

Mémoire présenté le :

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuares**

Par : Ekue Touraint DJOGBESSI

Titre Prise en compte de l'incertitude des paramètres dans le risque de prime

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)


Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présents du jury de l'Institut
des Actuares*

signature

Entreprise :

Nom : Bresson Pierre

Signature : 

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Bresson Pierre

Signature : 

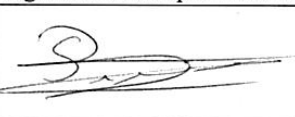
Invité : Dubuit Gaspard

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



Mémoire d'Actuaire

Prise en compte de l'incertitude des paramètres dans le calcul du risque de prime

Virgil DJOGBESSI

Mars 2022

Remerciements

Je remercie en premier lieu Gaspard Dubert et Tuyen Le qui m'ont permis d'effectuer mon stage ainsi que mon alternance au sein de l'équipe modèle interne Non-vie de Generali France ; merci de votre confiance et de votre soutien.

Je tiens à remercier aussi Pierre Bresson et Frédéric Planchet qui sont respectivement mon tuteur en entreprise et mon tuteur académique pour leur disponibilité et leur soutien technique.

Merci à Mathieu Ettien pour ton aide et également à Khadi Diop et Adnane Ezzamiti.

Je remercie chaleureusement mes parents, mes amis et spécialement Mme Mayunga NSimba, ma reconnaissance envers toi ne s'éteindra jamais.

A Jésus-Christ.

Résumé

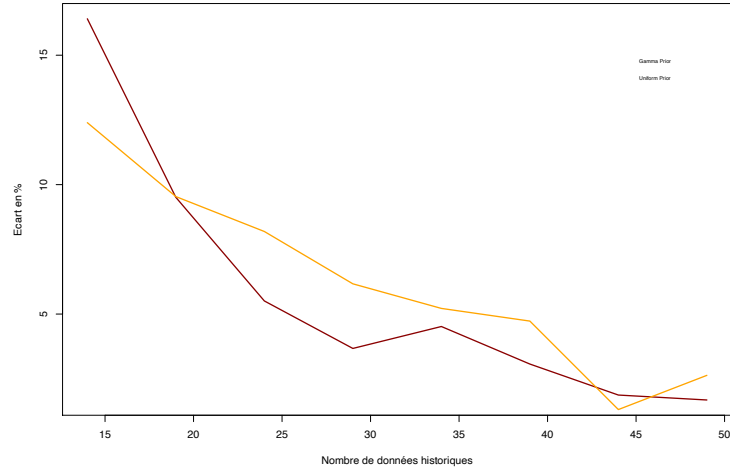
Avec la réglementation Solvabilité 2 introduite dans l'Union Européenne, l'indicateur principal de la solvabilité d'un assureur est le capital de solvabilité requis (SCR). Cet indicateur peut être calculé à partir d'un modèle interne élaboré par l'assureur et validé par le régulateur. Le risque à évaluer est calibré à partir des données historiques du portefeuille assuré. Ces données historiques ne sont pas forcément en quantité suffisante pour effectuer une calibration robuste : il existe dès ce moment une incertitude autour des paramètres estimés.

L'objectif de ce mémoire est d'intégrer des méthodes qui prennent en compte l'incertitude des paramètres dans le processus de calibration du risque et d'en évaluer l'impact final sur le SCR. Deux approches ont été réalisées dans ce mémoire : l'approche bayésienne et l'approche par ré-échantillonnage(bootstrap). Après calcul du SCR brut sur un portefeuille de Generali France sans prise en compte de l'incertitude des paramètres, une application de ces méthodes a été effectuée. Dans l'application de l'approche bayésienne, deux lois a priori ont été sélectionnées : Les résultats sont présentés dans le tableau suivant.

	sans UP	a priori Gamma	a priori Uniforme	approche Bootstrap
SCR	32 264 562	36 263 270	37 558 246	34 585 935
Ecart (en %)	—	12,39	16,41	7,19

Des tests de concordance de loi ont attesté la significativité des résultats présentés.

Dans le but d'évaluer la sensibilité des approches de prise en compte de l'incertitude des paramètres au nombre de données historiques dans le processus de calibration, une étude évolutive a été réalisée sur l'approche bayésienne. Le graphique suivant présente l'évolution de l'impact en fonction du nombre de données historiques. En orange la courbe de l'évolution avec une distribution Gamma pour loi a priori et en rouge la courbe avec la loi a priori uniforme.



Lorsqu'on a 49 données historiques de fréquence, les écarts entre le SCR obtenu à partir de la calibration prenant en compte l'incertitude des paramètres et le SCR sans prise en compte de l'incertitude sont autour de 2,5%. Les tests de concordance de loi ont confirmé que ces impacts sont non significatifs : l'incertitude des paramètres n'est donc pas à considérer en présence d'un nombre important de données historiques.

Abstract

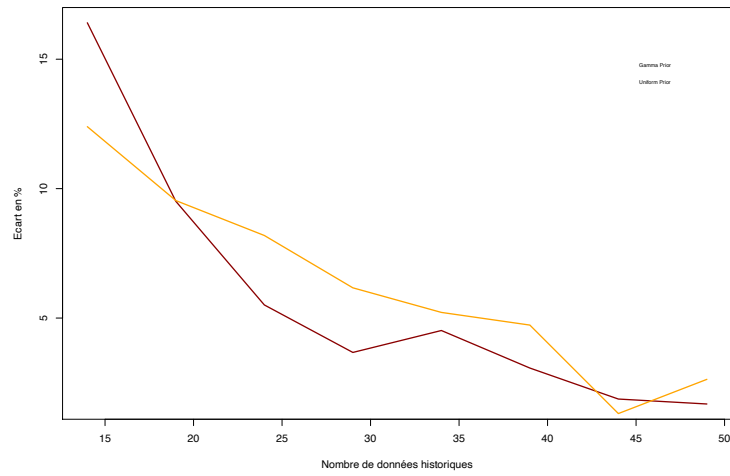
With the Solvency 2 regulation introduced in the European Union, the main indicator of an insurer's solvency is the solvency capital requirement (SCR). This indicator can be calculated from an internal model developed by the insurer and validated by the regulator. The risk to be assessed is calibrated on the basis of historical data of the insured portfolio. This historical data is not necessarily in sufficient quantity to perform a robust calibration : there is therefore an uncertainty around the estimated parameters.

The objective of this thesis is to integrate methods that take into account the uncertainty of the parameters in the risk calibration process and to evaluate the final impact on the SCR. Two approaches were used in this thesis : the Bayesian approach and the resampling -bootstrap-approach. After calculating the gross SCR on a portfolio of Generali France without taking into account the uncertainty of the parameters, an application of these methods was carried out. In the application of the Bayesian approach, two a priori laws were selected : The results are presented in the following table.

	no UP	Gamma prior	Uniform prior	Bootstrap approach
SCR	32 264 562	36 263 270	37 558 246	34 585 935
Spread (in %)	–	12,39	16,41	7,19

Tests of concordance of the laws attested to the significance of the results presented.

In order to evaluate the sensitivity of the approaches of taking into account the uncertainty of the parameters to the number of historical data in the calibration process, an evolutionary study was carried out on the Bayesian approach. The following graph shows the evolution of the impact as a function of the number of historical data. In orange the evolution curve with a Gamma distribution for the a priori law.



With 49 historical frequency data, the differences between the SCR obtained from the calibration taking into account parameters uncertainty and the SCR without taking the uncertainty into account are around 2.5%. The law concordance tests confirmed that these impacts are insignificant : parameters uncertainty should not be considered in the presence of a large number of historical data.

Table des matières

I	Le risque de prime sous solvabilité 2	15
1	Rappel sur la directive Solvabilité 2	17
1.1	Le Best Estimate : Meilleure estimation	18
1.2	La marge de risque	18
1.3	Les montants minimums de fonds propres	19
1.3.1	Définition des fonds propres	19
1.3.2	Définition des SCR et MCR	19
1.4	Présentation des modules de risques	20
1.5	Modalités de calcul du SCR dans le cadre de la formule standard	21
1.6	Modalités de calcul du SCR dans le cadre d'un modèle interne complet ou partiel	22
1.6.1	Modèle modulaire	22
1.6.2	Modèle interne complet	23
1.7	Conclusion	23
2	Présentation du modèle interne	25
2.1	Généralités	25
2.2	Évaluation du risque de prime	26
2.2.1	Calibration	26
2.2.2	Calcul du SCR_{Brut}	30
3	Calcul d'un SCR de prime	33
3.1	Présentation du portefeuille TPL Large	33
3.2	Calibration	34
3.2.1	Calibration de la sévérité	34
3.2.2	Calibration de la fréquence	36
3.3	Calcul du SCR brut du portefeuille GIARD TPL Large	38
3.3.1	Distribution de la fréquence de sinistres	38
3.3.2	Distribution de la sévérité des sinistres	39
3.3.3	Distribution des montants agrégés de sinistre	39
4	Limites	41
4.1	La distribution de vraisemblance	41
4.2	Robustesse des estimateurs	41
II	Sur l'incertitude des paramètres	43
1	Revue de littérature	45

2	Approche bayésienne	47
2.1	Cadre théorique	47
2.2	Méthodes numériques d'inférence bayésienne	48
2.2.1	Méthodes classiques d'approximation	48
2.2.2	Les méthode de Monte Carlo par Chaîne de Markov	51
2.3	Application bayésienne de l'incertitude des paramètres	54
2.3.1	Démarche	54
2.3.2	Présentation des résultats	55
3	Approche par ré-échantillonnage	63
3.1	Principe général de la méthode	63
3.2	Incetitude des paramètres et bootstrap	64
3.3	Résultats	66
3.3.1	Distribution des paramètres	66
3.3.2	Distribution de la sinistralité	67
4	Sensibilité de l'incertitude des paramètres au nombre de données	71
4.1	Démarche	71
5	Limites	73
5.1	Temps de calcul	73
5.2	Choix de la loi <i>a priori</i>	73
5.3	Bornitude dans le ré-échantillonnage	74
A	Données relatives à la calibration du portefeuille RCG Large	77
A.1	Exposition du portefeuille	77
A.2	Fréquence historique du portefeuille	78
A.3	Inflation	79
A.4	Sévérité historique	80

Table des figures

1	Les 3 piliers de Solvabilité 2	17
2	Modules de risques sous Solvabilité 2	20
3	Exemple de distribution de résultat technique et de sinistre	30
4	Montant des primes acquises de Generali France au titre de la RC générale entre 2006 et 2020	33
5	Montant des sinistres graves en RCG de Generali France de 2006 à 2020	34
6	Résultats de calibration du portefeuille RCG large de Generali France	36
7	Nombre de sinistres graves en RCG de Generali France entre 2006 et 2020	36
8	Unités d'exposition du portefeuille RCG Large de Generali France entre 2006 et 2020	37
9	Distribution de fréquence générée dans le modèle interne pour le portefeuille RCG large de Generali France	39
10	Distribution de la sévérité générée (en M€) dans le modèle interne pour le portefeuille RCG large de Generali France	39
11	Distribution des montants agrégés (en 10M€) de sinistres graves générés par le modèle interne pour le périmètre RCG de Generali France	40
12	Maximum de vraisemblance en fonction de la distribution de la fonction de vraisemblance	42
13	Répartition de 20 estimateurs du maximum de vraisemblance à partir d'échantillons de 20 observations générés par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$	45
14	Distributions <i>a posteriori</i> des paramètres de la sinistralité obtenues par échantillonnage de Gibbs	56
15	Distribution de la fréquence des sinistres avec prise en compte de l'incertitude des paramètres par une approche bayésienne	58
16	Distribution de la sévérité des sinistres avec prise en compte de l'incertitude des paramètres par une approche bayésienne	59
17	Distribution des montants agrégés de sinistre avec prise en compte de l'incertitude des paramètres par une approche bayésienne	60
18	Distribution du paramètre λ obtenu par bootstrapping	66
19	Distribution du paramètre α obtenu par bootstrapping	66
20	Distribution du paramètre β obtenu par bootstrapping	67
21	Évolution des écarts de SCR en fonction du nombre de données historiques	72
22	Exposition du portefeuille RCG Large de Generali France entre 2006 et 2020	77
23	Fréquence historique du portefeuille RCG Large de Generali France entre 2006 et 2020	78
24	Évolution de l'inflation en France entre 2006 et 2021	79
25	Sévérité historique du portefeuille RCG Large de Generali France entre 2006 et 2020	80

Introduction

Pensée dès la fin de la crise des sub-primes, la réglementation Solvabilité 2 est entrée en vigueur le 1^{er} janvier 2016 et prend effet sur toute l'étendue du territoire de l'Union Européenne. Cette réglementation prudentielle a pour but de renforcer l'intégration du marché européen de l'assurance, de renforcer la protection des assurés et plus généralement des bénéficiaires des contrats d'assurance et enfin favoriser la compétitivité des assureurs et réassureurs européens. Fondée autour de la gestion des risques, Solvabilité 2 exige des assureurs installés en Europe l'immobilisation d'un capital pouvant leur permettre de faire face à un sinistre ayant une période de retour de 1 fois tous les 200 ans : c'est le Solvency Capital Required (SCR). Ce SCR, qui correspond à la Valeur-En-Risque à 99,5% ($VaR_{99,5\%}$) de la distribution de sinistres peut être calculé suivant une formule standard, proposée par l'EIOPA ou selon un modèle interne monté par l'assureur et validé par le régulateur national. Pour avoir un modèle correspondant au mieux à son profil de risque, Generali France a opté pour l'utilisation d'un modèle interne. Au sein de Generali France, l'équipe Modèle Interne Non-Vie a pour rôle d'évaluer le risque de souscription non-vie. Les composantes de ce risque sont : le risque de réserve, le risque de primes, le risque de rachat et le risque de catastrophe naturelle. La calibration des lois sous-jacentes aux différents portefeuilles non-vie de Generali se fait sur la base des données historiques. Le faible nombre de ces données peut entraîner parfois des biais dans l'estimation des paramètres des différentes lois. L'objectif de ce mémoire est de présenter certaines méthodes utilisées qui permettrait de prendre en compte cette incertitude de paramètre dans l'évaluation du capital économique. Pour des raisons de concision, ce mémoire évaluera uniquement l'impact de l'intégration du paramètre d'incertitude dans le calcul du risque de prime, et cela pour un seul portefeuille. Il faut noter que les méthodes présentées dans ce mémoire peuvent être appliquées sur l'ensemble des autres périmètres. Dans la première partie nous présenterons le cadre réglementaire dans lequel est effectué le mémoire : Solvabilité 2. Nous présenterons toujours dans cette partie la méthodologie utilisée pour le calcul du risque de prime dans le cadre du modèle interne de Generali France et dans la section 3.1, nous présenterons une application numérique de calcul sur un portefeuille pratique. La deuxième partie sera consacrée à la notion d'incertitude de paramètre. Après une brève revue de littérature, nous présenterons les deux approches performées dans le cadre de cette étude avec une application numérique réalisée sur le même portefeuille que celui utilisé dans la section 3.1. Dans la section 4 nous réalisons une étude du comportement asymptotique de la valeur du SCR selon les différentes approches présentées tout au long du mémoire.

Mots-clés : Paramètre d'incertitude, risque de prime, modèle interne, Solvabilité 2, analyse bayésienne, MCMC, échantillonnage de Gibbs, Bootstrap

Première partie

Le risque de prime sous solvabilité 2

Chapitre 1

Rappel sur la directive Solvabilité 2

La directive Solvabilité 2 est le régime prudentiel des organismes assureurs au sein de l'Union Européenne. Son but est de définir des exigences de solvabilité harmonisées au sein de l'Union Européenne et de permettre aux assureurs d'avoir des fonds propres en adéquation avec les niveaux de risque qu'ils encourent. Elle permet au marché des assurances européen d'être pérenne et respectueux de ses engagements. L'ensemble des règles, formant cette directive, s'articule autour de trois piliers.

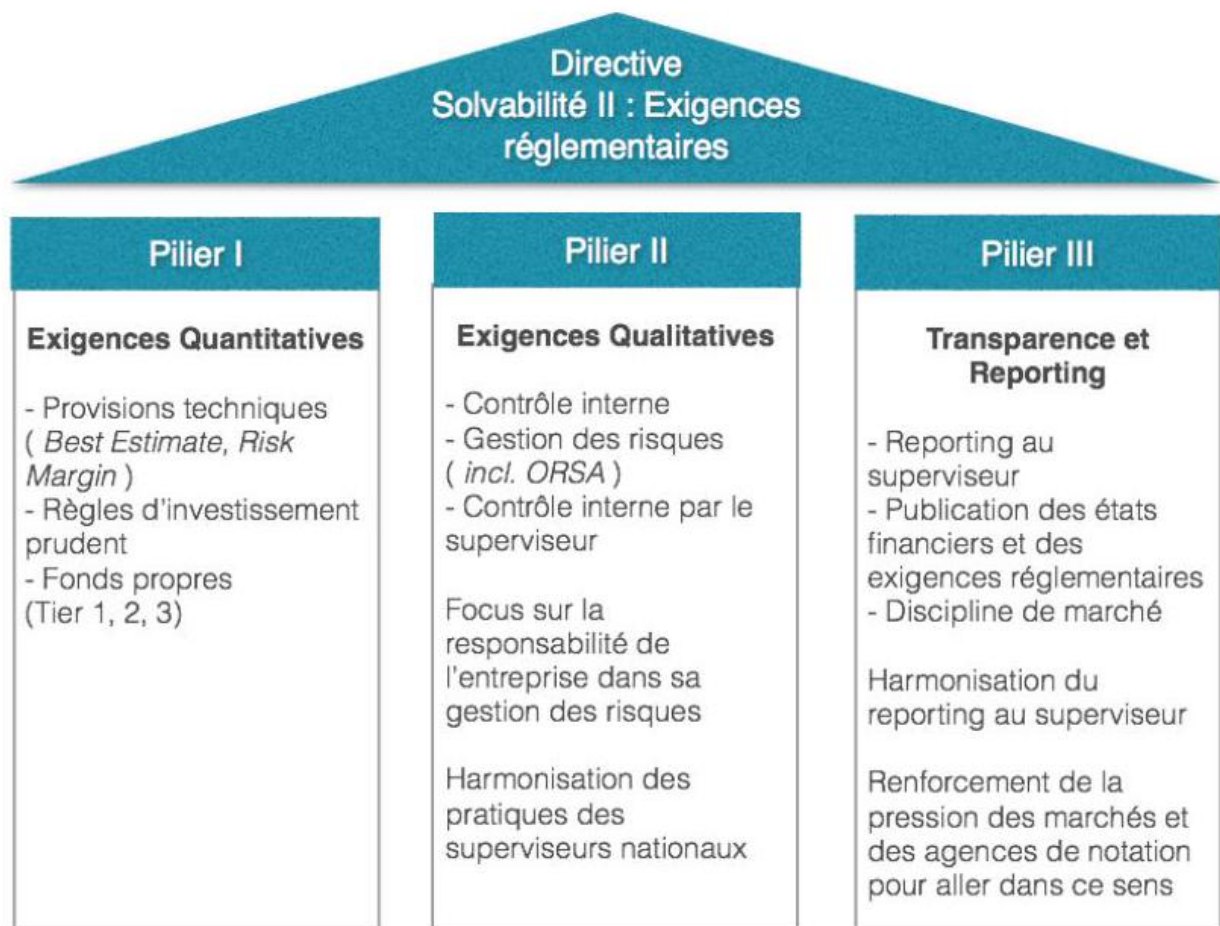


FIGURE 1 – Les 3 piliers de Solvabilité 2

Étant donné la maturité de la réglementation, nous ne présenterons que les concepts en rapport avec le mémoire. Ces concepts sont présentés dans le pilier 1 de la directive qui correspond aux exigences quantitatives définies par la norme.

L'objectif du pilier 1 est la définition des modalités et normes de calcul des composantes du bilan économique.

L'actif est comptabilisé en "juste valeur". Cette vision "juste valeur" se matérialise par un actif vu en valeur de marché. Ainsi, les plus et moins-values latentes font partie de la valorisation de l'actif contrairement au cadre de la prudence comptable. De ce fait, les chutes et hausse de résultat sont prises en compte. C'est pourquoi, le terme "juste valeur" est employé.

Le passif est la réunion du Best Estimate, des fonds propres et de la Risk Margin. Comme l'actif, les provisions techniques ($BE + RM$) sont valorisées en "juste valeur" pour les risques couvrables -*hedgeable* en anglais- sur les marchés ou en vision "meilleure estimation" pour les autres risques. Le but est d'estimer au mieux les réserves en couverture des sinistres. La vision "meilleure estimation" repose sur des hypothèses réalistes d'identification et de quantification des flux de trésorerie.

1.1 Le Best Estimate : Meilleure estimation

D'après l'article A07-0077/2012 de la directive européenne :

"Le Best Estimate est la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs compte-tenu de la valeur temporelle de l'argent estimée sur la base de la courbe des taux sans risques. Le calcul de la meilleure estimation est fondé sur des informations actualisées et crédibles ainsi que sur des hypothèses réalistes.[...]La projection en matière de flux de trésorerie utilisée dans le calcul de la meilleure estimation tient compte de toutes les entrées et sorties de trésorerie nécessaires pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pendant toute la durée de ceux-ci."

De manière plus formelle, dans un cadre déterministe, la meilleure estimation à la date t peut s'écrire :

$$BE_t = \sum_{i \geq t} \frac{CF_i}{(1 + r(i))^i}$$

Avec :

- CF_i : la somme des flux de trésorerie à la date i
- $r(i)$ représente le taux d'intérêt sans risque de base pour l'échéance i

L'article 28 du règlement délégué(UE) 2015/35 stipule que les flux de trésorerie utilisés pour le calcul de la meilleure estimation, comprennent :

- les versements de prestations aux preneurs et aux bénéficiaires. (+)
- les paiements de primes. (-) - les flux de trésorerie supplémentaires résultant de ces primes, ex : les frais de gestions des primes, les frais d'acquisitions des primes. (+) ou (-)
- Les dépenses engagées afin d'honorer les engagements d'assurance et de réassurance. Ex : les frais généraux, les primes de réassurance, les frais de gestion de sinistres et les autres chargements techniques. (+)
- les impôts qui sont, ou dont on prévoit qu'ils seront, appliqués aux preneurs, ou les impôts qui sont nécessaires au règlement des engagements d'assurance ou de réassurance.

1.2 La marge de risque

D'après l'article 77, paragraphe 3 de la directive Européenne 2009/138/CE :

"La marge de risque est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance." En effet, l'assureur, qui reprend les engagements, doit immobiliser des fonds en couverture de ces engagements. Le principe de la marge de risque est alors d'évaluer le coût d'immobilisation du montant, de fonds propres nécessaires éligibles, pour le SCR pendant toute la durée de vie des engagements. Conformément à ces principes, on retrouve dans l'article 37 du règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014, la définition suivante :

$$RM = CoC \cdot \sum_{t \geq 0} \frac{SCR(t)}{(1 + r(t + 1))^{t+1}}$$

- CoC : représente le coût du capital. En effet, l'argent immobilisé ne pourra être utilisé pour obtenir un rendement. En fixant le CoC au rendement moyen, tout se passe comme si la compagnie reprenant les engagements, avait effectué un rendement sur les fonds immobilisés. D'après l'article 39 du règlement délégué 2015/35 de la commission, le taux du coût du capital visé à l'article 77, paragraphe 5, de la directive 2009/138/CE est présumé être égal à 6%.
- $SCR(t)$ représente le capital de solvabilité requis.

1.3 Les montants minimums de fonds propres

1.3.1 Définition des fonds propres

Les fonds propres correspondent à la somme des fonds propres de base et des fonds propres auxiliaires. Les fonds propres de base désignent la somme des deux éléments suivants :

- l'excédent des actifs par rapport aux passifs - les passifs subordonnés désignent des dettes dont le remboursement ne sera effectué qu'après remboursement des autres créanciers
- Les fonds propres auxiliaires sont les éléments, autres que les fonds propres de base, dont l'assureur peut tirer parti pour compenser des pertes.

La directive Solvabilité 2 impose des montants minimums de fonds propres : le SCR et le MCR.

1.3.2 Définition des SCR et MCR

Le SCR (*Solvency Capital Requirement* - Capital de Solvabilité Requis) est d'après l'article 101 de la directive 2009/138/CE, la « Value at Risk » des fonds propres de base d'un organisme d'assurance ou de réassurance à un niveau de confiance de 99,5% sur une période d'un an.

La Value at Risk (VaR) avec un niveau de confiance α peut se définir comme une limite de perte qui ne sera pas dépassée avec une probabilité α . Le SCR peut alors être vu comme un montant minimum à détenir, pour pouvoir en cas d'évènements extrêmes, maintenir ses engagements.

Le MCR (*Minimum Capital Requirement* - capital minimum requis), d'après l'article 129 de la directive 2009/138/CE "correspond à un montant de fonds propres de base éligibles en deçà duquel les preneurs et les bénéficiaires seraient exposés à un niveau de risque inacceptable si l'entreprise d'assurance ou de réassurance était autorisée à poursuivre son activité." Il doit être constamment respecté sous peine d'une action immédiate du régulateur qui peut exiger un retrait de l'agrément de l'entreprise mise en cause, ou alors le transfert du portefeuille de cette entreprise.

Pour calculer le capital requis de solvabilité, deux méthodes sont possibles. Un modèle interne mis en place par l'entreprise, afin de modéliser et mesurer au mieux les risques, qu'elle encourt, ou une méthode de calcul proposée par le régulateur : la formule standard.

Avec la formule standard, la projection, des fonds propres à horizon un an, est contournée et le SCR est calculé sur la base de chocs instantanés et non sur un an.

Afin d'évaluer le SCR, le régulateur propose une cartographie des risques majeurs auxquels un organisme peut faire face.

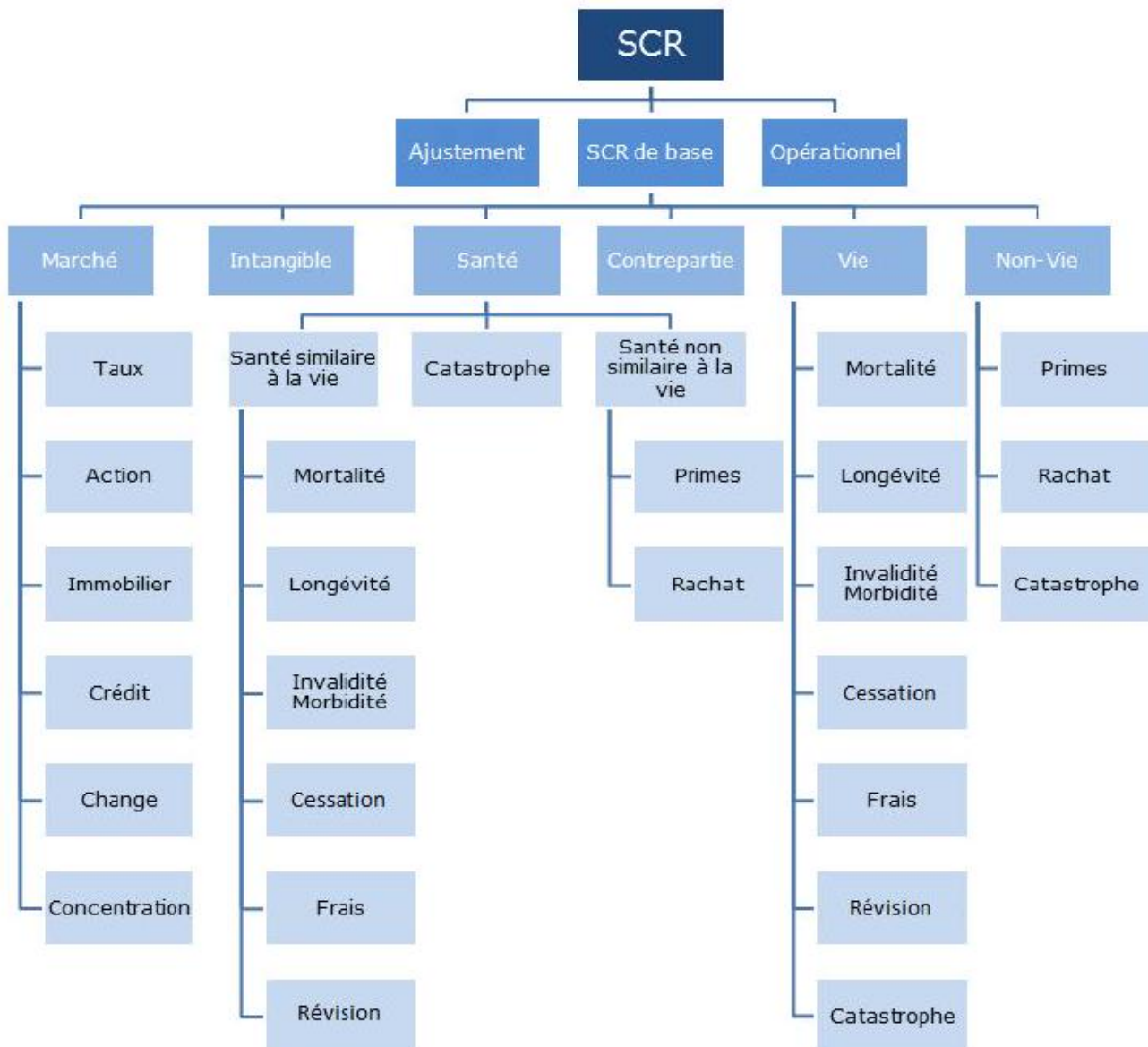


FIGURE 2 – Modules de risques sous Solvabilité 2

1.4 Présentation des modules de risques

L'article 101 de la directive 2009/138/CE stipule que le capital de solvabilité requis doit au moins couvrir les risques suivants :

- le risque de souscription en non-vie
- le risque de souscription en vie
- le risque de souscription en santé

Ces trois risques sont des risques liés au simple fait de distribuer des contrats d'assurance. En effet, un assureur ne peut connaître avec certitude l'état présent et futur d'un assuré, ou d'un objet assuré. Cette méconnaissance peut conduire à la mise en place d'hypothèses qui ne captent pas assez la réalité. On peut alors déboucher sur de la tarification et du provisionnement, inadaptés. La tarification est la mise en place d'un prix pour un produit d'assurance. Les provisions désignent, quant à elles, des montants que l'entreprise d'assurance va conserver afin de faire face en tout temps à ses engagements. Le provisionnement est le processus de calcul des provisions. Ainsi, tarifier ou provisionner de manière inadéquate peut conduire au non-respect des engagements pris par l'assureur.

Les autres risques devant être absolument couverts sont :

- le risque de marché : il va mesurer la sensibilité des actifs et des passifs aux changements de volatilité des instruments financiers en couverture des passifs. Il mesure également toute inadéquation actif/passif qui peut découler de ces changements de volatilité.
- le risque de contrepartie/défaut : Il découle du risque de défaut inattendu, ou de la dépréciation de la cote de crédit des contreparties de l'organisme assureur durant les douze mois à venir. Ce risque est étroitement lié aux mécanismes de transfert/minimisation de risques qu'une compagnie d'assurance peut utiliser comme par exemple la réassurance ou la titrisation.

Le dernier risque proposé par le régulateur est le risque intangible, en revanche, sa couverture n'est pas imposée par la directive.

- Le risque intangible désigne le risque de baisse de la valeur des actifs incorporels. Un actif incorporel est un bien immatériel, en l'occurrence, un bien qu'on ne peut pas toucher. Il ne s'agit pas non plus d'un bien monétaire. Ce type de biens doit avoir une durée de vie suffisante et sert généralement à la production de l'entreprise. Par exemple : un logiciel, un dépôt de brevet.

Tous ces risques vont servir au calcul du SCR, que ce soit dans le cadre de la formule standard, ou dans le cadre d'un modèle interne. Toutefois, les modalités de calcul diffèrent d'une méthode à l'autre.

1.5 Modalités de calcul du SCR dans le cadre de la formule standard

Les modules de risques présentés précédemment sont, chacun, déclinés en risques infra-modulaires cf. Figure 2. Ces risques infra-modulaires portent la dénomination de risques élémentaires. Pour chaque risque élémentaire, un choc va être appliqué et va engendrer une consommation du capital. De ce fait, la consommation de capital issue d'un risque élémentaire va constituer un capital au titre de ce risque. C'est ainsi qu'un risque élémentaire est formalisé sous la forme d'un montant.

Les niveaux de chocs appliqués sont fixés et présents dans le règlement délégué (UE) 2015/35.

Par la suite, au titre d'un module m , un SCR sera calculé par l'agrégation des consommations individuelles de chaque risque via des coefficients de corrélation linéaire. Les coefficients de corrélations représentent les effets de diversifications entre les différents risques. Ces coefficients sont explicitement donnés par le régulateur et figurent en annexe de la directive 2009/138/CE sous la forme de matrices de corrélation.

Soit :

- R_m : l'ensemble des risques du module m
- C_i : le capital au titre du risque i
- $\rho_{i,j}^{R_m}$: le coefficient de corrélation permettant d'agréger les capitaux des risques, i et j , du module m
- SCR_m : le capital économique du module $m \in M$, l'ensemble des modules
- $\rho_{i,j}^M$: le coefficient de corrélation permettant d'agréger les capitaux des modules i et j

Pour l'agrégation infra-modulaire, on a donc :

$$SCR_m = \sqrt{\sum_{(i,j) \in R_m^2} \rho_{i,j}^M \cdot C_i \cdot C_j}$$

De même, afin de capter les effets de diversifications inter-modulaires, les SCR par modules sont agrégés pour obtenir un capital au titre de l'ensemble des modules, le SCR de base.

$$SCR_{\text{de base}} = \sqrt{\sum_{(i,j) \in M^2} \rho_{i,j}^M \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

En outre, deux quantités vont être ajoutées au SCR de base.

- Le $SCR_{\text{opérationnel}}$ qui quantifie le risque opérationnel. Ce risque découle de pertes potentielles dues à, des processus internes incongrus ou défaillants, des erreurs de membres du personnel, des événements extérieurs.
- Un terme d'ajustement qui représente la compensation potentielle de pertes non anticipées par une diminution des provisions techniques ou des impôts différés.

Cet ajustement est inhérent au caractère long terme de l'assurance. En effet, un assureur peut démontrer qu'il réalisera du bénéfice à l'avenir ou qu'il pourra réduire ses prestations futures pour couvrir des pertes non anticipées lors de leur survenance. L'ajustement va alors venir compenser ces pertes.

D'où :

$$SCR = \text{Ajustement} + SCR_{\text{de base}} + SCR_{\text{Opérationnel}}$$

Les paramètres, des matrices de corrélation, utilisés pour le calcul du SCR ont été calibrés dans le but d'approcher le plus possible, une VaR à 99.5% pour l'exigence de capital requis.

1.6 Modalités de calcul du SCR dans le cadre d'un modèle interne complet ou partiel

Il existe deux types de modèle interne :

- Une approche modulaire proche de la formule standard qui va déboucher un modèle interne partiel.
- Une approche intégrée qui va déboucher sur un modèle interne complet. La différence entre les deux méthodes se fait sur le traitement des effets de diversifications entre les différents risques.

1.6.1 Modèle modulaire

Lors de cette approche, une charge en capital est déterminée pour chaque risque sur la base de chocs comme pour la formule standard. Les risques élémentaires puis modulaires sont ensuite

agrégés à l'aide de matrices de corrélation. La différence avec la formule standard vient des risques élémentaires utilisés qui vont mieux représenter le profil de risque de la compagnie d'assurance. Les matrices de corrélations utilisées sont donc différentes.

1.6.2 Modèle interne complet

Dans ce cas, les impacts des risques sont évalués dans leur globalité et non risque par risque. Il faut alors :

- modéliser les effets de diversifications des risques
- élaborer des générateurs de scénarios économiques

Une modélisation du résultat en sera déduite et il faudra calibrer une mesure de risque équivalente à une VaR de niveau de confiance 99.5% pour calculer le capital de solvabilité requis.

Ce type de modèle a l'avantage d'être plus précis dans l'évaluation, du besoin global en solvabilité, des risques encourus, mais ce type de modèle demande un investissement certain, qu'il soit humain ou financier. Cela conduit nombre d'assureurs à adopter la formule standard ou un modèle interne partiel.

1.7 Conclusion

L'objectif de cette section était de présenter le cadre dans lequel va se dérouler ce mémoire. Les méthodes, qui vont être appliquées dans la suite de cette étude, ne peuvent être désolidarisées, du cadre réglementaire qu'est Solvabilité 2. La suite de l'étude portera sur un calcul de SCR dont les jalons ont été posés dans cette première partie. Il s'agira dans les sections suivantes de présenter la méthodologie utilisée pour le calcul du risque de prime ainsi que de présenter une application de cette méthodologie sur un portefeuille d'assurance.

Chapitre 2

Présentation du modèle interne

Cette section décrit les étapes méthodologiques menant au calcul du SCR de primes dans le cadre du modèle interne de Generali. Il convient de signifier que cette méthodologie est la même pour le calcul du SCR de catastrophe au sein du groupe. Le risque de prime correspond au risque relatif à une perte probable liée à une éventuelle inadéquation des hypothèses sous-jacentes à la tarification des différents produits d'assurance.

Le processus d'évaluation du risque de prime comprend :

- Une analyse statistique des sinistres encourus afin d'identifier les distributions de probabilité adéquates décrivant leur comportement stochastique
- Une approche basée sur la simulation pour obtenir une exigence de capital brut
- L'évaluation des programmes de réassurance pour estimer un besoin en capital net
- Une approche basée sur l'ajustement pour comparer les résultats de la vision à l'ultime avec ceux de la vision à un an.

Pour des raisons de simplicité, ce mémoire s'articulera autour des deux premiers aspects méthodologiques du calcul. Nous allons donc présenter le processus de calibration ainsi que le calcul du SCR (d'un portefeuille d'assurance) selon le modèle interne de Generali.

Une attention particulière sera accordée à l'analyse des sinistres historiques, en termes de regroupement et de sélection des distributions, en fonction de la granularité des informations disponibles.

2.1 Généralités

Le risque de prime correspond au risque relatif à une perte probable liée à une éventuelle inadéquation des hypothèses sous-jacentes à la tarification du produit d'assurance. De manière pratique, le risque de prime évalué à la fin de l'année t correspond au risque que les primes acquises au cours de l'année $t + 1$ soient insuffisantes pour faire face aux sinistres survenus au cours de l'année $t + 1$.

L'évaluation de ce risque est effectuée pour l'ensemble des branches d'activité du modèle interne telles que définies par la réglementation Solvabilité 2. Ces branches d'activités sont au nombre de 13 et sont :

1. L'indemnisation des travailleurs (*Workers compensation*)
2. Frais médicaux (*Medical expenses*)
3. Protection des revenus (*Income protection*)
4. Responsabilité des véhicules à moteur (*Motor vehicle liability*)
5. Autre moteur (*Other motor*)

6. Marine, aviation et transport (*Marine, aviation and transport*)
7. Incendie et autres dommages à la propriété (*Fire and other damage to property*)
8. Responsabilité civile générale (*General liability*)
9. Crédit et sécurité (*Credit and suretyship*)
10. Frais juridiques (*Legal Expenses*)
11. Assistance (*Assistance*)
12. Perte financière diverses (*Miscellaneous financial loss*)
13. Réassurance acceptée (*Accepted reinsurance*)

Les 12 premières branches d'activité citées correspondent à l'activité directe de l'assureur et la dernière branche ne correspond qu'aux traités de réassurance éventuellement acceptés par l'assureur¹.

En fonction de la quantité de données disponibles et de la profondeur historique de ces données, les branches d'activité sont réparties en différents périmètres de modélisation. On dénote le périmètre modélisé, le périmètre semi-modélisé, et le périmètre non-modélisé. Une branche d'activité appartient au périmètre modélisé si l'ensemble de ses portefeuilles peut être évalué en considérant les informations historiques sur les sinistres afférents, c'est-à-dire les montants de sinistres bruts de contractuels et nets de réassurance facultative, ou des données sur l'exposition du portefeuille. Certaines branches d'activité contiennent des portefeuilles dont le risque ne peut pas être évalué en se basant sur l'historique des données du fait de leur faible quantité ou même de la profondeur historique. On parle dans ce cas d'activité semi-modélisée. Pour les branches d'activités dont aucun portefeuille ne peut être modélisé, on parle tout simplement d'activité non-modélisée. Chez Generali France par exemple, la réassurance interne fait partie du périmètre non-modélisé.

Dans la section suivante, nous verrons comment est évalué le risque de prime en périmètre modélisé.

2.2 Évaluation du risque de prime

L'analyse de l'activité modélisée est effectuée en prenant comme niveau minimum de segmentation les douze lignes d'activités (Line of Business - *LoB*) mentionnés en introduction de cette section. L'évaluation du risque de prime se subdivise en 3 grandes étapes que sont la calibration, l'évaluation du SCR brut et l'évaluation du SCR net. Étant donné la portée du mémoire (visant à intégrer l'incertitude des paramètres dans le processus d'évaluation du SCR) nous ne présenterons que le processus d'évaluation du SCR brut.

2.2.1 Calibration

La calibration du portefeuille correspond à la première étape dans le processus d'évaluation du risque de prime des activités appartenant au périmètre modélisé. L'objectif de cette première étape est d'identifier les distributions de probabilité appropriées pour décrire les sinistres encourus, en fonction des informations et de la nature des risques impliqués. Elle se subdivise en plusieurs sous-étapes que sont :

1. Au sein de Generali France, il existe 4 entités dédiées à l'assurance IARD, GIARD est la plus grande d'entre elle. Concernant sa structure de réassurance, le Groupe effectue des réassurances internes et ici, GIARD est la structure qui réassure les 3 autres entités non-vie du groupe.

- La ventilation des sinistres
- La mise en As-If des sinistres
- La mise à l'ultime des sinistres
- La calibration des lois de sinistre

2.2.1.1 Ventilation des sinistres

Les sinistres historiques peuvent être séparés en 3 catégories : les sinistres attritionnels, les sinistres exceptionnel et les catastrophes naturelles. Après avoir extrait de la base de données les sinistres résultant de catastrophes naturelles, les sinistres restants sont séparés en sinistres attritionnels et en sinistres graves . Les sinistres résultant de catastrophes naturelles permettent de déterminer le risque de catastrophe naturelle, risque qui ne fait pas partie de la portée de ce mémoire. La séparation des sinistres suivant leur gravité est effectuée conformément à la théorie des valeurs extrêmes (voir [Falk et al., 2011] et [Embrechts et al., 2010]). Un seuil est déterminé selon cette théorie et tous les sinistres dont le coût excède ce seuil sont considérés comme graves. Les sinistres restants sont les sinistres attritionnels.

2.2.1.2 Mise en As-If des sinistres

Afin d'obtenir une estimation qui prend en compte la valeur temporelle des sinistres passés, il est primordial de procéder à la mise en As-If de ces sinistres. Ce procédé vise à intégrer l'évolution de la population assurée ainsi que l'inflation et les autres paramètres socio-économiques dans l'évaluation de la sinistralité future du portefeuille. Ainsi, les sinistres payés sont d'abord corrigés de l'inflation, par souci d'homogénéisation. La valeur temporelle de l'argent est alors rapportée à la fin de l'année t . Un vecteur de taux d'inflation historiques est sélectionné sur la base des principes énoncés dans les directives de calibration. Dans le cas où aucune information séparée sur les sinistres payés et en cours n'est disponible, le processus précédent s'applique aux montants encourus.

2.2.1.3 Mise à l'ultime des sinistres

Dans son processus de calibration, Generali France calibre les lois sous-jacentes à la sinistralité en utilisant les sinistres dans leur vision à l'ultime. La méthodologies utilisée dans ce sens est l'approche par les triangles, de manière plus précise, une approche par *link ratio*, qui est une généralisation de la méthode Chain Ladder est réalisée afin d'obtenir les coûts et les fréquences à l'ultime des portefeuilles d'assurance. La projection des coûts à l'ultime à l'aide des informations sur les sinistres à la fin de l'année t et le choix de distributions de probabilité appropriées permettent d'adopter une approche basée sur la simulation pour l'estimation du coût ultime des sinistres encourus pendant l'année civile $t+1$. Cette approche est fortement affectée par le niveau de granularité des informations d'entrée et diffère généralement pour les sinistres attritionnels et les sinistres graves.

Afin de répondre aux principes de pratique actuarielle internationale, les sinistres sont ventilés selon leur nature comptable. On se retrouve avec le triangle de liquidation des nombres de sinistres historiques, le triangle des montants agrégés versés par l'assureur et le triangle des montants provisionnés. On peut en déduire le triangle des coûts totaux des sinistres à partir des deux derniers triangles cités précédemment.

Les rapports entre les sinistres ultimes encourus et le nombre de sinistres ultimes, calculés pour chaque année d'origine, constituent le vecteur des sévérités moyennes à l'ultime. Une analyse graphique peut révéler d'éventuelles tendances dans le modèle historique des sévérités moyennes

et un processus de detrending est parfois performé afin de rendre les données homogènes et non corrélées avant de poursuivre le processus d'ajustement.

Le rapport entre le nombre de sinistres ultimes et la mesure de l'exposition pour chaque année d'origine donne le vecteur ultime des fréquences de sinistres. Les mesures d'exposition appropriées sont les risques par an, les primes, le nombre de polices ou les sommes assurées. De même que pour les sévérités à l'ultime, une analyse graphique peut révéler des tendances possibles dans le modèle historique du nombre de sinistres par unité exposée et un processus de detrending est alors effectué afin de rendre les données homogènes et non corrélées avant de poursuivre le processus d'ajustement.

2.2.1.4 Calibration des lois de sinistre

Comme évoqué dans la sous section 2.2.1.1 page 27, les sinistres sont ventilés en 3 catégories que sont les sinistres attritionnels, les sinistres larges et les catastrophes naturelles. Notre mémoire ne traitant que le risque de prime, nous n'allons pas présenter le processus de calibration du risque de catastrophe naturelle.

Sinistres attritionnels

Approche fréquence \times sévérité moyenne L'approche fréquence \times sévérité moyenne décompose la sinistralité suivant leur fréquence annuelle ainsi que leur coût moyen annuel. Cette approche peut être résumée par l'équation suivante :

$$X = N \times S$$

où :

- X correspond au montant global du sinistre encouru sur une année
- N correspond à la fréquence annuelle moyenne des sinistres
- S à la sévérité annuelle moyenne des sinistres

Les paramètres de ces différentes composantes sont estimés en utilisant les principes du maximum de vraisemblance et la méthode des moments, lorsque cela est possible. Les lois candidates pour la modélisation de la sévérité moyenne sont en général la distribution Normale, la Log-normale et la loi Gamma. En ce qui concerne la fréquence, les distributions Poisson et Binomiale négative sont appropriées. Les comparaisons entre les modèles théoriques et les distributions empiriques peuvent être effectuées à l'aide d'analyses numériques (la moyenne, le coefficient de variation et les percentiles sont pris en compte), de représentations graphiques (en considérant les fonctions de distribution cumulative et les QQ Plots) et d'analyses statistiques (par exemple, la statistique du Chi deux).

Approche fréquence \times sévérité individuelle Pour l'approche fréquence \times sévérité individuelle, la fréquence et le coût des sinistres sont modélisés dans une approche sinistre par sinistre. L'équation représentative de cette modélisation est la suivante :

$$X = \sum_{i=0}^N S_i$$

où cette fois-ci :

- X représente toujours le montant global de sinistre sur une année
- N est la variable aléatoire représentant le nombre de sinistres survenus durant l'année
- S_i représente le montant du i^{eme} sinistre survenu durant l'année

L'estimation des paramètres, le choix des distributions de probabilité appropriées et les approches pour comparer les distributions empiriques et théoriques ne diffèrent pas du cas précédent, où la sévérité et la fréquence moyennes ont été considérées.

Approche par agrégation Si aucune information distincte sur le nombre de sinistres n'est disponible, l'approche précédente fréquence-sévérité peut être remplacée par une approche par agrégation, où seuls les montants des sinistres sont pris en compte. Comme dans les cas précédents, les sinistres payés, ou les sinistres encourus dans le cas où aucune séparation entre les sinistres payés et les sinistres en cours n'est disponible, sont corrigés de l'inflation, et la projection des coûts ultimes est effectuée par des méthodes de link ratio.

Les modèles de probabilité doivent ensuite être sélectionnés pour modéliser le coût global. L'estimation des paramètres, le choix des distributions de probabilité appropriées et les approches pour comparer les distributions empiriques et théoriques ne diffèrent pas des cas où les sévérités ont été considérées.

Approche par loss ratio Si les informations historiques sur les sinistres sont particulièrement peu fiables, aucune des approches décrites ci-dessus n'est réalisable. En conséquence, une approche simplifiée du rapport s/p est adoptée par défaut. Certaines hypothèses supplémentaires sont toutefois nécessaires pour l'estimation des primes prévues et du rapport s/p ultime, comme entre autre un coefficient de variation et une distribution de probabilité appropriée pour décrire le comportement stochastique de la sinistralité. En général, un modèle normal, log-normal ou gamma est réalisé.

Sinistres graves

La méthode des triangles de liquidation n'est pas adaptée aux sinistres larges étant données leur faible survenance. Ceci pourrait entraîner une évaluation disproportionnée des paramètres des distributions de probabilité.

En ce qui concerne la fréquence des sinistres, il n'y a pas de différences par rapport aux considérations discutées pour l'approche fréquence-sévérité individuelle appliquée aux sinistres attritionnels, tant pour la méthodologie de projection du nombre de sinistres que pour l'identification de distributions de probabilité appropriées.

En ce qui concerne les montants des sinistres, il convient d'examiner la structure d'évolution des montants payés et en suspens pour chaque sinistre survenu au cours d'une décennie. Les sinistres payés sont ajustés en fonction de l'inflation, la valeur temporelle de l'argent devant être rapportée à la fin de l'année t . Un vecteur de taux d'inflation historiques est identifié, sur la base des principes rapportés dans les directives de calibration. Le montant à l'ultime est ensuite évalué comme la somme pure de l'encours et de l'inflation payée à la date d'évaluation. Aucune autre analyse actuarielle n'est nécessaire puisqu'une information granulaire sur chaque sinistre historique est disponible.

Des modèles de probabilité doivent alors être sélectionnés pour modéliser la sévérité des sinistres individuels. Les méthodologies pour estimer les paramètres des distributions et les méthodes pour comparer les distributions empiriques et théoriques ne diffèrent pas du cas précédent où la sévérité attritionnelle était considérée. Néanmoins, une gamme plus large de distributions est appropriée pour modéliser la sévérité des sinistres graves, à savoir : les lois de Pareto et de Pareto généralisé, la loi Lognormale tronquée à gauche, la loi Lognormale *shiftée* à droite, les lois Gamma, Weibull, Burr et Exponentielle, Gamma.

2.2.2 Calcul du SCR_{Brut}

Dans la section précédente, les informations historiques sur les sinistres des différents portefeuilles ont été prises en compte et les méthodologies appropriées pour identifier les distributions de probabilité adéquates à leur modélisation ont été définies. Dans cette section, l'évaluation du résultat technique au niveau de l'entreprise et l'identification de l'exigence de capital correspondante seront décrites

En particulier, la distribution de probabilité du résultat technique brut au niveau de l'entreprise, est obtenue selon l'équation suivante.

$$\mathbf{RT}_{k,Brut} = P_{k, Brut} - GE_k - AC_k - \mathbf{X}_{k, Brut} \quad (2.1)$$

Avec :

- $\mathbf{RT}_{k,Brut}$: le résultat technique brut obtenu sur le portefeuille k , en fonction des flux financiers techniques bruts ;
- $P_{k,Brut}$: les primes brutes budgétaires qui devraient être acquises par l'entité au cours de l'année $t+1$ pour le portefeuille k . En additionnant les primes brutes budgétaires des différents groupes homogènes de risques, on obtient le revenu global des primes brutes.
- GE_k : les frais généraux, introduits en pourcentage des primes relatives au portefeuille k ;
- AC_k : les frais d'acquisition. Les mêmes considérations que pour les frais généraux s'appliquent ;
- $\mathbf{X}_{k,Brut}$: les sinistres survenus au cours de l'année $t + 1$.

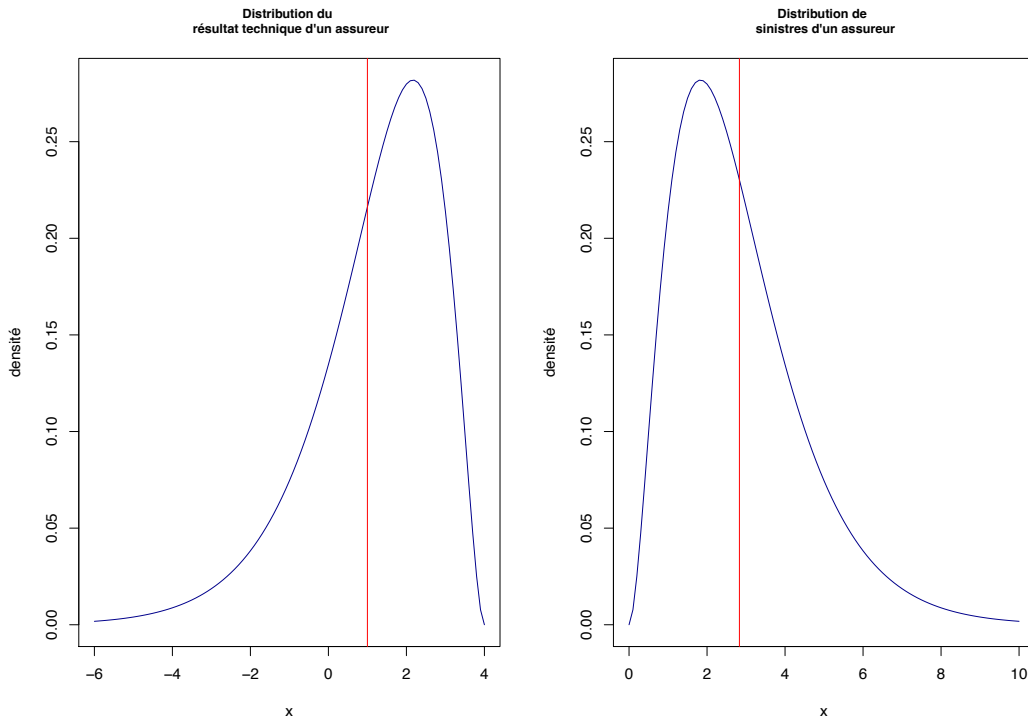


FIGURE 3 – Exemple de distribution de résultat technique et de sinistre

La figure 3 nous permet de mieux visualiser la relation entre le résultat technique et la distribution des sinistres, la barre rouge représentant la moyenne de la distribution. Les sinistres sont estimés pour chaque groupe homogène de risques via une approche de simulation par la méthode de Monte

Carlo, chaque sinistre étant tiré aléatoirement des distributions de probabilité préalablement identifiées selon l'une des approches présentées dans la sous-section 2.2.1.4 à la page 28. Chez Generali France, la distribution de la sinistralité est obtenue en effectuant 50000 simulations de sinistre.

Le SCR du portefeuille k se définit alors comme la différence entre l'espérance mathématique et la Value-at-Risk à 0,5% de la distribution du résultat technique de ce portefeuille, soit :

$$SCR_{k,Brut} = \mathbb{E}(RT_{k,Brut}) - \text{VaR}_{0,5\%}(RT_{k,Brut}) \quad (2.2)$$

A partir de l'équation (2.1), l'équation (2.2) devient :

$$\begin{aligned} SCR_{k,Brut} &= \mathbb{E}(RT_{k,Brut}) - \text{VaR}_{0,5\%}(RT_{k,Brut}) \\ &= \mathbb{E}(P_{k,Brut} - F_{k,Brut} - X_{k,Brut}) - \text{VaR}_{0,5\%}(P_{k,Brut} - F_{k,Brut} - X_{k,Brut}) \\ &= P_{k,Brut} - F_{k,Brut} - \mathbb{E}(X_{k,Brut}) - (P_{k,Brut} - F_{k,Brut} - \text{VaR}_{99,5\%}(X_{k,Brut})) \\ SCR_{k,Brut} &= \text{VaR}_{99,5\%}(X_{k,Brut}) - \mathbb{E}(X_{k,Brut}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ainsi donc, selon le modèle interne de Generali, le SCR brut du portefeuille d'assurance k n'est rien d'autre que la distance entre la Value-at-Risk à 99,5% et l'espérance mathématique de la sinistralité.

Dans la suite du mémoire, notre objectif sera de déterminer le SCR du portefeuille des contrats de Responsabilité Civile Générale de GIARD selon l'approche classique utilisée dans le modèle interne, puis de le comparer aux montants de SCR qui seront calculés en prenant en compte l'incertitude des paramètres suivant différentes méthodologie.

Chapitre 3

Calcul d'un SCR de prime

3.1 Présentation du portefeuille TPL Large

Le portefeuille GIARD TPL Large¹ représente l'ensemble des sinistres graves de la garantie Responsabilité Civile générale proposée par Generali IARD. Ces sinistres graves sont déterminés selon les méthodes utilisées en théorie des valeurs extrêmes. Les sinistres de ce portefeuille sont les sinistres dont la valeur totale (Montant versé + Montant provisionné) a, une fois au cours de leur durée d'existence, dépassé le seuil des graves. Pour notre portefeuille en question, le seuil a été fixé à 2 millions d'euros.

Étant donné le fait que ces sinistres sont qualifiés de "graves" leur simulation se fera suivant l'approche fréquence \times sévérité individuelle.

L'historique de nos données reprend l'ensemble de tous les montants de primes et de sinistres de valeur supérieure à 2 millions depuis l'année 2006.

La figure 4 présente l'évolution des montants des primes émises ainsi que de leur valeur mise en as-if depuis 2006.

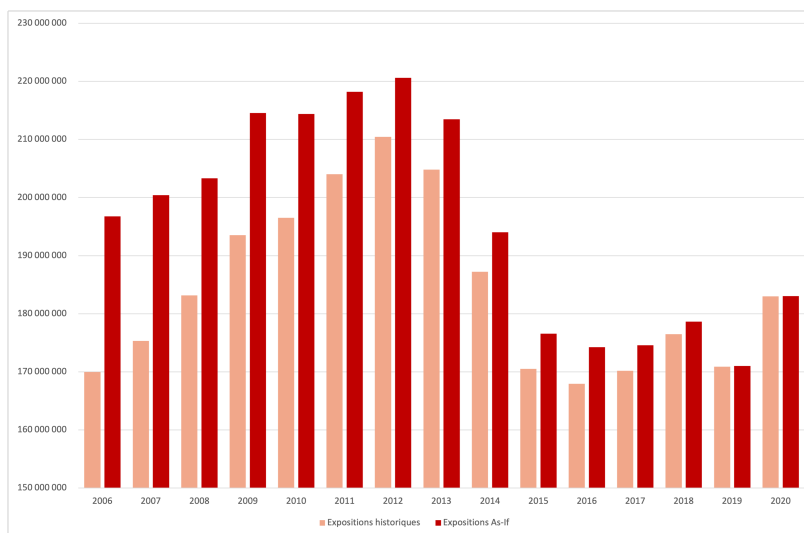


FIGURE 4 – Montant des primes acquises de Generali France au titre de la RC générale entre 2006 et 2020

1. Tout au long du mémoire, nous utiliserons de manière indifférente les termes GIARD TPL Large, RC générale ou RCG pour désigner ce portefeuille.

On observe une diminution de l'assiette de prime de GIARD pour la garantie responsabilité civile entre 2006 et 2020. Cette baisse est encore plus prononcée lorsqu'on considère la vision as-if. Cela nous montre la pertinence de la mise en as-if des données historiques. L'assiette de prime offre un bref aperçu du niveau de risque auquel l'assureur est exposé.

3.2 Calibration

3.2.1 Calibration de la sévérité

3.2.1.1 Historique des données

Le graphique et le tableau suivant offrent un aperçu de la distribution de la sévérité historique du portefeuille GIARD TPL Large.

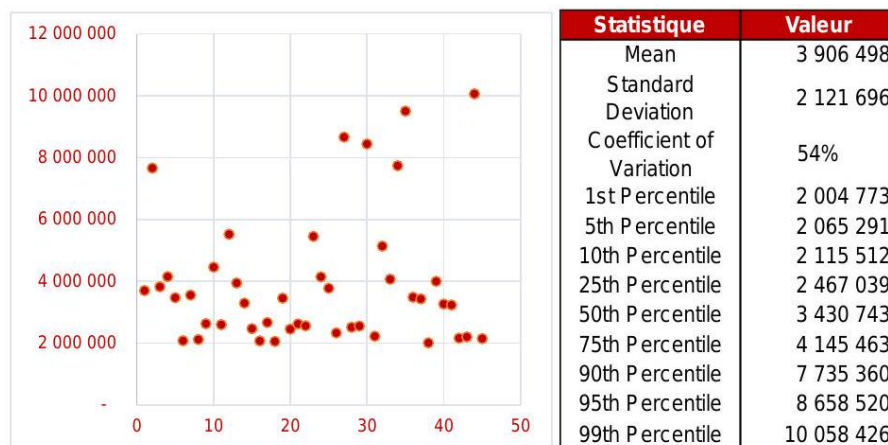


Figure 4: Montant des sinistres graves en RCG de Generali France de 2006 à 2020

FIGURE 5 – Montant des sinistres graves en RCG de Generali France de 2006 à 2020

Entre 2006 et 2020, on dénombre 45 sinistres d'une valeur supérieure à 2 millions. On remarque un « banc » de sinistres d'une valeur comprise entre 2 millions et 6 millions d'euro avec 6 sinistres de valeur supérieure à 6 millions. Notre coefficient de 54% traduit donc une forte volatilité au niveau de la sévérité.

3.2.1.2 Choix de la loi de sévérité

Selon [Davison and Smith, 1990] les lois candidates à l'approximation de notre distribution de sinistres sont les suivantes :

Lois de Probabilité
Generalised Pareto A
Truncated Lognormal
Truncated Gamma
Truncated Weibull
Truncated Exponential
Shifted Lognormal MoM
Shifted Gamma ML
Shifted Gamma MoM
Shifted Weibull

Les paramètres de ces différentes lois ont été estimés soit par la méthode du maximum de vraisemblance, soit par la méthode des moments. Les différents paramètres obtenus sont listés dans le tableau suivant :

Loi de probabilité	Paramètres estimés	
Generalised Pareto A	scale	1605205
	shape	0,164044
	threshold	2000000
Truncated Lognormal	logmean	14,107306
	logSD	0,857570
	threshold	2000000
Truncated Gamma	alpha	0,000002
	beta	3080314
	threshold	2000000
Truncated Weibull	alpha	0,633271
	beta	640709
	threshold	2000000
Truncated Exponential	lambda	1906498
	threshold	2000000
Shifted Lognormal MoM	logmean	14,064062
	logSD	0,890748
	shift	2000000
Shifted Gamma MoM	alpha	0,780562
	beta	2442467
	shift	2000000
Shifted Gamma ML	alpha	0,825783
	beta	2308715
	shift	2000000
Shifted Weibull	alpha	0,854961
	beta	1762192
	shift	2000000

Des méthodes d'évaluation de la qualité d'ajustement, tant graphique (PDF, CDF, QQ-Plot, PP-Plot) que de manière analytique (Test du Khi-2) ont été appliquées. Les résultats du test de Khi-2 n'ont pas permis de mettre en avant une distribution théorique particulière mais, devant obligatoirement faire un choix, nous avons choisi la shifted gamma approchée par la méthode des moments car celle-ci avait les statistiques les plus proches de celles des données historiques. Le tableau suivant présente les distributions de chacune de ces lois.

La shifted Gamma ML (*Maximum Likelihood* - Maximum de vraisemblance) a été préférée à la shifted Gamma MoM (*Method of Moments* - Méthode des moments) au vu de son coefficient de variation et du fait que son quantile 99% dépasse largement celui des données observées. La loi exponentielle tronquée n'a pas été sélectionnée car son écart-type est en dessous de l'écart-type observé.

Ainsi donc, la loi de sévérité sélectionnée pour la simulation de la sévérité du portefeuille GIARD TPL Large est la shifted Gamma de paramètres $\alpha = 0,825783$ $\beta = 2308715$ et de décalage $\text{shift} = 2000000$.

Data	Mean	Standard Deviation	Coefficient of Variation	95th Percentile	99th Percentile
Generalised Pareto A	3 906 498	2 121 696	0,54	8 658 520	10 058 426
Truncated Lognormal	3 920 202	2 342 559	0,60	8 210 233	13 043 290
Truncated Gamma	3 938 969	2 507 203	0,64	8 422 419	13 875 195
Truncated Weibull	3 904 992	2 142 343	0,55	8 147 352	12 101 584
Truncated Exponential	3 911 128	2 267 202	0,58	8 269 797	12 798 346
Shifted Lognormal MoM	3 906 498	1 906 498	0,49	7 711 356	10 779 746
Shifted Gamma MoM	3 906 498	2 097 989	0,54	7 549 468	12 183 225
Shifted Gamma ML	3 906 498	2 157 906	0,55	8 239 471	11 968 890
Shifted Weibull	3 906 498	2 097 989	0,54	8 114 517	11 681 353
Shifted Weibull	3 910 278	2 243 187	0,57	8 359 046	12 515 122

FIGURE 6 – Résultats de calibration du portefeuille RCG large de Generali France

3.2.2 Calibration de la fréquence

3.2.2.1 Historique des données

Comme vu dans la section 3.1 nous avons une fluctuation des primes émises d'une année à l'autre. Analyser la fréquence des sinistres sans tenir compte de l'assiette de prime pourrait introduire un biais dans la calibration de la loi sous-jacente. Ainsi donc, nous analyserons en amont l'unité d'exposition par année qui n'est rien d'autre que le rapport du nombre de sinistre à la prime émise sur l'année.

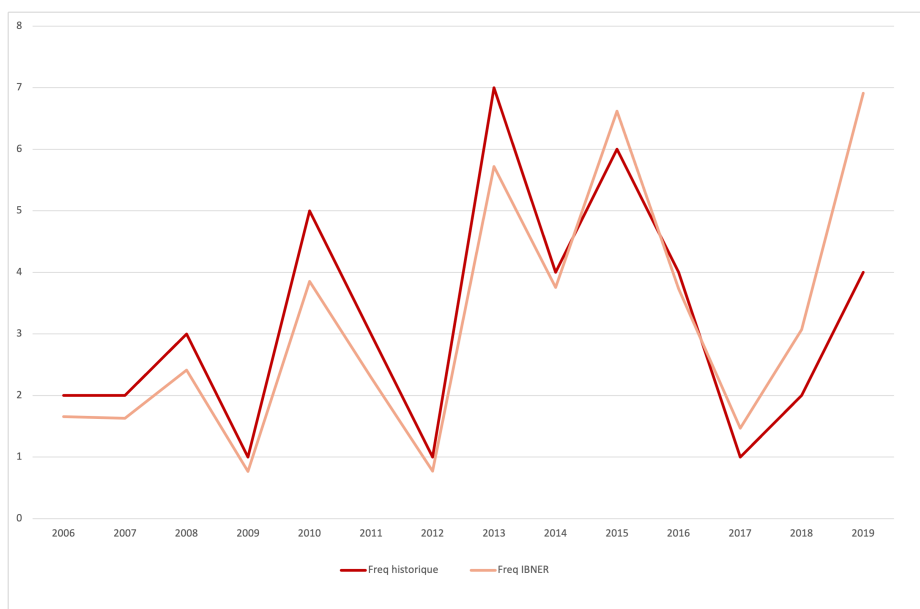


FIGURE 7 – Nombre de sinistres graves en RCG de Generali France entre 2006 et 2020

La figure 7 présente les données de fréquence de sinistre observées ainsi que les fréquences projetées à l'ultime sur la période 2006-2020. A la date du 31/08/2021 Aucun sinistre grave n'avait été déclaré en 2020 d'où l'absence de données à ce jour. On remarque ces fréquences projetées sont supérieures aux fréquences historiques sur les dernières années, cela traduit le caractère conservateur de nos estimations. Ce sont ces données qui seront utilisées dans la suite de la calibration.

Nous présenterons dans le graphique suivant les données d'unités d'exposition par année.

On observe une forte tendance à la hausse du nombre d'unités d'exposition au fil des années. Dans le but de justifier le caractère indépendant de nos observations d'une année à l'autre, il convient d'effectuer un "detrending". Cela consiste à retirer la composante tendancielle de notre

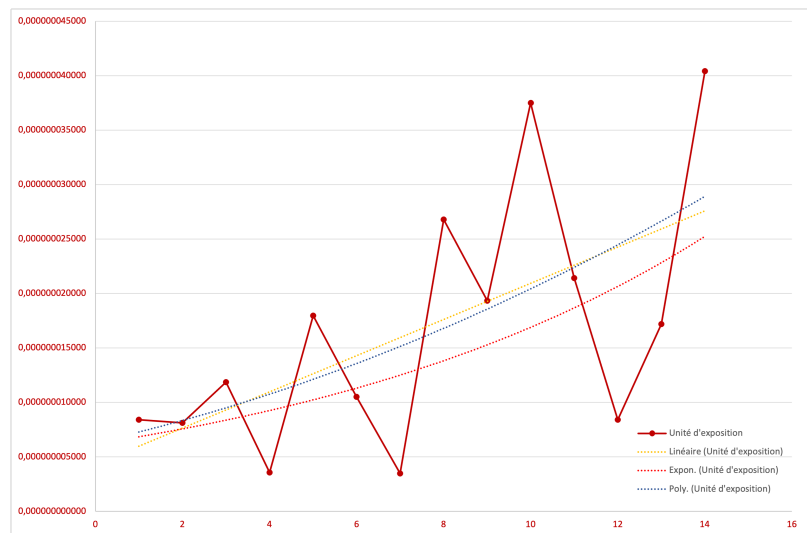


FIGURE 8 – Unités d'exposition du portefeuille RCG Large de Generali France entre 2006 et 2020

série d'observation. Dans le cadre de la calibration de notre portefeuille, nous avons effectué le detrending en supposant une tendance linéaire. Les données corrigées de tendance sont présentées dans le graphique suivant avec tableau récapitulatif des statistiques de cet échantillon.

Data Statistics	Data Statistics
Mean	5,396
Standard Deviation	1,733
Coefficient of Variation	0,321
1st Percentile	2,048
5th Percentile	2,048
10th Percentile	3,338
25th Percentile	4,334
50th Percentile	5,628
75th Percentile	6,911
90th Percentile	7,794
95th Percentile	7,849
99th Percentile	7,849

C'est donc avec ces données corrigées que la calibration de loi de fréquence a été réalisée.

3.2.2.2 Choix de la loi de fréquence

Pour la modélisation de la fréquence, les lois de probabilité candidates sont la loi de Poisson et la loi binomiale négative. Nos estimations de paramètres sont toujours réalisées par la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moments. Les données de fréquences sont arrondi à l'entier avant les estimations. Les paramètres estimés par ces différentes méthodes sont consignés dans le tableau suivant.

Lois	Paramètres	
Poisson	lambda	5,36
Negative Binomial ML	n	347,46
	q	0,015
Negative Binomial MoM	n	-15,27
	q	-0,54

Le paramètre lambda estimé pour la loi de Poisson est le même indépendamment de la méthode utilisée.

On remarque directement que les paramètres de la loi binomiale-négative estimés par la méthode des moments n'appartiennent pas au domaine de définition théorique de cette loi, ils seront donc omis dans le processus de sélection. Les résultats du test de Khi-2 d'adéquation de loi sont présentés dans le tableau suivant.

	Poisson	Neg Binomial ML	Neg Binomial MoM
Mean per Unit Exposure	$2,73 \cdot 10^{-8}$	$2,73 \cdot 10^{-8}$	$2,73 \cdot 10^{-8}$
CoV		0,45	0,45
log vraisemblance	-29,12	-29,12	
pValue	0,0199	0,0073	
Statistic	9,8485	9,8442	
DF	3	3	
Num Bins	5	5	

Au vu de la p-value, aucune distribution théorique ne se présente comme un «bon candidat». Nous avons toutefois sélectionné la loi de Poisson pour sa caractéristique $E(X) = \text{Var}(X)$ que nous avons retrouvé dans la distribution.

	Poisson	Negative Binomial ML
Mean	5,37	5,37
Standard Deviation	2,32	2,34
Coefficient of Variation	0,43	0,44
1st Percentile	1	1
5th Percentile	2	2
10th Percentile	3	2
25th Percentile	4	4
50th Percentile	5	5
75th Percentile	7	7
90th Percentile	8	8
95th Percentile	9	9
99th Percentile	11	12

3.3 Calcul du SCR brut du portefeuille GIARD TPL Large

3.3.1 Distribution de la fréquence de sinistres

Comme vu dans la section précédente, la loi de fréquence sélectionnée est une loi de poisson de paramètre $\lambda = 5,36$.

La distribution de fréquence obtenue par la méthode de Monte Carlo à 50000 simulations nous permet d’avoir l’histogramme et les statistiques suivants :

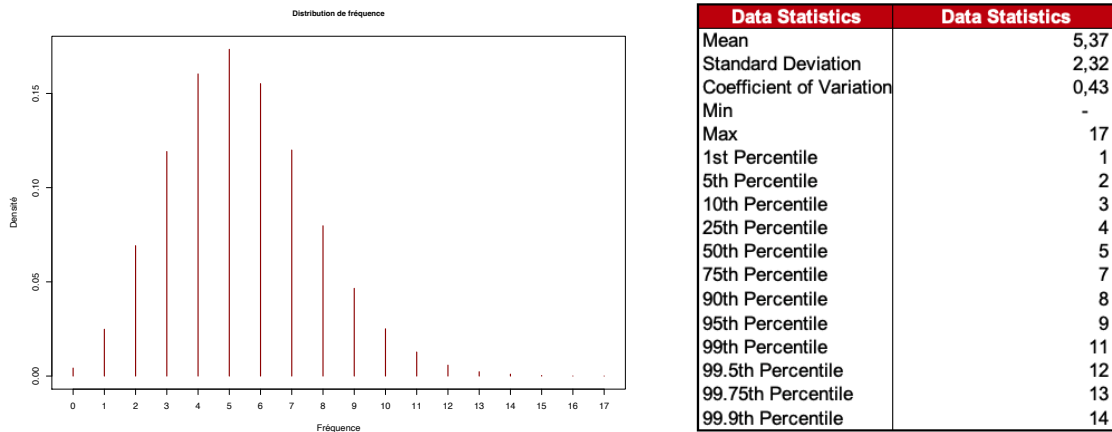


FIGURE 9 – Distribution de fréquence générée dans le modèle interne pour le portefeuille RCG large de Generali France

3.3.2 Distribution de la sévérité des sinistres

La distribution de la sévérité obtenue après simulation du nombre de sinistre est la suivante.

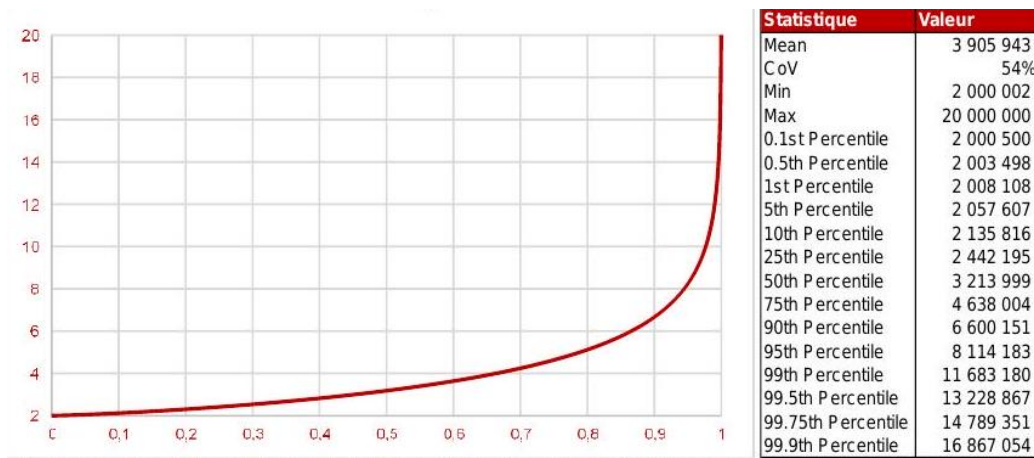


FIGURE 10 – Distribution de la sévérité générée (en M€) dans le modèle interne pour le portefeuille RCG large de Generali France

On observe une forte volatilité de la sévérité des sinistres, ce qui est plutôt cohérent avec la calibration obtenue.

3.3.3 Distribution des montants agrégés de sinistre

En sommant les montants de sévérités obtenus par simulations ligne à ligne, on obtient la distribution des montant agrégés de sinistre. De manière pratique, ces montants sont obtenus suivant la formule suivante :

$$X_k = \sum_{i=0}^{n_k} S_{i,k}$$

où :

- X_k représente le montant agrégé de sinistre pour la k^{eme} simulation
- n_k représente le nombre de sinistre généré lors de la k^{eme} simulation
- $S_{i,k}$ le coût engendré par le sinistre i lors de la k^{eme} simulation. Lorsque $n_k = 0$, on pose $S_{i,k} = 0$

La figure 11 présente la distribution des sinistres ainsi générés.

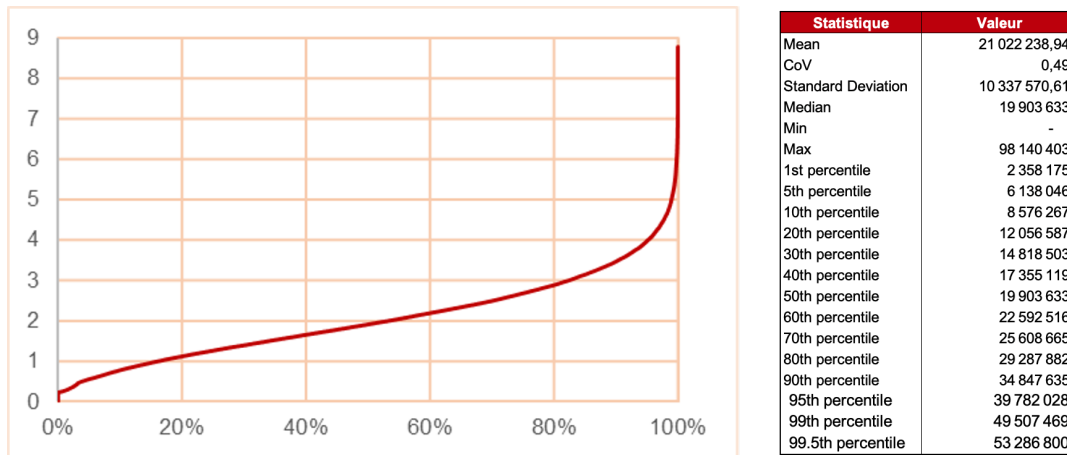


FIGURE 11 – Distribution des montants agrégés (en 10M€) de sinistres graves générés par le modèle interne pour le périmètre RCG de Generali France

Cette distribution représente la distribution des pertes que pourrait subir Generali France sur son portefeuille large de responsabilité civile générale. De là, comme présenté dans la formule du SCR brut, on déduit que le SCR vaut :

$$SCR_{Brut}^{RCG} = 53\,286\,800 - 21\,022\,239 = 32\,264\,562$$

Chapitre 4

Limites

Dans cette section, nous présenterons les limites à la calibration lorsque le modèle statistique est bien spécifié et en absence de défaut du générateur pseudo-aléatoire. Ces limites se situent alors au niveau de la qualité de l'estimation des paramètres. Un des problèmes est spécifique à la méthode d'estimation par maximum de vraisemblance et le deuxième problème est un problème propre à la plupart des méthodes analytiques d'estimation statistique : le problème de fiabilité de l'estimation en présence de données réduites.

4.1 La distribution de vraisemblance

Cette limite est une limite typique à l'estimation du maximum de vraisemblance. Le maximum de vraisemblance est en effet le mode de la fonction de vraisemblance et ce maximum de vraisemblance peut être le même indépendamment de la forme générale de la distribution de la fonction de vraisemblance. Cela est une limite à l'approche dans le sens où cette méthode d'estimation ponctuelle ne considère qu'une seule valeur tandis qu'en fonction de la densité de la fonction de vraisemblance d'autres valeurs pourraient être considérée comme de "bons candidats".

4.2 Robustesse des estimateurs

Cette limite est la limite principale rencontrée lors de la détermination d'un estimateur ponctuel. La détermination d'un estimateur par maximum de vraisemblance ou par la méthode des moments est très fortement influencée par le nombre de données présentes dans l'échantillon statistique. Cela est d'autant plus réel dans le secteur de l'assurance où pour élaborer des modèles type fréquence \times coût nous considérons la maille annuelle de l'information, en d'autres termes nous agrégeons toute l'information annuelle en une seule statistique : le nombre de sinistre pour la fréquence ou parfois le coût moyen annuel de sinistre pour la sévérité. Cela conduit à obtenir des échantillons généralement constitués de moins de 30 observations et la sensibilité des estimateurs est très élevée dans les situations de données réduites. C'est ce problème majeur qui a conduit à la rédaction de ce mémoire sur la prise en compte de l'incertitude des paramètres dans le processus de calibrage des données.

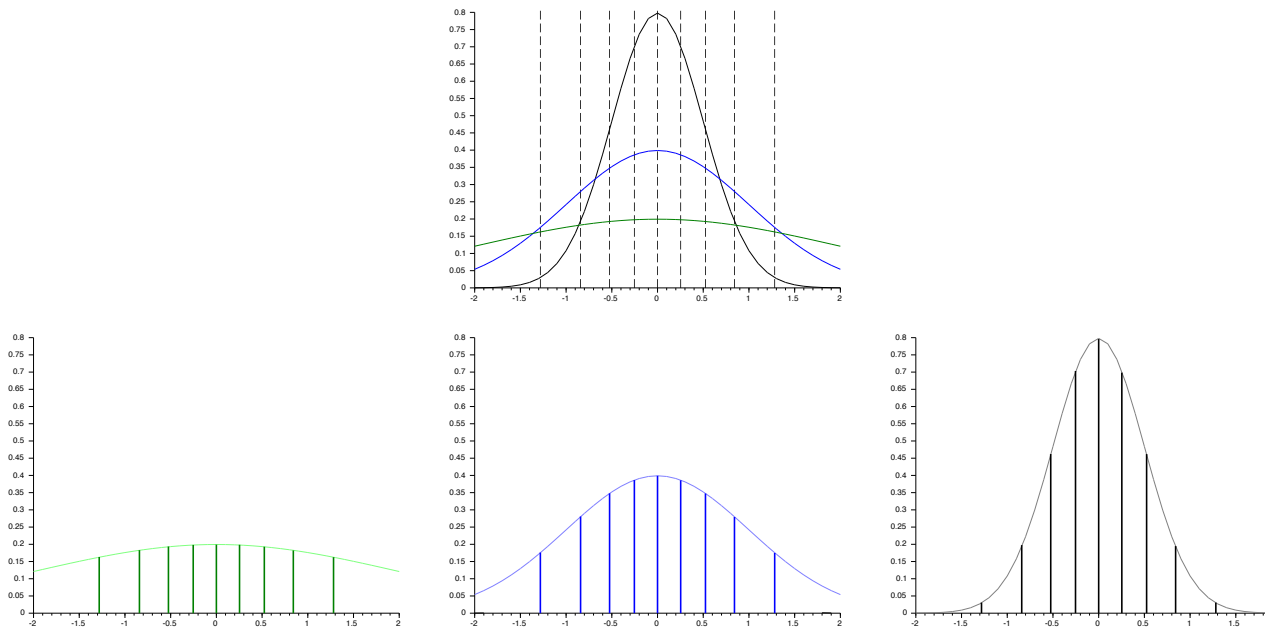


FIGURE 12 – Maximum de vraisemblance en fonction de la distribution de la fonction de vraisemblance

Deuxième partie

Sur l'incertitude des paramètres

Chapitre 1

Revue de littérature

Une des limites principales des estimateurs ponctuels que sont l'estimateur du maximum de vraisemblance et l'estimateur de la méthode des moments est que ce sont des estimateurs très peu robustes voir [Kiefer, 1987]. En effet, la valeur de ces estimateurs peut être fortement influencée par une observation de l'échantillon en premier lieu et en deuxième point, ces estimateurs sont fortement influencés par les observations de l'échantillon.

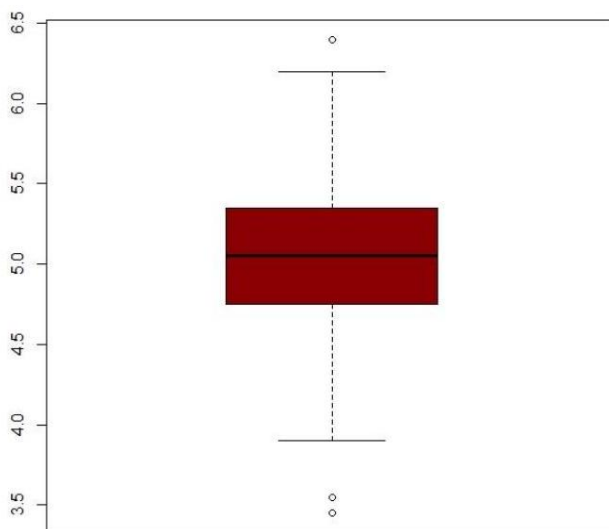


FIGURE 13 – Répartition de 20 estimateurs du maximum de vraisemblance à partir d'échantillons de 20 observations générés par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$

Ce manque de robustesse peut avoir des répercussions plus ou moins importante dans le calcul du SCR. En cas de surévaluation du SCR, l'assureur pourra faire face à un sinistre d'une intensité supérieure à Celle d'un événement bicentenaire mais ferait face aussi à un manque à gagner sur cette partie immobilisée. En cas de sous-estimation, la situation serait avantageuse en prenant en compte la rentabilisation des fonds non-immobilisé mais pourrait être largement plus défavorable en cas de survenance de l'événement bicentenaire. Selon la littérature, il serait judicieux d'intégrer dans le processus de calcul et d'estimation des paramètres de nos lois de simulation, un facteur d'incertitude : c'est l'incertitude des paramètres. C'est sous ce prisme que ce mémoire s'inscrit afin de présenter et d'évaluer les différentes méthodes de prise en compte de l'incertitude des paramètres. Selon la littérature existante, deux grandes approches ont été parcourues afin d'évaluer cette problématique. [Mata, 2000] a utilisé la méthode de bootstrap dont la théorie générale a été déve-

loppée par [Efron and Tibshirani, 1993]. [Borowicz, 2006] et [Diers et al., 2013] ont exploré, en plus de l'approche par la méthode de bootstrap, une approche bayésienne [Robert, 2005] ainsi qu'une approche basée sur la normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Tous ces articles sont arrivés à la même conclusion : la prise en compte de l'incertitude des paramètres dégrade le SCR au sens de l'assureur. Dans cette partie, nous présenterons les différentes théories sous-jacentes de ces approches ainsi que les valeurs de SCR obtenus après application de ces approches. Nous présenterons donc les SCR calculés avec prise en compte de l'incertitude des paramètres selon un approche bayésienne avant de présenter les résultats de la prise en compte de cette incertitude suivant une approche par bootstrap. Dans la section d'après, nous évaluons le comportement asymptotique de la prise en compte de l'incertitude des paramètres dans le calcul du risque de prime. Tout au long de cette partie, nous supposons que le modèle statistique dans lequel nous avons performer notre estimation est bien spécifié, c'est-à-dire que la distribution des fréquences observées suit bien une loi de poisson et que la distribution des coûts de sinistres observés suit aussi une loi gamma.

Chapitre 2

Approche bayésienne

L'approche bayésienne est basée sur la théorie de l'inférence bayésienne, théorie évoquée par Thomas Bayes. Cette approche suppose que les paramètres de notre calibration ne sont pas ponctuels mais sont distribués de manière aléatoire suivant une certaine loi de probabilité. Dans les différentes sous-sections qui suivent, nous aurons une présentation de la théorie de l'inférence bayésienne ainsi que des différentes méthodes numériques ayant permis de l'implémenter dans le cadre du mémoire.

2.1 Cadre théorique

Le théorème fondamentale de la théorie de l'inférence bayésienne est le théorème de Bayes.

Théorème 1 Soient A et E deux événements tels que $P(E) \neq 0$. On obtient la relation suivante entre $P(A | E)$ et $P(E | A)$:

$$\begin{aligned} P(A | E) &= \frac{P(E | A)P(A)}{P(E | A)P(A) + P(E | A^c)P(A^c)} \\ &= \frac{P(E | A)P(A)}{P(E)}. \end{aligned}$$

Ce théorème, qui peut être perçu comme un principe d'actualisation de la probabilité, décrit la mise à jour de la vraisemblance de A de $P(A)$ vers $P(A | E)$, une fois que E a été observé. La version continue de ce théorème est définie ci-après.

Théorème 2 Soient deux variables aléatoires X et Y , de distributions conditionnelle $f(x | y)$ et marginale $g(y)$. La distribution conditionnelle de Y sachant X est

$$g(y | x) = \frac{f(x | y)g(y)}{\int f(x | y)g(y)dy}.$$

A partir de ce théorème, on peut évaluer l'incertitude d'un paramètre dans le processus d'inférence et l'intégrer dans l'ensemble de nos résultats. On considère que l'incertitude sur le paramètre θ d'un modèle peut être décrite par une distribution de probabilité π sur Θ , appelée distribution a priori. L'inférence est alors fondée sur la distribution de θ conditionnelle à x , $\pi(\theta | x)$, appelée distribution a posteriori et définie par

$$\pi(\theta | x) = \frac{f(x | \theta)\pi(\theta)}{\int f(x | \theta)\pi(\theta)d\theta}.$$

Notons que $\pi(\theta | x)$ est ainsi proportionnelle à la distribution de x conditionnellement à θ , qui est aussi la vraisemblance, multipliée par la distribution a priori de θ . La contribution principale apportée par un modèle statistique bayésien est donc de considérer en sus une distribution aléatoire pour les paramètres.

Dès lors, nous pouvons monter notre modèle statistique bayésien permettant d'évaluer les paramètres de loi de la sinistralité du portefeuille d'assurance et prendre ainsi en compte l'incertitude des paramètres dans l'évaluation du SCR. On définit ci-après, le modèle paramétrique statistique ainsi que le modèle statistique bayésien.

Définition 1 *Un modèle paramétrique statistique consiste en l'observation d'une variable aléatoire x distribuée selon $f(x | \theta)$, où seulement le paramètre θ est inconnu et appartient à un espace de dimension finie.*

Définition 2 *Un modèle statistique bayésien est constitué d'un modèle statistique paramétrique, $f(x | \theta)$, et d'une distribution a priori pour les paramètres, $\pi(\theta)$.*

Ainsi, dans la suite de cette section nous présenterons la démarche utilisée afin de déterminer les lois *a priori* de nos paramètres (Section 2.3.1). Dans la section 2.2, nous présentons les différentes approches numériques utilisées pour déterminer les distributions *a posteriori* des paramètres à partir de leur distribution *a priori*.

2.2 Méthodes numériques d'inférence bayésienne

2.2.1 Méthodes classiques d'approximation

Cette section couvre brièvement quelques techniques classiques qui peuvent faciliter les calculs bayésiens ; la section suivante en revanche traite des méthodes de simulations récentes qui semblent particulièrement adaptées aux exigences de l'approche bayésienne.

2.2.1.1 Intégration numérique

À partir de la simple méthode de Simpson, plusieurs approches ont été conçues en Mathématiques appliquées pour l'approximation numérique d'intégrales. Par exemple, la quadrature polynomiale est censée approcher les intégrales liées à des distributions proches de la loi normale. L'approximation de base est donnée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} f(t) dt \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(t_i),$$

où

$$\omega_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{n}}{n^2 [H_{n-1}(t_i)]^2}$$

et t_i est le i -ième zéro du n -ième polynôme d'Hermite, $H_n(t)$.

D'autres approximations d'intégrales reliées à la méthode précédente sont disponibles, qui reposent sur différentes bases orthogonales classiques ou les ondelettes, mais ces méthodes requièrent généralement des hypothèses de régularité sur la fonction f , ainsi que des études préliminaires pour déterminer quelle base est la plus adéquate et à quel point cette approximation est précise.

Cependant, quelle que soit la méthode d'intégration numérique utilisée, sa précision diminue dramatiquement lorsque la dimension de Θ augmente. De façon plus spécifique, l'erreur associée aux méthodes numériques se comporte comme une puissance de la dimension de Θ . En pratique, une règle empirique est que la plupart des méthodes standard ne devraient pas être utilisées pour l'intégration en dimension supérieure à 4, même si ces méthodes continuent à s'améliorer année après année. En effet, la taille de la partie de l'espace non pertinente pour le calcul d'une intégrale donnée augmente considérablement avec la dimension de l'espace. Ce problème est appelé fléau de la dimension.

2.2.1.2 Les méthodes de Monte Carlo

Dans un problème statistique, l'approximation de l'intégrale

$$\int_{\Theta} g(\theta) f(x | \theta) \pi(\theta) d\theta \quad (2.1)$$

doit tirer avantage de la nature particulière de (2.1), à savoir le fait que π soit une densité de probabilité (en supposant qu'il s'agisse d'une loi a priori propre) ou plutôt, que $f(x | \theta)\pi(\theta)$ soit proportionnel à une densité. Une conséquence naturelle de cette perspective est d'utiliser la méthode de Monte Carlo. Par exemple, s'il est possible de produire des variables aléatoires $\theta_1, \dots, \theta_m$ de loi $\pi(\theta)$, la moyenne

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g(\theta_i) f(x | \theta_i) \quad (2.2)$$

converge (presque sûrement) vers (2.1) lorsque m vers $+\infty$ selon la Loi des Grands Nombres. De la même façon, si un échantillon iid de θ_i de $\pi(\theta|x)$ peut être simulé, la moyenne

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g(\theta_i) \quad (2.3)$$

converge vers

$$\frac{\int_{\Theta} g(\theta) f(x | \theta) \pi(\theta) d\theta}{\int_{\Theta} f(x | \theta) \pi(\theta) d\theta} \quad (2.4)$$

La mise en œuvre de cette méthode nécessite la production d'une suite iid θ_i par ordinateur, reposant sur un générateur pseudo-aléatoire déterministe imitant la génération de $\pi(\theta)$ ou de $\pi(\theta|x)$ comme suit : un échantillon iid d'une loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$ est généré, puis transformé en variables de la loi d'intérêt. Les techniques statistiques standard peuvent aussi être utilisées pour déterminer l'erreur d'approximation de (2.1) par la moyenne (2.2).

De plus, si la variance a posteriori $\text{var}(g(\theta)|x)$ est finie, le Théorème Central Limit s'applique à la moyenne (2.3), qui est alors asymptotiquement normale, de variance $\text{var}(g(\theta)|x)/m$. Des régions de confiance peuvent alors se construire à partir de cette approximation normale et, de manière décisive, il découle aussi du Théorème Central Limit que l'ordre de grandeur de l'erreur est $1/\sqrt{m}$ quelle que soit la dimension du problème, au contraire des méthodes numériques.

En réalité, la méthode de Monte Carlo s'applique dans un cadre beaucoup plus général que pour la simulation de π , comme dans le cas ci-dessus. Par exemple, puisque (2.1) peut se représenter de plusieurs manières, il n'est pas nécessaire de simuler les lois $\pi(\cdot|x)$ ou π pour obtenir une bonne approximation.

Lorsque la loi a posteriori n'est pas disponible, un autre choix simple de fonction d'importance est la loi a priori π . Bien entendu, ceci est intéressant, non pas lorsque π est forcément explicite, mais au moins facile à simuler, par exemple, dans des modèles hiérarchiques où les deux niveaux correspondent à des lois propres.

Une remarque finale sur le choix de la fonction d'importance est qu'il existe généralement un compromis entre des études préliminaires conduisant à une "bonne" fonction h et des algorithmes rapides. Par exemple, lorsque h est choisie parce qu'elle facilite la simulation des θ_i , il faut faire attention à ses queues et s'assurer qu'elles sont plus lourdes que celles de $\pi(\theta | x)$, pour éviter une convergence lente et des variances infinies. D'un autre côté, si h est spécialement réglée pour le calcul d'une intégrale spécifique, elle peut ne pas donner de si bons résultats pour une autre intégrale, même si, en principe, le même échantillon des θ_i peut être utilisé pour le calcul de toute intégrale arbitraire. Cependant, ces difficultés potentielles mises à part, les méthodes d'échantillonnage d'importance constituent un outil très général et finissent souvent par devenir compétitives à l'égard des techniques de Monte Carlo par chaînes de Markov.

Par comparaison avec les méthodes d'intégration numérique, les méthodes de Monte Carlo présentent en effet l'avantage que, une fois l'échantillon $\theta_1, \dots, \theta_n$ produit, celui-ci peut être utilisé à plusieurs reprises pour tous les objectifs inférentiels, incluant l'obtention des règles de Bayes à partir du coût a posteriori approché

$$\hat{L}(\pi, d | x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m L(\theta_i, d | x).$$

Cependant, si la dimension du problème est petite et si les fonctions à intégrer sont assez régulières, les méthodes d'intégration numérique ont tendance à donner de plus petites erreurs et de meilleurs contrôles de convergence.

2.2.1.3 Approximation analytique de Laplace

Lorsque la fonction à intégrer dans (2.1) est assez régulière, il existe une solution alternative analytique -mais asymptotique- aux simulations de Monte Carlo. Cette méthode a été introduite par Laplace et est par conséquent appelée approximation de Laplace. Soit une espérance a posteriori

$$\mathbb{E}^\pi[g(\theta) | x] = \frac{\int_{\Theta} g(\theta) f(x | \theta) \pi(\theta) d\theta}{\int_{\Theta} f(x | \theta) \pi(\theta) d\theta}$$

Ce rapport d'intégrales peut s'écrire

$$\mathbb{E}^\pi[g(\theta) | x] = \frac{\int_{\Theta} b_N(\theta) \exp\{-nh_N(\theta)\} d\theta}{\int_{\Theta} b_D(\theta) \exp\{-nh_D(\theta)\} d\theta},$$

où la dépendance en x est supprimée par souci de simplicité et où n est normalement la taille de l'échantillon. Lorsque $h_N(\theta) = h_D(\theta)$, $\mathbb{E}^\pi[g(\theta) | x]$ s'écrit sous une forme standard; lorsque $b_N(\theta) = b_D(\theta)$, l'espérance a posteriori est écrite sous forme exponentielle complète. Pour une fonction donnée h admettant un minimum unique $\hat{\theta}$, le développement de Laplace d'une intégrale générale est donné par

$$\int b(\theta) e^{-nh(\theta)} d\theta = \sqrt{2\pi} \sigma e^{-n\hat{h}} \left\{ \hat{b} + \frac{1}{2n} \left[\sigma^2 \hat{b}'' - \sigma^4 \hat{b}' \hat{h}''' \right] + \frac{5}{12} \hat{b} \left(\hat{h}''' \right)^2 \sigma^6 - \frac{1}{4} \hat{b} \hat{h}^{(4)} \sigma^4 \right\} + O(n^{-2}),$$

où \hat{b}, \hat{h} , etc., sont les valeurs prises par b, h et leurs dérivées pour $\theta = \hat{\theta}$, et $\sigma^2 = \left[h''(\hat{\theta}) \right]^{-1}$. Cette approximation du deuxième ordre ne nécessite le calcul que des deux premières dérivées de g . En plus, si on suppose que h_N et h_D satisfont $\hat{h}_N - \hat{h}_D = O(n^{-1}), \dots, \hat{h}_N^{(4)} - \hat{h}_D^{(4)} = O(n^{-1})$ (comme c'est bien entendu le cas pour la forme standard), le développement de Laplace conduit à l'approximation suivante de $\mathbb{E}^\pi[g(\theta) | x]$ (avec $\hat{b}_D = b_D(\hat{\theta}_D), \hat{b}_N = b_N(\hat{\theta}_N)$, et ainsi de suite) :

Des critiques de cette approche sont que :

1. les méthodes analytiques impliquent toujours des études préliminaires délicates sur la régularité de la fonction intégrée, ce qui n'est pas forcément faisable ;
2. la loi a posteriori doit être assez semblable à la loi normale (pour laquelle l'approximation de Laplace est exacte) ;
3. de telles méthodes ne peuvent pas être utilisées dans des où le calcul de l'estimateur du maximum de vraisemblance est assez difficile.

2.2.2 Les méthode de Monte Carlo par Chaîne de Markov

Nous considérons dans cette section une méthode de Monte Carlo plus générale, permettant d'approcher la génération de variables aléatoires d'une loi a posteriori $\pi(\theta | x)$ lorsque cette loi ne peut pas être simulée directement. L'avantage de cette méthode sur les méthodes de Monte Carlo classiques décrites dans la Section précédente est qu'elle ne nécessite pas la construction précise d'une fonction d'importance, puisqu'elle prend en compte les caractéristiques de $\pi(\theta | x)$. Cette extension, appelée Monte Carlo par chaînes de Markov (et abrégée en MCMC), a des applications presque illimitées, même si ses performances varient largement, selon la complexité du problème. Elle tire son nom de l'idée que, pour produire des approximations acceptables d'intégrales et d'autres fonctions dépendant d'une loi d'intérêt, il suffit de générer une chaîne de Markov $(\theta^{(m)})_m$ de loi limite la loi d'intérêt. Cette idée d'utiliser le comportement limite d'une chaîne de Markov apparaît à la même époque que la technique de Monte Carlo originelle, au moins dans la littérature de Physique particulière (Metropolis et al., 1953), mais elle nécessite une puissance de calcul qui n'était alors pas suffisamment grande pour être appréciée dans sa globalité.

Après une brève discussion sur l'intérêt de l'utilisation d'une chaîne de Markov en simulation (Section 6.3.1), nous présenterons les deux types de techniques les plus importantes conçues pour créer des chaînes de Markov de loi stationnaire donnée, à savoir les algorithmes de Metropolis-Hastings (Section 2.2.2.2) et l'échantillonnage de Gibbs (Section 2.2.2.3).

2.2.2.1 Principe de la méthode MCMC

Cette section présentera l'algorithme Monte Carlo Markov Chain (MCMC) ainsi que le théorème qui lui donne sa légitimité dans l'approche bayésienne : le théorème ergodique.

Définition 3 *On appelle algorithme MCMC, toute méthode produisant une chaîne de Markov $(X^{(n)})$ ergodique de loi stationnaire la distribution cible.*

Théorème 3 *Soit $(X_n^x)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov d'état initial x et de matrice de transition P . Si P est irréductible et que $(X_n^x)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une probabilité invariante π alors :*

1. π est l'unique probabilité invariante et $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$.
2. Tous les états sont récurrents (chaîne dite récurrence positive).

3. Pour tout état $x \in E$ et toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\sum_E |f(x)|\pi(x) < +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k^x) = \sum_E f(x)\pi(x), \quad \mathbb{P} - p.s.$$

De manière plus pratique, pour calculer une intégrale par rapport à π par la méthode MCMC, cela revient à :

1. remplacer la simulation d'une suite de v.a. i.i.d. de loi π par celle d'une chaîne de Markov irréductible de probabilité invariante π ,
2. Remplacer la loi forte des grands nombres par le théorème ergodique.

Le théorème ergodique est donc une extension de la Loi des Grands Nombres à des suites dépendant de variables aléatoires.

2.2.2.2 Algorithme de Metropolis-Hastings

Une fois acquis le principe d'utilisation d'une chaîne de Markov de loi stationnaire π -plutôt que des variables iid distribuées exactement selon π — pour approcher des quantités comme (2.1), la mise en œuvre de ce principe nécessite la construction d'un mécanisme de génération pour produire de telles chaînes de Markov. Un algorithme quasi universel satisfaisant cette contrainte existe : il a été développé par [Metropolis et al., 1953] et généralisé par [Hastings, 1970] dans un cadre plus statistique. En réalité, il s'applique à une grande variété de problèmes, car sa principale restriction est que la loi d'intérêt soit connue à une constante près.

Dans sa version moderne, l'algorithme de Metropolis-Hastings peut être décrit de la façon suivante. Pour une densité donnée $\pi(\theta)$, connue à un facteur de normalisation près, et une densité conditionnelle $q(\theta' | \theta)$, l'algorithme génère la chaîne $(\theta^{(m)})_m$ comme suit :

Algorithme de Metropolis-Hastings

Itération 0 : Initialiser avec une valeur arbitraire $\theta^{(0)}$

Itération m : Mettre à jour $\theta^{(m)}$ par $\theta^{(m+1)}$ ($m = 1, 2, \dots$), de la façon suivante :

1. Générer $\xi \sim q(\xi | \theta^{(m)})$ tels que $\theta^{(k)}$ soit exactement distribué suivant la loi stationnaire.
2. Poser

$$\varrho(\theta^{(m)}, \xi) = \frac{\pi(\xi)q(\theta^{(m)} | \xi)}{\pi(\theta^{(m)})q(\xi | \theta^{(m)})} \wedge 1$$

3. Prendre

$$\theta^{(m+1)} = \begin{cases} \xi & \text{avec probabilité } \varrho(\theta^{(m)}, \xi) \\ \theta^{(m)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La loi de densité $\pi(\theta)$ est souvent appelée loi cible ou loi objet, tandis que la loi de densité $q(\cdot | \theta)$ est dite loi de proposition. Une propriété stupéfiante de cet algorithme est d'autoriser un nombre infini de lois de proposition produisant toutes une chaîne de Markov convergeant vers la loi d'intérêt.

La chaîne $(\theta^{(m)})_m$ restera donc plus longtemps en un point donné ξ si la valeur a posteriori correspondante $\pi(\xi)$ est supérieure et, inversement, des points ξ tels que $\pi(\xi) = 0$ ne seront jamais visités. Des choix standard pour q sont les lois uniformes, normales ou de Cauchy. Clairement, cet algorithme est applicable dans une grande généralité et, de plus, a des contraintes de calibration

limitées, car la loi des perturbations peut être choisie de façon quasi indépendante de la vraie densité π . (En effet, cette loi dépend d'un facteur d'échelle qui devrait seulement être réglé en fonction du taux d'acceptation moyen de l'algorithme) Bien qu'il ne puisse pas vérifier des propriétés de convergence plus fortes que la convergence géométrique à cause des propriétés de queues longues du mécanisme de proposition, l'algorithme de Metropolis-Hastings à marche aléatoire apparaît encore comme étant le "passe-partout" des techniques MCMC.

Un autre type de mécanisme de proposition, ressemblant plus aux techniques de Monte Carlo standard, est le mécanisme indépendant, où la densité $q(\cdot | \theta)$ ne dépend pas de θ ,

$$q(\theta' | \theta) = h(\theta').$$

(Puisque la valeur proposée peut être rejetée avec une probabilité positive, l'algorithme produit néanmoins une chaîne de Markov.) Bien que leurs propriétés théoriques soient souvent meilleures que celles de l'algorithme de Metropolis-Hastings à marche aléatoire, ces méthodes ont des applications plus limitées, car le mécanisme de proposition h doit ressembler dans un certain sens à la loi cible π . La loi proposée est parfois la loi a priori ou est fondée sur un développement asymptotique de la loi π .

2.2.2.3 Échantillonnage de Gibbs

La technique de Metropolis-Hastings présentée dans la section précédente est attrayante de par son universalité, mais, d'un autre côté, le manque de connexion entre le mécanisme de proposition q et la loi cible π peut être néfaste pour les propriétés de convergence de la méthode et, dans la pratique, peut facilement empêcher la convergence si la probabilité d'atteindre des parties éloignées du support de la loi π est trop petite. L'approche de l'échantillonnage de Gibbs, qui repose sur une perspective différente, est pour sa part fondée sur la loi π . Cette méthode tire son nom des champs aléatoires de Gibbs, où elle a été utilisée pour la première fois par [Geman and Geman, 1984].

Le facteur d'échelle 0.02 dans l'Exemple 6.14 a délibérément été choisi trop petit, pour mieux illustrer la façon dont la chaîne de Markov évite les points répulsifs μ_i . En pratique, un facteur d'échelle petit peut conduire à des problèmes d'irréductibilité si la chaîne de Markov n'arrive pas à franchir des zones de très faible probabilité pour joindre deux régions (modales) de forte probabilité. D'un point de vue général, l'échantillonnage de Gibbs tire profit des structures hiérarchiques d'un modèle, par exemple lorsque celui-ci peut s'écrire sous la forme

$$\pi(\theta | x) = \int \pi_1(\theta | x, \lambda) \pi_2(\lambda | x) d\lambda.$$

L'idée est alors de simuler la loi jointe $\pi_1(\theta | x, \lambda) \pi_2(\lambda | x)$, afin d'obtenir $\pi(\theta | x)$ comme la loi marginale. Bien entendu, lorsque les deux lois $\pi_1(\theta | x, \lambda)$ et $\pi_2(\lambda | x)$ sont connues et peuvent être simulées, la génération de θ de $\pi(\theta | x)$ est équivalente à la génération de λ de $\pi_2(\lambda | x)$, puis de θ de $\pi_1(\theta | x, \lambda)$.

Une première technique d'échantillonnage de Gibbs avait été introduite afin de tirer profit des lois conditionnelles selon l'algorithme itéré suivant :

ALGORITHME -Échantillonnage de Gibbs bivarié-

Initialisation : Commencer par une valeur arbitraire $\lambda^{(0)}$.

Itération t : pour $\lambda^{(t-1)}$ donné, générer

a. $\theta^{(t)}$ selon $\pi_1(\theta | x, \lambda^{(t-1)})$

b. $\lambda^{(t)}$ selon $\pi_2(\lambda | x, \theta^{(t)})$.

Il est alors simple de montrer que $\pi(\theta, \lambda | x)$ est la loi stationnaire de la transition ci-dessus : si $(\theta^{(i-1)}, \lambda^{(i-1)})$ est distribué selon la loi jointe, $\lambda^{(i-1)}$ est distribué selon la loi marginale $\pi_2(\lambda | x)$ et, par conséquent, $(\theta^{(i)}, \lambda^{(i-1)})$ est toujours distribué selon la loi jointe. (En réalité, il faut s'assurer que le support de la loi jointe soit égal au produit cartésien des supports de π_1 et π_2 ;) Le même raisonnement s'applique à la deuxième étape de l'algorithme et la chaîne $(\theta^{(t)}, \lambda^{(t)})$ est ergodique de loi limite π .

De plus, on peut montrer que, si la convergence est uniformément géométrique pour une des deux chaînes, par exemple si elle prend ses valeurs dans un espace fini, la convergence vers la loi stationnaire est aussi uniformément géométrique pour l'autre chaîne. Cette propriété est connue sous le nom de principe de dualité.

Il existe encore d'autres méthodes de calcul bayésien telle que la Rao-Blackwellisation et même une généralisation de l'algorithme de Gibbs mais afin de demeurer dans le scope de notre travail, nous ne les présenterons pas dans ce mémoire. Vous pourrez avoir plus d'informations dans [Robert, 2005].

2.3 Application bayésienne de l'incertitude des paramètres

2.3.1 Démarche

La détermination des paramètres des différentes lois de sinistre selon l'approche bayésienne consiste dans un premier temps à déterminer la loi a priori du paramètre. Il convient de signifier que cette étape se fait en 2 sous étapes et demande du "bon-sens" de la part de l'actuaire. Il convient en effet à ce niveau de déterminer la famille de loi à laquelle appartiendrait la distribution du paramètre recherché, et dans un second temps de déterminer les paramètres de cette loi de paramètre. Dans notre démarche critique, nous avons décidé de confronter deux hypothèses sur la distribution des lois de paramètres.

1. Le paramètre θ est distribué de manière équiprobable "autour" de l'estimateur du maximum de vraisemblance obtenu pendant la phase de calibration.

On a donc la formulation mathématique suivante :

$$\theta \sim \mathcal{U}(a, b)$$

où a et b sont deux nombres réels positifs.

2. Le paramètre θ suit une loi étalée sur la droite et dont la moyenne est l'estimateur du maximum de vraisemblance obtenu durant le processus de calibration. Nous avons sélectionné la famille des lois gamma comme étant une distribution à queue fine - afin de ne pas obtenir beaucoup plus de volatilité dans nos simulations -.

Dans les sections suivantes, nous présenterons les paramètres utilisés en input de nos distributions a priori, les distributions a posteriori déterminées via l'algorithme de Gibbs, et les différentes lois sous-jacentes aux composantes de la distribution de sinistre. Nous déterminerons ensuite, pour chacune des lois a priori utilisées le SCR correspondant.

2.3.2 Présentation des résultats

2.3.2.1 Détermination des paramètres des distributions *a priori*

Loi a priori Uniforme Comme présenté dans la sous-section 2.3.1, nous avons déterminé une hypothèse d'équirépartition du vrai paramètre θ autour du paramètre θ_{MLE} obtenu lors de la calibration selon le modèle interne de Generali. Ainsi donc, on pose :

$$\theta \sim \mathcal{U}(a, b)$$

avec a et b sont deux nombres réels positifs.

L'algorithme de Gibbs étant un algorithme de simulation par rejet, il convient de déterminer l'intervalle de rejet. Notre distribution à simuler étant la distribution uniforme, ses bornes seront donc les bornes de l'intervalle de rejet. Ainsi donc, les différents paramètres des distributions des paramètres sont consignés dans le tableau suivant :

Loi du modèle	Paramètre	Paramètre EMV	Paramètre loi uniforme
Poisson (loi de fréquence)	Lambda	5,36	[0, 05; 10]
Gamma (loi de sévérité)	Alpha Bêta	0,83 2308715,04	[0, 05; 3, 95] [1, 5 · 10 ⁶ ; 7 · 10 ⁶]

Loi a priori Gamma

Selon cette hypothèse, on pose que le paramètre θ est une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètres α et β à déterminer, soit :

$$\theta \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$$

La fonction de densité de probabilité du paramètre θ peut se mettre sous la forme :

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha}$$

où $x > 0$ et Γ désigne la fonction Gamma d'Euler.

En se basant sur la relation $\mathbb{E}(X) = \alpha\beta$ lorsque $X \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$, on obtient une ligne de niveau comme potentiels paramètres de nos distribution gamma. Pour les métaparamètres des paramètre λ et α nous avons juste posé que le paramètre d'échelle de leur distribution serait le 1. Pour le paramètre β , un facteur différent de 1 a été utilisé afin de tenir compte de l'ordre de grandeur des différents paramètres.

L'ensemble des paramètres utilisés est présenté dans le tableau ci-après.

Loi du modèle	Paramètre	Paramètre EMV	Paramètre loi gamma	
Poisson (loi de fréquence)	Lambda	5,36	alpha	5,36
			beta	1,00
Gamma (loi de sévérité)	Alpha	0,83	alpha	0,83
	Beta	2308715,04	beta	1,00
			alpha	100,00
			beta	2308715,04

2.3.2.2 Distributions *a posteriori* des paramètres

A partir des paramètres déterminés dans la sous-section précédente nous avons obtenu les distributions *a posteriori* du paramètre λ pour la loi de fréquence et des paramètres α et β pour la loi de sévérité.

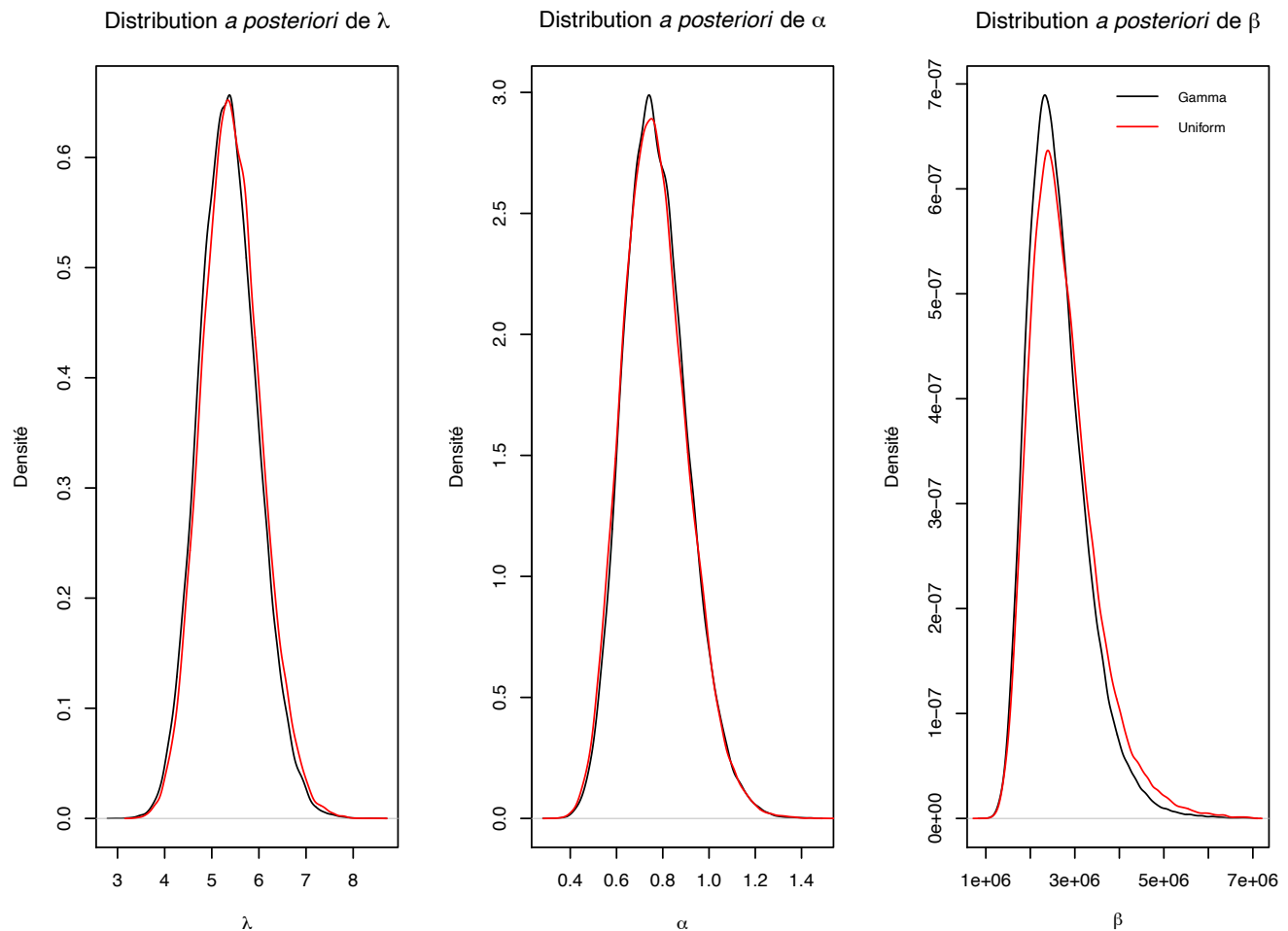


FIGURE 14 – Distributions *a posteriori* des paramètres de la sinistralité obtenues par échantillonnage de Gibbs

On remarque en premier lieu sur chacun des graphiques que les distributions des paramètres ont la même allure indépendamment de la loi a priori. L'étendue des distributions *a posteriori* dont la loi a priori est la loi Gamma est inférieure à celle des distributions dont la loi a priori est la loi uniforme. Cette faiblesse de l'étendue est compensée par le fait que la densité autour de l'estimateur du maximum de vraisemblance est plus élevée pour les lois *a posteriori* issues des familles Gamma. Afin d'avoir une description plus quantitative ci-dessous est présenté le tableau des statistiques des différentes distributions *a posteriori*.

Statistiques	a priori Gamma	a priori Uniforme
Mean	5,36	5,43
CoV	11,45%	11,41%
Standard Deviation	0,61	0,62
Median	5,34	5,41
Min	2,97	3,35
Max	8,52	8,52
1st percentile	4,03	4,09
5th percentile	4,39	4,45
10th percentile	4,59	4,65
20th percentile	4,84	4,90
30th percentile	5,02	5,09
40th percentile	5,19	5,25
50th percentile	5,34	5,41
60th percentile	5,49	5,57
70th percentile	5,66	5,73
80th percentile	5,87	5,94
90th percentile	6,16	6,24
95th percentile	6,40	6,50
99th percentile	6,89	6,97
99.5th percentile	7,05	7,17

2.3.2.3 Distribution de la sinistralité

Distribution de la fréquence de sinistres A partir de la distribution des paramètres de loi de fréquence simulés, nous avons simulé 50 000 valeur de fréquence de sinistre. Ces simulations ont été effectuées selon la formule suivante :

$$n_k := \text{Simuler Poisson}(\lambda_k^{\text{loi } i})$$

Avec :

- n_k le nombre de sinistre généré lors de la simulation k
- $\lambda_k^{\text{loi } i}$ le k^{eme} paramètre λ obtenu à partir de la distribution *a posteriori* déduite de la distribution *a priori* de la loi i (Dans notre mémoire, les lois *a priori* utilisées sont soit la loi uniforme, soit la loi Gamma.)

On obtient la distribution suivante que nous avons mis en contraste avec la distribution de la fréquence originelle (distribution de fréquence sans considération de l'incertitude des paramètres).

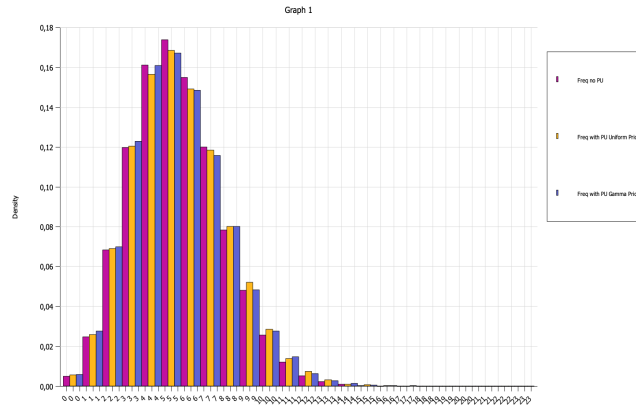


FIGURE 15 – Distribution de la fréquence des sinistres avec prise en compte de l'incertitude des paramètres par une approche bayésienne

Statistiques	sans UP	a priori Gamma	a priori Uniforme
Mean	5,36	5,37	5,42
CoV	43,14 %	45,60 %	44,29 %
SD	2,31	2,39	2,40
Median	5	5	5
Min	0	0	0
Max	23	19	17
1st percentile	1	1	1
5th percentile	2	2	2
10th percentile	3	2	2
20th percentile	3	3	3
30th percentile	4	4	4
40th percentile	5	5	5
50th percentile	5	5	5
60th percentile	6	6	6
70th percentile	6	6	7
80th percentile	7	7	7
90th percentile	8	9	9
95th percentile	9	10	10
99th percentile	11	12	12
99.5th percentile	12	12	13

Distribution de la sévérité de sinistres

De même que pour la distribution de sévérité, nous avons simulé 50 000 valeur de sévérité de sinistre à partir de la distribution des paramètres de loi de sévérité simulés. Ces simulations ont été effectuées selon la formule suivante :

$$S_{j,k} := \text{Simuler Gamma}(\alpha_k^{\text{loi } i}, \beta_k^{\text{loi } i})$$

Avec :

- $S_{j,k}$ représente le coût du j^{eme} sinistre (sur n_k sinistres) généré lors de la k^{eme} simulation
- $\alpha_k^{loi i}$ et $\beta_k^{loi i}$ qui représentent respectivement les paramètres α et β obtenus à partir des distributions *a posteriori*

On obtient la distribution suivante que nous avons mis en contraste avec la distribution de la sévérité originelle.

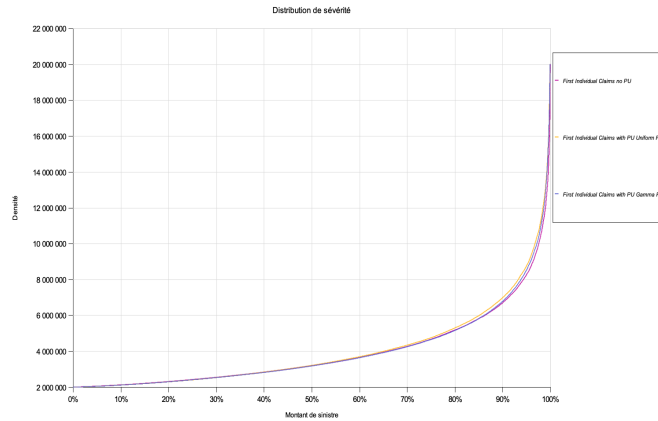


FIGURE 16 – Distribution de la sévérité des sinistres avec prise en compte de l'incertitude des paramètres par une approche bayésienne

Le tableau récapitulatif des statistique ci-dessous révèle une différence entre les distributions de sévérité.

Statistique	sans UP	a priori Gamma	a priori Uniforme
Mean	3 927 346	3 954 577	4 020 062
CoV	55,34%	58,23%	59,10%
SD	2 173 356	2 302 580	2 375 755
Median	3 189 667	3 176 200	3 204 748
Min	2000 001	2 000 001	2 000 000
Max	20 000 000	20 000 000	20 000 000
1st percentile	2 006 387	2 004 264	2 003 769
5th percentile	2 049 429	2 040 515	2 040 397
10th percentile	2 122 683	2 109 130	2 109 424
20th percentile	2 307 377	2 292 045	2 290 838
30th percentile	2 542 259	2 529 739	2 527 542
40th percentile	2 830 390	2 815 719	2 831 489
50th percentile	3 189 667	3 176 200	3 204 748
60th percentile	3 653 146	3 634 869	3 685 031
70th percentile	4 261 097	4 251 902	4 337 556
80th percentile	5 181 206	5 154 523	5 299 989
90th percentile	6 698 962	6 779 785	6 985 098
95th percentile	8 272 811	8 520 510	8 759 979
99th percentile	12 075 761	12 930 367	13 213 315
99.5th percentile	13 675 493	15 158 652	15 240 191

Distribution des montants agrégés de sinistre

Après avoir obtenu, les montant de sévérité individuelle pour nos 50000 simulations, on détermine les montants agrégés de sinistre annuels pour ces différentes observations.

On rappelle la formule du procédé :

$$X_k = \sum_{j=0}^{n_k} S_{j,k}$$

où :

- X_k représente le montant agrégé de sinistre pour la k^{eme} simulation
- n_k représente le nombre de sinistre généré lors de la k^{eme} simulation
- $S_{j,k}$ le coût engendré par le sinistre j lors de la k^{eme} simulation.

La distribution des X_k générés est présentée dans la figure 17.

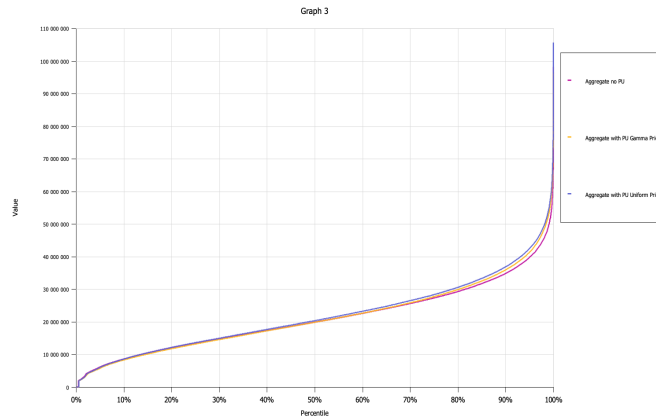


FIGURE 17 – Distribution des montants agrégés de sinistre avec prise en compte de l'incertitude des paramètres par une approche bayésienne

La synthèse chiffrée de ces distributions présentée dans le tableau ci-dessous nous permet de déterminer le SCR du portefeuille GIARD TPL Large avec prise en compte de l'incertitude des paramètres selon l'approche bayésienne.

Statistiques	sans UP	a priori Gamma	a priori Uniform
Mean	21 022 239	21 234 332	21 792 500
CoV	49, 17%	51, 94%	51, 87%
SD	10 337 571	11 030 076	11 303 160
Median	19 903 633	19 870 106	20 331 750
Min	—	—	—
Max	98 140 403	96 524 364	105 642 478
1st percentile	2 358 175	2 219 558	2 249 459
5th percentile	6 138 046	5 700 116	6 008 531
10th percentile	8 576 267	8 280 450	8 569 789
20th percentile	12 056 587	11 759 489	12 142 366
30th percentile	14 818 503	14 561 221	1 493 0798
40th percentile	17 355 119	17 253 416	17 667 809
50th percentile	19 903 633	19 870 106	20 331 750
60th percentile	22 592 516	22 620 870	23 227 241
70th percentile	25 608 665	25 829 312	26 494 183
80th percentile	29 287 882	29 888 320	30 571 799
90th percentile	34 847 635	35 936 257	36 881 590
95th percentile	39 782 028	41 370 403	42 465 397
99th percentile	49 507 469	52 857 622	54 399 252
99.5th percentile	53 286 800	57 497 603	59 350 745

Afin de démontrer que la prise en compte de l'incertitude des paramètres a un impact non-significatif au sens statistique du terme, nous avons performé des tests de concordance de distribution à partir des distributions de montants agrégés de sinistres. Les hypothèses de notre test sont les suivants :

(**H0**) : Les distributions x et y sont obtenues à partir de la même distribution.

(**H1**) : Les distributions x et y ne sont pas obtenues à partir de la même distribution.

où :

— (**H0**) représente l'hypothèse nulle

— (**H1**) représente l'hypothèse alternative

Nous avons donc performé un test bilatéral. En performant ce test pour toutes les combinaisons de distributions de sévérité que nous avons généré, nous avons obtenu les valeurs de p-Value consignées dans la matrice suivante :

	Agg no PU	Agg Gamma Prior	Agg Uniform Prior
Agg no PU	1		
Agg Gamma Prior	$2,681 \cdot 10^{-5}$	1	
Agg Uniform Prior	$2 \cdot 10^{-16}$	$2,814 \cdot 10^{-10}$	1

En prenant 5% comme le seuil de significativité, nous pouvons conclure que les distributions de montants agrégés des sinistres sont significativement différentes l'une de l'autre. Par conséquent, la prise en compte de l'incertitude des paramètres dans le calcul du risque de prime a un impact significatif, au sens statistique du terme, sur le montant final du SCR. Dans le paragraphe suivant, nous présenterons les valeurs de SCR obtenus durant notre étude.

Pour rappel, on a pour un portefeuille donné :

$$SCR_{\text{Brut}} = \text{VaR}_{99,5\%}(X_{\text{Brut}}) - \mathbb{E}(X_{\text{Brut}})$$

Ci-dessous le tableau synthétisant en fonction du choix de la loi a priori, le SCR du portefeuille RCG ainsi que les écarts en pourcentage par rapport au SCR sans prise en compte de l'incertitude des paramètres. On peut conclure que la prise en compte de l'incertitude des paramètres dans le calcul du SCR de prime entraîne une augmentation du SCR.

	sans UP	a priori Gamma	a priori Uniforme
SCR	32 264 562	36 263 270	37 558 246
Ecart (en %)	–	12,39	16,41

Chapitre 3

Approche par ré-échantillonnage

La méthode du ré-échantillonnage, beaucoup plus connue sous le terme de la méthode bootstrap est une technique qui a vu le jour dans les années 1970 avec le développement de la puissance de calcul des ordinateurs. C'est une méthode d'estimation fortement basée sur le calcul informatique. Elle est beaucoup utilisée pour déterminer des intervalles de confiance et peut être utilisée dans le cadre de régressions linéaires ou même d'apprentissage statistique. Dans la section suivante, nous présenterons le cadre général de la méthode avant de présenter plus tard la démarche utilisée dans le cadre du mémoire. Dans la section 3.3, nous présenterons les résultats de nos calculs.

3.1 Principe général de la méthode

Soit un échantillon X_1, X_2, \dots, X_n de n observations, indépendantes et identiquement distribuées (iid) selon une loi (inconnue) F . On souhaite estimer la quantité $\theta = T(F)$, comme l'espérance de la loi, sa médiane ou encore sa variance. Dans le premier cas, la fonctionnelle T est

$$T(F) = \int x dF(x)$$

et dans le dernier

$$T(F) = \int (x - \mu)^2 dF(x)$$

avec μ l'espérance, dont l'expression a été donnée plus haut.

Une estimation classique de θ est $\hat{\theta} = T(\hat{F})$, où \hat{F} est une estimation de la fonction de répartition F . Il reste donc à obtenir cette estimation \hat{F} . Deux cas se présentent :

- cas paramétrique : on suppose que F fait partie d'une famille de lois paramétriques, c'est-à-dire indexées par un ensemble de paramètres, disons ω . Après l'estimation des paramètres ω , par maximum de vraisemblance par exemple, on dispose d'une estimation (paramétrique) de F . On parle de bootstrap paramétrique ;

- cas non paramétrique : ici, on ne fait aucune hypothèse sur l'appartenance de la loi à une famille paramétrique. On estime \hat{F} à l'aide de la fonction de répartition empirique. On parle de bootstrap non paramétrique.

L'étape suivante du bootstrap se base sur des simulations : étant donnée l'estimation (paramétrique ou non) \hat{F} , on obtient des tirages issus de cette loi qui permettent d'estimer $\hat{\theta} = T(\hat{F})$. On parle d'échantillon bootstrap pour désigner un de ces tirages. Attention, ici un tirage ne concerne pas

une observation x_i , mais bien un échantillon en entier, composé de n observations indépendantes. La collection des $\hat{\theta}$ obtenue à partir des échantillons bootstrap s'appelle la distribution bootstrap.

Pour le cas paramétrique, la méthode de bootstrap s'apparente aux méthodes simulées comme les méthodes de Monte-Carlo. Dans le cas non-paramétrique, la méthode du bootstrap revient à utiliser un échantillon bootstrap composé d'un ré-échantillonnage avec remise de l'échantillon initial. La méthode nécessite donc des échantillons simulés ; leur nombre, disons B , doit être assez grand pour assurer la convergence des estimations empiriques de $T(\hat{F})$. Il est d'usage de considérer un échantillon simulé de même taille que l'échantillon initial.

Pour plus de clarté, supposons que l'on veuille estimer l'espérance de la loi, et surtout la précision de l'estimation de cette espérance (c'est-à-dire la variance de l'espérance). Voici comment procéder. On fixe d'abord le nombre B d'échantillons. La procédure se déroule comme suit :

- Boucle : pour b allant de 1 à B :
- on tire un échantillon bootstrap : $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ selon \hat{F} ;
- on calcule la statistique (ici la moyenne empirique) à partir de l'échantillon bootstrap : $\hat{\theta}_b = (X_1^* + \dots + X_n^*)/n$;
- La moyenne empirique $\bar{\hat{\theta}}$ est la moyenne des moyennes empiriques des échantillons bootstraps $\hat{\theta}_b$
- La variance de l'estimateur de la moyenne empirique $\hat{\sigma}^2(\bar{\hat{\theta}})$ est approchée par la variance empirique de la population bootstrap des $\hat{\theta}_b$.

Dans cette dernière étape, on a à estimer

$$\hat{\sigma}^2(\bar{\hat{\theta}}) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B [\hat{\theta}_b - \bar{\hat{\theta}}]^2,$$

avec

$$\bar{\hat{\theta}} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}_b$$

qui constitue une alternative à l'estimateur classique

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_i X_i.$$

Pour le bootstrap non-paramétrique, l'étape de simulation est très simple : il s'agit d'un échantillon bootstrap obtenu tout simplement par ré-échantillonnage avec remise de l'échantillon initial. Par exemple, pour un échantillon initial (1, 2, 5, 4), un échantillon bootstrap sera par exemple (5, 5, 4, 1) ou encore (4, 1, 4, 2) et ainsi de suite.

3.2 Incertitude des paramètres et bootstrap

Dans son article sur l'évaluation de l'incertitude de paramètre dans le cadre de données extrêmes par la méthode de bootstrap, [Mata, 2000] présente sa démarche d'application du bootstrap. C'est cette démarche qui sera utilisée dans ce mémoire pour performer le calcul du SCR corrigé de l'incertitude des paramètres sous l'approche par ré-échantillonnage. Ci-dessous est présentée la démarche.

Soit $x = (x_1, \dots, x_m)$ l'échantillon observé à partir duquel les paramètres ont été estimés. Pour les données historiques des coûts de sinistres, on posera $x := s$ et $m = 45$ et pour les données historiques du nombre de sinistres, on posera $x := n$ et $m = 14$.

Nous avons utilisé la méthode bootstrap pour simuler les paramètres λ_k et (α_k, β_k) pour $k = 1, \dots, B$ comme suit :

1. Attribuer la même probabilité à chaque observation de l'échantillon original x . En d'autres termes, nous générons une distribution uniforme empirique pour les observations, avec $p(x_k) = 1/m$.
2. Générer l'échantillon bootstrap : Nous produisons un échantillon aléatoire $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ en échantillonnant avec remplacement à partir de la distribution empirique définie à l'étape 1. Nous répétons cette procédure pour produire B échantillons bootstrap.
3. Pour chaque échantillon, nous estimons par maximum de vraisemblance les paramètres λ pour la loi de Poisson (loi de fréquence) et les paramètres α et β de la loi Gamma (loi de sévérité).
4. Pour chaque paramètre λ_k avec $k = 1, \dots, B$, nous réalisons une simulation de loi de Poisson. Nous obtenons ainsi, à partir de la distribution bootstrap des paramètres, une distribution de fréquence.
5. Pour chaque réalisation n_k de la distribution de fréquence obtenue en 4, nous effectuons n_k simulations de la loi Gamma de paramètres (α_k, β_k) . Nous obtenons alors la distribution de la sévérité.
6. A partir de ces réalisations de sévérité, nous obtenons la distribution des montant agrégés de sinistre desquels nous obtenons le SCR

3.3 Résultats

3.3.1 Distribution des paramètres

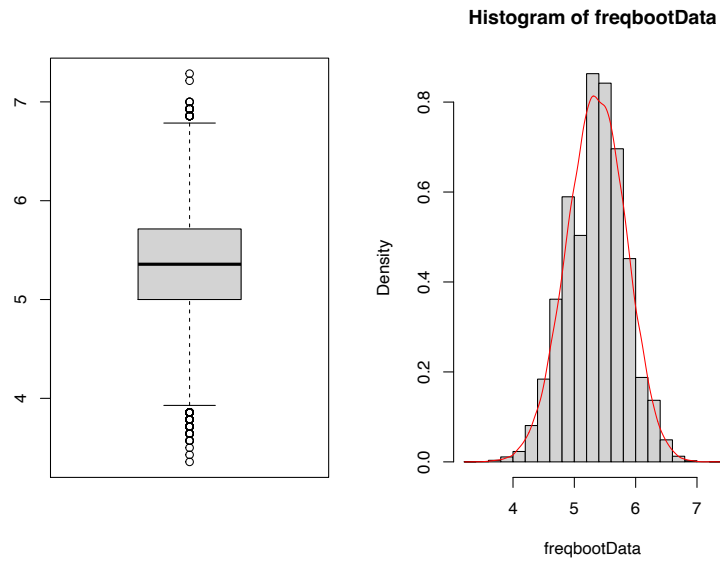


FIGURE 18 – Distribution du paramètre λ obtenu par bootstrapping

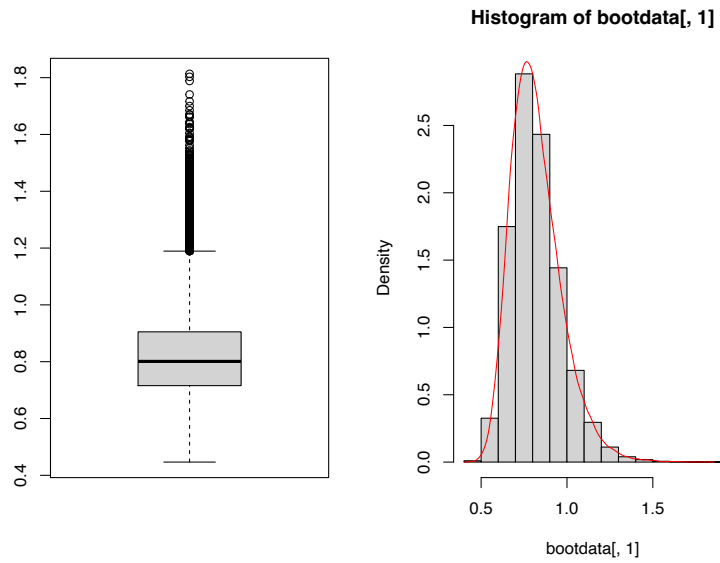
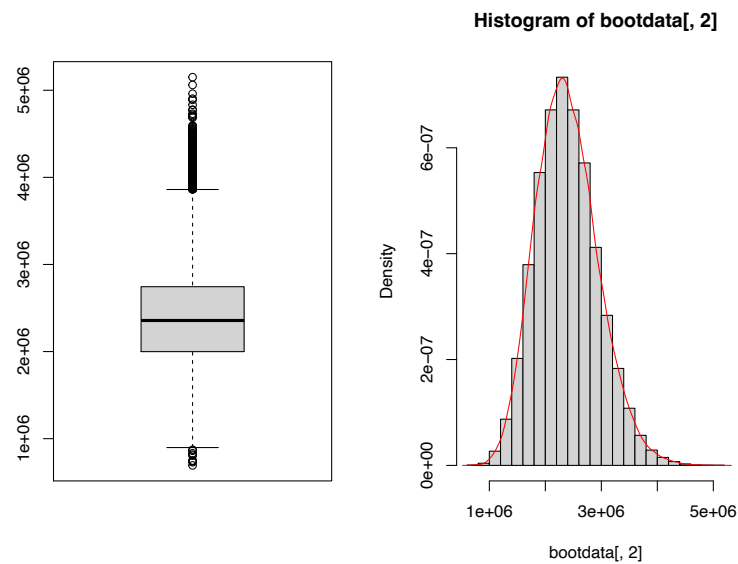


FIGURE 19 – Distribution du paramètre α obtenu par bootstrapping

FIGURE 20 – Distribution du paramètre β obtenu par bootstrapping

3.3.2 Distribution de la sinistralité

Statistiques	Sévérité par bootstrap
Mean	4 065 062
CoV	61,52%
SD	2 500 670
Median	3 208 948
Min.	2 000 000
Max.	20 000 000
1st percentile	2 004 634
5th percentile	2 043 713
10th percentile	2 113 950
20th percentile	2 299 045
30th percentile	2 538 879
40th percentile	2 836 682
50th percentile	3 208 948
60th percentile	3 685 564
70th percentile	4 337 307
80th percentile	5 299 759
90th percentile	7 082 185
95th percentile	9 029 937
99th percentile	14 084 217
99.5th percentile	16 573 009

Statistiques	Frequence par bootstrap
Mean	5,34
CoV	44,15%
SD	2
Median	5
Min.	—
Max.	17
1st percentile	1
5th percentile	2
10th percentile	2
20th percentile	3
30th percentile	4
40th percentile	5
50th percentile	5
60th percentile	6
70th percentile	6
80th percentile	7
90th percentile	8
95th percentile	10
99th percentile	12
99.5th percentile	12

Statistiques	Agg par bootstrap
Mean	21 699 788
CoV	49,08%
SD	10 649 360
Median	20 392 526
Min.	—
Max.	87 424 092
1st percentile	2 269 605
5th percentile	6 570 061
10th percentile	9 127 766
20th percentile	12 661 240
30th percentile	15 369 389
40th percentile	17 921 282
50th percentile	20 486 393
60th percentile	23 239 395
70th percentile	26 423 399
80th percentile	30 316 473
90th percentile	36 204 680
95th percentile	41 260 724
99th percentile	51 894 218
99.5th percentile	56 285 723

Nous avons aussi performé un test de concordance de loi (Kolmogorov-Smirnov) et ce test a montré que la distribution de montants agrégés prenant en compte l'incertitude des paramètres sous une

approche de ré-échantillonnage est significativement différente de la distribution de montants obtenue dans la section 3.1. Les résultats de notre test sont consignés dans le tableau suivant :

Statistique	p-Value
0,0237	$1,27 \cdot 10^{-12}$

Ci-dessous le SCR du portefeuille RCG prenant en compte l'incertitude des paramètres selon une approche bootstrap ainsi que l'écart en pourcentage par rapport au SCR sans prise en compte de l'incertitude des paramètres. On peut conclure que la prise en compte de l'incertitude des paramètres dans le calcul du SCR de prime entraîne une augmentation du SCR.

	sans UP	approche Bootstrap
SCR	32 264 562	34 585 935
Ecart (en %)	–	7,19

Chapitre 4

Sensibilité de l'incertitude des paramètres au nombre de données

4.1 Démarche

Dans les chapitres précédents, nous avons comparé les SCR de prime sur la base de la calibration d'un jeu de données ayant une profondeur historique de 14 années. Dans ce chapitre, nous étudierons la sensibilité de l'approche bayésienne dans prise en compte de l'incertitude des paramètres au nombre de données historiques.

N'ayant pas plus de profondeur historique que les 14 dernières années, nous avons, sur la base des paramètres obtenus dans le chapitre 3 de la partie 1 (précisément dans la section 3.1), simulé un jeu de données de 49 années. Nous avons, en premier lieu, simulé 35 données de fréquence en plus des données des 14 années réellement observées ; et pour chacune de ces 35 données de fréquence simulées, nous avons simulé le nombre de sinistres correspondant.

Ci-dessous, la synthèse du nombre de sinistres par nombre de fréquence généré.

Nbre d'années de survenance	Freq Cumulée
14	45
19	75
24	94
29	121
34	163
39	183
44	215
49	239

Après réalisation de tout le processus de calibration, nous avons obtenus les différents montants de SCR en fonction du choix de la loi *a priori*. L'évolution du SCR en fonction du nombre de données historiques et de la prise en compte de l'incertitude des paramètres selon l'approche bayésienne est présentée sur la figure 21.

On remarque une uniformisation de la valeur de SCR indépendamment de la prise en compte ou non de l'incertitude des paramètres lorsque le nombre de données historiques augmente. Les écarts entre les distributions prenant en compte l'incertitude sur les paramètres et les distribution n'en prenant pas passent en effet de 10~16% à près de 2%. Afin d'évaluer la significativité de ces résultats, nous effectuons un test de concordance entre les différentes distributions de montants

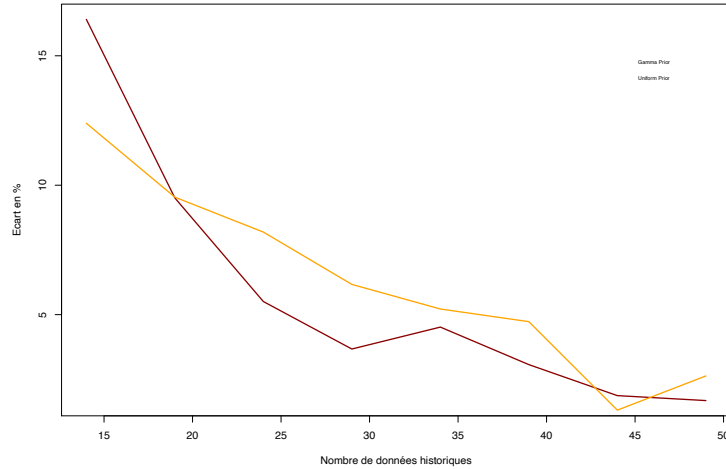


FIGURE 21 – Évolution des écarts de SCR en fonction du nombre de données historiques

agregés. Les résultats du test réalisé dans la section 2.2 nous confirme que les distributions générées à partir des données originelles sont significativement différentes et donc que les SCR calculés le sont aussi. Nous réalisons ensuite le même test de concordance sur les montants générés à partir de la calibration du jeu de données le plus peuplé. Les résultats de ce test sont présentés dans le tableau suivant.

	Agg no PU	Agg Gamma Prior	Agg Uniform Prior
Agg no PU	1		
Agg Gamma Prior	0,4643	1	
Agg Uniform Prior	0,2607	0,3291	1

Le seuil de significativité étant fixé à 5%, nous pouvons affirmer que les distributions de montants agrégés de sinistres simulés sont significativement égales. Nous pouvons donc conclure qu'à partir d'un certain nombre de données, la prise en compte de l'incertitude des paramètres n'est effectivement plus nécessaire.

Chapitre 5

Limites

Les limites rencontrées dans le processus de calibration avec la prise en compte de l'incertitude des paramètres sont des limites théoriques et des limites techniques. D'un point de vue technique, le problème rencontré est celui de la puissance de calcul des machines. Les limites théoriques quant à elles sont les limites les plus reprochées aux différentes approches performées à savoir la détermination de la loi *a priori* pour la méthode bayésienne et la bornitude de la distribution relative à la méthode de ré-échantillonnage.

5.1 Temps de calcul

Les différentes approches réalisées dans le cadre de ce mémoire sont des approches numériques. Ce sont des approches qui ont très peu de solutions analytiques. L'utilisation des ordinateurs et des calculateurs est donc la technique utilisée afin d'obtenir les résultats. Le problème majeur de cette approche est la puissance des ordinateurs comparativement au nombre de calculs. Generali France effectue 50 000 simulations afin d'obtenir la distribution finale des montants de sinistre agrégés. Dans le cadre de ce mémoire, nous avons performé plusieurs séries de 50 000 simulations et très vite nous nous sommes retrouvé confronté à cette problématique. A titre d'exemple, réaliser la calibration par l'approche bayésienne prenait en moyenne 5 min et cela pour un seul portefeuille. Généraliser cette approche à la dimension de l'ensemble des portefeuilles de pourrait demander des jours de computation. Ce problème peut être contourné avec l'augmentation de la capacité des machines mais aussi par de l'optimisation algorithmique.

5.2 Choix de la loi *a priori*

Cette limite est une limite propre à la modélisation bayésienne. La spécificité de la statistique bayésienne est la présence des lois *a priori* et *a posteriori*. La détermination de la loi *a priori* se présente comme un problème supplémentaire dans le processus d'estimation des paramètres. Afin de contourner ce problème, nous avons en effet réalisé deux calibrations à partir de deux lois *a priori* différentes. Indépendamment de la loi *a priori*, l'impact sur la valeur finale du SCR était sensiblement le même relativement au SCR obtenu sans prise en compte de l'incertitude des paramètres.

5.3 Bornitude dans le ré-échantillonnage

La limite de la méthode de ré-échantillonnage est la bornitude. Avec la méthode de ré-échantillonnage, les valeurs maximales estimées ne peuvent être supérieures aux valeurs maximales observées dans l'échantillon. Cette limite n'est pas extrêmement contraignante dans le sens où les paramètres estimés sont en effet les paramètres des distributions à simuler.

Conclusion

L'activité d'assureur est une activité fortement réglementée. En Europe, le cadre réglementaire, Solvabilité 2 oblige l'assureur à immobiliser une partie de ses fonds propres afin de faire face à un sinistre ayant une période de retour de 200 ans s'il survenait l'année au cours de l'exercice suivant : le SCR. Dans le cadre du modèle interne, le SCR est modélisé à partir des lois sous-jacentes à la sinistralité de l'assureur et il convient de bien calibrer ces lois. Dans le cadre d'un modèle bien spécifié, c'est-à-dire un modèle qui représente bien la réalité, déterminer les paramètres exacts est une opération critique car cela permettrait de ne pas sous-estimer le risque ou de le sur-évaluer.

Dans une problématique de données réduites rencontrée dans le secteur de l'assurance, ce mémoire a eu pour objectif d'évaluer l'impact de la prise en compte de l'incertitude de paramètres dans le processus de calibration du risque. Deux approches ont été performées dans ce sens : l'approche bayésienne présentée dans [Borowicz, 2006] et l'approche par ré-échantillonnage développée dans [Mata, 2000]. Ces deux approches ont été performées dans un cas pratique sur un portefeuille d'assurance de Generali France et ont révélée une différence significative au sens statistique du terme comparativement au montant de SCR obtenu sans prise en compte de l'incertitude des paramètres.

Afin d'évaluer la sensibilité de ces approches au nombre de données historiques, nous avons performé des calibrations avec prise en compte de l'incertitude des paramètres par une approche bayésienne sur différents jeux de données d'effectifs croissants. Les résultats des tests de concordance ont permis de conclure qu'à partir d'un nombre de données, la prise en compte de l'incertitude des paramètres dans le processus de calibration n'a pas d'impact significatif sur la valeur du SCR obtenu.

La prise en compte de l'incertitude des paramètres dans le processus de calibration du SCR est un processus qui présente néanmoins des limites. Une limite de l'ordre du computationnel : c'est la limite du temps de calcul. Les deux approches performées sont en effet deux approches qui demandent beaucoup de temps de calcul. Les autres limites sont d'ordre théorique. En ce qui concerne l'approche bayésienne, la limite principale est celle du choix de la loi a priori. C'est en effet la limite constamment reprochée à l'approche bayésienne. La limite de la méthode de ré-échantillonnage est la bornitude. Avec la méthode de ré-échantillonnage, les valeurs maximales estimées ne peuvent être supérieures aux valeurs maximales observées dans l'échantillon. Cette limite n'est pas extrêmement contraignante dans le sens où les paramètres estimés sont en effet les paramètres des distributions à simuler.

Ce mémoire a porté essentiellement sur la prise en compte de l'incertitude de paramètres dans la calibration du risque de prime brut d'un portefeuille. Dans une optique de généralisation des résultats, il pourrait être intéressant d'intégrer, dans de prochains travaux, la prise en compte des traités de réassurance afin d'évaluer l'impact de l'incertitude des paramètres sur le montant du SCR Net. Dans une vision encore plus générale, on pourrait par exemple évaluer l'impact de la prise en compte de cette incertitude après considération de la dépendance entre les différents portefeuilles d'assurance et même après prise en compte des effets de diversification.

Annexe A

Données relatives à la calibration du portefeuille RCG Large

A.1 Exposition du portefeuille

Année	Expositions historiques	Facteurs d'ajustement des expositions historiques	Expositions mises en As-If
2006	169966564	1,157588057	196751265
2007	175345630	1,142936656	200408948
2008	183156533	1,109953234	203295186
2009	193516209	1,108768146	214564608
2010	196496973	1,091061406	214390264
2011	204027019	1,06948738	218204322
2012	210450991	1,048326515	220621354
2013	204796925	1,042433493	213487174
2014	187205409	1,036399447	194019582
2015	170520665	1,035469385	176568928
2016	167949046	1,037538461	174253595
2017	170173123	1,025854239	174572819
2018	176485935	1,012254845	178648743
2019	170887626	1,000840638	171031281
2020	182976159	1,000358584	183041771

FIGURE 22 – Exposition du portefeuille RCG Large de Generali France entre 2006 et 2020

A.2 Fréquence historique du portefeuille

Année	Freq historique	Freq à l'ultime	Fréquence "détrendée"
2006	2	1,66	5,91
2007	2	1,63	5,63
2008	3	2,41	6,13
2009	1	0,77	4,33
2010	5	3,85	7,06
2011	3	2,30	5,20
2012	1	0,77	3,34
2013	7	5,72	7,85
2014	4	3,75	5,37
2015	6	6,62	7,79
2016	4	3,73	4,60
2017	1	1,47	2,05
2018	2	3,07	3,37
2019	4	6,91	6,91

FIGURE 23 – Fréquence historique du portefeuille RCG Large de Generali France entre 2006 et 2020

A.3 Inflation

Année	Taux d'inflation des sinistres larges
2006	1,72%
2007	1,28%
2008	2,97%
2009	0,11%
2010	1,62%
2011	2,02%
2012	2,02%
2013	0,57%
2014	0,58%
2015	0,09%
2016	-0,20%
2017	1,14%
2018	1,34%
2019	1,14%
2020	0,05%
2021	0,04%

FIGURE 24 – Évolution de l'inflation en France entre 2006 et 2021

Les données d'inflation de 2020 et 2021 ont été estimées par régression linéaire

A.4 Sévérité historique

Année de survenance	Ultimate Claims	Année de survenance	Ultimate Claims
2006	3698028	2013	4145463
2006	7661472	2014	3774716
2007	3820602	2014	2326364
2007	4152758	2014	8658520
2008	3469920	2014	2509258
2008	2073220	2015	2552094
2008	3551464	2015	8438243
2009	2115512	2015	2223029
2010	2627739	2015	5138424
2010	4454383	2015	4066937
2010	2594116	2015	7735360
2010	5517615	2016	9505744
2010	3945782	2016	3487010
2011	3288910	2016	3430743
2011	2467039	2016	2004773
2011	2065291	2017	3997902
2012	2664012	2018	3260709
2013	2051466	2018	3233089
2013	3454292	2019	2160977
2013	2448222	2019	2196684
2013	2616368	2019	10058426
2013	2557608	2019	2142118
2013	5449988		

FIGURE 25 – Sévérité historique du portefeuille RCG Large de Generali France entre 2006 et 2020

Bibliographie

- [Borowicz, 2006] Borowicz, J. M. (2006). THE EFFECTS OF PARAMETER UNCERTAINTY IN THE EXTREME EVENT FREQUENCY-SEVERITY MODEL. page 18.
- [Davison and Smith, 1990] Davison, A. C. and Smith, R. L. (1990). Models for exceedances over high thresholds. 52(3) :393–425.
- [Diers et al., 2013] Diers, D., Eling, M., and Linde, M. (2013). Modeling parameter risk in premium risk in multi-year internal models. 14(3) :234–250.
- [Efron and Tibshirani, 1993] Efron, B. and Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Springer US.
- [Embrechts et al., 2010] Embrechts, P., Klüppelberg, C., and Mikosch, T. (2010). *Modelling extremal events for insurance and finance*. Number 33 in Applications of mathematics. Springer, corr. 4. print., softcover repr. of the hardcover 1st ed. 1997 edition.
- [Falk et al., 2011] Falk, M., Hüsler, J., and Reiss, R.-D. (2011). *Laws of small numbers : extremes and rare events*. Birkhäuser, 3rd rev. and extended ed edition.
- [Geman and Geman, 1984] Geman, S. and Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-6(6) :721–741.
- [Hastings, 1970] Hastings, W. K. (1970). Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, 57(1) :97–109.
- [Kiefer, 1987] Kiefer, J. C. (1987). *Introduction to Statistical Inference*, pages 1–3. Springer New York.
- [Mata, 2000] Mata, A. (2000). PARAMETER UNCERTAINTY FOR EXTREME VALUE DISTRIBUTIONS. page 22.
- [Metropolis et al., 1953] Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., and Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6) :1087–1092.
- [Robert, 2005] Robert, C. (2005). *Le choix bayésien : principes et pratiques*. Collection Statistique et probabilités appliquées. Springer.