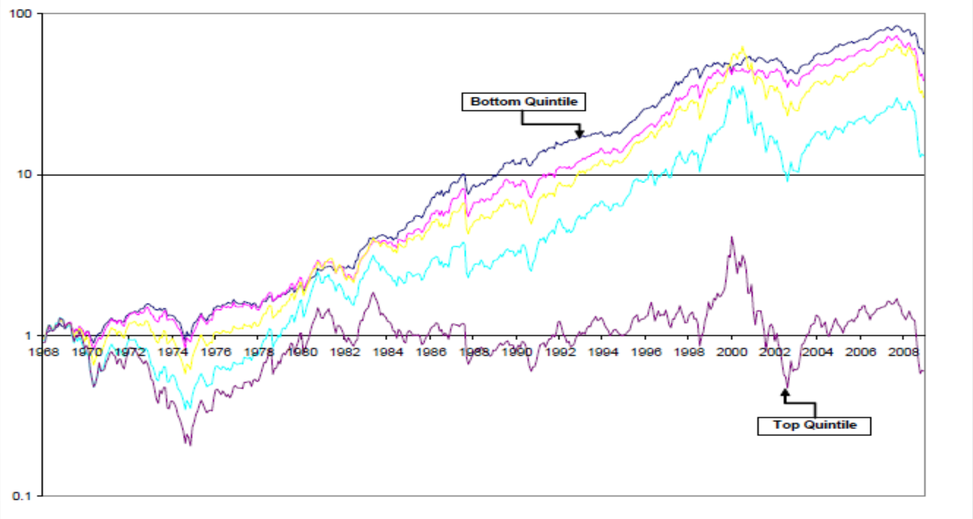
- λ aversion au risque
- Des hypothèses:
  - Pas de coûts de transactions
  - Pas de taxes
  - Pas d'impact des transactions
  - Les actions sont observé d'un point de vu statistique



Il est necessaire de faire un arbitrage entre rendement et risque. Dans ce modèle c'est l'aversion au risque.

Low Vol Anomaly

- Normalement arbitrage risque (volatilité) vs rendement
- « Benchmarks as Limits to Arbitrage: Understanding the Low Volatility Anomaly » (Malcolm Baker, Harvard Business School and NBER).
- Sur l'ensemble des actions disponibles sur le marché américain. Les quintile étant défini par le niveau de volatilité réalisé (bottom=volatilité basse)
- Création d'indices (SPEULVE par exemple) avec un filtre sur la volatilité (seulement les actions les moins risquées) et pondération inverse à la volatilité
- Low vol/Min vol: gain limite de l'optimisation sur toute la matrice (les corrélations étant assez homogène et positive)



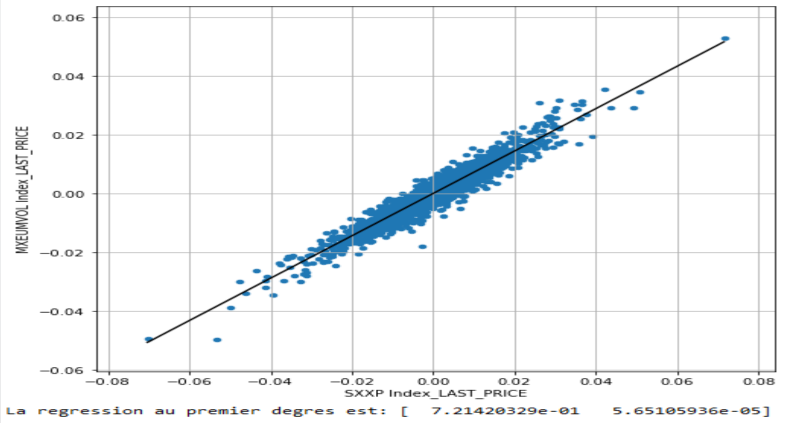
Data 1968-2010

Opportunité dans la construction du portefeuille

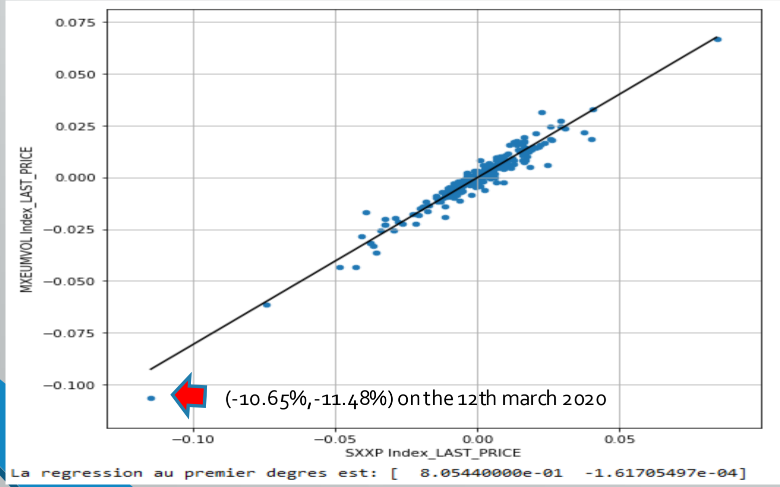
- Couverture moins chère
- EMTN (embedded derivative): le client peux « acheter de la volatilité » moins cher (Call; Call spread, max-out…). Restructuration en simple obligation.

2020 update:

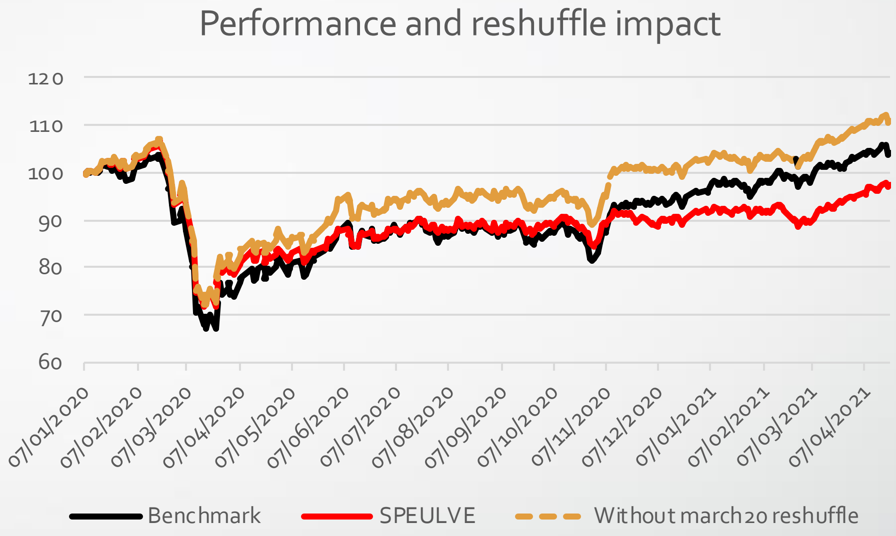
- De 2008 à 2019 (beta 72%)



- Depuis 2019 (beta 81%) :



- Performance on 2020



- Le Low Vol a été battu par son benchmark sur 2020
- Le rebalancement de mars 2020 a été très pénalisant, excluant les composantes historiques et ne bénéficiant donc pas de leur rebond…

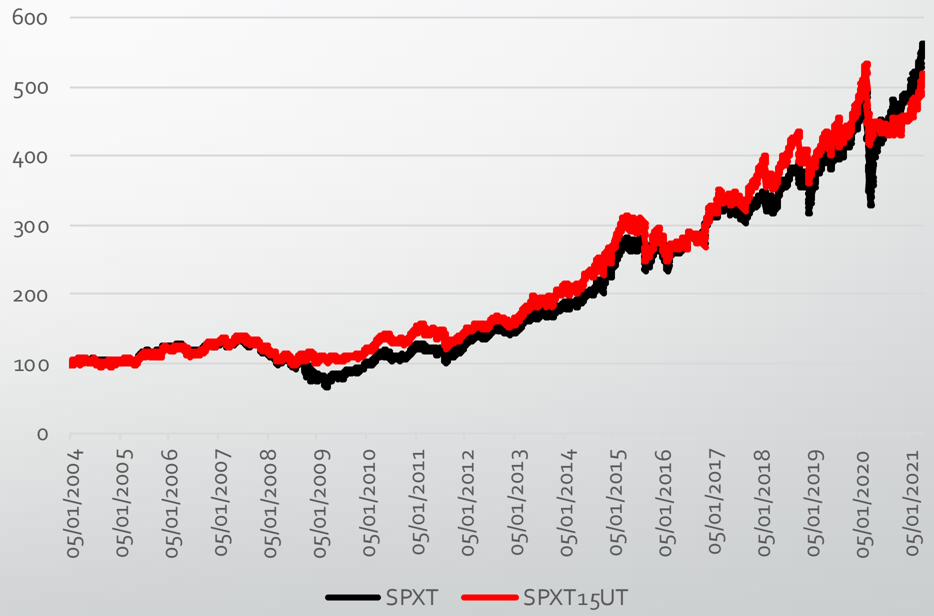
Stratégie Vol contrôlée

- Définition:

> La stratégie est une allocation dynamique (sur la droite du modèle CAPM) permettant de maintenir le niveau de risque/volatilité constant

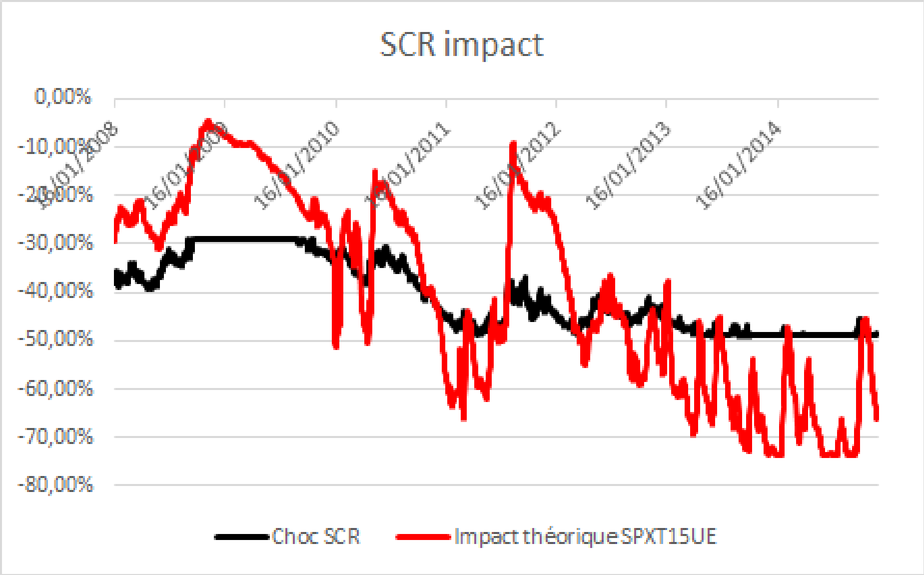
$$\omega = \frac{\sigma}{\mathrm{Vol\_realisee(T-1-d)}}$$

- Choix de la « target »
- Max exposure: 100, 150, 200?
- Estimateurs de volatilité:
  - $Volatilité = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left[Ln\left(\frac{S_u}{S_{u-1}}\right)\right]^2} * \sqrt{252}$
  - $Var_t = \lambda\, Var_{t-1} + (1-\lambda)\left[ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\right]^2$
- Biais d'estimation:
  - Biais mathématique
  - Estimateur trop court
  - Asynchronisme: indices globaux



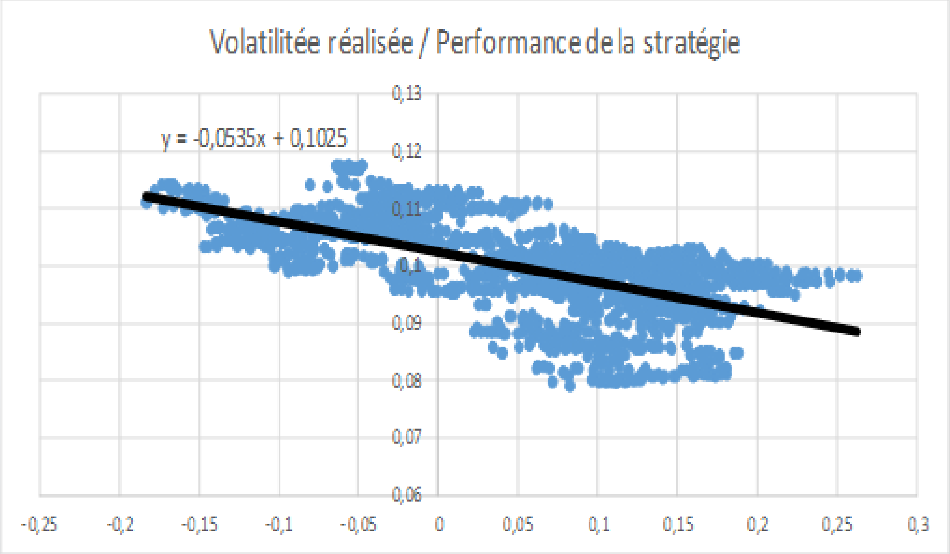
SCR et couverture:

- Impact du choc de marché sur une stratégie de volatilité contrôlée (max exposure (150%) et dampener inclus)



- *Importance du max exposure!!!!*

- Il parait cohérent d'envisager une politique de couverture systématique par des put:



- On s'attend à ce que le prix soit **stable** dans le temps, mais pas égal au niveau de volatilité visé

Valorisation du Put

- Approche B&S
- Valorisation par monte carlo
  - Utilisable dans la majorité des modèles de diffusion
  - Couteux en puissance numerique
- Modèle Dupire volatilité locale

$$dS_t = r\, S_t\, dt + \sigma(t, S_t) S_t\, dW_t$$

- Modele Heston
  - CIR

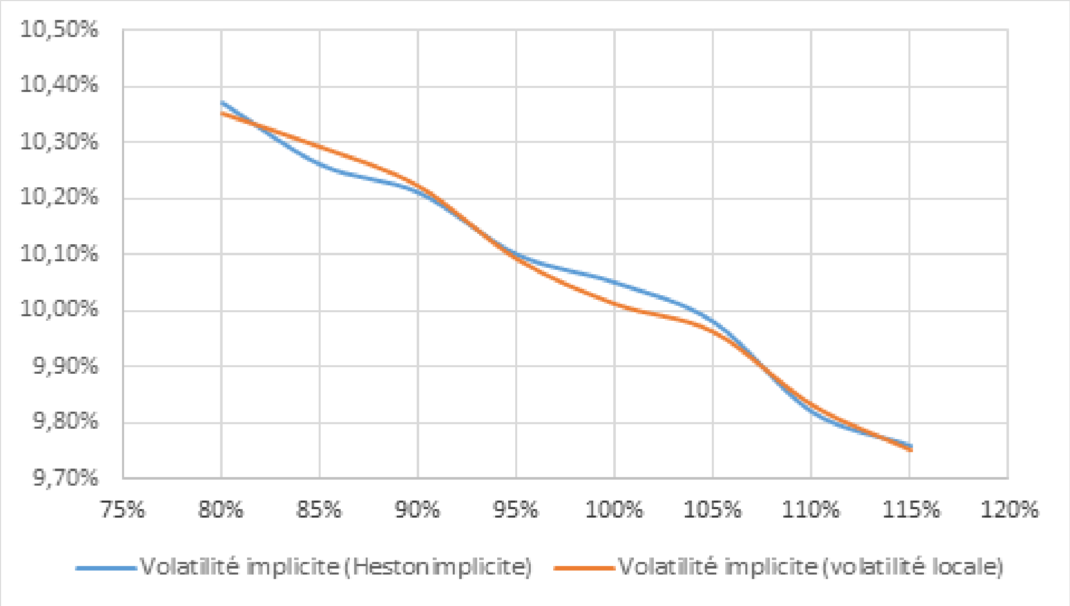
$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^S$$

$$dV_t = k(V_\infty - V_t)dt + \lambda \sqrt{V_t} dW_t^V$$

  - Calibration sur les prix d'options vanilles

$$\begin{cases} \rho = -59\% \\ \lambda = 118\% \\ k = 74\% \\ V_\infty = 0.06 \end{cases}$$

Importance de V_∞ !!!!!



Valorisation du put (avec sauts)

- Modèle Heston -Bates:

$$dS_t = (\mu - f\mu_j)S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^S + J_t S_t dN_t$$

$$dV_t = k(V_\infty - V_t)dt + \lambda \sqrt{V_t} dW_t^V$$

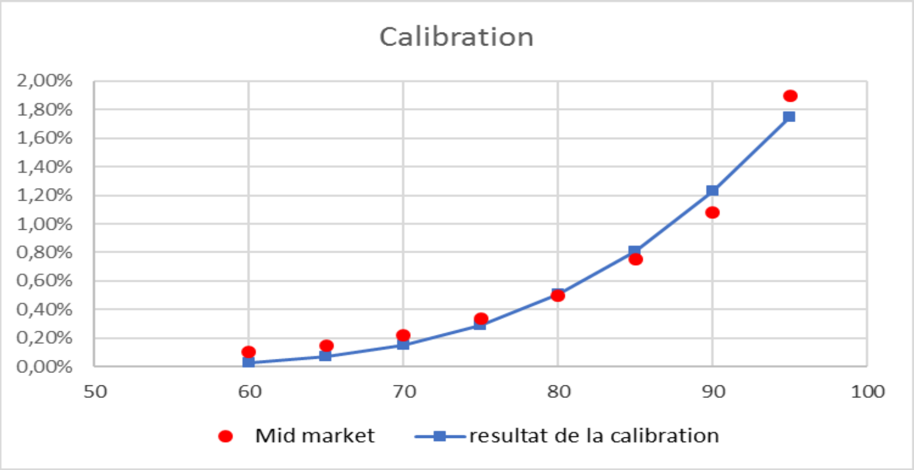
$$\ln(1 + J_t) \sim N(\ln(1 + \mu_J) - 0.5\,\sigma^2_J\ ,\ \sigma^2_J\ )$$

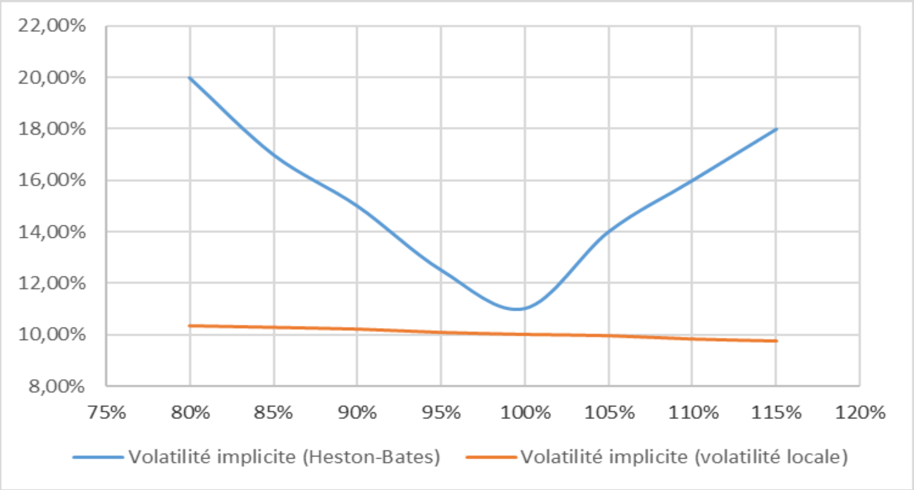
- Calibration sur les « Gap put »:
  - Put qui ne s’active qu’une fois, lorsque que la variation quotidienne est plus grande que la distance au strike
  - Ne mesure pas le comportement sur plusieurs jours
- Formule de valorisation quasi fermée:

$$P=\sum_{i=1}^{T} e^{-ri} X(K)\ \alpha(K)(1-\ \alpha(K))^{i-1} = e^{-r} X(K)\ \alpha(K)\ \frac{1-(1-\alpha(K))^T e^{-rT}}{1-(1-\alpha(K))e^{-r}}$$

$$\alpha(K)= P\left(\ln K > \hat{J}\, 1_{N_{t+1}-N_t\neq 0}\right)$$

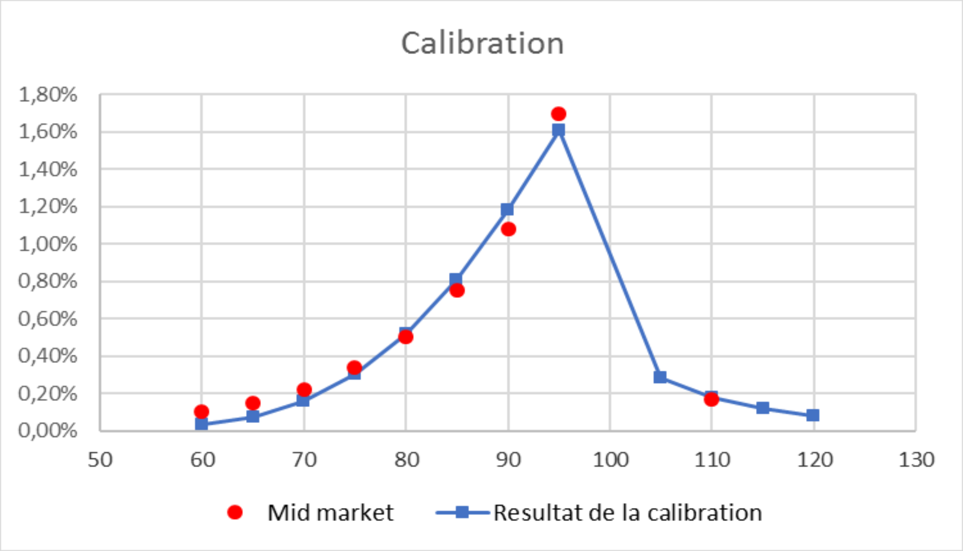
$$X(K)= E\left(K - e^{\widehat{(J_t)} 1_{N_{t+1}-N_t\neq 0}} \middle| \widehat{(J_t)} 1_{N_{t+1}-N_t\neq 0} < \ln K\right)$$



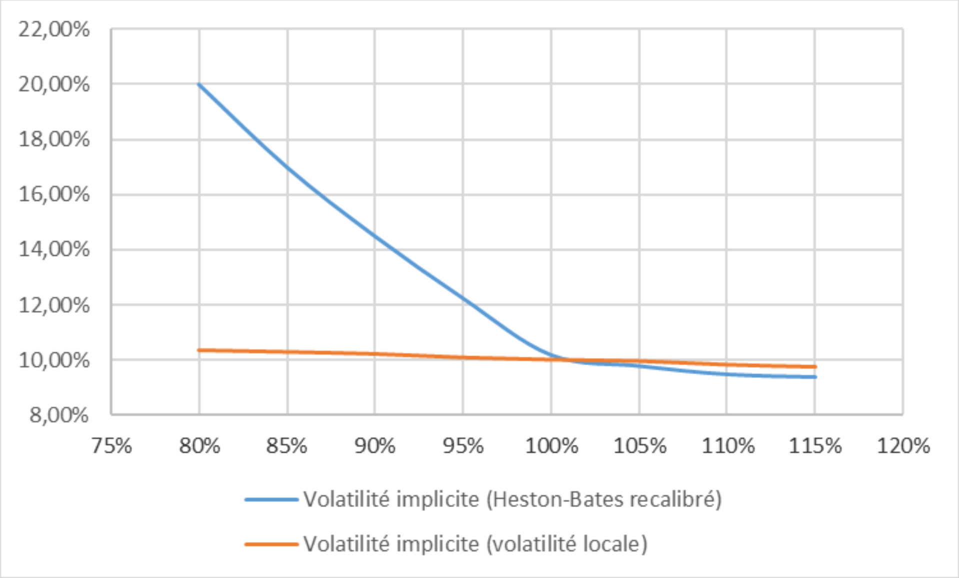


$$\begin{cases} f = 32.36\% \\ \mu_J = 1.48\% \\ \sigma_J = 24.8\% \end{cases}$$

Valorisation du put (avec sauts)



$$\begin{cases} f = 14.27\% \\ \mu_J = -15.58\% \\ \sigma_J = 20.41\% \end{cases}$$



Impact du covid sur les prix de "crash-put"

Gap put SPX	2015	2021
Strike	12 mois	12 mois
60	0,10%	0,16%
65	0,15%	0,21%
70	0,22%	0,35%
75	0,34%	0,46%
80	0,50%	0,69%
85	0,76%	1,01%
90	1,01%	1,38%
95	1,92%	2,43%

Conclusion

- Des solutions…mais le passé ne présume pas de l'avenir
- Impact sur le marché de la généralisation de ce genre de stratégies:
  - Attrait des actions moins volatiles
  - Désallocation synchronisée des stratégies à volatilité contrôlée
  - Probablement des ajustements a venir (mesurer les changement de régime plus vite…)
- Des solutions de couvertures plus sophistiquées existent
- Avec un marché obligataire aux rendements proches de o et une épargne globalement grandissante, le placement en actions a de l'avenir