

Mémoire présenté devant l'Université Paris-Dauphine  
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine  
et l'admission à l'Institut des Actuaires  
le 24/01/2022

Par : Pauline BOUDY-STEFANO

Titre : Paramétrage d'un déflateur pour calculer des valeurs économiques.

Confidentialité :  Non     Oui    (Durée :  1 an     2 ans)

---

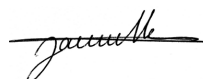
*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus.*

*Membres présents du jury de l'Institut  
des Actuaires :*

*Entreprise :*  
Nom : Prim'Act  
Signature :

*Membres présents du Jury du Certificat  
d'Actuaire de Paris-Dauphine :*

*Directeurs de Mémoire en entreprise :*  
Nom : Danielle KHOUGEA  
et Frédéric PLANCHET  
Signatures :



---

*Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents  
actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

*Secrétariat :*

*Signature du responsable entreprise*



*Signature du candidat*

*Bibliothèque :*





## Acronymes

---

ALM : *Asset and Liability Management*  
AOA : Absence d'Opportunité d'Arbitrage  
BE : *Best Estimate*  
CIR : Cox, Ingersoll, Ross  
EIOPA : *European Insurance and Occupational Pensions Authority*  
EMV : Estimateur du Maximum de Vraisemblance  
FIFO : *First In First Out*  
GSE : Générateur de Scénarios Economiques  
IFRS : *International Financial Reporting Standards*  
MC : *Market Consistency*  
MCEV : *Market Consistency Embedded Value*  
MLE : *Maximum Likelihood Estimator*  
OA : Opportunité d'Arbitrage  
OAT : Obligation Assimilable du Trésor  
PB : Participation aux Bénéfices  
PM : Provision Mathématique  
PPB : Provision pour Participation aux Bénéfices  
R : RStudio  
TMG : Taux Minimum Garanti

---

## Résumé

---

Les récentes réglementations, notamment la directive Solvabilité II et les normes IFRS 17, revendiquent une évaluation des passifs d'assurance en valeur de marché. Afin d'y parvenir, les acteurs du marché utilisent les processus de calculs issus de la théorie financière. Il s'agit de l'univers neutre au risque, dans le cadre d'absence d'opportunité d'arbitrage sur le marché, qui s'est développé avec l'essor des produits dérivés.

Ce processus de valorisation est discuté. Le papier ARMEL et PLANCHET (2020c) démontre qu'il existe sur le marché de l'épargne en euros des opportunités d'arbitrage, ce qui remet en cause, l'existence et l'utilisation de la probabilité neutre au risque. D'autre part les scénarios économiques sous la probabilité neutre au risque induisent un biais dans le processus de valorisation des passifs des contrats d'épargne en euros.

Dans ce contexte, le papier ARMEL et PLANCHET (2020b) propose un générateur de scénarios économiques développé sous la probabilité historique, à l'aide d'un déflateur stochastique pour actualiser les flux. Dans le document, le générateur de scénarios économiques est calibré à partir des prix de marché actuels selon une approche implicite. L'enjeu des travaux du mémoire est de trouver une méthode d'estimation des paramètres du générateur avec des méthodes statistiques, reposant sur un historique de données passées. La méthode proposée est une méthode d'estimation par estimateur du maximum de vraisemblance.

---

*Mots-clés : Epargne en euros, Risque neutre, Calibrage, Déflateurs, Estimation par maximum de vraisemblance, CIR ++.*

## Abstract

---

Recent regulations, in particular the Solvency II directive and IFRS 17, call for the valuation of insurance liabilities at market value. In order to achieve this, the market participants use calculation processes that are derived from financial theory. This is the risk-neutral universe, in the context of the absence of arbitrage opportunities on the market, that has developed with the rise of derivatives.

This valuation process is much debated. The paper Armel and Planchet (2020c) demonstrates that there are arbitrage opportunities on the euro savings market, which puts into question the existence and use of the risk-neutral likelihood. On the other hand, Karoui et al. (2017) maintains that these valuation methods should only be reserved for derivative products, and that they are not adapted to insurance products. Otherwise, economic scenarios under the risk-neutral probability injected in the ALM (Asset and Liability Management) engines induce a bias in the valuation of liabilities.

In this context, the paper Armel and Planchet (2020b) proposes an economic scenario generator developed under historical likelihood, using a stochastic deflator to discount the cash flows. In the paper, the economic scenario generator is calibrated from current market prices using an implicit approach. The challenge in this thesis is to find a method for estimating the parameters of the generator with statistical methods, based on a history of past data. The proposed method is a maximum likelihood estimator.

---

*Keywords : Euro savings, Risk neutral, Calibration, Deflators, Maximum likelihood estimator, CIR ++.*



# Note de Synthèse

La directive Solvabilité II et les normes IFRS 17 revendiquent une valorisation du bilan en valeur de marché pour refléter sa dynamique et sa réalité instantanée. Le cadre du processus d'évaluation actuellement utilisé est celui de l'évaluation des prix des produits dérivés. Il s'agit du concept de risque neutralité. L'univers neutre au risque, est un univers conceptuel et non observé, qui ne change pas les états du monde mais qui change leur probabilité d'occurrence. Dans le monde « neutre au risque », les investisseurs ne sont pas sensibles aux fluctuations des actifs, et ne demandent pas de prime de risque en contrepartie.

La probabilité  $\mathbb{Q}$  est la probabilité relative à l'univers neutre au risque. La probabilité  $\mathbb{P}$  est la probabilité relative à l'univers historique, c'est à dire l'univers réellement observé.

Trois éléments peuvent rendre discutable l'utilisation de la probabilité neutre au risque pour la valorisation des passifs des contrats d'épargne euros :

- les contrats d'épargne en euros ne sont pas répliquables (cf. ARMEL et PLANCHET (2020b)),
- des opportunités d'arbitrage persistent sur le marché des contrats d'épargne en euros (cf. ARMEL et PLANCHET (2020b)),
- les scénarios économiques sous la probabilité neutre au risque injectés dans les moteurs ALM (Asset and Liability Management) induisent un biais dans la valorisation des passifs (cf. ARMEL et PLANCHET (2020b)).

Le mémoire se focalise sur la problématique engendrée par le troisième point. La valorisation actuelle des passifs des contrats d'épargne en euros se manifeste par le calcul du *Best Estimate*. Il résulte des flux futurs de trésorerie actualisés au taux sans risque. Ces flux sont calculés par un modèle ALM qui prend en entrée des scénarios économiques produits par un générateur de scénarios économiques. En utilisant la probabilité neutre au risque dans les générateurs de scénarios économiques, des scénarios extrêmes avec une forte probabilité d'occurrence sont injectés dans le modèle ALM, autrement dit il s'agit des scénarios défavorables qui sont peu probables sous  $\mathbb{P}$ , mais dont l'occurrence est beaucoup plus forte sous  $\mathbb{Q}$ . Cela soulève une incohérence quant à l'interprétation et à l'utilisation de ces scénarios, qui ne coïncident pas avec la réalité.

L'article ARMEL et PLANCHET (2020c) met en avant que dans les moteurs ALM, des fonctions de réactions sont implémentées. Ce sont des fonctions qui modélisent la réaction de l'assuré face à un scénario économique. C'est notamment le cas pour le rachat dynamique, modélisé dans le moteur ALM par un taux de rachat qui dépend du taux servi par l'assureur, et du taux attendu par l'assuré. Le papier de recherche ARMEL et PLANCHET (2020c) démontre deux éléments aux travers de leur étude. Premièrement, comme des scénarios neutres au risque atypiques sont injectés dans le moteur ALM, les fonctions de réaction sont difficiles à interpréter parce qu'elles réagissent à des scénarios non observés, et peu probables. Deuxièmement pour une même évaluation du *Best Estimate*, les auteurs de ARMEL

et PLANCHET (2020c) ont montré qu'en injectant les sorties d'un GSE sous probabilité historique dans le moteur ALM, le *Best Estimate* résultant est inférieur au *Best Estimate* obtenu en ayant introduit les scénarios du GSE sous la probabilité neutre au risque dans le moteur ALM. L'article conclut que les scénarios historiques diminuent le nombre de scénarios atypiques, et entraînent dans le moteur ALM une réaction moins extrême des assurés, et par conséquent un taux de rachat moins élevé, ce qui diminue le passif de l'assureur.

Pour construire le générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique, l'approche du déflateur stochastique a été utilisée. Les déflateurs sont des facteurs d'actualisation stochastiques. Ils sont définis par le processus  $D = \{D(t), 0 \leq t \leq T\}$  qui vérifie l'égalité 1.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(T) \times \exp(-\int_t^T r(s)ds) | \mathcal{F}(t)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(T) \times D(T) | \mathcal{F}(t)]. \quad (1)$$

Le processus  $D$  rend la théorie sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$  équivalente à la théorie sous la probabilité neutre au risque  $\mathbb{Q}$  : l'évaluation dans le cadre d'un marché en l'absence d'opportunité d'arbitrage est conservée. Ainsi, l'utilisation du déflateur permet d'actualiser les flux de trésorerie en univers réel.

Les travaux des papiers de recherche CHENG et PLANCHET (2018a), ARMEL et PLANCHET (2020c), et ARMEL et PLANCHET (2020b) réunis établissent :

- une méthode pour diffuser un GSE en probabilité historique (cf. CHENG et PLANCHET (2018a)) :
  - en utilisant un déflateur pour actualiser les flux en probabilité historique,
  - et en modélisant une prime de risque,
- une méthode pour calibrer un GSE sous la probabilité  $\mathbb{P}$  (cf. ARMEL et PLANCHET (2020b)) :
  - en utilisant un historique de données pour calibrer la prime de risque,
  - **en utilisant un calibrage implicite pour calibrer les paramètres de toutes les autres variables du GSE,**
- les effets sur le *Best Estimate* en introduisant des scénarios sous  $\mathbb{P}$  dans le moteur ALM et non pas des scénarios sous  $\mathbb{Q}$  (cf. ARMEL et PLANCHET (2020c)).

Pour bien distinguer : un calibrage implicite est une détermination des paramètres d'un modèle à partir des prix des produits dérivés actuels du marché, en utilisant les formules fermées qui leurs sont associés (formule de « pricing »), tandis qu'un calibrage historique est une estimation des paramètres du modèle à partir d'un n-échantillon, d'une chronologie ou encore d'un historique de données observées (par exemple à l'aide d'une méthode des moments, d'un estimateur du maximum de vraisemblance, ou d'un modèle linéaire).

L'objectif donné au mémoire intervient dans l'étape ci-dessus mise en gras : il s'agit de trouver un processus de calibrage historique robuste du GSE de ARMEL et PLANCHET (2020b), à partir d'un historique de données, et non pas à partir d'une méthode implicite impliquant l'utilisation des prix actuels des produits dérivés.

Calibrer le GSE de l'article ARMEL et PLANCHET (2020b) est équivalent à calibrer un processus CIR++, qui modélise la dynamique du taux court instantané dans le GSE, car l'ensemble des variables du GSE dépendent de ses paramètres.



Deux méthodes ont été proposées pour estimer les paramètres du CIR++ selon une méthode historique. Tout d'abord une méthode d'estimation des paramètres du CIR ++ par l'estimateur du maximum de vraisemblance sur la loi du taux court instantané du CIR ++.

La loi du taux court instantané dépend des paramètres du CIR ++. Le taux court instantané est une variable continue, qui est par essence non observable. Un n-échantillon du taux court instantané a été reconstitué à partir d'un historique de courbes de taux zéro-coupon et du modèle de Nelson Siegel. La loi du taux court instantané est une Khi-deux non centrée. A partir de la densité du Khi-deux non centrée et du n-échantillon, la vraisemblance a été maximisée. Celle-ci n'est pas continue, et présente beaucoup d'irrégularités, ce qui n'a pas rendu aisé son optimisation. La vraisemblance est définie en très peu de points, ce qui montre que le n-échantillon utilisé ne suit pas la loi du Khi-deux non centré, et que cette méthode est inadéquate.

Ensuite, une méthode d'estimation des paramètres du CIR ++ par l'estimateur du maximum de vraisemblance sur la loi du taux zéro-coupon du CIR ++ a été mise en place.

Il s'agit du même principe que la méthode précédente. La loi utilisée est la loi du taux zéro-coupon, qui dépend des paramètres du processus CIR ++. Le n-échantillon est un historique de taux zéro-coupon de maturité dix ans (équivalente à la durée moyenne des contrats d'épargne en euros en France, d'après le rapport de la FFA). Des améliorations sont notées par rapport à l'approche précédente, mais les conclusions restent relativement les mêmes.



# Synthesis note

The Solvency II directive and IFRS 17 call for a valuation of the balance sheet at market value to reflect its dynamics and its instantaneous reality. The framework of the valuation process currently used is the valuation of derivative products. It is the concept of risk neutrality. The risk-neutral universe is a conceptual and unobserved universe, that does not change the states of the world but changes their probability of occurrence. In the risk-neutral world, investors are not sensitive to asset fluctuations, and do not ask for a risk premium in return.

The probability  $\mathbb{Q}$  is the probability relative to the risk-neutral universe. The probability  $\mathbb{P}$  is the probability relative to the historical universe, i.e. the universe actually observed.

Three elements may imply the use of the risk-neutral probability for the valuation of liabilities of euro savings contracts questionable:

- euro savings contracts are not replicable (see Armel and Planchet (2020b)),
- arbitrage opportunities persist in the market for euro savings contracts (see Armel and Planchet (2020b)),
- economic scenarios under the risk-neutral probability injected in the ALM (Asset and Liability Management) engines induce a bias in the valuation of liabilities (see Armel and Planchet (2020b)).

This paper focuses on the problem caused by the third point. The current valuation of the liabilities of savings contracts in euros is expressed by the calculation of the Best Estimate. It results from future cash flows discounted at the risk-free rate. These flows are calculated by an ALM model that takes as input economic scenarios generated by an economic scenario generator. By using the risk-neutral probability in the economic scenario generators, extreme scenarios with a high probability of occurrence are injected into the ALM model, i.e. unfavorable scenarios that are unlikely to occur under  $\mathbb{P}$ , but whose occurrence is much higher under  $\mathbb{Q}$ . This raises an inconsistency in the interpretation and use of these scenarios, which do not fit with the reality.

The Armel and Planchet (2020c) article points out that in ALM engines, reaction functions are implemented. These functions model the insured's reaction to an economic scenario. This is notably the case for dynamic surrender, modeled in the ALM engine by a surrender rate that depends on the rate paid by the insurer and the rate expected by the insured. The authors of Armel and Planchet (2020c) research paper demonstrate two elements through their study. First, as atypical risk-neutral scenarios are injected into the ALM engine, the reaction functions are difficult to interpret because they react to unobserved and unlikely scenarios. Secondly, for the same Best Estimate evaluation, the authors of Armel and Planchet (2020c) have shown that by introducing the outputs of a GSE under historical probability into the ALM engine, the resulting Best Estimate is lower than the Best Estimate obtained by having introduced the GSE scenarios under risk-neutral probability into the ALM

engine. The paper concludes that the historical scenarios decrease the number of atypical scenarios, and lead to a less extreme reaction of the policyholders in the ALM engine, and consequently a lower surrender rate, which decreases the insurer's liabilities.

To build the economic scenario generator under historical probability, the stochastic deflator approach was used. Deflators are stochastic discount factors. They are defined by the  $D$ -process which verifies the equality 2.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(T) \times \exp(-\int_t^T r(s)ds)|\mathcal{F}(t)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(T) \times D(T)|\mathcal{F}(t)]. \quad (2)$$

The  $D$  process makes the theory under historical probability  $\mathbb{P}$  equivalent to the theory under risk-neutral probability  $\mathbb{Q}$  : the valuation in the context of a market in the absence of arbitrage opportunities is chosen. Thus, the use of the deflator makes it possible to discount cash flows in a real universe.

The combined works of Cheng and Planchet (2018a), Armel and Planchet (2020c), and Armel and Planchet (2020b) research papers establish:

- a method for disseminating a GSE in historical probability (see Cheng and Planchet (2018a)):
  - by using a deflator to discount cashflows in historical probability,
  - and by modeling a risk premium,
- a method to calibrate a GSE under probability  $\mathbb{P}$  (cf. Armel and Planchet (2020b)):
  - using historical data to calibrate the risk premium,
  - **by using an implicit calibration to calibrate the parameters of all the other variables of the GSE,**
- the effects on the Best Estimate by introducing scenarios under  $\mathbb{P}$  in the ALM engine and not scenarios under  $\mathbb{Q}$  (see Armel and Planchet (2020c)).

To distinguish: an implicit calibration is a determination of the parameters of a model from the prices of current derivatives on the market, using the closed formulas associated with them (pricing formula), while a historical calibration is an estimation of the parameters of the model from a n-sample, a chronology or a history of observed data (for example, using a method of moments, a maximum likelihood estimator, or a linear model).

The objective of this thesis comes into play in the bolded step above: the authors of the Armel and Planchet (2020b) paper wondered if it was possible to find a robust historical calibration process for their GSE, and not from an implicit method involving the use of current derivative prices.

Calibrating the GSE of Armel and Planchet (2020b) article is equivalent to calibrating a CIR++ process that models the dynamics of the instantaneous short rate in the GSE, since that all of the GSE variables depend on its parameters.

Two methods have been proposed in order to estimate the CIR++ parameters using a historical method. First, a method for estimating the parameters of the CIR ++ by the maximum likelihood estimator on the law of the instantaneous short rate of the CIR ++.

The law of the instantaneous short rate depends on the parameters of the CIR ++. The instantaneous short rate is a continuous variable, which is in essence unobservable. An n-sample of the instantaneous short rate was reconstructed from a history of zero-coupon yield curves and the Nelson Siegel model. The distribution of the instantaneous short rate is an uncentered Chi-square. From the uncentered Chi-square density and the n-sample, the likelihood has been maximized. The likelihood is not continuous, and presents many irregularities, which complicates its optimization. The likelihood is defined in very few points, which shows that the n-sample used does not follow the uncentered Chi-square distribution, and hence, that this method is inadequate.

Then, a method of estimating the parameters of the CIR ++ by the maximum likelihood estimator on the law of the zero coupon rate of the CIR ++ was implemented.

The principle is the same as the previous method. The law used is the law of the zero coupon rate, which depends on the parameters of the CIR ++ process. The n-sample is a history of zero-coupon rates with a maturity of ten years (like the average duration of euro savings contracts in France, according to the FFA report). Some improvements are noted compared to the previous approach, but the conclusions remain relatively the same.



# Remerciements

Merci à toute l'équipe Prim'Act, et plus particulièrement :

merci à Frédéric PLANCHET pour ce sujet innovateur, ses références techniques s'y rapportant, et son expertise,

merci à Kamal ARMEL et Sugiban RATNASOTHY pour leur expertise, écoute et conseils, ils m'ont guidé dans la mise en oeuvre des travaux du mémoire,

merci également à mon collègue Oleksandr SOROCHYNSKYI pour son aide précieuse et indispensable dans l'implémentation des modèles de vraisemblances,

et surtout, merci à Danielle KHOUGEA, ma tutrice entreprise, pour son soutien, son suivi, et ses relectures régulières.

Et enfin, merci à mon tuteur académique et directeur de Master Christophe DUTANG pour ses réponses réactives et sa très grande disponibilité.





# Table des matières

<b>Acronymes</b>	<b>3</b>
<b>Résumé</b>	<b>4</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Note de Synthèse</b>	<b>7</b>
<b>Synthesis note</b>	<b>11</b>
<b>Remerciements</b>	<b>15</b>
<b>Table des matières</b>	<b>17</b>
<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>1 Contexte et problématique</b>	<b>21</b>
1.1 Spécificités du contrat d'épargne en euros . . . . .	21
1.2 Remise en question du processus de valorisation . . . . .	23
1.3 Une nouvelle approche : le déflateur stochastique . . . . .	35
<b>2 Processus théoriques de calibrage des paramètres</b>	<b>41</b>
2.1 Construction du déflateur . . . . .	42
2.2 Présentation de deux approches possibles pour le calibrage du GSE . . . . .	50
2.3 Idées de processus de calibrage du GSE selon l'approche historique . . . . .	55
<b>3 Mise en pratique</b>	<b>63</b>
3.1 Construction de l'historique du taux court avec Nelson et Siegel . . . . .	64
3.2 Mise en pratique de la méthode 1 . . . . .	70

3.3	Mise en pratique de la méthode 2 et comparaisons des résultats . . . . .	80
	<b>Conclusion</b>	<b>93</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>95</b>
	<b>A Données</b>	<b>97</b>
A.1	Courbes de taux zéro-coupon de l'institut des actuaires . . . . .	97
	<b>B Autres idées de processus de calibrage non traitées</b>	<b>99</b>
B.1	Estimation par la méthode des moments . . . . .	99
B.2	Estimation par minimisation de l'écart quadratique . . . . .	100
	<b>C Nelson Siegel</b>	<b>103</b>
C.1	Coefficients de Nelson-Siegel avec le package Yield Curve . . . . .	103
C.2	Historique du taux court avec le package Yield Curve . . . . .	105
	<b>D Re-calibrage : annualisation des paramètres</b>	<b>107</b>
D.1	Re-calibrage pour la méthode 1 : EMV sur la loi du taux court instantané . . . . .	107
D.2	Re-calibrage pour la méthode 2 : EMV sur la loi du taux zéro-coupon . . . . .	108

# Introduction

La directive Solvabilité II et les normes IFRS 17 revendiquent une valorisation du bilan en valeur de marché pour refléter sa réalité instantanée. Le cadre du processus d'évaluation actuellement utilisé est celui de l'évaluation des prix des produits dérivés. Il s'agit du concept de risque neutralité. L'univers neutre au risque, est un univers conceptuel et non observé, qui ne change pas les états du monde mais qui change leur probabilité d'occurrence.

Aujourd'hui, le processus de valorisation des passifs des contrats d'épargne en euros repose sur ce concept : par exemple, les variables des générateurs de scénarios économiques sont calibrées et projetées sous la probabilité neutre au risque. Cette dernière existe si le marché considéré est un marché en l'absence d'opportunité d'arbitrage : un investisseur ne peut pas espérer un gain certain s'il n'a pas investi auparavant. De plus, elle est unique si les actifs du marché admettent une stratégie de réplcation : ce qui signifie que les flux d'un produit dérivé peuvent être reproduits par ceux d'un panier d'actifs construit.

L'article ARMEL et PLANCHET (2020c) remet en question l'utilisation de l'univers neutre au risque pour l'évaluation des passifs d'assurance vie. Il énonce plusieurs exemples qui montrent à la fois que des opportunités d'arbitrage persistent sur le marché des contrats d'épargne en euros, et que les produits d'épargne en euros ne sont pas des produits réplcables par des flux d'actifs financiers. D'autre part l'article met avant que les scénarios économiques sous la probabilité neutre au risque induisent un biais dans le processus de valorisation des passifs des contrats d'épargne en euros. Dans ce contexte, les auteurs de l'article ARMEL et PLANCHET (2020b) ont entrepris la création d'un générateur de scénarios économiques en univers réel, qui correspond à l'univers observé, faisant intervenir la construction d'un déflateur stochastique pour actualiser les flux.

Calibrer le générateur de scénarios économiques de ARMEL et PLANCHET (2020b) est équivalent à calibrer un modèle de taux CIR ++. Pour le calibrer, deux approches sont possibles. L'approche « implicite », qui consiste à évaluer les paramètres du modèle à partir des prix des produits dérivés actuels et de leurs formules fermées associées. Et l'approche dite « historique », qui correspond à l'estimation des paramètres à partir d'une série d'observations passées, avec des méthodes statistiques. L'article procède a un calibrage implicite des paramètres. Ainsi la problématique est la suivante : est-il possible de construire une méthode robuste d'estimation des paramètres du CIR ++ selon une approche historique ?

Pour y répondre, les travaux se décomposent en trois grandes parties. La première, qui s'associe au chapitre 1, re-situe le contexte et détaille l'origine de la problématique. Le chapitre 2, dédié à la deuxième partie, s'attèle à la théorie. Il présente la construction du générateur de scénarios économiques en univers réel, qui comprend celle du déflateur, afin d'identifier les paramètres à estimer. Puis, deux idées de méthodes d'estimation des paramètres à partir du maximum de vraisemblance sont proposées. Enfin, la dernière partie, assimilée au chapitre 3, réstitue les applications numériques et les résultats obtenus, qui permettront d'aboutir à une conclusion.



# Chapitre 1

## Contexte et problématique

### 1.1 Spécificités du contrat d'épargne en euros

Le présent mémoire s'intéresse au calcul de la valeur économique des passifs des contrats d'épargne en euros. Le contrat d'épargne en euros est à l'origine de la présente étude, un bref rappel sur ses caractéristiques fondamentales est effectué. Cette première section s'y prête. Les informations sont principalement tirées de AGBAHOLOU (2018) et ARMEL et PLANCHET (2020c).

#### 1.1.1 Généralités

Le contrat d'épargne est un contrat d'assurance vie. Il permet au souscripteur d'accumuler des droits différés auprès de l'assureur, en échange de primes. Ces droits se traduisent par le versement d'un capital, ou d'une rente.

Deux évènements peuvent déclencher la prestation. L'assurance en « cas de vie », se manifeste par le versement d'une rente ou d'un capital si l'assuré est toujours en vie à la date de fin du contrat. L'assurance en « cas de décès », se manifeste par le versement d'une rente ou d'un capital à un ou plusieurs bénéficiaires lorsque le décès de l'assuré survient avant la date de fin du contrat. Les contrats d'épargne sont alors des contrats en « cas de vie ». Ils diffèrent selon leur support d'investissement. En France, les contrats d'épargne les plus populaires sont les contrats en euros et les contrats en unité de compte.

- **Le contrat en euros** : aussi appelé fonds en euros, c'est un contrat dans lequel l'assureur supporte entièrement le risque financier. Il garantit à l'assuré un rendement annuel minimal de son épargne et lui offre la possibilité de racheter son contrat à tout moment. La seule situation dans laquelle l'assuré fait une perte, est celle où l'assureur fait faillite. C'est un contrat adapté pour une personne qui souhaite investir sans prendre trop de risques.
- **Le contrat en unité de compte** : c'est un contrat qui n'offre pas de garanties sur le capital investi à l'assuré. Mais il permet à l'assuré de diversifier son investissement sur les marchés financier et immobilier. L'assureur garantit le nombre d'unité de compte, mais pas le nombre d'euros : le risque financier est supporté par l'assuré.

Les contrats d'épargne sont appréciés auprès des français parce qu'ils présentent des avantages fiscaux intéressants. Ils permettent une défiscalisation des revenus du capital investi, mais aussi d'être

moins imposé sur la transmission d'un patrimoine financier en matière de succession. Par exemple, au bout de huit années passées dans le contrat, il est possible d'effectuer des retraits d'un montant allant jusqu'à quatre mille six cents euros de plus-values sans payer d'impôts sur cette somme.

### 1.1.2 Options et garanties

Les contrats d'épargne sont composés de différentes options et garanties. La suite du paragraphe est focalisée sur les contrats classiques d'épargne en euros. Les options peuvent être classées en trois catégories.

- **Les options financières :** l'assureur promet un rendement minimal de son épargne à l'assuré, c'est l'intérêt technique. Le taux technique est fixé à la date de souscription, et doit être versé à l'assuré sur toute la durée du contrat, quelque soit le niveau des rendements financiers de l'assureur. Le Code des Assurances fixe le taux technique maximale que l'assureur peut garantir à l'assuré à 75% des taux moyens des emprunts de l'état français.

En plus du taux technique, l'assureur peut prendre des engagements contractuels supplémentaires en proposant un TMG, il s'agit de proposer un taux plus élevé que le taux technique. En général le TMG est nul.

L'assureur peut verser un complément de rémunération, assimilé à la participation aux bénéfices. L'épargne des assurés est réinvestie et capitalisée, et génère ainsi des bénéfices techniques et financiers à l'assureur. Ces bénéfices étant réalisés grâce aux apports des assurés, la réglementation impose à ce qu'ils soient redistribués en grande partie aux assurés. C'est la PB. Cependant, l'assureur n'est pas obligé de la distribuer immédiatement, il peut doter la PPB, et la redistribuer au maximum sous huit ans, selon le mécanisme FIFO. Cela permet à l'assureur de pouvoir verser un rendement convenable à ses assurés en cas de faibles rendements de ses actifs financiers, et de prévenir les rachats. La PPB est une provision qui appartient aux assurés, mais ce n'est pas une provision par tête. Contrairement à la PM, l'assureur choisit à qui il la verse.

- **Les options comportementales :** ces options sont activées ou non au cours du contrat selon la volonté de l'assuré. Celui-ci a la possibilité de racheter partiellement ou totalement son contrat (*ie* récupérer son épargne), à tout moment jusqu'à l'échéance du contrat. Deux types de rachats existent : les rachats structurels, et les rachats dynamiques. Les rachats structurels correspondent aux besoins de fonds et de liquidité des assurés, en général liés à l'âge ou à l'ancienneté dans le contrat. Il est possible de les prédire grâce à l'historique des rachats. En revanche, les rachats dynamiques, assimilés aux comportements dynamiques des assurés, sont beaucoup plus difficiles à modéliser. (Ce point est détaillé un peu plus bas dans le document, à la section 1.1.3).

L'assuré peut également opérer des versements libres ou programmés pour alimenter son épargne. En général un montant minimal est fixé par l'assureur, notamment pour le premier versement.

- **Les options biométriques :** au terme du contrat, l'épargne est restituée à l'assuré. En amont de la signature du contrat, l'assureur peut proposer à l'assuré de lui redistribuer son épargne sous forme de rentes ou d'un capital. Ces options sont affectées aux risques de mortalité et de longévité.

### 1.1.3 Zoom sur le comportement dynamique de l'assuré et de l'assureur

Du fait des options et des garanties auxquelles l'assureur s'engage, celui-ci est exposé à divers risques dont : le risque de taux, les risques du marché financier, les risques biométriques, et les risques liés

aux comportements de l'assuré. Ces derniers sont difficilement prévisibles, notamment en raison du risque de rachats dynamiques. Les rachats dynamiques se caractérisent par la réaction des assurés aux contextes économique et financier.

Plusieurs scénarios sont envisageables. Par exemple, si une baisse notable des taux est observée sur le marché financier, l'assureur doit toujours verser le taux technique (et le TMG) à l'assuré. Celui-ci aura le sentiment que le taux proposé par l'assureur est bien meilleur que celui du marché, et ne sera pas tenter de racheter son contrat.

Mais si une hausse des taux est observée sur le marché financier, l'assuré va juger qu'il pourrait potentiellement investir ailleurs pour obtenir une rémunération plus intéressante que celle de son contrat : il va être tenté de racheter son épargne. De plus, lorsque les taux augmentent, la valeur des obligations diminue. Or l'actif de l'assureur est principalement constitué d'obligations, et l'assureur doit répondre à son engagement quand l'assuré veut racheter son contrat. L'assureur est contraint de vendre ses titres en moins-values, et d'essuyer des pertes.

Dans le contexte actuel des taux bas, les assureurs appréhendent et craignent une remontée des taux, qui pourrait engendrer une vague de rachats. Une possibilité peut être de redistribuer suffisamment de PPB aux assurés, pour leur donner la sensation que les taux ne sont pas plus intéressants ailleurs.

La modélisation de la réaction de l'assuré aux contextes économiques est très complexe. Il faut prendre en considération que les assurés ont une vision du marché qui n'est peut-être pas la bonne. L'assureur ne sait pas à quel point ils sont informés, ni à quel point ils sont rationnels. Cela complexifie davantage l'anticipation de leur réaction. D'après ARMEL et PLANCHET (2020c) : « à ce jour aucune publication ne permet de caractériser parfaitement le phénomène de rachat dynamique, motivé par une volonté d'arbitrage financier pour optimiser l'espérance de gain ». Ce qui soulève une véritable problématique de gestion actif-passif. Le mémoire SURU (2011) rend compte de la technicité du sujet.

## 1.2 Remise en question du processus de valorisation

Cette section a pour premier objectif de replacer l'univers neutre au risque dans son contexte. Ensuite, le processus d'évaluation actuel des passifs des contrats d'épargne en euros est présenté. Enfin, l'utilisation de cette méthode est discutée.

### 1.2.1 Théorie financière

Les paragraphes suivants expliquent de manière intuitive, puis formelle, l'évaluation des prix des produits dérivés, afin de replacer l'univers neutre au risque dans son contexte.

#### **Intuition**

Le développement du concept de risque neutralité est lié à l'essor du marché des produits dérivés, à partir des années 1970.

Un produit dérivé est un contrat dont la valeur dépend de la valeur future d'un sous-jacent : le prix d'une action, par exemple. Ils peuvent aussi être dénommés « actifs contingents », ou « options ». Dans les deux cas, il s'agit d'un contrat financier entre un acheteur et un vendeur, dont les flux

monétaires sont aléatoires (cf. BEN-TAHAR et al. (2016)).

Le problème d'évaluation du prix des produits dérivés s'est donc posé. Une méthodologie reposant sur des modèles mathématiques a été élaborée. Black, Scholes et Merton ont proposé une solution, qui est de coupler les produits dérivés à un portefeuille répliquant, rendant ainsi les produits dérivés insensibles au rendement de l'actif sous-jacent, et à la tendance du marché.

Ce modèle fait alors intervenir la méthodologie d'évaluation par réplication en l'absence d'opportunités d'arbitrage. Cette méthode repose sur l'idée que si le marché financier vérifie la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage, alors deux stratégies financières ayant la même valeur terminale à la date  $T$ , auront forcément le même prix à n'importe quelle date  $t \in [0; T]$ . Ce qui signifie que s'il est possible de construire à partir d'actifs financiers un portefeuille répliquant dont la valeur terminale coïncide avec celle du produit dérivé, alors le prix de ce produit dérivé peut être calculé comme la valeur de ce portefeuille, aussi appelé « couverture ».

Ce processus d'évaluation est conditionné à deux éléments :

- **L'absence d'opportunité d'arbitrage du marché :** un marché financier comporte des opportunités d'arbitrage s'il est possible de réaliser un profit certain sans investissement initial, « gagner sans même avoir misé ». Une condition suffisante d'AOA est l'existence d'une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$ , équivalente à la mesure de probabilité historique  $\mathbb{P}$ , sous laquelle le processus de prix actualisé est une martingale. Le marché financier vérifie la condition d'AOA s'il n'existe aucune opportunité d'arbitrage sur ce marché financier.
- **La complétude du marché :** un marché financier est dit complet si tout produit dérivé admet une stratégie de réplication.

Si la mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  existe, et que le marché est complet, alors la mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  est unique. L'AOA est la condition d'existence d'une mesure de probabilité neutre au risque, et la complétude du marché est la condition d'unicité de la mesure neutre au risque. Si ces deux conditions sont vérifiées, alors le prix à la date  $t$  du produit dérivé est donné par l'espérance conditionnelle sous  $\mathbb{Q}$  du *cash flow* terminal du produit dérivé, actualisé au taux sans risque, sachant l'information disponible.

## Formalisation

Les définitions et les notations sont extraites du livre de BEN-TAHAR et al. (2016).

Un horizon de temps  $T > 0$  et un marché financier formé de  $d + 1$  actifs  $S^0, \dots, S^d$  sont considérés. Ainsi que les dates discrètes  $t_k$ , telles que  $k \in 0, \dots, N$  et  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$ .

Les éléments suivants sont définis :

$$\mathbb{T} := \{t_0, \dots, t_N\};$$

$$S^0 \text{ l'actif sans risque dont le processus de prix est donné par } S^0 = \{S_t^0, t \in \mathbb{T}\};$$

$$S_{t_k}^i \text{ le prix de l'actif } i \text{ au temps } t_k;$$

$$S := \{S_t = (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d), t \in \mathbb{T}\} \text{ le processus de prix } d + 1 \text{ dimensionnel};$$



$\tilde{S} := \left\{ \tilde{S}_t = \left( 1, \frac{S_t^1}{S_0^1}, \dots, \frac{S_t^d}{S_0^d} \right), t \in \mathbb{T} \right\}$  le processus de prix actualisé  $d + 1$  dimensionnel, où  $S^0$  est pris comme unité de compte/numéraire ;

$\tilde{S}_{t_k}^i$  le prix de l'actif  $i$  au temps  $t_k$  si  $S_0$  est pris comme unité de compte ;

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$  l'espace probabilisé pour modéliser l'incertitude des prix des actifs, où  $\mathcal{F}_{t_k} = \sigma(S_{t_i}, t_i \leq t_k)$   $\forall t_k \in \mathbb{T}$ , et  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_{t_k}, 0 \leq t_k \leq T\}$ .

Un produit dérivé peut-être défini de deux façons :

- Un actif financier dont la valeur terminale au temps  $T$  est une variable aléatoire  $G$ ,  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, et intégrable, est appelé actif contingent de maturité  $T$ .
- Un produit dérivé  $G$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_T$ -mesurable et s'écrit sous la forme  $G = \phi(S)$ , avec  $\phi$  une application borélienne. Par exemple la valeur terminale d'un call d'échéance  $T$  et de strike  $K$  sur l'actif  $S^1$  est  $G = \max(S_T^1 - K; 0) = \phi(S_T^1)$ .

Supposons qu'il existe une probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à  $\mathbb{P}$ , qui rend le processus  $\tilde{S}$  martingale sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ . Alors il y a AOA sur le marché financier. Considérons aussi un actif contingent  $G$  de maturité  $T$  admettant une stratégie de réplcation. Alors le prix de  $G$  à la date  $t$ ,  $t \in \mathbb{T}$ , noté  $p_t^G$  est donné par l'équation 1.1.

$$p_t^G = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\delta_t G | \mathcal{F}_t]. \quad (1.1)$$

Avec  $\delta_t = \exp(-\int_t^T r_s ds)$  le facteur d'actualisation à l'échéance  $t$  au taux sans risque  $r$ . En simulant  $N$  fois la valeur du prix du produit dérivé  $G$  à la date  $T$ , le prix peut-être approché par Monte Carlo, cf. équation 1.2.

$$p_t^G = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\delta_t G | \mathcal{F}_t] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_t G_i. \quad (1.2)$$

### 1.2.2 Méthode actuelle

Les paragraphes ci-dessous décrivent le processus de valorisation actuel des contrats d'épargne en euros, et expliquent pourquoi les acteurs du marché ont opté pour des méthodes issues de la théorie financière.

#### Réglementation

Les réglementations IFRS et Solvabilité II ont pour objectif de permettre aux acteurs du marché de l'assurance d'améliorer l'évaluation du risque inhérent à leur activité. Ainsi que de mieux prendre en compte l'optionnalité des produits, pour conduire progressivement à une régulation du marché de l'assurance plus précise. De cet objectif, s'est développée la volonté de rapprocher la régulation du marché de l'assurance à celle du marché financier.

Les normes comptables IFRS 4 phase 1 et phase 2 (cf. THÉRON (2010), et BUREAU (2017)), sont les premières à avoir introduites la notion de « juste valeur » des passifs d'assurance. Ce concept peut s'interpréter comme la valeur de marché des contrats d'assurance. Il s'est formalisé dans le souci de refléter la réalité instantanée du bilan, pour que ce dernier soit plus en phase avec les intérêts des investisseurs et des actionnaires. Pour les assureurs, l'introduction du concept de valeur de marché dans le bilan n'est pas anodine. Elle implique une nouvelle approche de valorisation, qui comporte une modélisation stochastique, de la même manière que pour les actifs financiers (voir KAROUÏ et al. (2017)). Une telle transformation dans le processus d'évaluation des actifs et des passifs pour les compagnies d'assurance à l'échelle internationale n'est pas immédiate. Pour amorcer le tournant, IFRS 4 phase 1 prévoit une évaluation en juste valeur pour les actifs du bilan, et une comptabilisation toujours en normes locales pour les passifs. Cette comptabilisation induit une asymétrie des valorisations, et crée des *mismatches* comptables entre l'actif et le passif, qui demande de passer des provisions supplémentaires pour équilibrer le bilan. L'interprétation et la compréhension de celui-ci sont devenues d'autant plus complexes. Une harmonisation est nécessaire : la norme IFRS 17, dont l'entrée en vigueur est prévue en 2022, impose aux assureurs d'évaluer également leur passif en valeur de marché, pour refléter les conditions de marché courantes. IFRS 17 vise à homogénéiser les règles comptables, pour étendre un unique référentiel à l'échelle internationale, dans l'intention d'obtenir une meilleure comparabilité entre les résultats fournis par les assureurs.

Parallèlement, les perspectives de Solvabilité II ont émergé. La première directive de la commission européenne, Solvabilité I, a introduit la notion de marge de solvabilité, qui correspond au capital minimum dont doit disposer une compagnie d'assurance pour exercer son activité. Ce capital est calculé comme un pourcentage des provisions mathématiques en assurance vie. Aujourd'hui, ce processus de calcul n'est plus considéré comme un indicateur de solvabilité optimal, dans la mesure où il ne prend pas en compte le risque spécifique de l'assureur, et ne reflète pas suffisamment ses caractéristiques. De même, l'ancienne directive évalue les provisions selon le principe de prudence. La directive Solvabilité II apporte une modification importante dans le sens où les provisions ne sont plus estimées de manière prudente, mais selon la meilleure estimation possible, *Best Estimate*. Dans la même idée qu'IFRS 17, la régulation européenne s'est focalisée sur une approche qui prend davantage en compte l'optionnalité et la valeur temps des produits, en construisant un bilan s'appuyant sur les hypothèses de marché à la date d'évaluation (taux, prix, volatilité), lié au désir d'homogénéiser le processus de valorisation des engagements à travers l'Europe.

Les grandes compagnies d'assurance doivent également valoriser leur entreprise régulièrement au sens de la MCEV, dont les principes ont été publiés par le CFO forum en 2008. La MCEV a pour objectif de déterminer une valorisation de l'entreprise à partir de la projection de son portefeuille. Elle se différencie des bilans traditionnels en ajoutant à la richesse passée de la compagnie sa richesse future. La richesse future est calculée à partir de la valeur actuelle des marges futures. Au même titre que pour Solvabilité II et IFRS 17, les actifs et les passifs sont évalués en valeur de marché dans le calcul de la MCEV.

Finalement, les réglementations convergent vers une approche économique, dite *market consistent*, dont le principe est de faire des évaluations en respectant une certaine cohérence avec les observations réalisées sur les marchés financiers.

### **Pourquoi les acteurs du marché de l'assurance se sont-ils dirigés vers une approche issue de la théorie financière ?**

Une des raisons pour laquelle l'évaluation des passifs s'est rapprochée de celle des produits dérivés est qu'une analogie a été faite au début des années 1990 entre les flux des contrats d'épargne en euros et les

flux des produits dérivés. Le papier de recherche de BRIYS et VARENNE (2017) propose un modèle qui permet d'assimiler les options des contrats d'épargne à des produits dérivés : par exemple l'option de rachat serait assimilable à une option de vente américaine. En ce sens, les flux des contrats d'épargne en euros pourraient être associés à ceux d'un *call* européen. Or les flux d'un *call* sont reproduits par des combinaisons d'achats et de ventes d'actifs financiers. Par conséquent il serait possible de coupler un contrat d'épargne en euros à un portefeuille répliquant.

Un autre argument est que les comptes sociaux prennent en compte les moins values latentes, mais pas les plus values latentes. Or la réglementation, comme vu plus haut, penche vers des approches du bilan en valeur de marché pour refléter sa réalité instantanée.

Seulement, évaluer un bilan en valeur de marché selon l'approche de Solvabilité II et IFRS 17 demande à la fois de savoir calculer les flux de trésorerie futurs, de déterminer un taux d'actualisation, et de définir une mesure de probabilité.

D'après KAROUI et al. (2017), le problème avec la valorisation en probabilité historique est que les paramètres sont difficiles à évaluer précisément, comme la prime de risque, et donc poserait, à l'échelle européenne, et internationale, un problème d'harmonisation dans la paramétrisation des modèles. Mais comme cela a été précisé, un des objectifs de la réglementation est justement d'harmoniser les processus de valorisation pour une comparabilité plus lisible.

Toujours d'après KAROUI et al. (2017), considérer les données de marché pour paramétrer les modèles s'est avéré être une solution à ce problème, dans la mesure où elles sont observées, impartiales et facilement accessibles pour les compagnies d'assurance à n'importe quelle échelle du globe. De plus, les données de marché sont diffusées sous la probabilité neutre au risque, cette approche a donc été adoptée pour projeter les modèles stochastiques.

Pourtant une complication réside dans cette méthodologie : tous les facteurs de risque en assurance vie ne sont pas de nature financière : le marché ne fournit pas de données pour ces risques. Cette approche ne peut fonctionner pour les risques de natures financières.

### **Comment les acteurs du marché de l'assurance donnent-ils des valeurs de marché à leur passif ?**

Le concept d'évaluation en valeur de marché pour l'actif du bilan semble intuitif, en revanche, le concept d'évaluation des passifs en valeur de marché est plus abstrait. Que signifie donner une valeur de marché à un contrat d'assurance ?

Plus concrètement, la cohérence avec les marchés financiers selon le concept de *market consistency* s'exprime comme suit d'après DONIO et DEBAERE (2021) : les flux futurs des passifs engendrés doivent être valorisés de la même façon qu'ils le seraient dans le cadre d'un instrument financier portant les mêmes risques, et coté sur un marché financier. D'autre part, ces flux doivent être actualisés à un taux sans risque incluant la prime de risque qui serait exigée sur les marchés financiers pour supporter le risque sous-jacent à ce flux. Et enfin, les options et garanties financières incluses dans les contrats d'assurance doivent être évaluées selon les méthodes financières de *pricing* de dérivés à partir des paramètres observés sur le marché.

Sous IFRS 17, Solvabilité II, et la MCEV, les provisions de l'assureur sont estimées selon la meilleure estimation possible, appelée : *Best Estimate*. Ce dernier correspond à la moyenne des flux de trésorerie futurs actualisés au taux sans risque, à l'image de l'équation 1.2. Une modélisation stochastique des risques et une prise en compte des interactions actifs-passifs, dues aux mécanismes

de PB et de rachats sont primordiaux pour le calculer.

Le processus retenu par les praticiens pour calculer la valeur économique des passifs d'épargne en euros est détaillé ci-dessous.

Tout d'abord un GSE est mis en place. C'est un modèle mathématique qui projette l'environnement économique sur un horizon d'intérêt (cf. ARMEL et PLANCHET (2020c)). Il permet de simuler différents scénarios économiques qui dépendent de l'évolution de chacune des variables économiques et du marché financier. La dynamique de chaque variable est alors indispensable pour suivre leur évolution dans le temps.

Voici une description analysée du processus de valorisation actuel pour une évaluation à la date  $t$ , sur un horizon  $T$  :

**Etape 1 :** Chaque scénario étant soumis à un effet aléatoire, il faut choisir une mesure de probabilité. Celle retenue en pratique est la probabilité neutre au risque pour les variables relatives aux risques financiers, qui correspond aux critères de *market consistency*, tels qu'ils ont été évoqués dans le paragraphe précédent.

**Etape 2 :** Il faut ensuite déterminer les variables financières qui interviendront dans le GSE :

- Taux d'intérêt ;
- Actions ;
- Immobilier ;
- Inflation ;
- Risque de crédit ;
- ...

**Etape 3 :** Un modèle est choisi pour la dynamique de chaque variable. **Ces modèles doivent être calibrés. Pour cela des produits dérivés sont sélectionnés, dont les prix/volatilités implicites sont récupérés sur les marchés financiers à la date d'évaluation du bilan afin que les modèles correspondent aux conditions de marché à cet instant.**

**Etape 4 :** Une fois les modèles calibrés, la dynamique de ces variables **est générée sous probabilité neutre au risque**  $\mathbb{Q}$ .  $N$  scénarios économiques d'horizon  $T$  sont obtenus grâce au GSE.

**Etape 5 :** Pour chaque scénario  $k \in 1, \dots, N$ , les comptes de résultats et les bilans sont projetés en normes comptables sur un horizon d'1 an, puis 2 ans, ..., puis  $T$  années, selon le scénario économique  $k$ . Cela permet de déterminer les flux de trésorerie  $F_{i,k}$  pour chaque scénario économique  $k$  et chaque instant  $i \in 1, \dots, T$ .

Cette tâche est réalisée à l'aide d'un moteur ALM, qui prend en entrée, (repris du mémoire TICHIT (2019)) :

- les hypothèses sur la mortalité, le rachat, les frais, les chargements, la stratégie d'allocations et la politique de distribution discrétionnaire de PB de l'assureur,
- les scénarios économiques générés par le GSE,
- les données relatives à l'actif du portefeuille : valeur de marché, valeur comptables,
- les données relatives aux passifs du portefeuille : les provisions mathématiques, l'âge, le sexe, l'ancienneté du contrat.

Le moteur ALM permet ainsi de faire interagir l'actif et le passif, et donne en sortie, les flux futurs des passifs pour chaque couple  $(temps, scenario) = (i, k)$ . Une fois ces flux obtenus, le *Best Estimate* peut-être calculé.

Théoriquement, la valeur du *Best Estimate* pour le scénario  $k$  est donnée par l'équation 1.3.

$$\begin{aligned} BE(t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}} \left[ \sum_{i=t}^T \delta_i F_{i,k} | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \sum_{i=t}^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\delta_i | \mathcal{F}_t] \times \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[F_{i,k} | \mathcal{F}_t]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

$F_{i,k}$  désigne les flux futurs de trésorerie, constitués à partir des prestations et des frais ;

$\delta_i$  désigne le facteur d'actualisation (qui s'exprime en fonction du taux sans risque) du flux de passif  $F_{i,k}$  à l'échéance  $i$  ;

$\mathcal{F}_t$  modélise l'information disponible à l'instant  $t$  ;

$\mathbb{Q}$  est la probabilité neutre au risque ;

$\mathbb{P}$  est la probabilité historique.

Comme le *Best Estimate* fait intervenir deux sources d'aléas, l'aléa des risques financiers qui sont répliquables, et l'aléa des risques d'assurance qui sont non répliquables, ils sont respectivement modélisés par deux probabilités différentes,  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{P}$ . Par exemple, la mortalité des assurés n'est pas un risque répliquable (ce point sera développé dans la suite), il est donc évalué sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$ . C'est pour cette raison que le moteur ALM est alimenté de tables de mortalité, elle-même constituée de probabilité de décès. Il n'est pas question d'univers neutre au risque dans la modélisation des décès lors de la construction d'une table de mortalité. Le modèle ALM fait dès lors interférer les deux univers de probabilité ensemble.

Le passage à la deuxième égalité dans l'équation 1.3 n'est possible que si les flux sont indépendants des risques financiers, comme en assurance non vie. En assurance vie, cette hypothèse n'est pas vérifiée puisque l'actif dépend du passif. Ces interactions sont surtout dues aux mécanismes de participations aux bénéfices et de rachats. En effet, la revalorisation des contrats d'épargne en euros dépend de la participation aux bénéfices (au passif), qui est directement liée à la performance financière des actifs (à l'actif). Elles rendent plus délicat le calcul du *Best Estimate* en assurance vie, c'est pour cette raison que le moteur ALM est indispensable, pour modéliser ces interactions en prenant en compte à la fois le comportement des assurés (cf section 1.1.3), les options et garanties (cf section 1.1.2), et la stratégie de l'assureur, qui se manifestent par un ensemble d'hypothèses.

Pour voir comment ces interactions sont modélisées dans un modèle ALM, le lecteur pourra notamment se référer à ARMEL et PLANCHET (2020c) et TICHIT (2019).

Finalement, le *Best Estimate* résulte d'une approximation par Monte Carlo. La valeur du passif pour le scénario économique  $k$  est donnée par l'équation 1.4 :

$$BE(t) = \sum_{i=t}^T \delta_i F_{i,k}. \tag{1.4}$$

**Etape 6 :** Et enfin les passifs des contrats d'épargne en euros pour l'ensemble des scénarios sont estimés par l'équation 1.5.

$$BE(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{i=t}^T \delta_i F_{i,k}. \quad (1.5)$$

La formule du  $BE$  1.5 pour les passifs des contrats d'épargne en euros est alors calquée sur la méthode d'évaluation du prix d'un actif contingent comme vu en sous section 1.2.1. En effet, il s'agit de l'approximation d'une espérance conditionnelle de flux actualisés, faisant intervenir la mesure de probabilité neutre au risque  $\mathbb{Q}$ .

### 1.2.3 Remise en question du processus actuel de valorisation des passifs

La méthode d'évaluation des prix des produits dérivés repose sur le principe de réplication en AOA sur le marché financier (cf. paragraphe 1.2.1). Les récentes réglementations s'appuient largement sur cette méthodologie pour estimer la valeur des passifs des contrats d'épargne euros. Or le principe de réplication en AOA nécessite deux conditions pour être valable : le marché en question doit être en AOA, et le produit dérivé à évaluer sur ce marché doit être répliquable. Cependant, ces conditions ne sont pas nécessairement vérifiées sur le marché des contrats d'épargne en euros, ce qui soulève une interrogation quant à l'utilisation de ce processus de valorisation sur un tel marché.

#### Présence d'opportunité d'arbitrage sur le marché de l'épargne en euros

Le papier ARMEL et PLANCHET (2020c) développe un argumentaire démontrant que les opportunités d'arbitrage sont présentes sur le marché de l'épargne en euros. Plusieurs exemples sont donnés. Ces paragraphes les présentent synthétiquement.

Le premier exemple est lié à la richesse initiale de l'assureur. Ce dernier, grâce à l'investissement des assurés, cumule des richesses, qui se situent notamment dans la PPB, dans la réserve de capitalisation, et dans les plus ou moins-values latentes des actifs. Ces richesses appartiennent en partie aux assurés, et leur seront redistribuées, à la discrétion de l'assureur. Par conséquent, si un investisseur souhaite investir dans un contrat aujourd'hui, il peut bénéficier des richesses existantes sans y avoir contribué. Il profiterait des performances dues aux assurés déjà en portefeuille, sans avoir investi : c'est une opportunité d'arbitrage.

Le deuxième exemple est relatif à la politique de distribution de la PB, qui joue sur la valeur du contrat. Dans ARMEL et PLANCHET (2020c), il est supposé l'existence de deux assureurs aux caractéristiques identiques A et B, ayant « les mêmes actifs et passifs, évoluant dans un même environnement économique et ayant la même richesse initiale ». L'assureur B choisit de réduire sa marge et de distribuer plus de PB par rapport à l'assureur A. Alors le passif de B devient plus élevé que celui de A, et les contrats de B sont plus rémunérateurs que les contrats de A pour l'assuré. Alors une opportunité d'arbitrage peut être construite :

- L'assuré vend à découvert des contrats A.
- L'assuré achète autant de contrats B.

- L'assuré empêche la différence de rémunération des deux contrats.

Une des raisons pour laquelle ces opportunités d'arbitrage persistent sur le marché du contrat d'épargne en euros est l'inefficience informationnelle de ce marché. L'efficience informationnelle est nécessaire à l'absence d'opportunité d'arbitrage, et donc par équivalence, à l'existence d'une probabilité neutre au risque.

Un marché est dit efficient si toute l'information disponible est contenue dans les prix à chaque instant, et que cette information peut être connue par tous les agents du marché. Autrement dit, il n'est pas possible qu'un agent du marché dispose d'informations prédictibles sur des prix futurs, inconnus des autres agents : dans ce cas il serait facile pour lui de parier sur les prix futurs, et d'exploiter une opportunité d'arbitrage.

Sur les marchés financiers, les stratégies de couverture, les pratiques professionnelles, et les positions prises par les agents reposent sur une hypothèse d'efficience informationnelle, qui est une hypothèse fondamentale de la théorie financière. Si la transparence de l'information est omise, le marché connaît des dysfonctionnements, comme le délit d'initié : un investisseur commet un délit d'initié s'il utilise des informations confidentielles, dont ne disposent pas les autres investisseurs, à des fins d'enrichissements, et susceptibles de changer le cours de la bourse. Cette asymétrie d'information (et les autres abus de marché de manière générale) est soumise à de fortes sanctions pénales.

Pour le marché de l'épargne en euros, l'inefficience informationnelle peut s'expliquer par les inévitables asymétries d'informations entre l'assuré et l'assureur. L'information n'est pas bien répartie au sein des acteurs du marché du contrat d'épargne en euros.

Comme le montre le papier de recherche ARMEL et PLANCHET (2020c), il y a d'un côté une asymétrie d'informations entre l'assuré envers l'assureur. L'assuré a naturellement toujours plus d'informations sur lui-même que l'assureur n'en dispose. Lui seul connaît exactement ses intentions et son raisonnement quant à la gestion de son épargne, qui dépend de son revenu, de son patrimoine, ou de sa situation financière actuelle. Il est complexe pour l'assureur d'anticiper les agissements et les objectifs d'investissement de ses assurés. De l'autre côté, il existe de manière similaire une asymétrie d'informations de l'assureur envers l'assuré. L'assureur connaît parfaitement sa stratégie et son actif, ainsi que sa politique de revalorisation. L'assuré n'est pas au courant des contrats qui vont être revalorisés, de la manière dont l'assureur va choisir de redistribuer la participation aux bénéfices, ou de l'évolution des actifs sous-jacent à son contrat. L'assuré peut difficilement évaluer les flux futurs et la rentabilité de son contrat. En plus des asymétries d'informations qui subsistent entre assureur et assuré, il en existe de la même manière entre l'assureur et le réassureur, et entre les assureurs concurrents.

Comme des opportunités d'arbitrage subsistent sur le marché de l'épargne en euros, cela signifie, par équivalence, qu'il n'existe pas de mesure de probabilité neutre au risque sur ce marché rendant les prix martingales (cf. sous section 1.2.1). Ceci est contradictoire avec le processus de valorisation actuel des passifs vu précédemment (cf. paragraphe 1.2.2), où la mesure neutre au risque est utilisée pour simuler la dynamique des variables du marché financier, et pour le calcul de l'espérance.

### **Les produits d'épargne en euros ne sont pas répliquables**

Les référentiels actuels font appel à une approche *market consistent*, qui repose sur le calcul du prix d'un produit dérivé grâce à une couverture. Pour cela, le produit en question doit être répliquable, ce qui suppose que les flux qu'ils engendrent sont parfaitement reproductibles à l'aide d'une combinaison d'instruments financiers, autrement dit par un portefeuille de couverture. La valeur actuelle

du portefeuille répliquant fournit alors de manière immédiate un prix observable. De plus ces instruments financiers doivent être monnayables sur un marché qui est supposé actif, liquide et transparent. Un marché est dit actif, liquide et transparent si (cette définition est reprise du mémoire OHNOUNA (2008)) :

- les agents du marché peuvent exécuter un nombre élevé de transactions en un temps réduit sans que cela n'impacte les prix ;
- les informations sur les échanges en cours, et sur les prix sont disponibles au public ;
- les points 1. et 2. sont vérifiés à chaque instant.

D'après KAROUI et al. (2017) et SELMA (2016), de nos jours, pour chaque dérivé, les traders réajustent continuellement leur portefeuille répliquant, ce qui inclut les modèles, les prix et leur position sur le marché. Cette tâche doit être réalisée régulièrement, au jour le jour, de manière à rendre leur stratégie efficace et surtout leur évaluation neutre au risque juste et légitime. Finalement il s'agit d'exploiter des relations entre un actif et d'autres investissements afin de diminuer la variabilité de la position aux aléas du marché.

Maintenant, quand est-il de la « répliquabilité » et de l'utilisation de la probabilité neutre au risque pour les produits d'épargne en euros ?

L'argumentation proposée ci-dessous s'appuie sur KAROUI et al. (2017) et ARMEL et PLANCHET (2020c).

Premièrement, le choix de modélisation en mesure neutre au risque et son objectif, semblent déliés. En effet, l'objectif de l'évaluation par répliquabilité en AOA nécessite des ajustements fréquents, sur le court terme, dans le but de rendre le portefeuille insensible aux fluctuations du marché. Or l'approche *market consistent* s'appuie sur la même méthode, mais pour valoriser, une fois dans l'année, des passifs en valeur de marché (le *BE*).

Deuxièmement, les structures du marché de l'épargne en euros et du marché financier sont sensiblement différentes. Comme vu dans le paragraphe 1.2.3, le marché de l'épargne en euros n'est pas transparent, et les prix n'y sont pas observés. De plus, les produits d'épargne sont illiquides. Tout d'abord le transfert de portefeuille d'un assureur à l'autre est rarissime, et le transfert d'un contrat français à un assureur étranger est impossible. Et si un assuré décide de racheter son contrat, la transaction est loin d'être instantanée, cela peut être réglé dans un délai de deux mois. Contrairement aux marchés financiers, dotés d'une plateforme qui fluidifie et régule les échanges. Ils sont soumis à un règlement, qui permet une égalité de traitement entre les investisseurs. La diffusion des données des sociétés cotées, du carnet d'ordre et des cours en temps réel permet aux investisseurs de détenir les mêmes informations au même moment. L'autorité des marchés financiers s'assure d'éviter les abus susceptibles de modifier le cours, et de la bonne tenue des transactions. Le marché des produits dérivés est donc un marché organisé, et la méthode de répliquabilité en AOA est un processus de valorisation qui a été développé spécifiquement pour les produits de ce marché. Il n'existe pas un tel marché organisé pour les produits d'assurance en euros, ce qui rend l'utilisation de ce processus de valorisation inadapté pour ces contrats. D'après KAROUI et al. (2017), l'utilisation pratique de l'évaluation neutre au risque est adaptée et ne devrait être restreinte qu'au marché des dérivés.

Troisièmement, il n'y a pas de relations évidentes entre la mortalité et les actifs financiers, ni entre le comportement des assurés et les actifs financiers, ni entre le risque de frais et les actifs financiers... à exploiter pour couvrir ces risques. La couverture des rachats dynamiques est complexe à mettre en



place puisque ces derniers ne sont ni anticipables, ni modélisables par l'assureur, comme expliqué dans la section 1.1.3. De même, la participation aux bénéfices est versée à la discrétion de chaque assureur, et de manière subjective, impliquant à chaque fois des opérations comptables, ce qui rend très difficile la mise en place d'une couverture financière répliquant les flux de participations aux bénéfices. Il semble difficile de répliquer les flux techniques avec des instruments financiers.

Finalement, il paraît compliqué de construire un portefeuille de couverture pour les passifs d'épargne en euros en raison des risques non financiers, et de l'absence d'un marché organisé des produits d'assurance. En ce sens, les produits d'épargne en euros ne sont pas répliquables. Cela signifie que le marché n'est pas complet, et que si toutefois une mesure de probabilité neutre au risque existe, alors elle n'est pas unique.

Une autre problématique réside dans l'utilisation de la mesure de probabilité neutre au risque pour les calculs des passifs d'épargne en euros, ce point est détaillé dans le prochain paragraphe.

### Surpondération des scénarios défavorables en probabilité neutre au risque

Dans ce paragraphe, les notations adoptées dans le paragraphe 1.2.1 sont conservées.

La mesure de probabilité neutre au risque  $\mathbb{Q}$  est équivalente à la probabilité historique  $\mathbb{P}$ . Formellement, cela signifie qu'elles ont le même ensemble de négligeable (ensemble de mesure nulle).

Le moyen technique de passer de l'une à l'autre est donné par le théorème de Girsanov (cf. BENTAHAR et al. (2016)). Considérons un mouvement brownien  $W^{\mathbb{P}}$  sous  $\mathbb{P}$ , sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ , dont la filtration naturelle est  $\mathcal{F}$ . Si  $\lambda = \{\lambda(t), 0 \leq t \leq T\}$  est un processus adapté à  $\mathcal{F}$ , vérifiant la condition de Novikov (cf. AGBAHOLOU (2018)), alors il existe une mesure  $\mathbb{Q}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ , équivalente à  $\mathbb{P}$ , définie par la densité de Radon Nikodym (cf. équation 1.7), telle que :

$$dW^{\mathbb{Q}}(t) = dW^{\mathbb{P}}(t) + \lambda(t)dt. \quad (1.6)$$

La densité de Random Nikodym (aussi appelée processus de vraisemblance),  $L = \{L(t), 0 \leq t \leq T\}$ , a une dynamique lognormale donnée par l'équation 1.7.

$$\begin{aligned} L(T) &= \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \lambda(s)dW^{\mathbb{P}}(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda(s)^2 dW^{\mathbb{P}}(s)\right), \\ L(t) &= -L(t)\lambda(t)dW^{\mathbb{P}}(t). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Ce processus de vraisemblance permet d'écrire l'équation 1.8, pour tout processus  $X$  intégrable. Cette égalité est **fondamentale** pour la suite du mémoire.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X(T)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L(T)X(T)]. \quad (1.8)$$

Le passage entre les deux mesures de probabilité s'opère au moyen d'un processus  $\lambda$ , représentant **la prime de risque**. Considérons la dynamique d'un actif donné par l'équation 1.9.

$$dS(t) = \mu(t, S(t))dt + \sigma(t, S(t))dW^{\mathbb{P}}(t). \quad (1.9)$$

Il suffit d'injecter l'expression 1.6 dans la dynamique historique de l'actif pour avoir sa dynamique sous  $\mathbb{Q}$  (cf. équation 1.10). Certains modèles, à un changement de paramètres près, ont des dynamiques identiques sous  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$ .

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu(t, S(t))dt + \sigma(t, S(t))(dW^{\mathbb{Q}}(t) - \lambda(t)dt), \\ dS(t) &= (\mu(t, S(t)) - \lambda(t) \times \sigma(t, S(t)))dt + \sigma(t, S(t))dW^{\mathbb{Q}}(t). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Un point intuitif est proposé sur les deux univers sous  $\mathbb{P}$  et sous  $\mathbb{Q}$  respectivement appelé « réel / historique » et « neutre au risque » pour clarifier les idées. Les informations suivantes sont essentiellement issues de DONIO et DEBAERE (2021).

- **L'univers réel** est le plus intuitif des deux puisqu'il correspond à ce qui est effectivement observé. Le calibrage d'un modèle en univers réel s'appuie en général sur un historique de données, pour en reproduire les comportements passés. En revanche, la détermination du taux d'actualisation dans cet univers est plus complexe. Sous probabilité historique, des observations réelles d'indices financiers sont projetées : les rendements des actifs intègrent une prime de risque, qui est variable dans le temps et dont l'interprétation n'est pas évidente. L'approche en probabilité historique nécessite de prendre en compte dans la modélisation cette prime de risque, alors qu'elle est directement intégrée au mouvement brownien dans l'approche neutre au risque.
- **L'univers neutre au risque** a l'avantage d'être plus simple à mettre en oeuvre : c'est un univers conceptuel dans lequel l'aversion au risque de l'investisseur n'est pas intégrée dans la paramétrisation. Sous probabilité neutre au risque, le rendement est le taux sans risque, cela rend l'investisseur insensible à la fluctuation des actifs, même dans des scénarios extrêmes, ce qui n'est pas réaliste. Si l'univers neutre au risque simplifie largement les évaluations prospectives demandées par la réglementation, les rendements projetés ne correspondent pas à l'univers observé. De fait, l'univers neutre au risque ne change pas les états du monde, mais il change les probabilités d'occurrence. Illustrons-le avec l'exemple de DONIO et DEBAERE (2021). Considérons deux actifs financiers, l'un sans risque, l'autre risqué, comme présenté dans la figure 1.1. Chacun des deux actifs peut prendre une valeur à la hausse ou à la baisse en  $T = 1$ , avec une probabilité de 50% dans les deux cas.

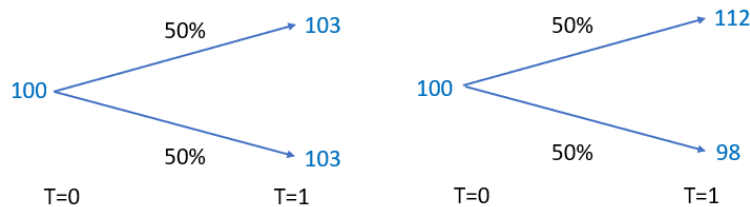


FIGURE 1.1: Dynamique en univers réel : actif sans risque/actif risqué

L'univers neutre au risque repose sur le fait que les individus sont neutres à la notion du risque, le rendement est de 3% pour les deux actifs. Le passage en univers neutre au risque se traduit par l'équation 1.11, la solution est  $p^{\mathbb{Q}} = 36\%$ . Il consiste « à augmenter la probabilité de survenance des événements défavorables pour l'investisseur de manière à refléter son aversion pour le risque », ARMEL et PLANCHET (2020c).

$$p^{\mathbb{Q}}(1 + 12\%) + (1 - p^{\mathbb{Q}})(1 - 2\%) = 1 + 3\%. \quad (1.11)$$

Les valeurs des actifs n'ont pas changé, en revanche, la probabilité des différents scénarios est modifiée. Et effectivement, une hausse de la probabilité du scénario le plus défavorable est observée (cf. la figure 1.2).

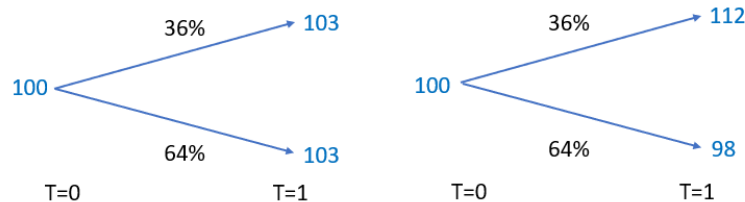


FIGURE 1.2: Dynamique en univers neutre au risque : actif sans risque/actif risqué

En utilisant la probabilité neutre au risque dans les générateurs de scénarios économiques, des scénarios extrêmes avec une forte probabilité d'occurrence sont injectés dans le modèle ALM, c'est à dire des scénarios défavorables qui sont peu probables sous  $\mathbb{P}$ , mais dont l'occurrence est beaucoup plus forte sous  $\mathbb{Q}$ . Cela soulève une incohérence quant à l'interprétation et à l'utilisation de ces scénarios, qui ne « collent » pas à la réalité.

L'article ARMEL et PLANCHET (2020c) met en avant que dans les moteurs ALM, des fonctions de réactions sont implémentées. Ce sont des fonctions qui modélisent la réaction de l'assuré à un scénario économique. C'est notamment le cas pour le rachat dynamique, modélisé dans le moteur ALM par un taux de rachat qui dépend du taux servi par l'assureur, et du taux attendu par l'assuré. Le papier de recherche ARMEL et PLANCHET (2020c) démontre deux éléments aux travers de leur étude.

- **Premièrement**, comme des scénarios neutres au risque atypiques sont injectés dans le moteur ALM, les fonctions de réaction sont difficiles à interpréter parce qu'elles réagissent à des scénarios non observés, et peu probables.
- **Deuxièmement**, pour une même évaluation du *Best Estimate*, les auteurs de ARMEL et PLANCHET (2020c) ont montré qu'en injectant les sorties d'un GSE sous probabilité historique dans le moteur ALM, le *Best Estimate* résultant est inférieur au *Best Estimate* obtenu en ayant introduit les scénarios du GSE sous la probabilité neutre au risque dans le moteur ALM.

L'article montre que les scénarios historiques diminuent le nombre de scénarios atypiques, et entraîne une réaction moins extrême des assurés, et donc un taux de rachat moins élevés, ce qui diminue le passif de l'assureur.

### 1.3 Une nouvelle approche : le déflateur stochastique

Trois éléments peuvent rendre discutable l'utilisation de la probabilité neutre au risque pour l'évaluation des passifs des contrats d'épargne euros :

- les contrats d'épargne en euros ne sont pas répliquables (cf. ARMEL et PLANCHET (2020b)),

- des opportunités d'arbitrage persistent sur le marché des contrats d'épargne en euros (cf. ARMEL et PLANCHET (2020b)),
- les scénarios économiques sous la probabilité neutre au risque injectés dans les moteurs ALM induisent un biais dans la valorisation des passifs (cf. ARMEL et PLANCHET (2020b)).

La suite est focalisée sur le troisième point : trouver un moyen d'enlever le biais dans l'évaluation des passifs dû aux scénarios économiques neutres au risque.

### 1.3.1 Comment enlever le biais dans la valorisation des passifs ?

Le support ADAM et al. (2014) présente plusieurs pistes. Une première solution peut être de modifier les scénarios extrêmes. En effet certains praticiens rectifient les trajectoires problématiques en les nivelant. Malencontreusement cette manipulation revient à modifier la mesure de probabilité neutre au risque si la trajectoire retraitée intervient dans la valorisation de tous les flux. C'est problématique car dans un marché supposé complet, la mesure neutre au risque est unique. Cette idée fait face à une incohérence théorique. Il en découle une autre possibilité : classer les flux de trésoreries en deux catégories. Deux types de flux peuvent être distingués : les flux de trésorerie sur lesquels l'assureur peut intervenir (par exemple la PB), et ceux sur lesquels il ne peut pas (par exemple les *cash flows* des instruments financiers). Seuls les flux de la première catégorie sont touchés par des règles de gestion ALM. S'il est décidé de niveler seulement ces derniers, alors ces retraitements peuvent être considérés comme un effet de la politique ALM. Cela permet de palier au problème d'unicité de la mesure neutre au risque. Cette option a finalement été laissée de côté à cause de la complexité de sa mise en oeuvre, notamment dans la bonne identification des flux, qui est sujet à un risque opérationnel élevé.

D'autre part, l'article SELMA (2016) recommande d'adopter des modèles de GSE plus réalistes, voir d'abandonner complètement l'approche en univers neutre au risque, et de se détacher des modèles conceptuels. L'article suggère également aux actuaires, pour le calibrage du GSE, d'utiliser des données plus stables, comme par exemple en faisant une moyenne sur deux mois, au lieu d'utiliser des données de marché au 31/12 de chaque année : « en calibrant leur modèle sur des données de marché prises au 31/12, ils reposent toute leur valorisation de solvabilité sur la base du dernier trade de marché! ».

### 1.3.2 Définition d'un déflateur stochastique

Les déflateurs sont des facteurs d'actualisation stochastiques. Le déflateur défini par le processus  $D = \{D(t), 0 \leq t \leq T\}$ , vérifie l'égalité 1.12.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(T) \times \exp(-\int_t^T r(s)ds) | \mathcal{F}(t)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(T) \times D(T) | \mathcal{F}(t)]. \quad (1.12)$$

Dans la suite, la notation  $\delta_t = \exp(-\int_t^T r(s)ds)$  est adoptée.

Pour passer d'un côté de l'égalité à l'autre dans l'équation 1.12, un changement de probabilité est effectué (qui s'opère grâce au théorème de Girsanov), en prenant  $X(T) = S(T) \times \delta(T)$  dans l'égalité 1.8, vu au paragraphe 1.2.3, qui permet de passer d'une espérance sous  $\mathbb{Q}$  à une espérance sous  $\mathbb{P}$ .

Constater l'équation 1.12, permet de convenir que les approches neutre au risque et historique sont complètement équivalentes avec la mise en place du déflateur. Du fait de cette équivalence, le cadre d'évaluation reste le même : il s'agit toujours de celui de l'évaluation en l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Comme expliqué précédemment, l'une des difficultés de la projection des scénarios en univers historique est de trouver une méthode pour actualiser les flux. Avec l'utilisation d'un déflateur, « *pricer* » en univers historique revient à ajuster le facteur d'actualisation  $\delta$ . Il convient alors de multiplier le flux au temps  $t$ , par le déflateur (cf. équation 1.12) au temps  $t$ , pour l'actualiser. De cette façon, le prix d'un actif peut être calculé en restant en univers historique.

Certes, les deux approches sont équivalentes mathématiquement. Mais conceptuellement, l'utilisation du déflateur change la donne. Le fait d'utiliser le déflateur permet de rester en univers réel, autrement dit l'univers observé, et de se détacher du cadre conceptuel de l'univers neutre au risque. Finalement l'approche en univers historique est un procédé qui conduit à voir le facteur d'actualisation comme la densité d'une mesure de probabilité par rapport à  $\mathbb{P}$ . **La différence entre les deux approches réside dans la paramétrisation, et dans l'implémentation car il faut construire le processus  $D$  tel qu'il vérifie l'équation 1.12 pour tous les actifs  $S$  considérés dans le générateur de scénarios économiques.**

### 1.3.3 Le déflateur : une piste de solution

Le papier de recherche CHENG et PLANCHET (2018a) met en place un GSE en probabilité historique, en construisant un déflateur, afin de remédier à la problématique du biais introduit dans les modèles de revalorisation. Cette première étape franchie, le papier ARMEL et PLANCHET (2020b) reprend ce travail dans la perspective de le rendre cohérent avec la réglementation, et de faciliter sa mise en place opérationnelle.

#### Une première implémentation du déflateur

Le papier CHENG et PLANCHET (2018a) adopte une approche par les déflateurs dans un univers historique pour calculer les *Best Estimate* des contrats d'épargne en euros. La difficulté de générer des scénarios en probabilité historique est liée à la prise en compte de la prime de risque, et à la manière d'actualiser les flux. CHENG et PLANCHET (2018a) montre que le déflateur stochastique permet de répondre à cette problématique.

Le papier de recherche présente la construction d'un GSE en univers historique. Il s'articule de la manière suivante :

1. choix des modèles des variables financières qui constituent le GSE ;
2. construction du déflateur ;
3. diffusion de chaque processus en probabilité historique.

Ces trois points sont détaillés ci-dessous.

**1. Variables financières :** Le GSE est constitué du déflateur et de cinq facteurs de risque : taux d'intérêt, prix de marché du risque, prix des actions, risque de défaut, et le rendement implicite. La diffusion du taux d'intérêt, du prix des actions, du risque de défaut et du rendement implicite repose sur leurs dynamiques stochastiques respectives (modèles choisis), toutes dépendant d'un mouvement brownien, corrélés entre eux. Pour les diffuser, le vecteur des browniens corrélés est exprimé comme le produit d'une matrice des corrélations et d'un vecteur de brownien indépendant.

**2. Construction du déflateur :** Quant au déflateur, sa dynamique se déduit de celle des facteurs de risques. La forme générale du déflateur est construite à partir de trois hypothèses :

- le déflateur est un processus d'Itô multidimensionnel : il s'écrit en fonction des mouvements browniens de chaque facteur de risque,
- le produit du facteur de risque  $X$  et du déflateur  $D$ , qui correspond au facteur de risque actualisé sous  $\mathbb{P}$ , doit être une martingale sous  $\mathbb{P}$ ,
- le produit du facteur de risque  $X$  et de  $\delta$ , qui correspond au facteur de risque actualisé sous  $\mathbb{Q}$ , doit être une martingale sous  $\mathbb{Q}$ .

Les deux derniers points permettent de garder le cadre d'évaluation dans un marché sans opportunité d'arbitrage, même en univers réel.

**3. Simulation :** Une fois que la dynamique de chaque processus est déterminée, des valeurs sont choisies pour les paramètres afin de simuler les processus. Ensuite, chaque processus est discrétisé pour être simulé, selon trois méthodes de discrétisation approximatives différentes : la méthode d'Euler, la méthode de Milstein, et la seconde méthode de Milstein simplifiée.

L'application des méthodes de discrétisation approximatives est lourde et fastidieuse, et la mise en place opérationnelle est complexe. Le lecteur peut s'y référer (cf. CHENG et PLANCHET (2018a) et CHENG et PLANCHET (2018b)) pour s'en rendre compte. Le papier ARMEL et PLANCHET (2020b) le mentionne, et ajoute également que les méthodes de discrétisation approximatives ne sont pas appropriées au cadre de l'assurance vie. Elles produisent des erreurs de convergences non négligeables dues à l'horizon de projection de long terme, et demandent un nombre de trajectoires simulées bien plus conséquents. L'article ARMEL et PLANCHET (2020b) met en avant que le processus du taux d'intérêt choisi dans l'article CHENG et PLANCHET (2018a) est le CIR simple, qui ne permet pas d'avoir des taux d'intérêts négatifs, ni de reproduire la courbe de taux sans risque publiée par l'EIOPA. Ce qui rend cette première approche avec déflateur inadaptée au référentiel Solvabilité II. Enfin, le papier CHENG et PLANCHET (2018a) ne propose pas de méthode pour calibrer les paramètres des modèles en probabilité historique. Pour la simulation, les paramètres sont « choisis » arbitrairement pour tester le modèle.

### Une approche plus opérationnelle

La méthode proposée par le papier de recherche CHENG et PLANCHET (2018a) est une première démarche qui permet de générer des scénarios économiques en probabilité historique avec la mise en place d'un déflateur pour actualiser les flux. Cette approche reste trop lourde pour être mise en pratique de manière opérationnelle, et est limitée par des problèmes numériques. De plus elle n'est pas

en accord avec Solvabilité II : la courbe de taux sans risque réglementaire ne peut pas être reproduite avec le modèle de taux CIR choisi.

Dans la continuité des travaux de CHENG et PLANCHET (2018a), les auteurs de ARMEL et PLANCHET (2020b) présentent un nouveau papier de recherche sur la construction du GSE en probabilité historique dans une perspective évolutive d'amélioration.

Afin que le modèle soit conforme avec Solvabilité II, le processus de taux choisi est le CIR++. Contrairement au processus CIR, il prend en compte les taux négatifs, et reproduit la courbe de taux sans risque publiée par l'EIOPA. Pour palier aux problèmes numériques, les processus sont simulés par discrétisation exacte.

Le papier décrit également une méthode permettant de calibrer les modèles en univers réel. Les auteurs se sont tenus à un calibrage implicite des modèles, reposant sur les prix des produits dérivés à date d'évaluation, afin d'être *market consistent*.

Les travaux des papiers de recherche CHENG et PLANCHET (2018a), ARMEL et PLANCHET (2020c), et ARMEL et PLANCHET (2020b) réunis montrent donc :

- une méthode pour diffuser un GSE en probabilité historique (cf. CHENG et PLANCHET (2018a)) :
  - en utilisant un déflateur pour actualiser les flux en probabilité historique,
  - et en modélisant une prime de risque,
- une méthode pour calibrer un GSE sous la probabilité  $\mathbb{P}$  (cf. ARMEL et PLANCHET (2020b)) :
  - en utilisant un historique de données pour calibrer la prime de risque,
  - **en utilisant les prix des produits dérivés et les formules fermées associées pour calibrer les paramètres de tous les autres processus du GSE,**
- les effets sur le *Best Estimate* en introduisant des scénarios sous  $\mathbb{P}$  dans le moteur ALM et non pas des scénarios sous  $\mathbb{Q}$  (cf. ARMEL et PLANCHET (2020c)).

L'objectif donné au mémoire intervient dans l'étape ci-dessus mise en gras : les auteurs de l'article ARMEL et PLANCHET (2020b) se sont demandés s'il était possible de trouver un processus de calibrage robuste à partir d'un ensemble de données historiques pour estimer les paramètres des processus diffusés dans le GSE, et non pas à partir d'une méthode implicite impliquant l'utilisation des prix des produits dérivés.

Les travaux théoriques et numériques se dérouleront ainsi :

- **Etape n°1** : Les paramètres à calibrer doivent être identifiés. Cette première étape se manifeste par la construction du GSE et du déflateur. Une fois le GSE construit, les paramètres qu'il faudra estimer seront connus.
- **Etape n°2** : L'étape 2 représente une partie importante du travail. Il s'agit de chercher et de trouver des méthodes pour estimer les paramètres du GSE à partir d'un historique de données. Il faudra donc également trouver les données adéquates.
- **Etape n°3** : Une fois la théorie des modèles écrite, la dernière étape est de les mettre en oeuvre numériquement. Un schéma récapitulatif de l'organisation du mémoire est proposé dans la figure 1.3.

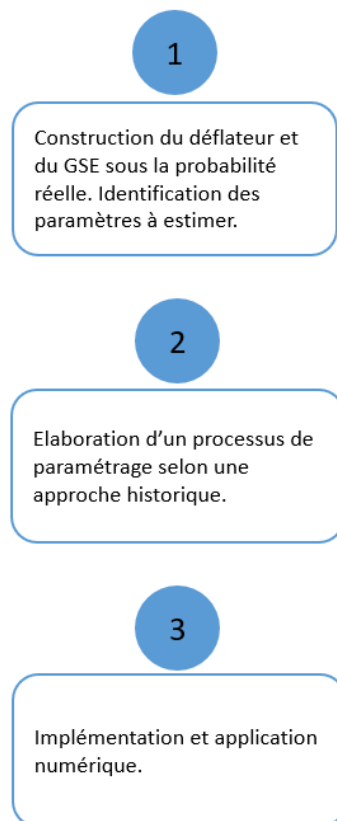


FIGURE 1.3: Chronologie des travaux effectués.



## Chapitre 2

# Processus théoriques de calibrage des paramètres

Ce chapitre est principalement théorique. Il présente les outils et les modèles qui seront utilisés pour obtenir les résultats. Dans un premier temps, celui-ci explique la construction théorique du déflateur, et expose la forme du GSE retenu. Cette première étape est fondamentale : elle donne les éléments pour identifier les paramètres à calibrer (cf. schéma 2.1). C'est donc un passage obligatoire pour passer à l'étape suivante, qui consiste à trouver des méthodes pour calibrer ces paramètres.

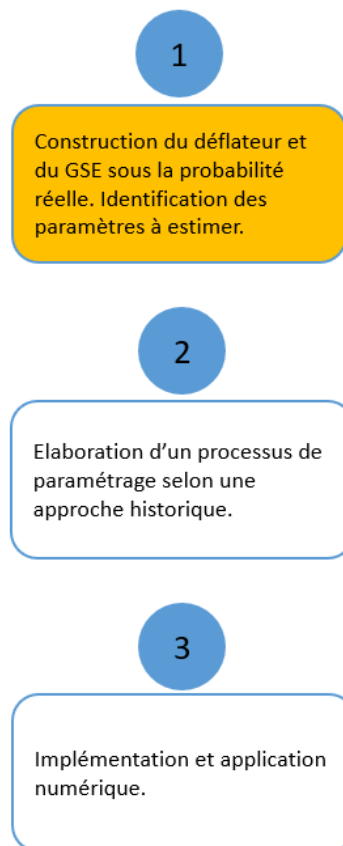


FIGURE 2.1: Chronologie des travaux effectués.

## 2.1 Construction du déflateur

Comme présenté dans le paragraphe 1.3.2, le déflateur est un processus stochastique. Sa dynamique est déterminée à partir des actifs qui interviennent dans le générateur de scénarios économiques. Sa construction est détaillée dans les prochains paragraphes.

### 2.1.1 Forme générale du déflateur

Le déflateur est construit de manière générale : pour le moment les processus qui modélisent les variables du GSE ne sont pas spécifiques.

#### Définition du cadre

Le générateur de scénarios économiques dont la construction est présentée ci-dessous est celui du papier ARMEL et PLANCHET (2020b). Les calculs et les démonstrations reprennent des éléments de ARMEL et PLANCHET (2020b), CHENG et PLANCHET (2018b) et DASTARAC et SAUVEPLANE (2010).

Tout d'abord, la dynamique sous  $\mathbb{P}$  des actifs nécessaires à la construction du déflateur sont présentés.

**Taux d'intérêt :** le taux court  $r = \{r(t), 0 \leq t \leq T\}$  suit la dynamique générale donnée par l'équation 2.1.

$$dr(t) = \alpha(t, r(t))dt + \beta(t, r(t))dW_{rate}^{\mathbb{P}}(t). \quad (2.1)$$

**Immobilier et action :** l'actif risqué  $S = \{S(t), 0 \leq t \leq T\}$  suit la dynamique générale donnée par l'équation 2.2.

$$dS(t) = \mu_{risk}(t)S(t)dt + \sigma_{risk}(t)S(t)dW_{risk}^{\mathbb{P}}(t). \quad (2.2)$$

**Epargne :** le titre de l'épargne à court terme  $B = \{B(t), 0 \leq t \leq T\}$  suit la dynamique générale donnée par l'équation 2.3.

$$dB(t) = B(t)r(t)dt. \quad (2.3)$$

**zéro-coupon :** l'obligation zéro-coupon sans risque d'échéance  $T$  a pour dynamique générale l'équation 2.4.

$$dP(t, T) = P(t, T)\tilde{\mu}(t)dt + P(t, T)\tilde{\sigma}(t)dW_{rate}^{\mathbb{P}}(t). \quad (2.4)$$

L'équation 2.4 peut également s'écrire comme l'équation 2.5. Il s'agit d'une application de la formule d'Itô. Une démonstration est proposée page 40 de DASTARAC et SAUVEPLANE (2010), ou page 4 de CHENG et PLANCHET (2018b).

$$dP(t, T) = P(t, T)[r(t) + \tilde{\sigma}(t)\lambda(t)]dt + P(t, T)\tilde{\sigma}(t)dW_{rate}^{\mathbb{P}}(t). \quad (2.5)$$

**Corrélation des mouvements browniens :**  $W_{rate}^{\mathbb{P}}$  et  $W_{risk}^{\mathbb{P}}$  sont deux mouvements browniens corrélés, de coefficient de corrélation  $\rho$ . Considérons  $W_{rate\perp}^{\mathbb{P}}$ , mouvement brownien indépendant de  $W_{rate}^{\mathbb{P}}$ . Alors il est possible d'exprimer  $W_{risk}^{\mathbb{P}}$  en fonction de  $W_{rate\perp}^{\mathbb{P}}$  et  $W_{rate}^{\mathbb{P}}$ , (cf. équation 2.6).

$$dW_{risk}^{\mathbb{P}} = \rho W_{rate}^{\mathbb{P}} + \sqrt{1 - \rho^2} W_{rate\perp}^{\mathbb{P}}. \quad (2.6)$$

**Processus de prime de risque et processus de vraisemblance :** Comme présenté dans le paragraphe 1.2.3,  $\{\lambda(t), 0 \leq t \leq T\}$  et  $\{L(t), 0 \leq t \leq T\}$  sont respectivement les processus de prime de risque et de vraisemblance vérifiant l'équation 2.7. Le processus  $\lambda$  est supposé mesurable. De cette manière  $L$  est intégrable, et est donc une  $\mathbb{P}$ -martingale (cf. ARMEL et PLANCHET (2020b)).

$$\begin{aligned} dW_{rate}^{\mathbb{Q}}(t) &= dW_{rate}^{\mathbb{P}}(t) + \lambda(t)dt, \\ L(t) &= -L(t)\lambda(t)dW_{rate}^{\mathbb{P}}(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ainsi l'équation 2.7 permet de passer de la dynamique historique de l'actif à la dynamique neutre au risque.

A présent, la forme du déflateur  $D$  peut être calculée. La dynamique générale de  $D$  est supposée être l'équation 2.8. Il faut alors déterminer  $\Omega$ ,  $\Phi$ , et  $\Psi$ , selon deux conditions (cf. CHENG et PLANCHET (2018a)) :

- **Condition 1 :**  $DB$ ,  $DS$ , et  $DP$  doivent être des  $\mathbb{P}$ -martingales,
- **Condition 2 :**  $\delta B$ ,  $\delta S$ , et  $\delta P$  doivent être des  $\mathbb{Q}$ -martingales.

$$dD(t) = \Omega(t)dt + \Phi(t)dW_{rate}^{\mathbb{P}}(t) + \Psi(t)dW_{rate\perp}^{\mathbb{P}}(t). \quad (2.8)$$

### Vérification de la condition 1

La vérification de la première condition s'appuie essentiellement sur deux résultats mathématiques.

- **Le premier** est la formule d'intégration par parties du processus d'Itô. Considérons un processus d'Ito  $X$ , alors  $\{D(t)X(t), 0 \leq t \leq T\}$  est un processus d'Itô et sa dynamique est donnée par l'équation 2.9.

$$dD(t)X(t) = X(t)dD(t) + D(t)dX(t) + dX(t)dD(t). \quad (2.9)$$

- **Le deuxième** est le théorème de représentation des martingales browniennes. Celui-ci stipulent que si un processus est une martingale, alors son *drift* (le terme en  $dt$ ) est nul. C'est cet argument qui permet d'obtenir un système des trois fonctions  $\Omega$ ,  $\Phi$ , et  $\Psi$ , et donc d'exprimer le déflateur. Il garantit également que  $DB$ ,  $DS$  et  $DP$  sont des  $\mathbb{P}$ -martingales.

La méthodologie est la suivante :

1. Commencer par le calcul d' $\Omega$  (commencer par  $\Phi$  ou  $\Psi$  aurait également été possible).
2. Déterminer la dynamique du processus  $DB$  en utilisant la formule d'intégration par partie (cf. équation 2.9), comme réalisé dans les égalités 2.10.

$$\begin{aligned} dD(t)B(t) &= B(t)dD(t) + D(t)dB(t) + dB(t)dD(t) \\ &= B(t)[\Omega(t)dt + \Phi(t)dW_{rate}^{\mathbb{P}}(t) + \Psi(t)dW_{rate^{\perp}}^{\mathbb{P}}(t)] + D(t)[B(t)r(t)dt] \\ &= [B(t)\Omega(t) + D(t)B(t)r(t)]dt + B(t)\Phi(t)dW_{rate}^{\mathbb{P}}(t) + B(t)\Psi(t)dW_{rate^{\perp}}^{\mathbb{P}}(t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

3. Identifier et annuler le drift de  $DB$ , comme réalisé en équation 2.11.

$$B(t)\Omega(t) + D(t)B(t)r(t) = 0. \quad (2.11)$$

4. En déduire la forme d' $\Omega$ .

$$\Omega(t) = -D(t)r(t). \quad (2.12)$$

5. Les expressions de  $\Phi$  et  $\Psi$  sont déterminées en réitérant les étapes 1), 2) et 3), en calculant respectivement les dynamiques de  $DP$  et  $DS$ . A l'issue des calculs, les résultats 2.13 sont obtenus. Le processus  $\lambda$  apparaît dans l'expression de  $\Phi$  et  $\Psi$  : cela est simplement dû au fait que c'est l'expression 2.5 du zéro-coupon qui est utilisé pour le calcul de  $DP$ . De même pour  $W_{risk}^{\mathbb{P}}$ , il faut utiliser l'expression 2.6, pour pouvoir tomber sur l'expression 2.13 des fonctions.

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(t)}{D(t)} &= -r(t), \\ \frac{\Phi(t)}{D(t)} &= -\lambda(t), \\ \frac{\Psi(t)}{D(t)} &= \frac{[r(t) + \lambda(t)\sigma_{risk}(t)\rho - \mu_{risk}(t)]}{\sigma_{risk}(t)\sqrt{1 - \rho^2}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

6. En substituant les expressions d' $\Omega$ ,  $\Phi$ , et  $\Psi$  dans la formule de  $D$ , une première expression du déflateur est obtenue (cf. équations 2.14). Ce n'est pas la forme finale. Il reste encore à vérifier que les actifs actualisés sous  $\mathbb{Q}$  sont martingales, afin d'avoir l'équivalence entre l'approche historique et l'approche neutre au risque.

$$\frac{dD(t)}{D(t)} = -r(t)dt - \lambda(t)dW_{rate}^{\mathbb{P}}(t) + \frac{[r(t) + \lambda(t)\sigma_{risk}(t)\rho - \mu_{risk}(t)]}{\sigma_{risk}(t)\sqrt{1 - \rho^2}}dW_{rate^{\perp}}^{\mathbb{P}}(t). \quad (2.14)$$

### Vérification de la condition 2

Il faut maintenant s'assurer que  $\delta B$ ,  $\delta S$ , et  $\delta P$  sont des martingales sous  $\mathbb{Q}$ . La méthodologie est exactement la même que pour la vérification de la première condition, seulement **les dynamiques des actifs sont observées sous  $\mathbb{Q}$** . Pour chaque processus, il convient de calculer sa dynamique à l'aide de la formule d'intégration par parties d'Itô, puis d'annuler le terme en  $dt$ .

**Pour l'épargne,  $\delta B$  :**

$$\begin{aligned} d[\delta(t)B(t)] &= \delta(t)dB(t) + B(t)d\delta(t) + d\delta(t)dB(t) \\ &= -\delta(t)B(t)r(t)dt + B(t)\delta(t)r(t)dt \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

La dynamique de  $\delta B$  est nulle, donc le *drift* est nul. D'après le théorème de représentation des martingales,  $\delta B$  est une martingale sous  $\mathbb{Q}$ .

**Pour le zéro-coupon,  $\delta P$  :**

$$\begin{aligned} d[\delta(t)P(t, T)] &= \delta(t)dP(t, T) + P(t, T)d\delta(t) + d\delta(t)dP(t, T) \\ &= \delta(t)[P(t, T)r(t)dt + P(t, T)\tilde{\sigma}(t)dW_{rate}^{\mathbb{Q}}(t)] - P(t, T)r(t)\delta(t)dt \\ &= P(t, T)\tilde{\sigma}(t)dW_{rate}^{\mathbb{Q}}(t). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Le *drift* est nul. D'après le théorème de représentation des martingales,  $\delta P$  est une martingale sous  $\mathbb{Q}$ .

**Pour l'actif risqué,  $\delta S$  :**

$$\begin{aligned} d[\delta(t)S(t)] &= \delta(t)dS(t) + S(t)d\delta(t) + d\delta(t)dS(t) \\ &= \delta(t)[\mu_{risk}(t)S(t) - \lambda(t)\sigma_{risk}(t)S(t)\rho]dt + \delta(t)\sigma_{risk}(t)S(t)\rho dW_{rate}^{\mathbb{Q}}(t) \\ &\quad + \delta(t)\sigma_{risk}(t)S(t)\sqrt{1 - \rho^2}dW_{rate\perp}^{\mathbb{P}}(t) - S(t)r(t)\delta(t)dt \\ &= \delta(t)S(t)[\mu_{risk}(t) - \lambda(t)\sigma_{risk}(t)\rho - r(t)]dt + \delta(t)S(t)\sigma_{risk}(t)\rho dW_{rate}^{\mathbb{Q}}(t) \\ &\quad + \delta(t)S(t)\sigma_{risk}(t)\sqrt{1 - \rho^2}dW_{rate\perp}^{\mathbb{P}}(t). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Le *drift* vaut  $\delta(t)S(t)[\mu_{risk}(t) - \lambda(t)\sigma_{risk}(t)\rho - r(t)]$ . D'après le théorème de représentation des martingales,  $\delta S$  est une martingale sous  $\mathbb{Q}$  si  $\mu_{risk}(t) = \lambda(t)\sigma_{risk}(t)\rho + r(t)$ .

Finalement, la condition pour vérifier le caractère de martingalité sous  $\mathbb{Q}$  aux termes de ces trois calculs, est  $\mu_{risk}(t) = \lambda(t)\sigma_{risk}(t)\rho + r(t)$ . En l'injectant dans la première expression du déflateur (cf. équation 2.14), le déflateur prend la dynamique log-normale donnée en équation 2.18.

$$\frac{dD(t)}{D(t)} = -r(t)dt - \lambda(t)dW_{rate}^{\mathbb{P}}(t). \tag{2.18}$$

Ainsi la construction du déflateur est achevée.

## 2.1.2 GSE obtenu avec un modèle de taux non spécifique

Maintenant que la construction du déflateur est aboutie, la dynamique stochastique des variables et leurs solutions pour la simulation exacte peuvent être totalement présentées.

### Une condition supplémentaire pour la diffusion de l'actif risqué

Dans cette section une condition de régularité supplémentaire est détaillée. Elle est liée à la diffusion de l'actif risqué  $S$ . Après avoir déterminé les conditions de régularité 1 et 2, la dynamique de  $S$  est rappelée par dans l'équation 2.19.

$$dS(t) = [r(t) + \lambda(t)\sigma_{risk}(t)\rho]dt + S(t)\sigma_{risk}(t)\rho dW_{rate}^{\mathbb{P}}(t) + S(t)\sigma_{risk}(t)\sqrt{1 - \rho^2}dW_{rate^\perp}^{\mathbb{P}}(t). \quad (2.19)$$

Pour déterminer la forme du processus de diffusion  $S$  à partir de sa dynamique, la formule d'Itô peut-être appliquée à  $\ln S$ , afin d'en obtenir la dynamique. La dynamique de  $\ln DS = \ln D + \ln S$  en est ainsi déduite. En passant ensuite à l'exponentielle, l'écriture 2.20 est obtenue. Les calculs ne sont pas présentés en détail pour ne pas alourdir davantage la démonstration, ils sont détaillés dans l'annexe de ARMEL et PLANCHET (2020b).

$$\begin{aligned} D(t)S(t) &= D(0)S(0) \times \exp\left(\int_0^t \lambda(s)\sigma_{risk}(s)\rho - \frac{1}{2}\sigma_{risk}(s)^2 - \frac{1}{2}\lambda(s)^2 ds\right) \\ &\times \exp\left(\int_0^t \sigma_{risk}(s)\rho - \lambda(s) dW_{rate}^{\mathbb{P}}(s)\right) \\ &\times \exp\left(\int_0^t \sigma_{risk}(s)\sqrt{1 - \rho^2}dW_{rate^\perp}^{\mathbb{P}}(s)\right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Si les processus  $\sigma_{risk}$  et  $\lambda$  sont des processus constants, alors  $DS$  est bien une martingale sous  $\mathbb{P}$ .

En revanche, dans le cas où ces deux processus sont stochastiques, une condition suffisante pour que  $DS$  soit martingale est de supposer la condition donnée par l'équation 2.21.

$$\lambda(s)\sigma_{risk}(s)\rho - \frac{1}{2}\sigma_{risk}^2(s) - \frac{1}{2}\lambda(s)^2 = 0. \quad (2.21)$$

Cette hypothèse est retenue dans le papier CHENG et PLANCHET (2018a), ainsi que dans le papier ARMEL et PLANCHET (2020b). Celle-ci a un impact non négligeable car elle implique que la corrélation entre les browniens  $W_{rate}^{\mathbb{P}}$  et  $W_{risk}^{\mathbb{P}}$  vaut 1 en valeur absolue.

En effet si la condition 2.21 est choisie, alors  $\sigma_{risk}(s) = \lambda(s)\rho \pm \lambda(s)\sqrt{1 - \rho^2}$ . Comme  $\rho$  est forcément inférieure ou égal à 1, cette équation n'admet de solution réelle que si  $|\rho| = 1$ .

Il en découle que  $\sigma_{risk}(s) = \lambda(s)\rho$  et que  $W_{risk}^{\mathbb{P}}(s) = \rho W_{rate}^{\mathbb{P}}(s)$ .

Ainsi,  $\sigma_{risk}(s)W_{risk}^{\mathbb{P}}(s) = \lambda(s)W_{rate}^{\mathbb{P}}(s)$  et  $\mu_{risk}(s) = r(t) + \lambda(s)^2$ .

### Forme générale du GSE

Ce paragraphe récapitule la dynamique des variables du GSE construit par ARMEL et PLANCHET (2020b), après avoir construit le déflateur.

La vérification supplémentaire relative à la diffusion de l'actif risqué, donne les résultats  $\sigma_{risk}(s)W_{risk}^{\mathbb{P}}(s) = \lambda(s)W_{rate}^{\mathbb{P}}(s)$  et  $\mu_{risk}(s) = r(t) + \lambda(s)^2$ . Ils permettent de réécrire la dynamique de l'actif risqué (cf. équation 2.2) en fonction du processus de prime de risque et du taux court (cf. tableau 2.1).

Finalement, les variables projetées par le GSE sont :

- le modèle de taux ;
- le déflateur ;
- le prix de l'actif risqué permettant de prendre en compte les investissements de types actions ou en immobilier.

$dr(t) = \alpha(t, r(t))dt + \beta(t, r(t))dW_{rate}^{\mathbb{P}}(t)$
$dS(t) = [r(t) + \lambda(t)^2]S(t)dt + \lambda(t)S(t)dW_{rate}^{\mathbb{P}}(t)$
$dD(t) = -r(t)D(t)dt - \lambda(t)D(t)dW_{rate}^{\mathbb{P}}(t)$

TABLE 2.1: Générateur de scénarios économiques.

Le tableau 2.1 décrit le modèle général du GSE en probabilité historique, en partant d'un modèle de taux non spécifique. Dans la suite, le modèle retenu, reposant sur la construction du modèle générale et sur un modèle de taux CIR++ est présenté.

## Limites

L'article CHENG et PLANCHET (2018a) parvient à proposer un GSE en probabilité historique avec un déflateur. Celui-ci présente certes des imperfections, mais donne la démarche pour construire le processus d'actualisation : le déflateur. Le GSE en question est composé de cinq facteurs de risque, mais l'article ne propose pas encore de processus pour le calibrer.

Pour amorcer ce travail, l'article ARMEL et PLANCHET (2020b) réduit le nombre de variables du GSE dans un premier temps (cf. tableau 2.1, il n'y en finalement plus que 3), pour faciliter la détermination d'un processus de calibrage. Il manque notamment, une variable pour le risque de défaut, ce qui n'est pas négligeable, puisqu'il n'y a pas moyen de distinguer et de prendre en compte les différentes notations des actifs au sein du portefeuille.

De plus, des hypothèses pour l'instant contraignantes (cf. section 2.1.2), sont retenues, comme le fait que le brownien du taux d'intérêt et celui de l'actif risqué soit parfaitement corrélé. Dans les paragraphes ci-dessous, le GSE finalement retenu est décrit, et permet d'identifier les paramètres à calibrer. Le calibrage du GSE va se révéler dépendre uniquement des paramètres du modèle de taux : la dynamique des trois variables du GSE (dont le taux d'intérêt, cf. tableau 2.1) est restreinte aux paramètres du modèle de taux, ce qui peut également être considéré comme une limite du GSE.

Il convient de garder à l'esprit qu'il s'agit d'une approche « pas à pas », en vue d'améliorer la modélisation et les résultats.

### 2.1.3 GSE avec le modèle CIR++

Jusqu'à présent le GSE présenté repose sur un modèle de taux non spécifique. Dans la suite, le GSE sera construit à partir d'un modèle de taux CIR++. Les paragraphes suivants présentent les caractéristiques

du processus CIR++ sous la probabilité neutre au risque  $\mathbb{Q}$  et la probabilité historique  $\mathbb{P}$ , ainsi que la nouvelle forme du GSE.

### Présentation du modèle CIR++ sous $\mathbb{Q}$

Les informations de ce paragraphe reposent intégralement sur l'Annexe ARMEL et PLANCHET (2020a).

Le modèle CIR (Cox - Ingersoll - Ross) présente des propriétés analytiques très intéressantes, ce qui lui confère, au même titre que le modèle de Vasicek, un grand succès auprès des acteurs du marché. Le modèle de Vasicek ( $dx(t) = k(\theta - x(t))dt + \sigma dW(t)$ ) a l'avantage de s'écrire sous la forme d'une équation linéaire, dont la distribution est gaussienne.

Les modèles CIR et de Vasicek permettent de calculer analytiquement (avec des formules fermées), les prix des obligations et de certaines options. Le modèle CIR, contrairement au modèle de Vasicek, produit des taux courts instantanés toujours positifs. Ceci est dû à l'introduction d'un terme en racine carrée dans sa dynamique, donnée par l'équation 2.22.

$$dx(t) = k(\theta - x(t))dt + \sigma\sqrt{x(t)}dW_{rate}^{\mathbb{Q}}(t). \quad (2.22)$$

Avec  $x(0) = x_0$ ,  $k$ ,  $\theta$  et  $\sigma$  des constantes strictement positives. Pour que les taux restent positifs, les paramètres doivent respecter la condition de Feller :  $2k\theta > \sigma^2$ .

Même si ces deux processus proposent des caractéristiques analytiques très pratiques, la structure des taux produite par ces deux modèles ne représente pas nécessairement celle qui est observée sur le marché. Pour faire coïncider la structure par terme des taux du marché avec celle produite par le modèle, deux solutions sont possibles (cf. ARMEL et PLANCHET (2020a)) :

- rendre les paramètres dépendants du temps ;
- introduire additivement une fonction déterministe.

La deuxième solution permet d'expliquer l'extension du modèle CIR au modèle CIR++. Le processus CIR++,  $r$ , est la somme d'une fonction déterministe  $\varphi$  et d'un processus CIR noté  $x$  :  $r(t) = x(t) + \varphi(t)$ . Le vecteur des paramètres est toujours constitué de  $(k, \theta, \sigma)$ , qui sont des constantes positives, et vérifiant la condition de Feller.

La fonction  $\varphi$  est la différence entre le taux forward instantané observé sur le marché à la date 0 pour la maturité  $t$ , et le taux forward instantané à la date 0 pour la maturité  $t$  du CIR++ :  $\varphi(t) = f^M(0, t) - f^{CIR}(0, t; \alpha)$ , avec les notations du tableau 2.2.

### Présentation du modèle CIR ++ sous $\mathbb{P}$

Pour décrire le processus CIR++ en probabilité historique, il est nécessaire de passer de l'univers neutre au risque sous  $\mathbb{Q}$  à l'univers réel sous  $\mathbb{P}$ , comme il a été décrit précédemment dans le paragraphe 1.2.3. Il convient de définir le processus de prime de risque  $\lambda$  et d'effectuer un changement de probabilité.

Attention dans la suite à ne pas confondre le processus de prime de risque  $\{\lambda(t), 0 \leq t \leq T\}$ , désigné auparavant et encore ensuite par « le processus  $\lambda$  », avec le paramètre de facteur du risque noté et désigné simplement  $\lambda$ , qui intervient dans le processus de prime de risque du processus CIR++.



Fonction / Paramètre	Expression
$f^{CIR}(0, t; \alpha)$	$\frac{2k\theta(\exp\{th\}-1)}{2h+(k+h)(\exp\{th\}-1)} + x_0 \frac{4h^2 \exp\{th\}}{[2h+(k+h)(\exp\{th\}-1)]^2}$
$\alpha$	$(k, \theta, \sigma)$
$h$	$\sqrt{(k^2 + 2\sigma^2)}$

TABLE 2.2: Définitions et notations.

Dans le papier ARMEL et PLANCHET (2020b) le processus de prime de risque est défini par  $\lambda(t) = \frac{\lambda\sqrt{x(t)}}{\sigma_{rate}^{\mathbb{P}}}$  où  $\lambda$  est un nombre réel. Pour réaliser le changement de probabilité, l'expression de  $dW_{rate}^{\mathbb{Q}} = dW_{rate}^{\mathbb{P}} + \lambda(t)dt$  est injectée dans l'équation 2.22, ce qui permet d'obtenir la dynamique 2.23 du CIR++ sous  $\mathbb{P}$ .

$$\begin{aligned} dx(t) &= (k - \lambda)\left(\frac{k\theta}{k - \lambda} - x(t)\right)dt + \sigma\sqrt{x(t)}dW_{rate}^{\mathbb{P}}(t), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Par identification,  $\tilde{k} = k - \lambda$ ,  $\tilde{\theta} = \frac{k\theta}{k - \lambda}$  et  $\tilde{\sigma} = \sigma$ , il est facile de constater que le processus  $r$  suit également un processus CIR++ sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$ .

De plus  $2\tilde{k}\tilde{\theta} = 2(k - \lambda)\left(\frac{k\theta}{k - \lambda}\right) = 2k\theta$ . Ainsi, la contrainte de Feller est vérifiée sous la mesure  $\mathbb{Q}$  si et seulement si elle l'est sous la mesure  $\mathbb{P}$ . Par conséquent, le processus CIR++ possède les mêmes propriétés analytiques sous  $\mathbb{P}$  que sous  $\mathbb{Q}$ .

Finalement, calibrer le CIR++ sous  $\mathbb{P}$  (cf. l'expression 2.23) revient à calibrer les paramètres  $k$ ,  $\theta$ , et  $\sigma$  du processus CIR++ sous  $\mathbb{Q}$ . Le paramètre du facteur de risque  $\lambda$  peut être calibré indépendamment. Une fois ces quatre paramètres estimés, les paramètres  $\tilde{k}$ ,  $\tilde{\theta}$ ,  $\tilde{\sigma}$  du CIR++ sous  $\mathbb{P}$  en sont automatiquement déduits.

## GSE retenu

Le GSE en probabilité historique retenu est le GSE présenté dans le tableau 2.1, mais en substituant le modèle de taux non spécifique par un modèle CIR++. L'intérêt d'avoir présenté le modèle de manière générale, est qu'il suffit à présent de remplacer les paramètres dans les expressions des dynamiques du tableau 2.1 avec ceux du modèle de taux CIR++, et d'y injecter l'expression de la prime de risque du processus CIR++.

Les équations différentielles du déflateur stochastique et de l'actif risqué du GSE admettent une solution, ce qui permet de déterminer l'expression du déflateur et de l'actif risqué, et de les simuler de manière exacte. Leurs expressions sont respectivement données par les équations 2.24 et 2.25. Leurs démonstrations étant détaillées dans l'annexe de ARMEL et PLANCHET (2020b), et non strictement nécessaire à la suite des travaux, elle n'est donc pas reprise dans ce document.

$$\begin{aligned} D(T) = D(t) \exp\left(\frac{\lambda k \theta^2}{\sigma}(T - t)\right) \exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) \exp\left(-\frac{\lambda^2}{\sigma}(x(T) - x(t))\right) \exp\left(-\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma^2} + \frac{\lambda k}{\sigma^2}\right) \int_t^T x(s) ds\right). \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$S(T) = S(t) \exp\left(-\frac{\lambda^2}{\sigma} k \theta (T - t)\right) \cdot \exp\left(\int_t^T \varphi(s) ds\right) \cdot \exp\left(\frac{\lambda^2}{\sigma} (x(T) - x(t))\right) \cdot \exp\left(\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma^2} + \frac{\lambda k^2}{\sigma}\right) \int_t^T x(s) ds\right). \quad (2.25)$$

Les expressions du modèle de taux (cf. équation 2.23), du déflateur (cf. équation 2.24) et de l'actif risqué (cf. équation 2.25) sont toutes exprimées en fonction des paramètres  $k$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$ , et  $\lambda$  du processus CIR++. Ainsi, calibrer le GSE de ARMEL et PLANCHET (2020b), revient à calibrer le modèle de taux CIR++.

## 2.2 Présentation de deux approches possibles pour le calibrage du GSE

A titre de rappel, l'univers réel, aussi dit univers historique, est l'univers observé, autrement dit l'univers sous  $\mathbb{P}$ . L'univers neutre au risque, quant à lui, est issu d'un changement de probabilité. C'est l'univers conceptuel sous la probabilité  $\mathbb{Q}$ . D'un univers à l'autre, et donc d'une probabilité à l'autre, les processus changent de dynamiques. Un processus stochastiques  $X$  admet une dynamique sous  $\mathbb{P}$  et une dynamique sous  $\mathbb{Q}$  (cf. paragraphe 1.2.3).

A présent, une autre nuance est ajoutée. Il existe deux approches pour calibrer un processus. Une approche implicite, et une approche historique. Ce qui engendre quatre façons de calibrer un processus selon sa dynamique :

- calibrer le processus  $X$  sous  $\mathbb{P}$  selon une approche **historique** ;
- calibrer le processus  $X$  sous  $\mathbb{P}$  selon une approche **implicite** ;
- calibrer le processus  $X$  sous  $\mathbb{Q}$  selon une approche **historique** ;
- calibrer le processus  $X$  sous  $\mathbb{Q}$  selon une approche **implicite**.

Ci-dessous, les approches implicites et historiques sont définies.

### 2.2.1 La méthode implicite et la méthode historique

Pour calibrer un modèle stochastique, deux possibilités existent. La première revient à évaluer implicitement les paramètres sur les prix de marché observés à la date de calcul. La seconde consiste à faire une estimation par le biais de méthodes statistiques, à partir d'une série chronologique de données, désignée aussi par le terme « données historiques ».

#### Méthode implicite

Cette partie s'appuie sur la référence ARMEL (2020).

## 2.2. PRÉSENTATION DE DEUX APPROCHES POSSIBLES POUR LE CALIBRAGE DU GSE51

La méthode implicite est la méthode utilisée pour que l'évaluation du  $BE$  soit cohérente avec les prix du marché. Cette partie détaille l'**Etape 3** du processus de valorisation actuel présentée en sous section 1.2.2.

Selon la réglementation, les scénarios économiques pour calculer le  $BE$  doivent être cohérents avec le marché financier. La qualité d'un GSE est mesurée par sa capacité à reproduire les prix des produits financiers à une date  $t$ . Ce qui implique que les modèles doivent être calibrer sur les données de marché observées. Dans ce contexte, l'approche de calibrage standard des paramètres des modèles du GSE revient à celle utilisée pour calibrer les produits dérivés. L'environnement est par conséquent l'environnement sous probabilité neutre au risque. Il s'agit d'une approche qui nécessite de :

- choisir une distance  $d$ ;
- construire le vecteur  $Prix^{observés}$  du produit dérivé cible du modèle à calibrer ;
- construire le vecteur de prix théoriques du produit dérivé  $Prix^{théoriques}(\pi)$  dépendant du vecteur des paramètres  $\pi$  à estimer ;
- et enfin d'estimer  $\pi$  en minimisant la distance  $d(Prix^{théoriques}(\pi), Prix^{observés})$ .

L'approche standard du calibrage d'un GSE est précisée ci-dessous.

Comme le GSE retenu (cf. sous section 2.1.3) nécessite seulement le calibrage du modèle de taux CIR++, la description est focalisée sur ce modèle. Mais l'approche reste la même pour chaque modèle financier (modèle action, modèle immobilier. . .).

**Etape 1, choix des modèles et de la distance :** Le choix du modèle de taux, ici le CIR++, est effectué. Le CIR++ possède de bonnes propriétés analytiques puisqu'il permet de valoriser le prix des caps et des swaptions sur obligation zéro-coupon grâce à une formule fermée (cf. ARMEL et PLANCHET (2020a)). Ainsi les produits dérivés choisis sont les caps et les swaptions.

**Etape 2, extraction des prix observables :** Il faut ensuite choisir/fixer un prix d'exercice pour les produits dérivés en question. Les prix des produits dérivés ne sont pas toujours directement observables sur le marché. En revanche leur volatilité implicite l'est. Il peut être nécessaire de reconstituer la formule de Black-Scholes à partir de la volatilité implicite pour obtenir les prix des caps et des swaptions. Dans ce cas, le « prix reconstitué » fait office de « prix observé ».

**Etape 3, valorisation :** Les formules fermées correspondent au prix théorique, qui dépendent des paramètres à calibrer. Les formules fermées pour la valorisation CIR++ des caps et des swaptions sont présentées dans ARMEL et PLANCHET (2020d).

**Etape 4, estimation des paramètres :** La distance minimisée est  $d(Prix^{théoriques}(\pi), Prix^{observés})$ , si les prix sont directement observables sur le marché.  
Sinon la distance minimisée est  $d(Prix^{théoriques}(\pi), Prix^{reconstitués})$ , si seules les volatilités implicites sont observables.

Dans la problématique du mémoire, le vecteur  $\pi$  s'identifie au vecteur  $(k, \theta, \sigma)$ . Comme le modèle de taux est un processus CIR++ sous  $\mathbb{P}$  et sous  $\mathbb{Q}$ , pour le calibrer sous  $\mathbb{P}$ , l'article ARMEL et PLANCHET (2020b) utilise les propriétés analytiques du processus CIR++ en univers neutre au risque, et opte pour un processus de calibrage implicite.

Le choix effectué dans l'article ARMEL et PLANCHET (2020b) est de calibrer dans un premier temps  $(k, \theta, \sigma)$  avec une méthode implicite, et le facteur de risque  $\lambda$ , paramètre du processus de prime de risque, dans un deuxième temps.

Notons que la méthode implicite ne nécessite pas d'observations de la valeur cible (ici le taux court instantané) pour la calibrer. Seulement des prix des produits dérivés à la date du calibrage. Ce n'est pas le cas pour l'approche historique.

### Méthode historique

Avec l'approche historique, le calibrage ne repose pas sur la valeur des produits dérivés à une date  $t$ , mais sur une chronologie de données. Contrairement à la méthode implicite, la méthode historique nécessite d'un échantillon d'observations de la valeur cible (ici le taux court instantané) à calibrer. Les méthodes historiques pour le calibrage sont des méthodes développées en univers réel (par exemple : estimateur du maximum de vraisemblance, développements limités, méthode des moments, modèle linéaire), alors que la méthode implicite est une méthode issue de la théorie financière, dédiée à l'évaluation des produits dérivés (cf. Chapitre 1).

Les paramètres implicites dépendent du prix des instruments financiers, tandis que les paramètres calibrés sur un historique de données dépendent justement du choix de ces données (indices, volume, source, fréquence, période...).

Par exemple, le mémoire BEUIL (2010) propose un calibrage du modèle de Vasicek sous  $\mathbb{Q}$  sur un historique de données. La méthode utilisée est une méthode statistique : le taux court instantané peut s'écrire sous la forme  $r(t+1) = \beta_1 r(t) + \beta_0 + \epsilon$ . A partir de cette expression, BEUIL (2010) applique une régression linéaire aux taux d'inflation à l'aide de données de régression.

### 2.2.2 Approche retenue

La modélisation en univers historique nécessite de calibrer un quatrième paramètre, le facteur de risque  $\lambda$ . L'article ARMEL et PLANCHET (2020b) suggère une méthode historique détaillée dans le paragraphe ci-dessous.

#### Estimation du facteur de risque à partir de l'excès de rendement historique moyen

ARMEL et PLANCHET (2020b) propose d'estimer le facteur de risque à partir de l'excès de rendement historique moyen que génère l'actif risqué par rapport au taux sans risque.

Pour y parvenir, le calcul de l'espérance de l'excès de rendement à long terme est effectué (cf. expression 2.26). Sur le long terme, quand  $t \gg 0$ , cette valeur ne dépend plus de  $t$ , et seulement du facteur de risque  $\lambda$  et des paramètres du processus CIR ++. L'expression dépend des paramètres  $(k, \theta, \sigma, \lambda)$  car elle est calculée à partir de l'actif risqué  $S$  (en effet il s'agit de son excès de rendement), dont l'expression dépend exactement de ces paramètres (cf. équation 2.25). La démonstration étant entièrement détaillée dans l'annexe de Armel et Planchet (2020b), et non fondamentale pour la suite des travaux, elle n'est pas reprise dans ce document.

$$E^p(e_\infty) = \frac{k\theta}{\sigma^2}(k-h) + \frac{k\theta}{k-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma}\right). \quad (2.26)$$

## 2.2. PRÉSENTATION DE DEUX APPROCHES POSSIBLES POUR LE CALIBRAGE DU GSE53

ARMEL et PLANCHET (2020b) fait le choix de calibrer dans un premier temps les paramètres  $(k, \theta, \sigma)$  via une approche implicite : ces paramètres sont donc déjà connus. En approximant l'espérance mathématique de l'excès de rendement à long terme  $E^p(e_\infty)$  par une valeur numérique calculée à partir d'un historique de rendement, déterminer le facteur du risque  $\lambda$  revient à résoudre une équation polynomiale du second ordre. La solution  $\hat{\lambda}$  peut être complexe (dans le sens où elle n'appartient pas à  $\mathbb{R}$ ), dans cette configuration, ARMEL et PLANCHET (2020b) propose de retenir la solution réelle 2.27.

$$\hat{\lambda} = \underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \left( \left| \frac{k\theta^2}{\sigma} (k - h) + \frac{k\theta}{k - \lambda} \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma^2} \right) - E^p(e_\infty) \right| \right). \quad (2.27)$$

### Calibrage du GSE selon une approche historique sous $\mathbb{P}$

Pour récapituler, le papier de recherche ARMEL et PLANCHET (2020b) comprend le calibrage du GSE historique en utilisant :

- **une approche implicite** pour le calibrage des paramètres  $k, \theta, \sigma$  du modèle de taux CIR ++ sous la probabilité  $\mathbb{Q}$ ,
  - Une fois  $k, \theta$  et  $\sigma$  obtenus, ils peuvent être utilisés dans l'équation 2.27 pour estimer le facteur de risque  $\lambda$ .
- **une approche historique** pour le calibrage du facteur de risque.
  - Une fois  $\lambda$  estimé grâce à l'équation 2.27, la totalité des paramètres du processus CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  sont connus :  $k, \theta, \sigma, \lambda$ . Le processus CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  est ainsi calibré. Une approche implicite a été utilisée pour  $k, \theta$  et  $\sigma$ , et une approche historique a été utilisée pour  $\lambda$ .

L'objectif est maintenant de trouver un moyen de calibrer le GSE entièrement en « historique », c'est-à-dire :

- **une approche historique** pour le calibrage des paramètres  $k, \theta, \sigma$  du modèle de taux CIR ++ sous  $\mathbb{Q}$ ,
  - Une fois  $k, \theta$  et  $\sigma$  obtenus, ils peuvent être utilisés dans l'équation 2.27 pour estimer le facteur de risque  $\lambda$ .
- **une approche historique** pour le calibrage du facteur de risque  $\lambda$ , identique à celle de ARMEL et PLANCHET (2020b).
  - Une fois  $\lambda$  estimé grâce à l'équation 2.27, la totalité des paramètres du processus CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  sont connus :  $k, \theta, \sigma, \lambda$ . Le processus CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  est ainsi calibré. Une approche historique a été utilisée pour  $k, \theta$  et  $\sigma$ , et une approche historique a été utilisée pour  $\lambda$ .

Une méthode historique est déjà proposée par ARMEL et PLANCHET (2020b) pour l'ajustement du facteur de risque. Celle-ci sera retenue dans le présent document. Les travaux sont alors focalisés sur la recherche d'un processus de calibrage historique pour calibrer les paramètres  $k, \theta$ , et  $\sigma$  du processus CIR ++.

Comme aucun processus « conventionnel » n'existe pour calibrer le modèle de taux CIR++ selon une approche historique dans le contexte d'évaluation des *BE* des contrats d'épargne en euros, la

suite du travail consiste en de la recherche. En effet, les qualités très appréciables du CIR++ est qu'il présente des formules fermées des prix des produits dérivés  $Prix^{theoriques}$ , qui facilite grandement le calibrage. Ces modèles sont faits et sont utilisés pour reproduire la situation du marché à un instant  $t$ . Plusieurs références sur le calibrage du CIR++ en univers neutre au risque existent, cependant, la documentation sur le calibrage du processus CIR++ en univers réel sur un historique de plusieurs années est rare voir inexistante : ce n'est pas ce pourquoi le modèle a été construit, ni l'univers dans lequel il est utilisé par les praticiens. De plus, il ne présente pas de bonnes propriétés sous  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  : sa loi de probabilité est « peu pratique », cf. HENON et TURINICI (2020).

L'enjeu est d'abord de trouver des idées de méthodes pour calibrer le CIR++ sous  $\mathbb{P}$ , avec une approche historique. Ensuite les méthodes sont implémentées, afin de les explorer et de les étudier, pour savoir si oui ou non elles sont exploitables, ou du moins dans quelle mesure.

Une autre difficulté qu'il est possible de souligner, est que la chronique du taux court instantané n'est pas une valeur donnée par le marché. Il ne sera donc pas possible de calibrer directement le modèle de taux CIR++ sur un jeu de données de taux courts instantanés observés sur le marché.

### 2.2.3 Données

Ci-dessous sont présentées les données nécessaires à chaque étape des travaux du mémoire.

#### Données pour le calibrage du facteur du risque

Pour calibrer le facteur de risque, un historique de rendements des actions et des investissements en immobilier de 2001 à 2018 a été retenu par ARMEL et PLANCHET (2020b), afin de refléter la situation économique à la date où le calibrage a été effectué, soit 2018.

Ainsi, ARMEL et PLANCHET (2020b) a retenu un historique de rendement  $\{e_i\}$ ,  $i \in 1, \dots, d$ . Cet historique permet d'approximer l'espérance mathématique de l'excès de rendement à long terme par l'excès de rendement moyen :  $\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d e_i^M \approx E^P(e_\infty)$ . De cette façon, l'équation 2.27 peut-être résolue.

L'excès de rendement moyen calculé par ARMEL et PLANCHET (2020b) est de 2,7%. Cette valeur est conservée telle quelle et ne sera pas ré-estimée par la suite.

#### Données pour le calibrage du processus CIR++

Comme mentionné en section 2.2.2, la chronique du taux court instantané n'est pas une valeur observée. En effet, le taux court sans risque  $r(t)$ , est une variable modélisée et théorique, nécessaire à la projection. Mais par exemple, les taux zéro-coupon, eux sont observés. Du moins « presque » observés. Précisément ces derniers sont reconstitués à partir de valeurs observées sur les marchés financiers. Les courbes de taux zéro-coupon font parties des courbes de taux dites « implicites », car construites indirectement à partir des cotations de marché d'instruments comme les obligations et le swaps. Contrairement au courbes de taux dites de « marché », qui sont directement reprises à partir des cotations de marché, comme la courbe de taux swap (cf. THÉRON (2013)).

Aux vues des processus de calibrage proposés en 2.3, les courbes des taux zéro-coupon publiées par la commission « Indices et références de marché de l'institut des actuaires » ont été choisies à titre de données pour le calibrage du processus CIR++. A ce jour, seules les courbes des années 2019 et 2020 sont disponibles sur la page web en question : <https://www.institutdesactuaires.com/>

se-documenter/courbes-et-tables/la-courbe-des-taux-43. Une demande a été adressée à l'adresse suivante [valerie.blanchet@institutdesactuaire.fr](mailto:valerie.blanchet@institutdesactuaire.fr) pour obtenir les courbes antérieures. Ces données sont facilement accessibles, fiables, et ne nécessitent pas de plateforme ou d'outils spécifiques pour les extraire. Dans ce contexte, les courbes de la commission « Indices et références de marché de l'institut des actuaires » ont été retenues.

Comme les données relatives au calibrage du facteur du risque de ARMEL et PLANCHET (2020b) ont été préservées pour la suite des travaux (cf. 2.2.3), des données cohérentes doivent être choisies pour le calibrage du CIR++. Le calibrage de ARMEL et PLANCHET (2020b) a été effectué en 2018. L'historique de rendement utilisé pour l'estimation du facteur de risque  $\lambda$  a une profondeur de 8 ans, de 2011 à 2018. Ainsi, pour rester logique avec la date de calibrage du facteur de risque, la date de calibrage de ARMEL et PLANCHET (2020b) doit être conservée pour l'ensemble des processus à calibrer. L'historique des courbes de taux zéro-coupons de 2011 à 2018 de l'institut des actuaires sera retenu pour l'estimation des paramètres  $k$ ,  $\theta$  et  $\sigma$ .

Pour chaque année de 2011 à 2018, une courbe est publiée par mois. Cela fait un historique de 95 courbes de taux sur 95 dates différentes (la courbe du 31/12/2018 est manquante :  $8 \times 12 - 1 = 95$ ).

Les courbes se présentent sous forme de fichier excel contenant chacun une feuille. Les feuilles se présentent comme dans la figure de l'Annexe A. Les courbes de taux de l'institut des actuaires proposent des taux sur une période de 100 ans.

Sur les 50 premières années, la courbe comprend un taux zéro-coupon par mois. Cela fait  $50 \times 12 = 600$  maturités mensuelles. Sur les 50 années suivantes, la courbe comprend 1 taux zéro-coupon par an à fin juillet (31/07/2011).

Les fichiers contiennent donc chacun des taux pour 650 maturités, dont 600 à un pas mensuel, et 50 à un pas annuel.

L'ensemble du processus de construction des courbes est précisément décrit dans la note méthodologique disponible sur le site de l'institut des actuaires [https://www.institutdesactuaire.com/global/gene/link.php?doc\\_id=141&fg=1](https://www.institutdesactuaire.com/global/gene/link.php?doc_id=141&fg=1), selon les règles suivantes :

- « L'échantillon qui permet le calcul est constitué de bons du Trésor, d'emprunts d'états et d'OAT, d'un montant en circulation supérieur à 8 milliards d'euros. »
- « Les cours retenus dans le calcul sont des cours de clôture officiels du dernier jour de bourse du trimestre. Il y a ainsi cohérence avec l'évaluation des actifs du bilan. »

## 2.3 Idées de processus de calibrage du GSE selon l'approche historique

Maintenant que les paramètres à estimer sont identifiés, et que les données sont présentées, des idées de méthodes de calibrage peuvent être étudiées (cf. figure 2.2). Pour calibrer le processus CIR ++, il faut trouver de l'information à son propos. C'est-à-dire trouver des expressions liées à ce modèle et qui dépendent de ses paramètres, et mettre ces expressions face aux données adéquates.

Le processus CIR ++ suit une loi de probabilité connue. A partir d'une loi de probabilité, la densité de probabilité de la variable aléatoire peut s'écrire, la vraisemblance aussi, et pourquoi pas les moments. La vraisemblance intervient dans la méthode de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

En déterminant une façon d'extraire le taux court instantané afin de construire un  $n$ -échantillon, cette méthode est éventuellement une piste de processus de calibrage pour le GSE.

Il existe également de l'information dans les formules fermées liées au processus CIR ++, notamment celle du prix d'un zéro-coupon. Les prix des zéro-coupon et les taux zéro-coupon sont des données accessibles. A partir de la loi du taux zéro-coupon, une estimation par maximum de vraisemblance sur les taux zéro-coupon peut aussi être envisagée.

Cette section formule une façon d'extraire le taux court instantané, et deux possibilités pour estimer les paramètres du processus CIR ++.

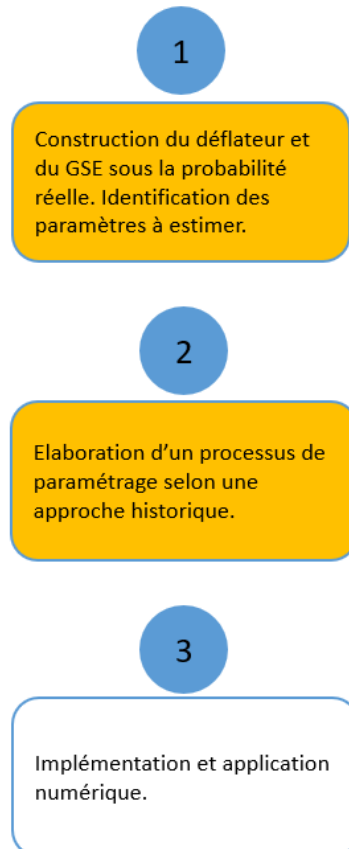


FIGURE 2.2: Chronologie des travaux effectués.

### 2.3.1 Extraction d'un historique du taux court instantané pour la méthode 1

Le modèle de Nelson Siegel est un modèle paramétrique. Une fois ajustée, celui-ci donne la possibilité de retrouver le taux court instantané. Le modèle et la manière de récupérer le taux sont expliqués ci-dessous, en s'appuyant sur PLANCHET (2020-2021) et THÉRON (2013).

#### Le taux court instantané est par essence non observé

Dans le paragraphe 2.2.2, la difficulté suivante a été relevée : le taux court instantané n'est pas une variable observée. En effet, il s'agit d'un taux en temps continu, il est par essence inobservable :



théoriquement, c'est le taux à chaque instant. Or c'est la variable cible dont les paramètres doivent être ajustés. Dans ce contexte, deux possibilités sont envisageables :

- trouver un moyen d'extraire ou d'approximer les taux courts instantanés via un modèle, pour construire un **n-échantillon d'observations du taux court instantané** à injecter dans la vraisemblance ;
- comme le taux court instantané est inobservable, il est approché par un n-échantillon de valeurs observables, proche du taux court instantané en définition. Par exemple, **un n-échantillon de taux forward ou un n-échantillon de taux zéro-coupon** sont directement injectés dans la vraisemblance du taux court instantané.

Les deux options se discutent.

La première maintient que si des taux courts instantanés sont modélisés, et qu'il s'agit de modèles dont les paramètres à estimer sont ceux du taux court instantané, alors il faut déterminer un historique de données qui correspond précisément à un historique du taux court instantané. Utiliser dans le modèle des données qui correspondent à une autre variable, certes observable, induirait de fait un biais, et rendrait l'interprétation du modèle moins évidente.

La seconde soutient que les approximations via un modèle peuvent induire de fait aussi un biais de la performance du modèle utilisé pour l'approximation. Alors que les variables observées comme le taux zéro-coupon ou les taux forwards sont des valeurs qui par définition sont proches du taux court instantané, et sont des variables brutes et impartiales.

Comme il existe des modèles permettant d'extraire le taux court instantané, la première option a été retenue, afin de ne pas compliquer l'interprétation des paramètres estimés.

### Construction de la courbe de taux zéro-coupon avec le modèle de Nelson et Siegel

Le modèle de Nelson Siegel est une des différentes techniques qui permet de construire une courbe des taux à partir des données de marché. THÉRON (2013) définit une courbe de taux comme suit : « La structure par terme des taux d'intérêt (ou courbe des taux) est la fonction qui, à une date donnée, associe pour chaque maturité le niveau de taux d'intérêt associé. » Ci-dessous, la date  $t$  est fixée, et chaque niveau de maturité est noté  $\tau$ .

Nelson et Siegel, ont imaginé une fonctionnelle à trois facteurs de formes  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ , et un facteur d'échelle  $\tau_1$ , permettant de modéliser différentes courbes de taux zéro-coupon. Nelson et Siegel supposent qu'à la date d'observation  $t$ , le taux forward à terme instantané s'écrit comme dans l'équation 2.28.

$$f_t(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \beta_2 \frac{\tau}{\tau_1} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right). \quad (2.28)$$

Et comme le taux zéro-coupon s'exprime en fonction du taux forward à terme instantané, le modèle de Nelson Siegel revient à décrire les taux zéro-coupon selon l'expression 2.29.

$$R_t(\tau) = \int_0^\tau f_t(s) ds,$$

$$R_t(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} + \beta_2 \left( \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \right). \quad (2.29)$$

Le vecteur paramètre est noté  $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)$ . Les paramètres sont estimés en minimisant l'écart quadratique entre les taux zéro-coupon donnés par le modèle ci dessus et les taux observés sur le marché à la date  $t$ .

### Déduction du taux court instantané grâce au modèle de Nelson et Siegel

L'étude des limites de  $f_t(\tau)$  permet de mieux interpréter les paramètres (cf. NDIAYE et al. (2014)). En effet :

- $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) = \beta_0$ ,  $\beta_0$  peut alors s'interpréter comme le taux long ;
- $\lim_{\tau \rightarrow 0} f(\tau) = \beta_0 + \beta_1$  correspond à la valeur initiale de la courbe des taux forward. Ecrite autrement :  $\beta_0 + \beta_1 = \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = r_0$ , où  $r_0$  est le taux court instantané à l'instant initial.

Enfin :

- $\beta_2$  est un facteur de courbure ;
- et  $\tau_1$  est un paramètre d'échelle.

Une autre formulation de l'équation 2.29 peut être adoptée en notant :  $\varphi(x) = \frac{1 - \exp(-x)}{x}$  et  $\psi(x) = \varphi(x) - \exp(-x)$ . Sous la forme de l'équation 2.30,  $r_0(t)$ ,  $l(t)$  et  $c(t)$  représentent respectivement le taux court instantané, le taux long, et la convexité à la date  $t$ ,  $t$  fixé.

$$R_t(\tau) = r_0(t) \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + l(t) \left(1 - \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right) + c(t) \psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right). \quad (2.30)$$

Cette formulation fait directement apparaître le taux court. Et par identification (cf. système 2.31), l'interprétation des paramètres est bien retrouvée.

$$\begin{aligned} l(t) &= \beta_0, \\ r_0(t) - l(t) &= \beta_1, \\ c(t) &= \beta_2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Finalement, pour la courbe de taux zéro-coupon observée à la date  $t$ , Nelson Siegel permet d'estimer  $\hat{\beta}$  pour une courbe de taux observée à la date  $t$ , et d'en déduire le taux court instantané à la date  $t$ .

### 2.3.2 Méthode 1 : EMV sur les taux courts instantanés

Les paragraphes suivants avancent deux schémas de calibrage, qui reposent sur l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV). La première méthode est l'EMV sur la loi du taux court instantané CIR ++, à partir d'un n-échantillon du taux court instantané extrait grâce au modèle de Nelson Siegel. La deuxième méthode est l'EMV sur la loi du taux zéro-coupon du CIR ++, à partir d'un n-échantillon de taux zéro-coupon de même maturité.

#### Loi du processus CIR

Le processus CIR, (cf. paragraphe 2.1.3), noté  $x$ , dispose d'une densité conditionnelle  $x(t)/x(s)$ . Il s'agit de la densité de probabilité d'une loi du Khi-deux non centrée à  $v$  degrés de liberté, et de paramètre de décentralisation  $\gamma$ . La densité conditionnelle du CIR  $x(t)/x(s)$  est décrite dans l'équation 2.32 et le tableau 2.3. Ces propriétés ont été trouvées dans l'Annexe ARMEL et PLANCHET (2020a).

$$f_{x(t)|x(s)}(x) = c \times p_{\chi^2(v,\gamma)}(cx) = p_{\chi^2(v,\gamma)/c}(x) \tag{2.32}$$

Fonction / Paramètre	Expression
$c$	$\frac{4k}{\sigma^2(1-\exp(-k(t-s)))}$
$v$	$\frac{4k\theta}{\sigma^2}$
$\gamma$	$c \times x(s) \times \exp(-k(t-s))$

TABLE 2.3: Notations relatives à la densité du processus CIR.

La densité de probabilité d'une Khi-deux décentrée (cf. équation 2.33) fait intervenir **une somme infinie** de densités de loi Gamma pondérées par des probabilités de la loi de Poisson. La loi Gamma en question est aussi une loi du Khi-deux, mais centrée avec  $v + 2i$  degrés de liberté. La densité d'une Khi-deux décentrée n'est pas sous une forme **fermée**. Il est à noter, que la somme infinie est un élément qui peut en effet, numériquement, largement complexifier l'expression et l'utilisation de la densité de  $x(t)/x(s)$ .

$$p_{\chi^2(v,\gamma)}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}} (\frac{\gamma}{2})^i}{i!} P_{\gamma(i+v/2,1/2)}(z). \tag{2.33}$$

$$P_{\Gamma(i+\frac{v}{2},\frac{1}{2})}(z) = \frac{(\frac{1}{2})^{i+\frac{v}{2}}}{\Gamma(i+\frac{v}{2})} \times z^{i-1+\frac{v}{2}} \times e^{-\frac{z}{2}} = p_{\chi^2(v+2i)}(z). \tag{2.34}$$

#### Détermination de la loi du CIR++

A partir de la loi du processus CIR  $x(t)/x(s)$ , en prenant  $s = 0$  et  $x(0)$  fixé, la loi du processus CIR ++,  $r(t) = x(t) + \varphi(t)$  peut être déterminée. Comme  $\varphi(t)$  est déterministe, la loi de  $r(t)/x(0)$

est déduite en faisant un changement de variable. Soit  $g$  une fonction mesurable, le changement de variable est détaillé dans l'équation 2.35.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(x + \varphi) \mid x(0)] &= \int_0^{+\infty} g(x + \varphi) \times c \times p_{\chi^2(v,\gamma)}(c \times x) dx \\ &= \int_{\varphi}^{+\infty} g(y) \times c \times p_{\chi^2(v,\gamma)}(c \times (y - \varphi)) dy.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Après changement de variable, et avec les mêmes notations que pour la densité du processus CIR (cf. équation 2.32), la densité du processus CIR++ est donnée par l'équation 2.36 et le tableau 2.4.

$$f_{r(t)|x(0)}(y) = c \times p_{\chi^2(v,\gamma)}(c(y - \varphi(t))) 1_{y \geq \varphi(t)}.\tag{2.36}$$

Fonction / Paramètre	Expression
$c$	$\frac{4k}{\sigma^2(1 - \exp(-kt))}$
$v$	$\frac{4k\theta}{\sigma^2}$
$\gamma$	$c \times x(0) \times \exp(-kt)$

TABLE 2.4: Notations relatives à la densité du processus CIR ++.

### Estimation des paramètres

Grâce à la densité de  $r(t)/x(0)$ , et à l'historique du taux court  $r(t)$ , la méthode d'estimation des paramètres par maximum de vraisemblance est envisageable. En notant l'historique du taux court instantané  $(r_1, \dots, r_n)$ , et en considérant qu'ils sont indépendants et identiquement distribués la vraisemblance s'écrit comme en équation 2.37.

$$L(k, \theta, \sigma) = \prod_{i=1}^n c \times p_{\chi^2(v,\gamma)}(c(r_i - \varphi(t))) 1_{r_i \geq \varphi(t)}.\tag{2.37}$$

### 2.3.3 Méthode 2 : EMV sur le taux zéro-coupon

Le CIR ++ admet une formule fermée du prix zéro-coupon sous  $\mathbb{P}$  (la démonstration se trouve dans l'annexe de ARMEL et PLANCHET (2020b)). Celle-ci dépend des paramètres du processus. Elle peut être utilisée pour les estimer. Cette méthode a l'avantage de ne pas poser la problématique de l'extraction du taux court instantané, puisque le calibrage se fait directement sur les taux zéro-coupons, qui sont accessibles (cf. paragraphe 2.3.1).

**Expression du prix zéro-coupon avec le processus CIR++**

Le prix zéro-coupon évalué à la date  $t$  et d'échéance  $T$  du processus CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  s'écrit  $P^{TH}(t, T) = \bar{A}(t, T)e^{-B(t, T)x(t)}$  et ne dépend ni de  $\lambda$  ni  $\varphi$ .  $x$  décrit le processus CIR. Les modèles de taux qui présentent une écriture de la forme précédente de l'obligation zéro-coupon sont dits « affines ». L'annexe technique ARMEL et PLANCHET (2020a) fournit une définition et une présentation détaillée des modèles de taux par structure par termes affines.

$P^M(0, T)$  est le prix observé en 0 de l'obligation zéro-coupon de maturité  $T$ . Les notations sont précisées dans le tableau 2.5.

Fonction / Paramètre	Expression
$\bar{A}(t, T)$	$\frac{P^M(0, T)A(0, t) \exp\{-B(0, t)x_0\}}{P^M(0, t)A(0, T) \exp\{-B(0, T)x_0\}} A(t, T)$
$A(t, T)$	$\left[ \frac{2 \operatorname{hexp}\left\{\frac{(k+h)(T-t)}{2}\right\}}{2h+(k+h)(\exp\{(T-t)h\}-1)} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}}$
$B(t, T)$	$\frac{2(\exp\{(T-t)h\}-1)}{2h+(k+h)(\exp\{(T-t)h\}-1)}$
$h$	$\sqrt{(k^2 + 2\sigma^2)}$

TABLE 2.5: Définitions et notations.

**Déduction du taux zéro-coupon**

La relation entre le prix d'une obligation zéro-coupon  $P(t, T)$  et le taux d'une obligation zéro-coupon  $R(t, T)$ , à l'instant  $t$  pour l'échéance  $T$  est établie comme :  $P(t, T) = \exp(-(T-t)R(t, T))$ , qui s'écrit aussi  $P(\tau) = \exp(-\tau R(\tau))$ , avec  $\tau = T - t$  la maturité. Ainsi, il est facile d'en déduire l'expression du taux zéro-coupon (cf. équation 2.38), avec les notations ci-dessus.

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left( \ln \left( \frac{P^M(0, t)A(0, T) \exp\{-B(0, T)x_0\}}{A(t, T)P^M(0, T)A(0, t) \exp\{-B(0, t)x_0\}} \right) + B(t, T)x(t) \right). \tag{2.38}$$

**Estimation des paramètres**

Reprenons l'équation 2.38. Elle se réécrit comme l'équation 2.39.

$$R(t, T) - \frac{1}{T-t} \ln \left( \frac{P^M(0, t)}{P^M(0, T)} \right) = \frac{1}{T-t} \ln \left( \frac{A(0, T) \exp\{-B(0, T)x_0\}}{A(t, T)A(0, t) \exp\{-B(0, t)x_0\}} \right) + \frac{1}{T-t} B(t, T)x(t). \tag{2.39}$$

En utilisant l'expression du prix du zéro-coupon en fonction du taux zéro-coupon  $P(t, T) = \exp(-(T-t)R(t, T))$ , et en posant :

$$a = \frac{1}{T-t} B(t, T),$$

$$\text{et } b = \frac{1}{T-t} \ln \left( \frac{A(0, T) \exp\{-B(0, T)x_0\}}{A(t, T)A(0, t) \exp\{-B(0, t)x_0\}} \right),$$

l'équation 2.40 est obtenue.

$$R(t, T) - \frac{TR(0, T) - tR(0, t)}{T-t} = a \times x(t) + b. \quad (2.40)$$

La loi de  $x(t)/x(0)$  est connue, il s'agit d'une Khi-deux non centrée (cf. paragraphe 2.3.2). Ainsi la loi de la variable aléatoire définie en 2.40, notée à l'avenir  $R/x(0)$ , peut-être déterminée.

Considérons une fonction  $g$  mesurable, le changement de variable pour trouver la loi de  $R/x(0)$  est détaillé en 2.41.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(ax+b) \mid x(0)] &= \int_0^{+\infty} g(ax+b) \times c \times p_{\chi^2(v, \gamma)}(c \times x) dx \\ &= \int_b^{+\infty} g(y) \times \frac{c}{a} \times p_{\chi^2(v, \gamma)}\left(c \times \frac{y-b}{a}\right) dy. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ainsi la densité de  $R/x(0)$  est donnée par 2.42.

$$f_{R/x(0)} = \frac{c}{a} \times p_{\chi^2(v, \gamma)}\left(c \times \frac{y-b}{a}\right) 1_{y \geq b}. \quad (2.42)$$

Par conséquent, en construisant un n-échantillon  $(R_1, \dots, R_n)$  de  $\frac{(R/x(0))-b}{a}$ , la méthode de l'EMV peut-être appliquée, en supposant que les  $R_i$  sont indépendants et identiquement distribués. Il s'agit de maximiser l'expression :

$$L(k, \theta, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{c}{a} \times p_{\chi^2(v, \gamma)}\left(c \times \frac{R_i - b}{a}\right) 1_{R_i \geq b}. \quad (2.43)$$

# Chapitre 3

## Mise en pratique

Le chapitre 3 est consacré à l'implémentation des processus de paramétrage proposés au chapitre 2 et à leurs applications numériques (cf. schéma 3.1).

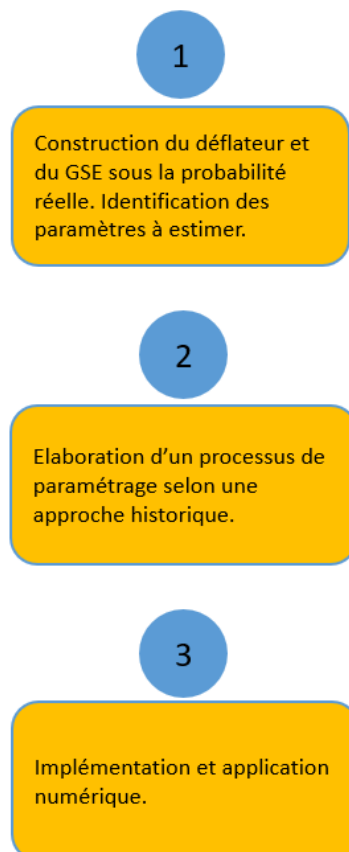


FIGURE 3.1: Chronologie des travaux effectués.

### 3.1 Construction de l'historique du taux court avec Nelson et Siegel

Cette section met en oeuvre le modèle de Nelson et Siegel qui a été exposé théoriquement à la section 2.3.1 du Chapitre 2. L'objectif étant de reconstituer un historique du taux court instantané nécessaire à la mise en place des méthodes statistiques pour l'estimation des paramètres du GSE.

#### 3.1.1 Réorganisation des données et mise en forme

Les données choisies pour le calibrage du CIR ++ (cf. 2.2.3) ne peuvent pas être utilisées telles quelles. Avant de les exploiter, elles doivent être réorganisées sous une forme adaptée.

##### Fichiers initiaux

Les fichiers initiaux sont présentés dans le paragraphe 2.2.3. 95 fichiers sont à disposition pour le calibrage du processus CIR++. Pour faciliter l'implémentation, ces 95 fichiers vont être assemblés en un seul. Schématiquement, un fichier de courbes de taux zéro-coupon se présente selon la figure 3.2.

	<b>Courbe de taux zéro coupon au 31/01/2011.</b>
28/02/2011	Taux dans 1 mois.
31/03/2011	Taux dans 2 mois.
...	...
31/01/2111	Taux dans 100 ans.

FIGURE 3.2: Schématisation du fichier de la courbe de taux zéro-coupon du 31/01/2011.

Chaque courbe de taux va être transposée de manière à transcrire la courbe en « en lignes » et non plus en colonnes, comme sur la figure 3.3. La première colonne du tableau permet de savoir quand est-ce que la courbe a été constituée (autrement dit elle donne la date  $t$  pour chaque courbe, cf. paragraphe 2.3.1), et la première ligne permet de lire la maturité du taux (autrement dit  $\tau$ , cf. section 2.3.1).

	28/02/2011	31/03/2011	...	31/01/2111
<b>Courbe de taux zéro coupon au 31/01/2011.</b>	Taux dans 1 mois.	Taux dans 2 mois.	...	Taux dans 100 ans.

FIGURE 3.3: Transposition de la courbe de taux zéro-coupon du 31/01/2011.

Quand la date d'évaluation de la courbe est connue (première colonne), il n'est pas nécessaire de ré-indiquer des dates sur la première ligne, les maturités suffisent. Par exemple (1, 2, ..., 1200) au lieu de (28/02/2011, 31/03/2011, ..., 31/01/2111) (cf. figure 3.3), si la maturité est exprimée en mois. C'est la notation qui sera adoptée dans la suite car elle est plus adaptée pour l'implémentation de la méthode de Nelson et Siegel.



### Concaténation des fichiers

Une fois que l'ensemble des 95 courbes de taux a été transposé, les courbes sont concaténées de manière à les regrouper en un seul et même fichier formant une matrice. Ce qui facilite la manipulation et l'importation dans le logiciel R CORE TEAM (2021). Cette matrice est représentée schématiquement sur la figure 3.4.

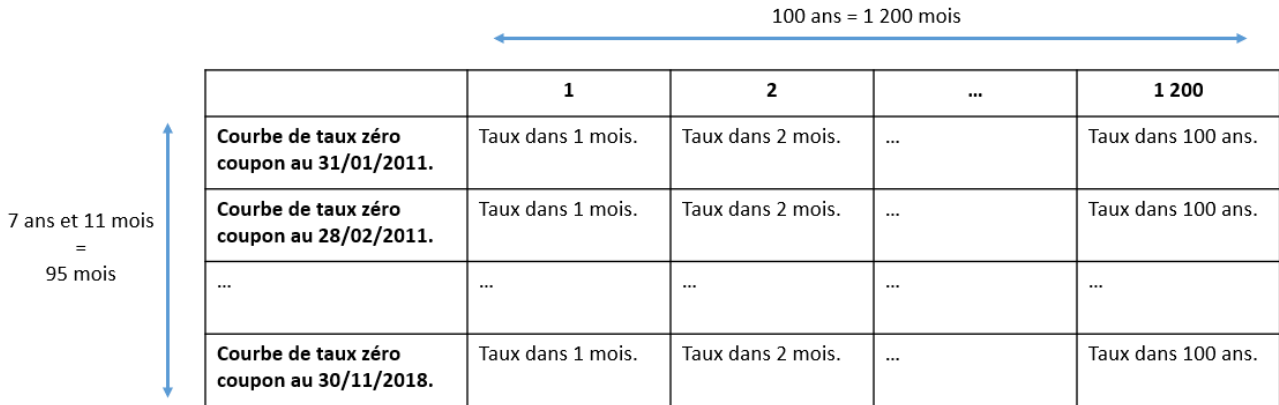


FIGURE 3.4: Fichier final : concaténation de l'ensemble des 95 courbes de taux zéro-coupon.

De cette façon, la matrice est parfaitement adaptée à la mise en place du modèle de Nelson et Siegel : pour une courbe à la date  $t$ , Nelson Siegel permet d'extraire le taux court instantané à l'instant  $t$ . Ainsi, une courbe de 95 valeurs du taux court en fonction du temps peut être construite (cf. figure 3.5).

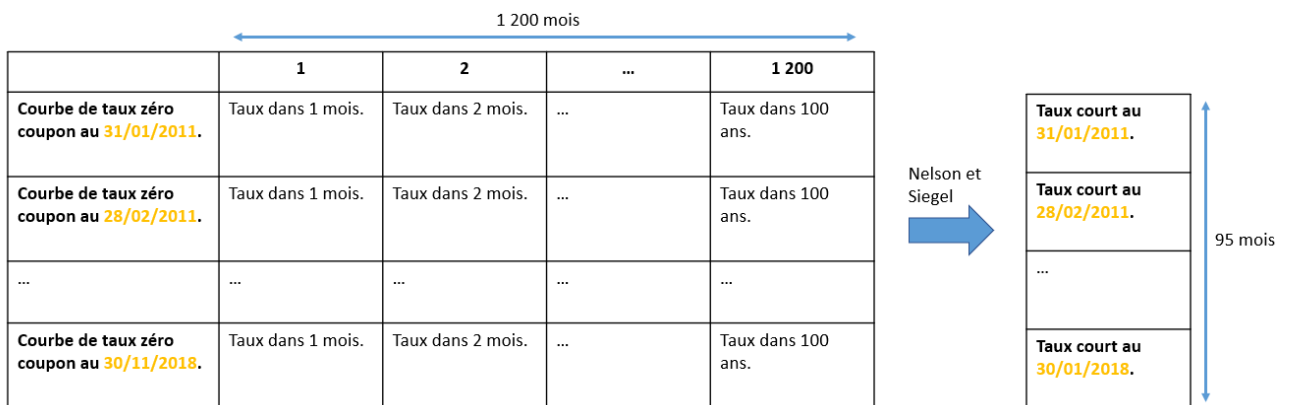


FIGURE 3.5: Format matriciel adapté à l'implémentation du modèle de Nelson et Siegel.

### Données sauvegardées

Notons que la totalité des maturités de la courbe n'est pas nécessaire pour estimer le taux court avec l'approche de Nelson-Siegel. Il peut paraître même assez illogique d'utiliser des taux zéro-coupons projetés sur des maturités aussi grande que 100 ans, alors que le modèle de taux modélisé est utilisé pour la projection de contrats d'épargne en euros.

Au bout de 30 années, il est fortement probable que l'ensemble des assurés soient sortis du porte-

feuille actuel : soit parce qu'ils sont décédés, soit parce qu'ils ont changé d'assureur, de contrats, mais surtout parce qu'ils auront déjà racheté leur épargne. D'après la FFA, la durée moyenne d'un contrat d'épargne en France est d'un peu plus de 11 ans. Conserver les maturités des courbes de 1 mois à 360 mois = 30 ans semble être un juste compromis entre la cohérence de la projection, et un nombre suffisant de données (cf. figure 3.6).

	1	2	...	360
<b>Courbe de taux zéro coupon au 31/01/2011.</b>	Taux dans 1 mois.	Taux dans 2 mois.	...	Taux dans 30 ans.
<b>Courbe de taux zéro coupon au 28/02/2011.</b>	Taux dans 1 mois.	Taux dans 2 mois.	...	Taux dans 30 ans.
...	...	...	...	...
<b>Courbe de taux zéro coupon au 30/11/2018.</b>	Taux dans 1 mois.	Taux dans 2 mois.	...	Taux dans 30 ans.

FIGURE 3.6: Matrice de données finale.

### 3.1.2 Implémentation avec le package Yield Curve

Une fois que les données sont prêtes, le modèle de Nelson Siegel peut-être implémenté.

#### Arguments/*Inputs*

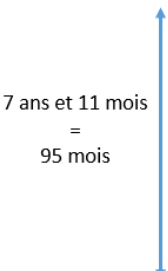
Le package « YieldCurve » (cf. GUIRRETI (2013)) de R CORE TEAM (2021) est un package qui calcule les coefficients  $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)$  de Nelson Siegel pour chaque courbe de taux en entrée, grâce à la fonction *Nelson.Siegel*.

La fonction *Nelson.Siegel* a deux arguments.

- Elle prend en entrée une matrice de taux, comme celle présentée dans la figure 3.6. Pour être comprise par la fonction, la matrice a besoin d'être convertie au format « xts » (cf. RYAN et ULRICH (2020) de R CORE TEAM (2021)) : la première colonne doit être une chronologie de dates.
- Le package nécessite que les maturités soient exprimées en mois. Le deuxième argument est le vecteur des maturités, qui est ici :  $(1, 2, 3, \dots, 360)$ .

#### Valeurs

La fonction *Nelson.Siegel* renvoie pour chaque ligne de la matrice 3.6 les coefficients  $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)$ . Finalement *Nelson.Siegel* retourne la matrice 3.7 complétée (cf. Annexe C.1 pour les valeurs des coefficients estimés).



	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\tau_1$
<b>Courbe de taux zéro coupon au 31/01/2011.</b>	...	...	...	...
<b>Courbe de taux zéro coupon au 28/02/2011.</b>	...	...	...	...
...	...	...	...	...
<b>Courbe de taux zéro coupon au 30/11/2018.</b>	...	...	...	...

FIGURE 3.7: Matrice des coefficients retournés par la fonction *Nelson.Siegel*.

### Estimation

Considérons les coefficients  $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)$  de la ligne « Courbe de taux zéro-coupon au 31/01/2011 » de la figure 3.7. Soit  $\tau$  appartenant  $1, \dots, 360$ , alors les valeurs des fonctions 3.1 peuvent être calculées pour tout  $\tau$ .

$$\begin{aligned}
 f_t(\tau) &= \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \beta_2 \frac{\tau}{\tau_1} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right), \\
 R_t(\tau) &= \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} + \beta_2 \left( \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \right).
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Elles correspondent respectivement au taux *forward* instantané estimé et au taux zéro-coupon estimé par le modèle de Nelson Siegel pour la maturité  $\tau$  au 31/01/2011. Calculées pour toutes les maturités  $1, \dots, 360$ , il en découle la courbe de taux *forward* instantané et la courbe de taux zéro-coupon estimées par le modèle de Nelson Siegel au 31/01/2011.

En répétant le processus pour toutes les « Courbes de taux zéro-coupon au ... » de la matrice 3.6, il en découle la courbe de taux *forward* instantané et la courbe de taux zéro-coupon estimées par le modèle de Nelson Siegel pour l'ensemble de l'historique des courbes observées (cf. figure de l'Annexe C.2 pour l'illustration des taux extraits).

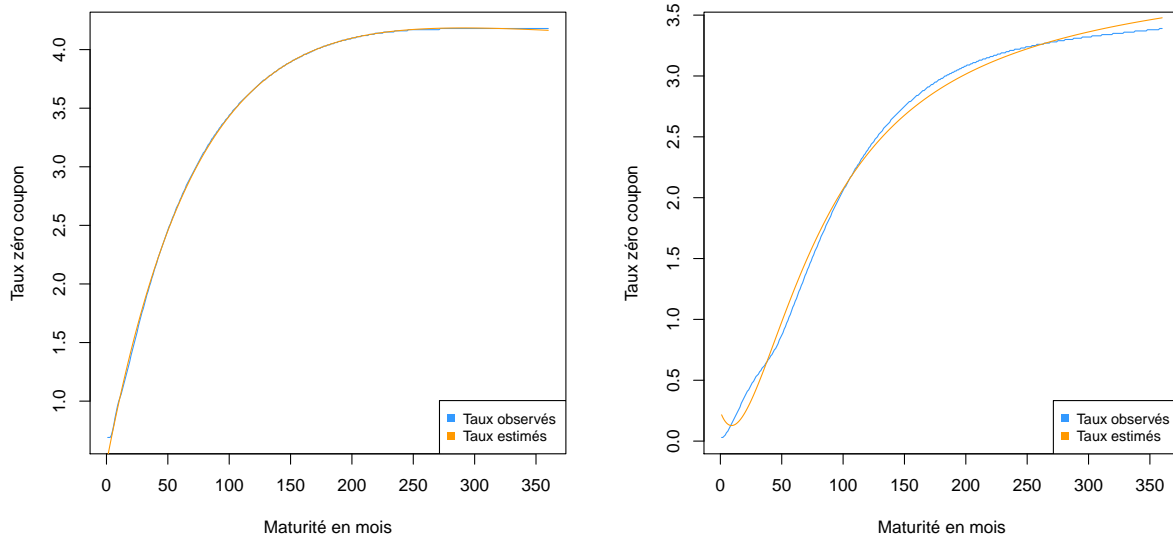
### 3.1.3 Résultats

Pour s'assurer de la fidélité de la reproduction de la courbe des taux zéro-coupons par le modèle de Nelson Siegel, les courbes de taux observées et les courbes de taux estimées sont confrontées. Cela permet de valider les résultats.

#### Qualité de la modélisation : taux observés VS taux estimés

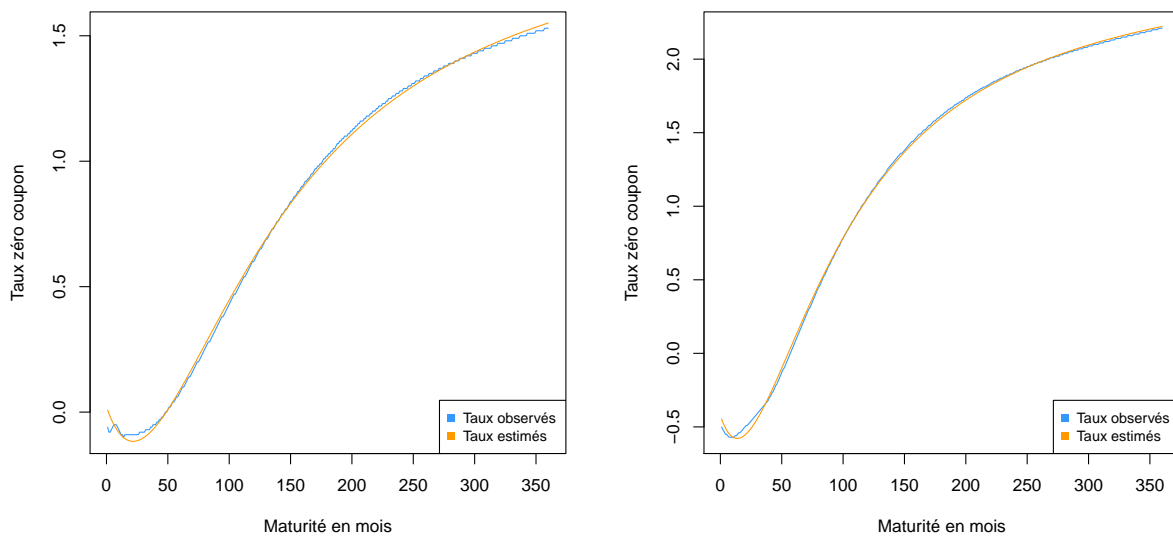
L'historique de données retenu est composé de 95 courbes de taux. Il y a alors, 95 courbes de taux zéro-coupon observées et par conséquent, 95 courbes de taux zéro-coupon estimées. Les 95 graphiques des courbes estimées versus des courbes observées ne vont pas être présentées. Les résultats ont été

vérifiées et s'avèrent très satisfaisants. Un échantillon de quatre figures (cf. figures 3.8a, 3.8b, 3.9a, et 3.9b) est présenté pour les illustrer. Les figures 3.8a, 3.8b, 3.9a, et 3.9b montrent que les taux zéro-coupons du modèle reproduisent très bien les observations.



(a) Courbe de taux zéro-coupon estimée VS Courbe de taux zéro-coupon observée au 31/01/2011. (b) Courbe de taux zéro-coupon estimée VS Courbe de taux zéro-coupon observée au 31/01/2013.

FIGURE 3.8: Taux observés VS Taux estimés avec le modèle de Nelson Siegel.



(a) Courbe de taux zéro-coupon estimée VS Courbe de taux zéro-coupon observée au 31/01/2015. (b) Courbe de taux zéro-coupon estimée VS Courbe de taux zéro-coupon observée au 31/01/2017.

FIGURE 3.9: Taux observés VS Taux estimés avec le modèle de Nelson Siegel.

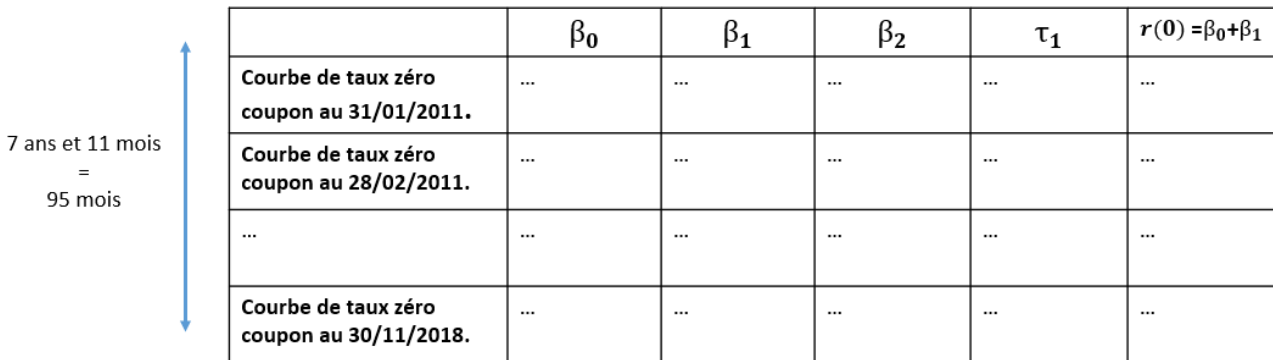
**Extraction du taux court instantané par la somme des coefficients**

D'après la section 2.3.1, le modèle de Nelson Siegel donne la possibilité de retrouver le taux court instantané.

Lorsque la maturité tend vers 0, la limite du taux forward  $f(\tau)$  exprimée selon Nelson Siegel (cf. équations 3.1) vaut  $\beta_0 + \beta_1$ . Mathématiquement :  $\lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = \beta_0 + \beta_1$ . Par définition,  $r(t) = f(t, t)$ . Ce qui implique que  $\lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = r(0)$ . Donc  $f(0, 0) = \beta_0 + \beta_1$  et  $r(0) = \beta_0 + \beta_1$ . Où  $r(0)$  est le taux court instantané à l'instant initial de la courbe.

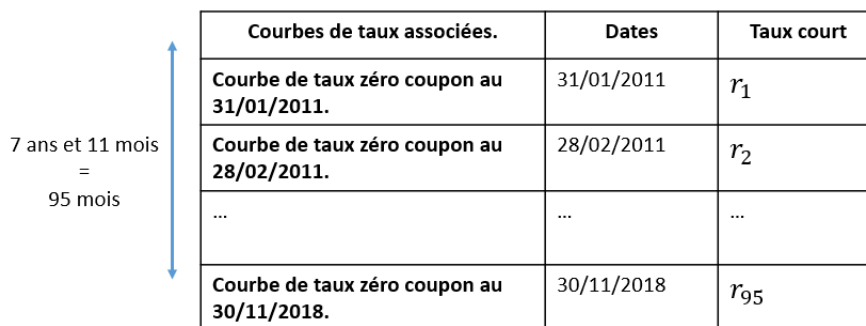
Par exemple : à nouveau, considérons les coefficients  $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)$  de la ligne « Courbe de taux zéro-coupon au 31/01/2011 » de la figure 3.7. L'instant initial est le 31/01/2011.

Nelson Siegel reconstitue donc un historique du taux court du 31/01/2011 au 30/11/2018 à pas mensuel, soit un historique de 95 taux. Les résultats finaux peuvent s'illustrer comme la matrice de la figure 3.10 complétée. Ils sont disponibles dans l'Annexe C.2. L'historique du taux court sera noté  $(r_1, r_2, \dots, r_{95})$ , comme récapitulé dans la figure 3.11.



	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\tau_1$	$r(0) = \beta_0 + \beta_1$
<b>Courbe de taux zéro coupon au 31/01/2011.</b>	...	...	...	...	...
<b>Courbe de taux zéro coupon au 28/02/2011.</b>	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
<b>Courbe de taux zéro coupon au 30/11/2018.</b>	...	...	...	...	...

FIGURE 3.10: Matrice des coefficients retournés par la fonction *Nelson.Siegel* et du taux court instantané extrait.



Courbes de taux associées.	Dates	Taux court
<b>Courbe de taux zéro coupon au 31/01/2011.</b>	31/01/2011	$r_1$
<b>Courbe de taux zéro coupon au 28/02/2011.</b>	28/02/2011	$r_2$
...	...	...
<b>Courbe de taux zéro coupon au 30/11/2018.</b>	30/11/2018	$r_{95}$

FIGURE 3.11: Récapitulatif de l'historique du taux court construit.

**Analyse**

En général, le modèle de Nelson Siegel est utilisé pour interpoler une courbe de taux dont certaines valeurs sont manquantes. Par exemple lorsque la courbe de taux zéro-coupon ne présente pas des taux

à toutes les maturités. Dans cette situation, le modèle de Nelson Siegel permet de « compléter » la courbe (cf. MONFERRINI (2018)). Le modèle de Nelson Siegel est un modèle qui permet de bien reproduire les courbes de marché ascendantes, descendantes, et plates, comme c'est le cas dans les figures (cf. 3.8a, 3.8b, 3.9a, et 3.9b). Mais il ne permet pas de reproduire des courbes de marché plus complexes qui présentent des « bosses » et des « creux » (cf. NDIAYE et al. (2014)). Dans ce cas, il existe une extension, le modèle de Svensson, qui repose sur les mêmes principes que Nelson Siegel, mais avec l'ajout de deux paramètres supplémentaires à estimer.

Ici, le modèle de Nelson Siegel n'a pas été utilisé à des fins d'interpolation : ce n'est pas la problématique, puisque les courbes de taux zéro-coupon à disposition sont bien complètes. Le modèle de Nelson Siegel a été mis en place parce qu'il offre la possibilité de déterminer le taux court instantané. C'est donc une technique pour déterminer un historique du taux court instantané. Comme les courbes de taux zéro-coupon observées sont complètes (pas de valeurs manquantes) et ascendantes, il était attendu que les courbes construites avec les paramètres estimés répliquent bien les courbes observées. Plus les courbes utilisées ont des valeurs manquantes, plus il y a de points à interpoler et plus le modèle est mis à l'épreuve. Ici, des courbes zéro-coupons exhaustives sont à disposition, d'où la performance du modèle.

## 3.2 Mise en pratique de la méthode 1

Dans cette partie, la première idée de processus de calibrage pour le CIR ++ en univers historique est mise en place. Elle fait référence à la partie théorique du paragraphe 2.3.2 du Chapitre 2.

Aucune référence n'a été trouvée quant au calibrage du CIR ++ selon une approche historique, ce qui ne facilite pas sa mise en oeuvre. La méthode expliquée ci-dessous est un premier essai bâti sans connaître en amont les failles qui se révéleront pendant et après l'implémentation. Il s'agit donc d'une exploration, d'un premier « test ».

### 3.2.1 Modélisation

Certains points quant à la modélisation de la vraisemblance nécessitent d'être clarifiés avant de pouvoir l'implémenter. Ils sont détaillés ci-dessous.

#### Prise en compte de $\varphi$

Pour mettre en place la méthode du maximum de vraisemblance sur le CIR ++, il est nécessaire de disposer d'un n-échantillon du taux court instantané indépendant et identiquement distribué, et d'une loi de probabilité sur celui-ci à partir de laquelle la vraisemblance est écrite.

Le n-échantillon a été construit dans la partie 3.1 grâce au modèle de Nelson Siegel. L'historique est schématisé dans la figure 3.11. Il est supposé indépendant et identiquement distribué, sinon, il n'est pas possible d'appliquer la méthode. Pour la densité, elle a été définie dans la partie 2.3.2. Pour rappel la vraisemblance s'écrit comme ci-dessous (cf. équation 3.2).

$$L(k, \theta, \sigma) = \prod_{i=1}^{95} c \times p_{\chi^2(v, \gamma)}(c(r_i - \varphi(t))) 1_{r_i \geq \varphi(t)}. \quad (3.2)$$

Notons que la vraisemblance fait apparaître la date  $t$  dans la fonction déterministe  $\varphi$ . Pour  $r(t)$ , ce n'est pas un problème, puisque le temps est implicite dans l'estimation  $r_i$  du taux court instantané : c'est une chronologie du taux court sur 95 mois de  $t = 31/01/2011$  à  $t = 30/11/2018$  (cf. figure 3.11). (L'expression de  $\varphi$  est également rappelée en équation 3.3, ainsi que toutes les notations dans le tableau 3.1.)

$$\varphi(t) = f^M(0, t) - f^{CIR}(0, t; \alpha). \quad (3.3)$$

Paramètre/Fonction	Expression
$c$	$\frac{4k}{\sigma^2(1-\exp(-kt))}$
$v$	$4k\theta/\sigma^2$
$\gamma$	$c \times x(0) \times \exp(-kt)$
$\alpha$	$(k, \theta, \sigma)$
$h$	$\sqrt{(k^2 + 2\sigma)^2}$
$f_{r(t) x(0)}(z)$	$c \times p_{\chi^2(v, \gamma)}(c(z - \varphi(t))) \times 1_{z \geq \varphi(t)}$
$f^{CIR}(0, t; \alpha)$	$\frac{2k\theta(\exp\{th\}-1)}{2h+(k+h)(\exp\{th\}-1)} + x_0 \frac{4h^2 \exp\{th\}}{[2h+(k+h)(\exp\{th\}-1)]^2}$

TABLE 3.1: Rappel des notations.

La question qui se pose est : comment prendre en compte  $t$  pour  $\varphi$  ? Une possibilité serait de faire varier  $\varphi$  en fonction de  $t$ , au même titre que  $r(t)$ , en modélisant le temps par l'échéancier discret mensuel  $t = 1, \dots, 95$ . C'est à dire faire varier  $\varphi$  en l'évaluant en  $t$ . Ce qui implique devoir évaluer également le taux forward instantané  $f^M(0, t)$  qui apparaît dans  $\varphi$ . Dans cette configuration, une écriture plus rigoureuse de la vraisemblance est visible en 3.4.

$$L(k, \theta, \sigma) = \prod_{i=1}^{95} c \times p_{\chi^2(v, \gamma)}(c(r_i - \varphi(i))) 1_{r_i \geq \varphi(i)}. \quad (3.4)$$

Une autre alternative aurait pu être d'écrire  $\varphi$  comme un élément proportionnelle à la vraisemblance afin de le sortir du problème d'optimisation. Seulement  $\varphi$  dépend des paramètres à estimer : quelque soit la façon dont la vraisemblance est écrite, ce n'est pas un élément proportionnelle à la vraisemblance. Ce n'est pas la solution.

Il serait également imaginable d'éliminer complètement  $\varphi$  pour supprimer le problème, mais supprimer  $\varphi$  revient à calibrer un processus CIR, et non plus un processus CIR ++. Ce n'est donc pas une solution non plus.

La première configuration est ainsi conservée (cf. figure 3.12).

<b>t</b>	<b>Taux court</b>	<b><math>\varphi(t)</math></b>
1	$r_1$	$\varphi(1)$
2	$r_2$	$\varphi(2)$
...	...	...
95	$r_{95}$	$\varphi(95)$

FIGURE 3.12: Prise en compte de  $\varphi$ .

### Prise en compte de $f^M(0, t)$ .

Une autre problématique à laquelle la méthode du maximum de vraisemblance fait face, est l'estimation du taux forward instantané  $f^M(0, t)$ . Comme  $\varphi$  est évaluée en  $t$ , le taux forward instantané l'est forcément aussi (cf. équation 3.3). La bonne nouvelle, c'est que Nelson Siegel a fourni un historique de 95 courbes de taux forward instantané. Maintenant, lesquelles utiliser pour les injecter dans la vraisemblance ?

Considérons toujours l'ensemble des dates discrètes caractérisant la profondeur de l'historique  $t = 1, \dots, 95$ .  $t = 1$  modélise la première date de l'historique, soit le 31/01/2011. Alors les paramètres de Nelson Siegel estimés à cette date permettent d'approcher le taux forward instantané (cf. l'équation 3.1) sur l'ensemble des maturités  $t \in 1, \dots, 95$ , toujours exprimées en mois.

### Paramètres à fixer

Maintenant qu'une potentielle technique a été trouvée pour comptabiliser  $\varphi$  dans la vraisemblance, il ne reste plus qu'un élément à définir avant de pouvoir se lancer dans l'implémentation. Rappelons qu'il s'agit de la densité de  $r(t)/x(0)$  (cf. paragraphe 2.3.2). La valeur  $x(0)$  doit être fixée en amont de la maximisation de la vraisemblance. Comme malgré les recherches, aucune référence sur la probable valeur que ce méta-paramètre pourrait prendre selon une approche historique n'a été trouvée, au même titre que dans ARMEL et PLANCHET (2020b), la valeur de  $x(0)$  est fixé à 1% en guise de référence pour l'instant.

### 3.2.2 Implémentation

Une fois le processus de calibrage bien détaillé, l'implémentation peut-être mise en oeuvre.

### Ecriture de la vraisemblance

Le pseudo code R de l'implémentation de la vraisemblance est décrit ci-dessous :

**Définition de l'objet fonction :** La vraisemblance est une fonction qui prend en entrée les paramètres  $k, \theta, \sigma$ , les données du taux court instantané notées *court*, les données du taux forward instantané notées *fwd*, la possibilité de calculer la vraisemblance ou la log-vraisemblance, la possibilité de multiplier le résultat final par 1 ou  $-1$ .



**Condition :** L'algorithme s'arrête si  $k$ ,  $\theta$  et  $\sigma$  ne sont pas strictement positifs.

$x(0)$  est fixé.

L'ensemble des dates discrètes est défini.

$\varphi$  est un vecteur de longueur la profondeur de l'historique défini en fonction des paramètres et de  $t$  :  $fwd - f^{CIR}(0, t; \alpha)$ .

$c$ ,  $\gamma$ ,  $v$  sont définis en fonction des paramètres et de  $t$ .

$x$  est un vecteur de longueur la profondeur de l'historique défini comme  $court - \varphi$ .

**Condition :** Si l'utilisateur choisit de calculer la log-vraisemblance alors :

Evaluation de  $x$  :

Si toutes les composantes de  $x$  sont strictement positives, alors la densité est une Khi-deux non centrée de degré de liberté  $v$  et de paramètre de décentralisation  $\gamma$  évaluée pour chaque composante de  $x$ . Le résultat est la somme des densités.

Sinon, la vraisemblance vaut  $-\infty$ .

**Condition :** Si l'utilisateur choisit de calculer la vraisemblance alors :

Evaluation de  $x$  :

Si toutes les composantes de  $x$  sont strictement positives, alors la densité est une Khi-deux non centrée de degré de liberté  $v$  et de paramètre de décentralisation  $\gamma$  évaluée pour chaque composante de  $x$ . Le résultat est le produit des densités.

Sinon, la vraisemblance vaut 0.

**Sortie :** La fonction renvoie le résultat multiplié par 1 ou  $-1$  au choix de l'utilisateur.

L'objectif est de trouver les paramètres  $k$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$  tels qu'ils maximisent la vraisemblance. Numériquement, pour avoir des valeurs moins explosives, il est coutume de calculer la log-vraisemblance. Comme le logarithme est concave et croissant, le problème d'optimisation est le même : il s'agit toujours de trouver  $k$ ,  $\theta$ , et  $\sigma$ , tels qu'ils maximisent la vraisemblance. C'est pour cette raison que cette option est proposée à l'utilisateur en entrée de la fonction.

Pour ramener un problème de maximisation à un problème de minimisation, il suffit de multiplier la fonction objective par  $-1$ . Souvent, les méthodes d'optimisation sont présentées et implémentées pour minimiser les fonctions. Par conséquent les problèmes de maximisation sont ramenés à des problèmes de minimisation. C'est pour cette raison que la multiplication par  $-1$  est aussi une option à choisir en entrée de la fonction.

L'indicatrice  $1_{z \geq \varphi(t)}$  est présente dans la densité de  $r(t)/x(0)$  (cf. 3.2) : le taux court doit toujours être supérieur à la fonction déterministe  $\varphi$ .

Si l'indicatrice n'est pas vérifiée, la vraisemblance vaut 0, et la log-vraisemblance vaut  $-\infty$ . Si l'option « multiplier le résultat par  $-1$  » est choisie, alors la vraisemblance vaut toujours 0, et la log-vraisemblance vaut  $+\infty$ .

Dans la suite, la log-vraisemblance négative sera minimisée.

En résumer il est équivalent de :

- maximiser la vraisemblance ;
- maximiser la log-vraisemblance ;
- minimiser la log-vraisemblance négative.

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$	$(k, \theta, \sigma) \mapsto L(k, \theta, \sigma)$
$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$k \mapsto L(k, \theta, \sigma)$
$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$\theta \mapsto L(k, \theta, \sigma)$
$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$\sigma \mapsto L(k, \theta, \sigma)$

TABLE 3.2: Différentes représentations possibles de la vraisemblance.

### Algorithme d'optimisation

La fonction *optim* (cf. TEAM et contributors WORLDWIDE (2021)) de R CORE TEAM (2021) est choisie pour optimiser la vraisemblance. Par défaut, *optim* minimise les fonctions. La méthode utilisée est la méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). Cette dernière est une méthode de quasi Newton, qui résout les problèmes de minimisation non linéaire et sans contrainte.

La principale caractéristique de cet algorithme est qu'il ne construit pas explicitement la matrice hessienne : il en fait une approximation, ce qui est moins coûteux en temps de calcul. L'algorithme classique de Newton évalue la matrice Hessienne et son inverse. Si celle-ci a un déterminant nul, c'est à dire qu'elle est strictement singulière, l'algorithme s'arrête et n'aboutit pas. La méthode de BFGS, dite de quasi Newton, se déroule de la même façon que l'algorithme de Newton, mais répond à cette problématique en approximant la Hessienne.

Cette méthode a également été choisie car elle laisse à l'utilisateur dans la fonction *optim* la possibilité de choisir dans quel intervalle il veut minimiser la fonction. Lorsque l'utilisateur sait où se trouve le minimum, c'est intéressant pour favoriser la convergence de l'algorithme.

### Tracé des courbes de niveau

La fonction à minimiser est une fonction de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ . Il n'est pas aisé de se représenter des fonctions en plusieurs dimensions pour savoir où se trouve les optima. Un outil pratique pour visualiser les fonctions multidimensionnelles est la courbe de niveau. Une courbe de niveau  $c$ ,  $c$  réel, est l'ensemble des points  $(x, y, z)$  tels que  $f(x, y, z) = c$ . La représentation de l'ensemble des courbes de niveau en 3D sur une feuille plane ressemble à des « colines ou des creux », ce qui permet de détecter les emplacements des potentiels optima locaux ou globaux (sommet de la « montagne » pour un maximum, fond du « trou » pour un minimum).

Le package « ggplot 2 » (cf. WICKHAM et al. (2021)) de R CORE TEAM (2021) permet de représenter les courbes de niveau. Seulement il n'est pas possible de les visualiser en 3D. Il s'agit d'une représentation « à plat », où la dimension « hauteur » est représentée par une couleur (par exemple le sommet est la couleur la plus claire, et plus la pente est raide, plus les courbes de niveau sont proches). Ce qui rend aussi possible la détection des emplacements des optima, s'ils existent.

Si les courbes de niveau ne permettent pas de conclure sur les optima, il est aussi possible de représenter la vraisemblance en fonction d'un paramètre, comme une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (cf. tableau 3.2), afin de déterminer pour quelles combinaisons de paramètres la vraisemblance est définie et maximale.

### 3.2.3 Résultats

La section suivante présente les résultats issus de l'application numérique. Les notations sont celles du pseudo code écrit dans le paragraphe 3.2.2.

#### Limites numériques

**Bornes supérieures pour  $k$  et  $\sigma$  :** Le logiciel R CORE TEAM (2021) permet de calculer la valeur de l'exponentielle jusqu'à environ 700 :  $\exp(700)$ . La fonction  $f^{CIR}(0, t; \alpha)$  (cf. équation 3.3) fait intervenir le terme  $\exp(th)$  avec  $h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$  (cf. équation 3.3).

Or  $t$  prend des valeurs entières jusqu'à 95. Si  $k$  et  $\sigma$  prennent des valeurs trop élevées, alors R ne peut plus calculer  $\exp(th)$  et retourne  $\exp(th) = Inf$ . Avec des  $Inf$  dans la fonction, l'algorithme ne peut plus effectuer la suite des calculs, et renvoie donc  $NaN$  pour la log-vraisemblance négative. Par conséquent,  $h$  doit être inférieur à environ 7.44%.

La figure 3.13 illustre les courbes de niveau en deux dimensions. Le niveau  $c$  est donnée dans la légende. Plus la couleur tend vers le violet, plus la log-vraisemblance négative est minimale. Les cases non colorées correspondent aux valeurs de  $k$  et  $\theta$  pour lesquelles la vraisemblance ne peut pas être calculée. Actuellement, les courbes de niveau ne permettent pas de conclure sur la localisation du minimum, il convient d'abord de déterminer l'intervalle de  $\mathbb{R}^3$  pour lequel la vraisemblance est bien définie.

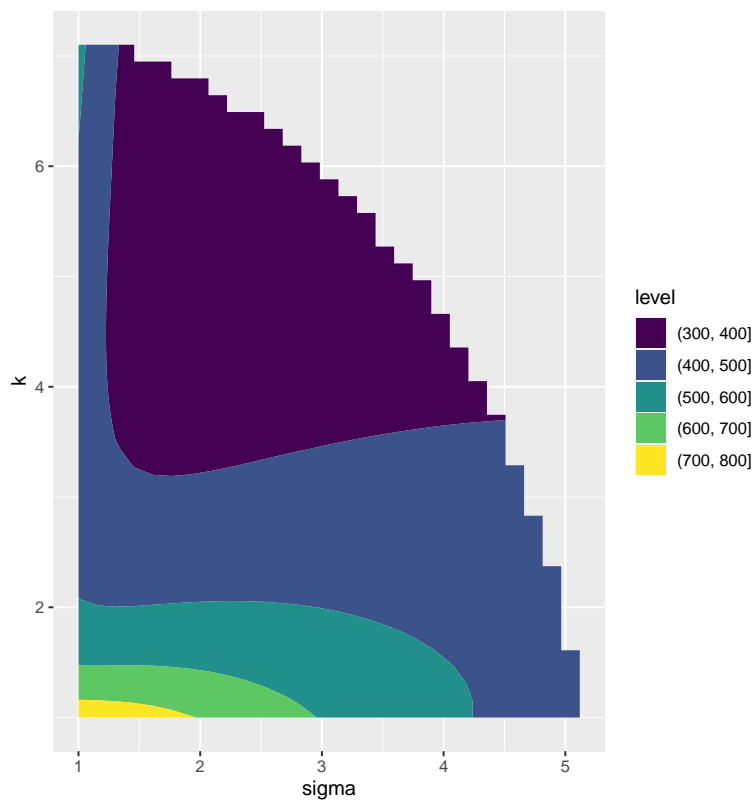


FIGURE 3.13: Illustration des limites numériques. La log vraisemblance négative ne peut pas être calculée par R pour toutes les valeurs des paramètres  $k$  et  $\sigma$ .

**Bornes inférieures pour  $k$ ,  $\sigma$  et  $\theta$  :** La fonction  $f^{CIR}(0, t; \alpha)$  (cf. équation 3.3) fait intervenir le terme  $\exp(th) - 1$  avec  $h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$  au dénominateur (cf. équation 3.3). Pour  $t$  petit, et  $k$  et  $\sigma$  très proches de 0,  $\exp(th) - 1$  tend vers 0 : le logiciel R CORE TEAM (2021) ne peut pas calculer  $f^{CIR}(0, t; \alpha)$ , et la valeur renvoyée pour la log-vraisemblance négative est *NaN*. Pour  $0.2\% < k$ ,  $0.2\% < \sigma$ ,  $1.1\% < \theta$ , le problème ne se pose plus.

Finalement, la fonction 3.2.2 ne renvoie pas de *NaN* si les bornes inférieures 3.5 sont retenues et que les conditions sur  $h$  sont vérifiées. Quant à  $\theta$ , il peut aller jusqu'à  $+\infty$ .

$$\begin{aligned} 0.20\% &< k \\ 1.10\% &< \theta \\ 0.20\% &< \sigma \\ h &< 7.45\% \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ceci revient finalement à une optimisation sous contrainte, mais une contrainte liée à une limite numérique. Pour contourner le problème, il suffit de réécrire la fonction  $f^{CIR}(0, t; \alpha)$ , en multipliant le numérateur et le dénominateur par  $\exp(-th)$  pour le premier terme et  $\exp(-2th)$  pour le deuxième terme de la somme, car dans ce cas, si  $th$  est très grand, R CORE TEAM (2021) renvoie bien  $\exp(-th) = 0$  (cf. équation 3.6).

$$f^{CIR}(0, t; \alpha) = \frac{2k\theta(1 - \exp\{-th\})}{2h \exp(-th) + (k + h)(1 - \exp\{-th\})} + x_0 \frac{4h^2 \exp\{-th\}}{[2h \exp(-th) + (k + h)(1 - \exp\{-th\})]^2}. \tag{3.6}$$

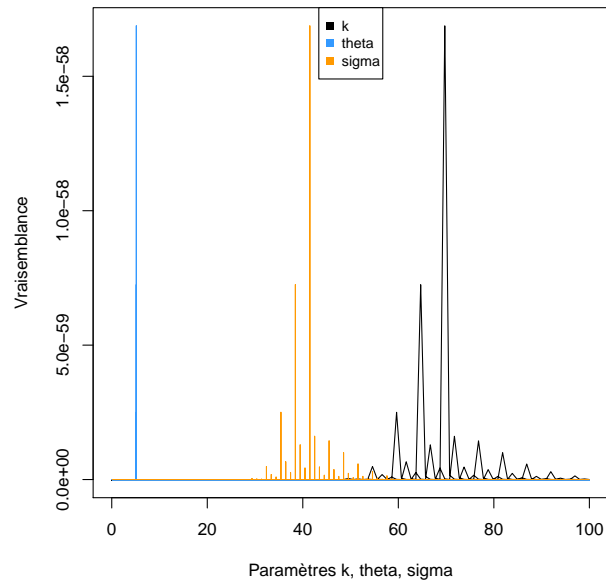
### Analyse des valeurs de la vraisemblance et minimisation

Après calculs des valeurs de la vraisemblance pour plusieurs valeurs des paramètres, celle-ci présente ses valeurs maximales sur les intervalles 3.7 des paramètres. Les courbes de niveau ont été tracées, mais ne permettent pas de conclure directement sur les paramètres qui maximisent la vraisemblance. C'est en évaluant la vraisemblance sur plusieurs « grilles » de valeurs des paramètres que le pavé 3.7 a été trouvé.

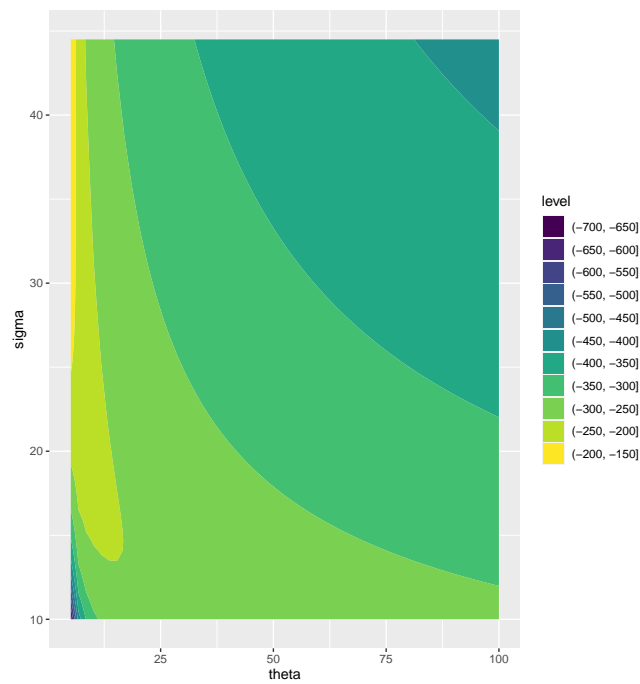
$$\begin{aligned} 0.1\% &\leq k \leq 100\% \\ 0.1\% &\leq \theta \leq 100\% \\ 0.1\% &\leq \sigma \leq 100\% \end{aligned} \tag{3.7}$$

La vraisemblance est calculée pour 100 valeurs de chacun des paramètres sur le pavé 3.7. Elle est alors évaluée 1 000 000 de fois (pour toutes les combinaisons possibles des valeurs des paramètres sur les intervalles, soient  $100 \times 100 \times 100 = 1000000$ , cf. schéma 3.4). A partir de cette grille, les valeurs de la vraisemblance sont tracées en fonctions de  $k$ , de  $\theta$ , puis de  $\sigma$ , comme une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , simultanément sur un même graphique (cf. tableau 3.2). La figure 3.14a est obtenue.

Le tableau 3.3 a été ajouté pour faciliter la lecture de l'axe des ordonnées de la figure 3.14a et pour se donner une idée de la valeur du minimum de la vraisemblance. (Le graphique n'a pas été tracé directement en logarithme de la vraisemblance, parce que ça rend des courbes « plates », qui donnent peu de visibilité).



(a) Illustration des valeurs de la vraisemblance en fonction de chacun des paramètres.



(b) Courbes de niveau de la log-vraisemblance en deux dimensions en fonction de  $\sigma$  et  $\theta$ . Les valeurs maximales sont en jaunes.

FIGURE 3.14: Illustrations relatives à la méthode 1 : EMV sur le taux court instantané.

Vraisemblance	Log-vraisemblance négative
5.0e-59	134.24
1.0e-58	133.55
1.5e-58	133.14

TABLE 3.3: Passage au logarithme népérien pour les valeurs de la vraisemblance sur la figure 3.14a.

	$k$	$\theta$	$\sigma$	$L(k, \theta, \sigma)$
Combinaison de paramètres n°1	$k_1$	$\theta_1$	$\sigma_1$	$L(k_1, \theta_1, \sigma_1)$
...	...	...	...	...
Combinaison de paramètres n°1 000 000	$k_{1000000}$	$\theta_{1000000}$	$\sigma_{1000000}$	$L(k_{1000000}, \theta_{1000000}, \sigma_{1000000})$

TABLE 3.4: Schématisation de la grille.

Sur la figure 3.14a, les valeurs des paramètres pour lesquelles la vraisemblance est nulle peut signifier deux choses : soit la vraisemblance vaut « vraiment » 0 pour la valeur de ces paramètres, soit la vraisemblance est nulle parce qu'elle n'est pas définie pour ces paramètres, ce qui signifie que  $x$  présente des composantes négatives, (cf. sous section 3.2.2). Un contrôle a été effectué, et il s'agit de la deuxième possibilité. La vraisemblance comporte bien plus de valeurs pour lesquelles elle n'est pas définie que de valeurs pour lesquelles elle l'est. Ceci peut signifier que le taux court extrait ne suit pas une loi du khi-deux non centrée, ou bien du moins, que les données qui ont été utilisées ne suivent pas à une loi du Khi-deux et ne sont pas adaptées à cette loi.

Il est important de pouvoir délimiter un pavé de  $\mathbb{R}^3$  où la vraisemblance est définie. Ce qui est délicat, c'est que sur les zones où la vraisemblance est maximale (lisible graphiquement sur la figure 3.14a), elle n'est pas régulière : elle n'est pas nécessairement continue, et présente des successions de points isolés strictement positifs et de points où elle vaut 0. Trouver les combinaisons des paramètres tels que la vraisemblance est définie n'est pas évident : **le support de la vraisemblance dépend des paramètres à estimer.**

De plus, s'il est demandé à l'algorithme d'optimisation de trouver un minimum sur un intervalle, une valeur initiale doit lui être donnée. Si la log-vraisemblance négative n'est pas définie en ce point, alors l'algorithme renvoie d'emblée la valeur initiale comme minimiseur, et  $\infty$  comme minimum. Et si la log-vraisemblance négative est bien définie en la valeur initiale, mais qu'il y a trop de points pour lesquels la log-vraisemblance négative n'est pas définie au sein de l'intervalle (en ces points elle vaut  $\infty$ ), l'algorithme renvoie dans ce cas aussi la valeur initiale comme minimiseur, puisqu'en ce point, la valeur de la log-vraisemblance négative est toujours plus petite ou égale à  $\infty$ .

Le comportement de la vraisemblance est le suivant sur les points où elle est définie : plus  $k$  et  $\sigma$  sont grands, et plus  $\theta$  est petit, plus la vraisemblance atteint des valeurs maximales. Cependant, la borne inférieure de  $k$  et  $\theta$ , et la borne supérieure de  $\sigma$  doivent être bien choisies, pour que la vraisemblance soit à la fois définie et maximale.

Illustrons le propos. Par exemple, la vraisemblance est bien définie sur le pavé 3.8 de  $\mathbb{R}^3$ . Sur cet intervalle, le minimum de la log-vraisemblance négative est de 138.13 (cf. tableau 3.5). Le tableau 3.5 et les courbes de niveau 3.14b mettent en valeur que le minimum est attiré par les bords. D'où l'importance de bien les définir. Si la borne inférieure de  $k$  et de  $\theta$  sont plus petites, et que la borne

supérieure de  $\sigma$  est plus grande pour les bornes 3.8, alors la vraisemblance n'est pas définie sur les points ajoutés au pavé.

$$\begin{aligned} 67.00\% &\leq k \leq 100.00\% \\ 5.30\% &\leq \theta \leq 10.00\% \\ 35.00\% &\leq \sigma \leq 44.50\% \end{aligned} \quad (3.8)$$

Valeurs initiales			Minimiseurs			Minimum
0.70	0.07	0.43	0.67	5.30	0.445	138.13
0.75	0.053	0.445	0.67	5.30	0.445	138.13
0.67	0.10	0.40	0.67	5.30	0.445	138.13

TABLE 3.5: Résultats de la minimisation de la log-vraisemblance négative sur le pavé 3.8 en fonction de la valeur initiale.

Par conséquent, il faut constituer le jeu de paramètres optimales, « à la main ». Il s'agit de 3.9. Le minimum sur cet intervalle est de 131.16, pour les paramètres  $(k, \theta, \sigma) = (85.50\%, 5.00\%, 44.50\%)$  (cf. tableau 3.6). C'est cohérent avec le tableau 3.3 et la figure 3.14a.

$$\begin{aligned} 85.50\% &\leq k \leq 100.00\% \\ 5.00\% &\leq \theta \leq 10.00\% \\ 35.00\% &\leq \sigma \leq 44.50\% \end{aligned} \quad (3.9)$$

Valeurs initiales			Minimiseurs			Minimum
0.95	0.20	0.30	0.855	0.50	0.445	131.16
1.00	1.00	0.10	0.855	0.50	0.445	131.16
0.90	0.10	0.44	0.855	0.50	0.445	131.16

TABLE 3.6: Résultats de la minimisation de la log-vraisemblance négative sur le pavé 3.9 en fonction de la valeur initiale.

### Conclusion de la première méthode

La première approche utilisée pour déterminer les paramètres du CIR++ se décompose en plusieurs étapes.

Tout d'abord, comme il s'agit de la vraisemblance du taux court instantané, qui est par essence, non observable, la première étape consiste à trouver une façon d'approximer celui-ci. Une fois cette étape franchie, la prise en compte de la fonction déterministe  $\varphi$  n'est pas évidente à mettre en oeuvre,

puisqu'elle nécessite à son tour, de modéliser le taux forward qui est lui aussi, par essence, non observable. En ce sens, le modèle de Nelson Siegel est un bon outil puisqu'il fournit en plus des taux zéro-coupon, une approximation du taux forward instantané, et une approximation du taux court instantané.

Une fois l'implémentation mise en place, l'objectif est de trouver l'intersection entre les deux ensembles suivants :

- l'ensemble des paramètres  $k$ ,  $\theta$ , et  $\sigma$  tels que la vraisemblance est définie. Ce qui revient, par équivalence, à l'ensemble des paramètres  $k$ ,  $\theta$ , et  $\sigma$  tels que  $x$  (cf. paragraphe 3.2.2) est positif.
- l'ensemble des paramètres  $k$ ,  $\theta$ , et  $\sigma$  tels que la vraisemblance est maximale.

Cette recherche s'est avérée minutieuse à cause des irrégularités présentées par la fonction, dont les valeurs maximales se situent au bord de son intervalle de définition. Pour cette approche, avoir extrait le taux court, et le taux forward pour calculer la fonction déterministe ne semble pas idéal : le peu de valeurs pour lesquelles la vraisemblance est définie indique que les données ne sont pas du tout adaptées à une loi du Khi-deux non centrée.

Ainsi, la deuxième méthode mise en place ne nécessite pas :

- d'approximer le taux court instantané ;
- de calculer la fonction  $\varphi$  ;
- d'approximer le taux forward instantané.

Mais le support de la vraisemblance dépendra encore des paramètres à estimer.

$k$	$\theta$	$\sigma$
85.50%	5.00%	44.50%

TABLE 3.7: Résultats de la méthode 1.

### 3.3 Mise en pratique de la méthode 2 et comparaisons des résultats

A présent la mise en place de la méthode 2.

#### 3.3.1 Modélisation

La prise en compte des fonctions et des données intervenant dans la vraisemblance sont d'abord détaillées avant de procéder à l'implémentation et à la présentation des résultats. La description de la mise en oeuvre est plus courte parce que plusieurs éléments sont redondants et communs avec la première méthode.



### Choix de l'historique

La méthode de l'estimation du maximum de vraisemblance sur les taux zéro-coupons nécessitent la construction de l'historique  $R(t, T) - \frac{1}{T-t} \ln \frac{P^M(0,t)}{P^M(0,T)}$ . Rappelons que  $P^M(0, t) = \exp(-t \times R(0, t))$ . Une construction de l'historique entièrement à partir des taux zéro-coupons est proposée.

L'historique des courbes de taux zéro-coupon utilisé a une profondeur sur 95 mois (cf. 3.6).

Ainsi l'historique se profilera pour  $t$  variant de 1 à 95, avec la courbe au 31/01/2011 considérée comme la courbe initiale, correspondant à l'instant  $t = 1$  (cf. première ligne de la matrice 3.6). La question qui peut se poser est, quel  $T$  choisir ? Autrement dit, quelle maturité retenir pour les taux zéro-coupons ?

Dans la mesure où l'horizon dix ans se rapproche des durations des passifs du marché selon les avis d'experts, retenir une maturité de 10 ans pour les taux zéro-coupons pourrait se justifier. Retenir une maturité de 10 ans, revient à prendre  $T = t + 10$  exprimé en année, et donc  $T = t + 120$  exprimé en mois.

Par conséquent  $\frac{1}{T-t} \ln \frac{P^M(0,t)}{P^M(0,t+120)}$  se construit à partir de la courbe de taux initiale de l'historique (la première ligne de la matrice 3.6). Et  $R(t, t+120)$  correspond à la 120 ème colonne de la matrice 3.6. En faisant la différence entre les deux vecteurs de taille 95, une possibilité d'historique est construit.

### Calculs des fonctions a et b

L'expression des fonctions  $a$  et  $b$  sont décrites dans le paragraphe 2.3.3. Elles interviennent toutes les deux dans l'expression du taux zéro-coupon (cf. équation 2.39). Elles se réécrivent comme l'équation 3.10 pour  $t$  allant de 1 à 95.

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{120} B(t, t + 120), \\ b &= \frac{1}{120} \ln \left( \frac{A(0, t + 120) \exp \{-B(0, t + 120)x_0\}}{A(t, t + 120)A(0, t) \exp \{-B(0, t)x_0\}} \right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pour limiter les problèmes numériques déjà rencontrés au paragraphe 3.2.3 avec la fonction  $f^{CIR}(0, t; \alpha)$ , les fonctions  $A$  et  $B$  sont multipliées respectivement par les termes  $\exp(-(T-t)h)^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}}$  et  $\exp(-(-T-t)h)$  au numérateur et au dénominateur (cf. paragraphe 2.3.3 pour les expressions de A et B).

### Métoparamètre et outils

Le métoparamètre  $x_0$  est à nouveau fixé à 1% au même titre que dans l'article de ARMEL et PLANCHET (2020b). Les outils tels que les tracés des courbes de niveau et l'algorithme d'optimisation sont les mêmes que pour la méthode 1 (cf. sous-section 3.2.2 pour l'algorithme d'optimisation, et pour les graphiques).

### 3.3.2 Implémentation et résultats

Les paragraphes ci-dessous décrivent les applications numériques relatives à la mise en pratique de la méthode 2.

### Écriture de la vraisemblance

Le pseudo code R de l'implémentation de la vraisemblance est présenté ci-après. Les fonctions  $a$  et  $b$  sont définies en amont.

**Définition de l'objet fonction :** La vraisemblance est une fonction qui prend en entrée les paramètres  $k$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$ , l'historique des taux zéro-coupons noté *echantillon*, la possibilité de calculer la vraisemblance ou la log-vraisemblance, la possibilité de multiplier le résultat final par 1 ou  $-1$ .

**Condition :** L'algorithme s'arrête si  $k$ ,  $\theta$  et  $\sigma$  ne sont pas strictement positifs.

$x(0)$  est fixé.

La maturité  $\tau$  est fixée à 120 mois.

L'ensemble des 95 dates discrètes est défini.

$a$  est un vecteur de taille 95 qui dépend des paramètres et de la maturité, et qui varie avec  $t$ .

$b$  est un vecteur de taille 95 qui dépend des paramètres et de la maturité et qui varie avec  $t$ .

$c$ ,  $\gamma$ ,  $v$  sont définis en fonction des paramètres et de  $t$ .

$x$  est un vecteur de longueur 95 défini comme  $(echantillon - b)/a$ .

**Condition :** Si l'utilisateur choisit de calculer la log-vraisemblance alors :

Evaluation de  $x$  :

Si toutes les composantes de  $x$  sont strictement positives, alors la densité est une Khideux non centrée de degré de liberté  $v$  et de paramètre de décentralisation  $\gamma$  évaluée pour chaque composante de  $x$ . Le résultat est la somme des densités.

Sinon, la vraisemblance vaut  $-\infty$ .

**Condition :** Si l'utilisateur choisit de calculer la vraisemblance alors :

Evaluation de  $x$  :

Si toutes les composantes de  $x$  sont strictement positives, alors la densité est une Khi-deux non centrée de degré de liberté  $v$  et de paramètre de décentralisation  $\gamma$  évaluée pour chaque composante de  $x$ . Le résultat est le produit des densités.

Sinon, la vraisemblance vaut 0.

**Sortie :** La fonction renvoie le résultat multiplié par 1 ou  $-1$  au choix de l'utilisateur.

Les justifications de l'écriture de la vraisemblance sont les mêmes que pour la méthode 1 (cf. sous-section 3.2.2.).

### Analyse des valeurs de la vraisemblance

Après évaluation de la vraisemblance sur plusieurs grilles de valeurs, la vraisemblance est tracée sur les intervalles 3.11 pour 100 valeurs de chacun des paramètres, où des valeurs pour lesquelles elle est définie ont été localisées. D'après le graphique 3.15a, la vraisemblance est définie pour de très petite valeur de  $k$  et  $\sigma$ , alors que  $\theta$  tend à être plus grand 1.

$$\begin{aligned} 0.01\% &\leq k \leq 100.00\% \\ 0.01\% &\leq \theta \leq 100.00\% \\ 0.01\% &\leq \sigma \leq 100.00\% \end{aligned} \tag{3.11}$$

Cette fois-ci, contrairement à la première méthode, les courbes de niveau détectent clairement un maximum. La figure 3.15b illustre les valeurs maximales de la vraisemblance en jaune. Grâce à la figure, les  $k$  et  $\sigma$  qui maximisent la vraisemblance sont clairement identifiés, et c'est bien en accord avec le graphique 3.15a. En revanche elle ne permet pas de conclure sur la valeur de  $\theta$ . Le fait que  $k$  et  $\sigma$  soit presque fixés, et que la vraisemblance soit bien définie en ces points facilitent considérablement la suite du travail, finalement, il ne reste plus qu'à trouver pour quelle valeur de  $\theta$  la vraisemblance est maximale à  $k$  et  $\sigma$  fixés.

Les irrégularités de la vraisemblance sont limitées sur le pavé 3.12 des paramètres.

$$\begin{aligned}
 0.10\% &\leq k \leq 0.20\% \\
 250.00\% &\leq \theta \leq 600.00\% \\
 0.60\% &\leq \sigma \leq 0.80\%
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

**Résultats**

La log-vraisemblance négative est minimisée sur le pavé 3.12 de  $\mathbb{R}^3$ . Les minimiseurs et les minima obtenus en fonction de la valeur initiale sont rassemblés dans le tableau 3.8.

Valeurs initiales			Minimiseurs			Minimum
0.0015	3.00	0.007	0.0014	5.27	0.0074	187.67
0.001	5.00	0.008	0.001	6.00	0.008	188.25
0.002	4.00	0.007	0.002	4.39	0.0072	190.05
0.0015	2.50	0.007	0.002	4.36	0.0072	190.06
0.0015	5	0.006	0.0017	5.35	0.0067	187.67
0.0013	5.20	0.007	0.0015	5.38	0.0072	187.45

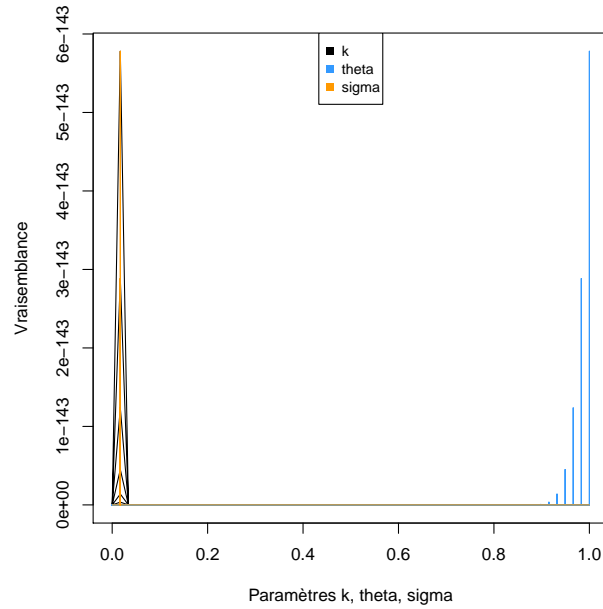
TABLE 3.8: Résultats de la minimisation de la log-vraisemblance négative sur le pavé 3.12 en fonction de la valeur initiale.

Le minimum de la log-vraisemblance négative est 187.45. Les paramètres résultant du calibrage sont dans le tableau 3.9.

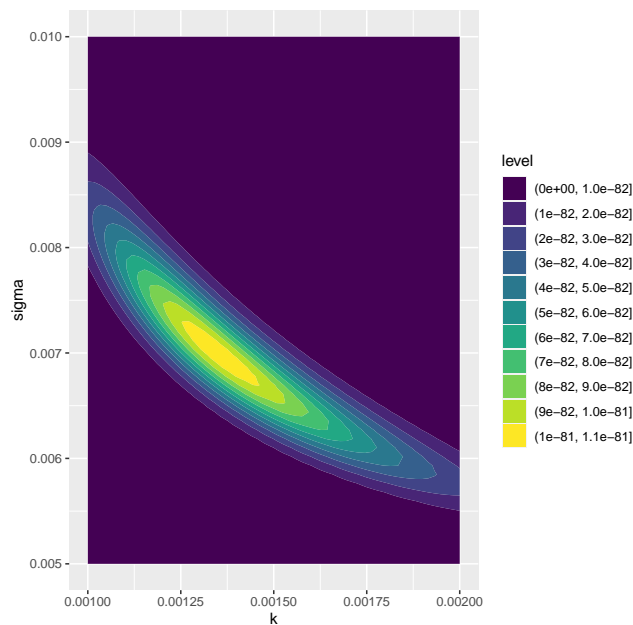
$k$	$\theta$	$\sigma$
0.15%	538.00%	0.72%

TABLE 3.9: Résultats de la méthode 2.

L'identification des paramètres minimiseurs grâce à la méthode 2 s'est montrée plus encline que la méthode 1. Dans le cadre de la méthode 2, le maximum de vraisemblance n'est pas attiré par



(a) Illustration des valeurs de la vraisemblance en fonction de chacun des paramètres.



(b) Courbes de niveau de la vraisemblance en deux dimensions en fonction de  $\sigma$  et  $k$ .

FIGURE 3.15: Illustrations relatives à la méthode 2 : EMV sur les taux zéro-coupon.

les paramètres sur lesquels elle n'est pas définie. Le fait que les courbes de niveau aient indiqué la position du minimum pour  $k$  et  $\sigma$  a considérablement facilité la donne puisque cela a permis de fixer deux paramètres sur trois. Finalement, la minimisation de la log-vraisemblance négative se jouait sur la valeur du paramètre  $\theta$ . En revanche, à nouveau il est observé que les données ne collent pas à la loi du Khi-deux non centrée, car la vraisemblance est nulle pour la plus grande majorité des combinaisons des paramètres.

### 3.3.3 Etude comparative

Les paramètres déterminés précédemment selon une approche de calibrage historique vont être comparés à ceux trouvés dans l'article ARMEL et PLANCHET (2020b) selon une approche historique.

#### Présentation des paramètres trouvés dans Armel et Planchet (2020b)

Les caps et les swaptions sont des produits de taux cotés sur le marché, appelés produits vanilles, qui sont utilisés pour calibrer les modèles financiers. Dans l'article ARMEL et PLANCHET (2020b), le modèle CIR++ est calibré à partir de ces deux produits financiers.

Un cap est une combinaison linéaire de caplets, et un caplet est un call sur taux forward. Un swaption est une option sur un swap, qui laisse à l'investisseur le choix de rentrer ou pas dans le swap. Si la swaption est payeuse, l'investisseur qui choisit d'entrer dans le swap paie un taux fixe et reçoit un taux variable. Si la swaption est receveuse, c'est l'inverse (l'investisseur qui choisit d'entrer dans le swap paie un taux variable et reçoit un taux fixe.).

La définition du modèle de Black décalé pour les taux négatifs est donnée dans la référence. Cette notion est évoquée car elle est liée au calibrage implicite utilisé dans le papier ARMEL et PLANCHET (2020b) pour le CIR++. Dans le papier, un calibrage est proposé sur le prix des swaptions et un autre sur le prix des caps. Et pour chacun de ces deux produits, le calibrage est réalisé pour « trois facteurs de décalage de Black » différents, appelé *displacement factor*. Cette notion n'est pas fondamentale pour le mémoire, mais il est nécessaire de la souligner pour pouvoir lire les paramètres  $k$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$  et  $\lambda$  trouvés dans l'article. La colonne  $CIR++(i)$  correspond « aux paramètres du CIR++ pour un décalage de Black de  $i\%$  »,  $i$  pouvant valoir 0.4%, 1%, et 2%, (cf. tableau 3.10). Si le lecteur souhaite connaître en détails le processus de calibrage complet utilisé dans l'article ARMEL et PLANCHET (2020b), il trouvera toutes les réponses en se référant à ARMEL et PLANCHET (2020d) et ARMEL et PLANCHET (2020a). Les idées générales du processus de calibrage implicite ont été rappelées dans la sous section 2.2.1, mais les formules fermées relatives au CIR++ n'ont pas été données.

Quant au facteur du risque issu de la prime de risque, son processus de calibrage historique a été entièrement expliqué dans la sous-section 2.2.2. Cette approche a été utilisée par ARMEL et PLANCHET (2020b), et dans le mémoire (cf. tableau 3.11) pour le calculer. Rappelons que comme le CIR++ est ici paramétré sous  $\mathbb{P}$ , en univers réel, la prime de risque demandée par l'investisseur doit être modélisée. Alors qu'en univers neutre au risque, l'investisseur est supposé ne pas être sensible au risque et aux fluctuations, donc il ne demande pas de prime de risque en contrepartie pour s'en prémunir.

#### Comparaison et discussion autour de l'homogénéité par rapport au temps

Théoriquement, les paramètres du processus CIR++, qu'ils soient calibrés selon une approche historique (cf. tableau 3.11), ou selon une approche implicite (cf. tableau 3.10), devraient être égaux.

	Cap			Swaption		
Paramètres	CIR++(0.4)	CIR++(1)	CIR++(2)	CIR++(0.4)	CIR++(1)	CIR++(2)
k	2.91%	3.12%	3.45%	2.99%	3.85%	5.19%
$\theta$	99.22%	99.98%	99.34%	99.99%	99.99%	99.96%
$\sigma$	2.10%	3.06%	4.69%	5.31%	6.65%	9.16%
$\lambda$	-0.70%	-1.36%	-2.58%	-3.30%	-4.09%	-5.68%

TABLE 3.10: Récapitulatif des paramètres du CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  selon une approche implicite obtenus dans le papier ARMEL et PLANCHET (2020b), avec la valeur initiale du CIR fixée à  $x_0 = 1\%$ .

	EMV sur le taux court instantané	EMV sur les taux ZC
Paramètres	Méthode 1	Méthode 2
k	85.50%	0.15%
$\theta$	5.00%	538.00%
$\sigma$	44.50%	0.72%
$\lambda$	19.86%	-0.71%

TABLE 3.11: Récapitulatif des paramètres du CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  selon une approche historique obtenus précédemment selon la méthode 1 et 2, avec la valeur initiale du CIR fixée à  $x_0 = 1\%$ .

Mais en pratique cette hypothèse n'est pas vérifiée « Bien que le modèle théorique suppose que les paramètres historiques et les paramètres implicites soient égaux, ils sont différents en pratique. », ARMEL et PLANCHET (2020b). Ainsi, il n'est pas étonnant que pour les mêmes hypothèses, les paramètres issus des méthodes 1 et 2 soient différents de ceux trouvés dans le papier ARMEL et PLANCHET (2020b), selon un calibrage implicite.

Pour les paramètres calibrés implicitement (cf. tableau 3.10), la même tendance est observée pour chaque paramétrage :  $\theta$  est grand, tandis que  $k$  et  $\sigma$  sont beaucoup plus petits et du même ordre de grandeur, et le facteur du risque négatif est toujours plus petit ou du même ordre de grandeur que  $k$  et  $\sigma$ .

Les paramètres calibrés de manière historique selon la méthode 2 (cf. tableau 3.11) suivent la même tendance :  $\theta$  est très grand, tandis que  $k$  et  $\sigma$  sont proches de 0, ainsi que le facteur du risque, qui est négatif. Seulement le paramètre  $\theta$  à 538.00%, qui représente la valeur moyenne à long terme semble assez étonnant.

Quant aux valeurs des paramètres issus de la méthode 1, ils ont le comportement opposés de ceux de la méthode 2 : le  $\theta$  est le paramètre le plus proche de zéro, tandis que  $k$ ,  $\sigma$  et  $\lambda$  prennent des valeurs élevées qui vont respectivement au de-là de 40.00% et de 19.00%.

La différence des résultats entre la méthode 1 et la méthode 2 met en évidence l'impact du choix des données sur les modèles et les résultats pour des estimations historiques.

Ces singularités présentées par les paramètres estimés selon l'approche historique peuvent s'expliquer en partie par la non-homogénéité par rapport aux unités de temps de la comparaison qui vient d'être effectuée. En effet, les paramètres déterminés dans ARMEL et PLANCHET (2020b) sont des paramètres annuels, qui projettent le taux sur un pas de temps annuel. Pour l'estimation des paramètres selon la méthode de l'EMV, l'historique de taux utilisé est un historique à pas mensuel, par conséquent, il est cohérent dans ce contexte de modéliser le temps en mois. Les paramètres historiques déterminés sont donc des paramètres mensuels, qui permettent de projeter le taux court sur des échéances de temps mensuelles. Ainsi, pour effectuer une comparaison cohérente avec les paramètres de ARMEL et PLANCHET (2020b), les paramètres issus des modèles historiques doivent être « annualisés ».

### Annualisation des paramètres

Pour procéder à l'annualisation des paramètres, les deux modèles sont recalibrés : l'estimateur du maximum de vraisemblance sur le taux court instantané et l'estimateur du maximum de vraisemblance sur le taux zéro-coupon. Afin d'annualiser les paramètres, deux options sont testées.

- **La première** est de convertir les taux mensuels en taux annuels, ainsi que de convertir les maturités  $t$  exprimées actuellement en mois, en années, ce qui revient à toutes les diviser par 12 :  $(1/12, \dots, 94/12) = (0.83, \dots, 7.91)$ . Pour l'annualisation des taux, deux conversions sont expérimentées :
  - la conversion en taux annuel en supposant un taux composé  $x \mapsto (1 + x)^{12} - 1$ ,
  - la conversion en taux annuel en supposant un taux simple  $x \mapsto 12 \times x$ .

Une fois le taux court instantané et le taux zéro-coupon annualisé, l'estimation est à nouveau lancée selon l'implémentation des deux méthodes respectives. Dans cette configuration, la vraisemblance sur le taux court instantané est encore plus irrégulière que lorsque les taux sont mensuels. Quant à la vraisemblance sur les taux zéro-coupons, elle est tout simplement nulle

en tout point : lorsque les taux sont annuels, ils prennent des valeurs nettement plus élevés, ce qui rend impossible la vérification de l'indicatrice  $1_{\frac{echantillon-b}{a} \geq 0}$  pour n'importe quelles combinaisons des paramètres (cf. pseudo code 3.3.2). La fonction  $b$ , qui est négative, ne peut pas compenser les taux *echantillon* négatifs aussi, pour rendre la quantité  $echantillon - b$  positive. Cette approche est alors mise de côté.

- **La deuxième** est donc de garder les taux tels quels, et de ne convertir que les maturités  $t$  exprimées actuellement en mois, en années (ce qui revient à toutes les diviser par 12 :  $(1/12, \dots, 94/12) = (0.83, \dots, 7.91)$ ). Le processus de calibrage est réalisé exactement de la même manière qu'auparavant, il n'y a que les maturités qui ont été converties en années. Les estimations sont, de la même manière, confrontées aux irrégularités de la vraisemblance (cf. partie EMV sur la loi du taux court instantané en 3.2 et cf. EMV sur la loi du taux zéro-coupon en 3.3).
  - **Annualisation des paramètres de la méthode 1, EMV sur la loi du taux court :** Pour l'EMV sur le taux court, ce n'est pas concluant. La vraisemblance est périodique en fonction de  $\theta$ . Le maximum de la log-vraisemblance est de 177.23 et est atteint plusieurs fois. Le plus petit  $\theta$  pour lequel le maximum est atteint est de l'ordre de  $2 \times 10^5$  (cf. Annexe D.1). La méthode n'est pas conservée, et les paramètres  $k$ ,  $\theta$  et  $\sigma$  de la méthode 1 ont simplement été annualisés en les multipliant par 12, ce qui donne :  $(k, \theta, \sigma, \lambda) = (1026.00\%, 60.00\%, 564.00\%, -81.52\%)$ , (cf. tableau 3.12).
  - **Annualisation des paramètres de la méthode 2, EMV sur la loi du taux zéro-coupon :** Les paramètres annualisés résultant de l'EMV sur les taux zéro-coupons sont  $(k, \theta, \sigma, \lambda) = (4.20\%, 80.00\%, 26.00\%, -17.47\%)$ , (cf. tableau 3.13 et Annexe D.2). Avec les paramètres annualisés, la méthode 2 donne une volatilité plus élevée qu'avec le calibrage implicite (26.00% VS 9.16% au plus grand), et un facteur de risque bien plus petit (-17.47% VS -5.68% au plus petit), (cf. tableau 3.10). Selon un calibrage implicite ou historique, l'investisseur est en « recherche de risque » (la prime de risque est négative). La prime de risque à l'instant initiale ( $\lambda(0) = \frac{\lambda\sqrt{(0.01)}}{\sigma}$ ) demandée par l'investisseur est de -6.71%, tandis que pour les calibrages implicites du CIR ++ elle est de -6.20% pour les swaptions, et de -4.40% en moyenne pour les caps. L'investisseur demande donc moins de prime de risque à l'instant initiale avec une estimation historique des paramètres du CIR ++ qu'avec un calibrage implicite. Quant au paramètre de retour à la moyenne  $k$ , il est du même ordre de grandeur qu'avec le calibrage implicite. Enfin, la moyenne à long terme  $\theta$  historique est d'environ 20% moins élevée que la moyenne à long terme implicite.

Les résultats sont synthétisés dans les tableaux 3.12 et 3.13 pour la méthode de l'EMV sur la loi du taux court, et pour la méthode de l'EMV sur la loi du taux zéro-coupon.

Comme il n'est pas évident d'interpréter les effets et les différences entre les paramètres implicites et les paramètres historiques du processus CIR++, les trajectoires du processus CIR ++ ont été tracées en fonction des différents paramétrages.

Pour chaque combinaisons de paramètres, le CIR++ sous  $\mathbb{P}$  a été diffusé 1000 fois sur un horizon de 20 ans. Ensuite le taux CIR++ est représenté pour trois maturités différentes :

- **une maturité à court terme :** le taux 6 mois (cf. figure 3.16),
- **une maturité à moyen terme :** le taux 10 ans (cf. figure 3.17),
- **une maturité à long terme :** le taux 20 ans (cf. figure 3.18).

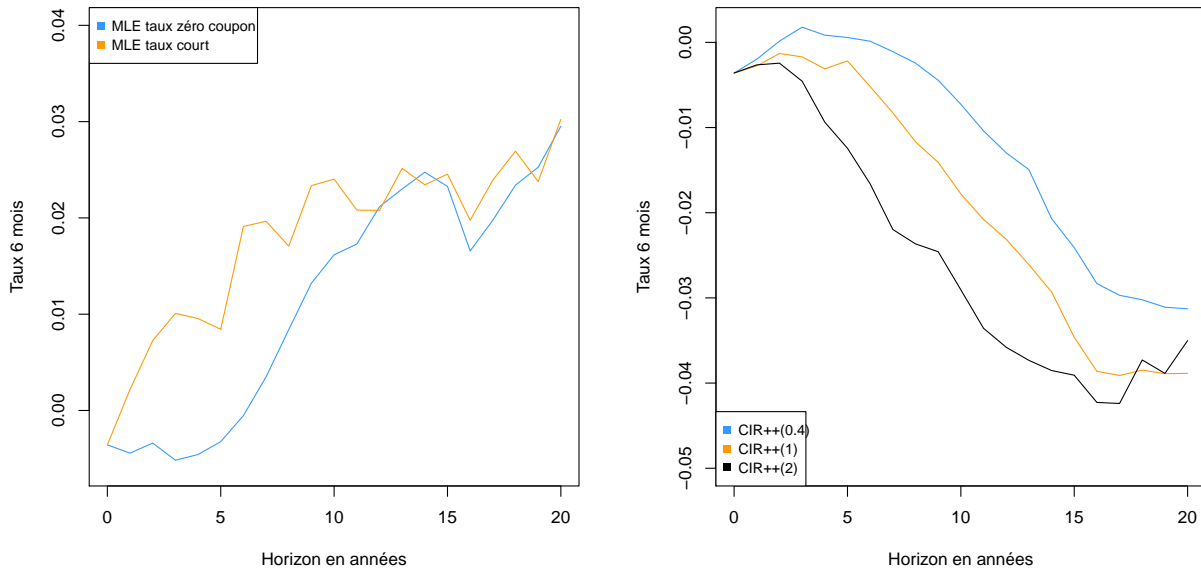


EMV sur la loi du taux court instantané		
Paramètres	Mensuels	Annuels
k	85.50%	1026.00%
$\theta$	5.00%	60.00%
$\sigma$	44.50%	534.00%
$\lambda$	19.86%	-81.52%

TABLE 3.12: Estimation des paramètres du CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  selon une approche historique, obtenus avec la valeur initiale du CIR fixée à  $x_0 = 1\%$ .

EMV sur la loi du taux zéro-coupon		
Paramètres	Mensuels	Annuels
k	0.15%	4.20%
$\theta$	538.00%	80.00%
$\sigma$	0.72%	26.00%
$\lambda$	-0.71%	-17.47%

TABLE 3.13: Estimation des paramètres du CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  selon une approche historique, obtenus avec la valeur initiale du CIR fixée à  $x_0 = 1\%$ .



(a) Trajectoires du CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  pour un paramétrage historique. (b) Trajectoires du CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  pour un paramétrage implicite.

FIGURE 3.16: Taux 6 mois sur un horizon de 20 ans.

Par exemple pour le taux 10 ans, un point  $i$  de la courbe, pour  $i \in 1, \dots, 20$  correspond à la moyenne des 1 000 simulations à l'instant  $i$  pour la maturité 10 ans. Cela permet, de constater en moyenne, l'évolution du taux.

Les trajectoires implicites sont représentés pour le calibrage du CIR++ sous  $\mathbb{P}$  sur les swaptions pour les trois différents paramètres de décalage de Black (cf. tableau des paramètres implicites 3.10) sur les figures 3.16b, 3.17b et 3.18b.

Les trajectoires historiques sont représentées pour le calibrage annualisés du CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  (cf. 3.12 et 3.13) sur les figures 3.16a, 3.17a et 3.18a.

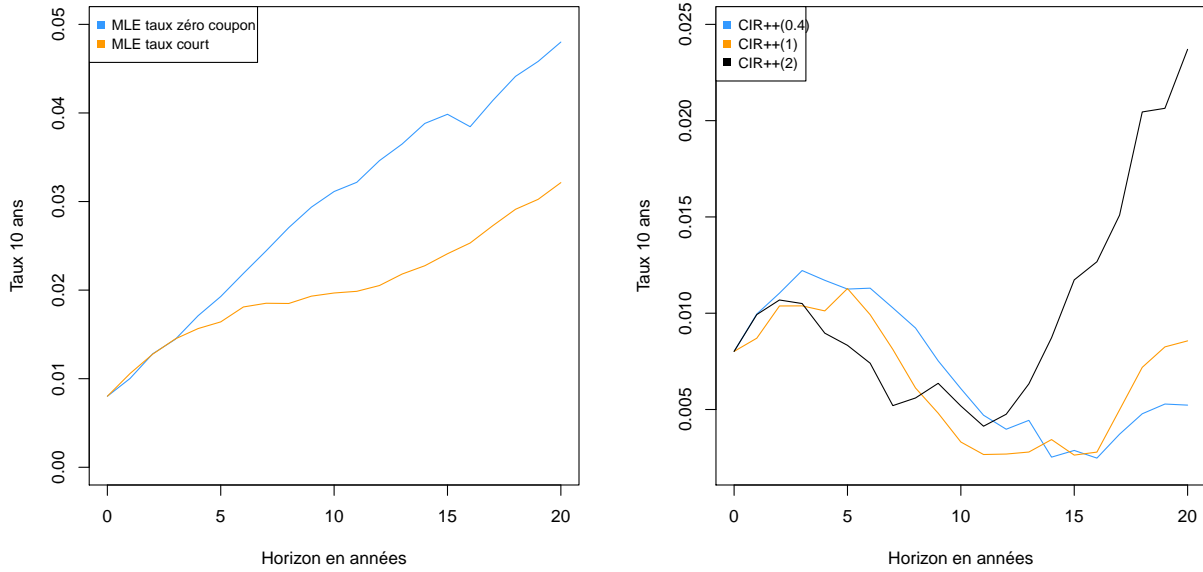
Les trajectoires implicites et les trajectoires historiques n'ont pas les mêmes comportements. En revanche les courbes issues d'un paramétrage historique suivent relativement la même tendance entre elles. Il en est de même pour les trajectoires du CIR++ avec les paramétrages implicites.

- **Pour le taux 6 mois :**

- Les courbes du paramétrage historique ont une tendance croissante, mais assez irrégulière. Elles sont comprises entre -0.60% et 3.00%. La courbe bleue (calibrage sur loi zéro-coupon), reste plus longtemps en dessous de 0 (environ 5 ans) que la courbe orange qui est quasiment tout le temps strictement au dessus de 0.
- Les courbes du paramétrage implicite sont décroissantes avec les années et toujours négatives. Elles sont comprises entre -5.00% et 0.20%.

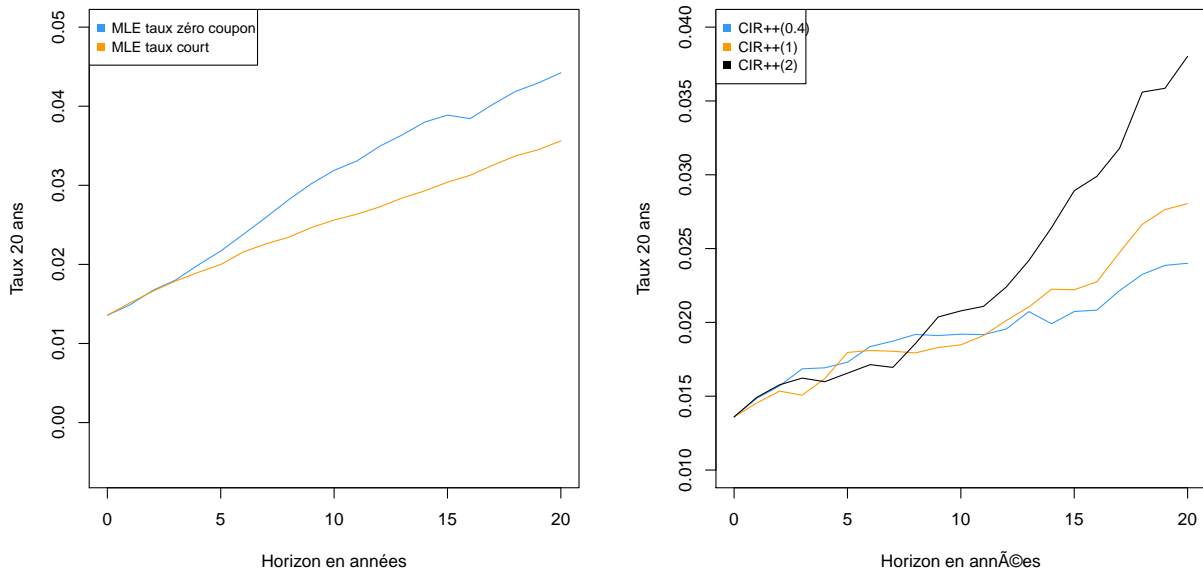
- **Pour le taux 10 ans :**

- Les courbes historiques sont toujours croissantes, et voire même presque linéaires. Elles



(a) Trajectoires du CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  pour un pa- (b) Trajectoires du CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  pour un pa-  
ramétrage historique. ramétrage implicite.

FIGURE 3.17: Taux 6 mois sur un horizon de 20 ans.



(a) Trajectoires du CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  pour un pa- (b) Trajectoires du CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  pour un pa-  
ramétrage historique. ramétrage implicite.

FIGURE 3.18: Taux 6 mois sur un horizon de 20 ans.

s'apparentent à deux fonctions affines qui auraient la même ordonnée à l'origine (autour de 1%), mais pas le même coefficient directeur. Elles sont comprises entre 1.00% et 4.00%.

- Les trajectoires du CIR++ avec un calibrage sur les swaptions sont décroissantes sur les 10 premières années environ, puis croissantes. Elles sont toujours positives et leurs valeurs sont comprises entre 0.02% et 2.50%. La courbe relative au paramètre de black décalé égal à 2.00%, présente une croissance bien plus accentuée que pour les deux autres courbes.

- **Pour le taux 20 ans :**

- Pour le paramétrage sur les taux zéro-coupons et les taux courts, l'allure du graphique du taux 20 ans se rapproche très fortement de celui du taux 10 ans. Les courbes historiques sont toujours croissantes, et voire presque linéaires. Elles s'apparentent à deux fonctions affines qui auraient la même ordonnée à l'origine (un peu au dessus de 1%), mais pas le même coefficient directeur. Elles sont toujours comprises entre 1.00% et 4.00%.
- Les courbes relatives au calibrage sur les swaptions sont croissantes et comprises entre 1.50% et 4.00%.

Pour conclure, à court terme, le paramétrage historique donne une évolution opposée à celle du paramétrage implicite sur le processus CIR++ sous  $\mathbb{P}$ . En revanche, à long terme, les deux approches expriment la même tendance et les mêmes ordres de grandeur pour le processus CIR++ sous  $\mathbb{P}$ . Enfin, il est important de souligner que le paramétrage historique ne permet pas de reproduire la courbe des taux, notamment la tendance des taux négatifs. Par conséquent, les paramétrages historiques présentés ne confèrent pas le caractère de *Market Consistency*. L'évolution moyenne des taux dont les paramètres sont issus d'une estimation par maximum de vraisemblance ne sont pas négatifs à court terme. Une piste d'amélioration possible pour obtenir des taux négatifs est de donner plus de poids aux années les plus récentes, par exemple en ne considérant pas un historique des courbes de taux zéro coupons sur 2011-2018, mais sur 2015-2018.

# Conclusion

Le papier de recherche ARMEL et PLANCHET (2020b) recèle la construction d'un générateur de scénarios économiques en probabilité historique. Pour calibrer le GSE en question, il est nécessaire d'estimer quatre paramètres. Ces quatre derniers interviennent dans la dynamique de chacune des variables projetées en univers réel du GSE : le taux court instantané, le déflateur, et l'actif risqué. Précisément, ils correspondent aux paramètres du processus du taux court instantané, le CIR++. Par conséquent, calibrer le GSE revient à calibrer le processus CIR++ sous  $\mathbb{P}$ .

En utilisant les prix des caps et des swaptions actuels (à l'époque en 2018), ainsi que les formules fermées du CIR++ associés aux prix de ces produits dérivés, les auteurs de ARMEL et PLANCHET (2020b) ont déterminé les paramètres du CIR++ en utilisant une méthode implicite. Le travail du mémoire consiste à trouver un processus d'estimation des paramètres à partir de données passées, et de comparer les résultats selon les deux approches de calibrage.

Les qualités très appréciables du CIR++ réside dans le fait qu'il présente des formules fermées théoriques des produits dérivés, ce qui rend très pratique sa calibration implicite. Après maintes recherches de documentations sur la calibration du CIR++ selon une approche historique, aucune référence n'a été trouvée. Les travaux du mémoire ont donc testées deux potentielles méthodes sur un historique de données.

Le processus CIR++ est la somme d'un processus CIR et d'une fonction déterministe. Or le processus CIR suit une loi du Khi-deux non centrée. La première idée est de partir de cet élément pour déterminer la loi du processus CIR++, et de calculer un estimateur des paramètres en maximisant la vraisemblance. Le problème qui se pose est le suivant : comment contruire un n-échantillon du taux court instantané pour l'injecter dans la vraisemblance ? En effet le taux court instantané, est un taux en continu, qui est par essence non observable. Une possibilité est d'extraire ce taux grâce au modèle de Nelson Siegel. La seconde problématique est le calcul de la fonction déterministe qui intervient dans la densité du CIR++, qui dépend du temps, des paramètres à estimer, et du taux forward instantané. Il faut donc aussi approcher cette quantité avant de procéder à l'estimation des paramètres. Enfin, la méthode est confrontée à la difficulté suivante : le support de la vraisemblance dépend des paramètres à estimer, et elle est définie pour trop peu de valeurs des paramètres. Ce qui pousse à conclure que les données ne sont pas adaptées à une loi du Khi-deux non centrée et que cette loi ne leur correspond pas.

Par conséquent la deuxième méthode a eu pour objectif, dans un premier temps, de limiter les approximations des valeurs des taux, et de travailler directement sur des variables accessibles et observables. Le maximum de vraisemblance est appliqué sur la loi du taux zéro-coupon, et non sur la loi du taux court instantané. Dans cette configuration, la vraisemblance est à nouveau définie pour très peu de combinaisons des paramètres. Mais, les paramètres pour lesquels elle est définie sont plus facilement identifiables. La vraisemblance n'est définie que pour  $k$  variant 0.01% à 0.02%, et pour  $\sigma$  variant de 0.06% à 0.08%. Sur trois paramètres, deux sont presque déjà fixés, ce qui a considérablement facilité

la suite des calculs. Finalement, cela revient à maximiser la vraisemblance en fonction de  $\theta$ . Lorsque le temps est modélisé en mois, cette méthode semble plus simple à utiliser que la première, et nécessite moins de travail en amont : pas d'extraction du taux court instantané, ni d'extraction du taux forward instantané. En revanche, lorsque les maturités ont été converties en années, trouver un ensemble des paramètres pour lesquels la vraisemblance est définie s'est avéré à nouveau complexe.

Pour conclure, les processus d'estimation des paramètres sur un historique de données issus des travaux du mémoire, ne sont pour l'instant pas suffisamment robustes pour pouvoir calibrer le GSE de l'article ARMEL et PLANCHET (2020b).

Cependant les travaux sont loin d'être aboutis : les modèles proposés sont implémentés en utilisant un historique de courbes de taux zéro-coupon, mais ils méritent d'être implémentés avec d'autres valeurs, puisqu'à *priori* celles-ci ne conviennent pas bien à la loi du Khi-deux non centrée. De plus, deux pistes supplémentaires de processus de calibrage sont décrites en Annexe B, mais n'ont pas pu être traitées dans le temps imparti. Elles peuvent éventuellement être testées dans de prochains travaux. Le plus gros frein des méthodes proposées est la difficulté des données à vérifier les indicatrices des densités, notamment à cause des valeurs négatives des taux. L'annexe ARMEL et PLANCHET (2020a) donne plusieurs façons d'approcher une Khi-deux non centrée par une loi Normale. En relançant les méthodes avec une loi Normale, les problèmes d'irrégularités dues aux valeurs négatives des taux pourraient être surmontés ; ça ne résout pas le problème des données incompatibles à la loi, mais c'est une façon de le contourner. Enfin, un autre algorithme d'optimisation peut être utilisé : un algorithme d'optimisation stochastique, pour des fonctions non différentiables. En ce sens, les irrégularités de la vraisemblance sont moins contraignantes pour l'optimisation.

# Bibliographie

- ADAM, E., FELIX, J., WERLE, S., MALECOT, S. et PLANCHET, F. (2014). Attraits et limites de la probabilité « risque neutre » pour valoriser le passif d'un assureur. 13 ème Congrès des Actuaires.
- AGBAHOLOU, T. (2018). 3 cas d'analyse des scénarios économiques utilisés pour le calcul d'un Best Estimate en Epargne. Mémoire d'Actuariat. Paris : Université Paris Dauphine.
- ARMEL, K. (2020). Générateurs de scénarios économiques pour valoriser les passifs de l'épargne en €. Support de cours. ISFA.
- ARMEL, K. et PLANCHET, F. (2020a). Annexe de l'article Utilisation de modèles de taux CIR pour évaluer la valeur économique des contrats d'épargne participatifs ? *Laboratoire des sciences actuarielle et financière*.
- ARMEL, K. et PLANCHET, F. (2020b). Evaluer la valeur économique des contrats d'assurance vie avec des déflateurs stochastiques. *Laboratoire des sciences actuarielle et financière*.
- ARMEL, K. et PLANCHET, F. (2020c). L'évaluation économique des engagements en assurance vie : écueils, bonnes pratiques et préconisations pour une mise en oeuvre pertinente. *Laboratoire des sciences actuarielle et financière*.
- ARMEL, K. et PLANCHET, F. (2020d). Utilisation de modèles de taux CIR pour évaluer la valeur économique des contrats d'épargne participatifs ? *Laboratoire des sciences actuarielle et financière*.
- BEN-TAHAR, I., TRASHORRAS, J. et TURINICI, G. (2016). Eléments de calcul stochastique pour l'évaluation et la couverture des actifs dérivés, avec exercices corrigés, travaux pratiques et études de cas. Ellipses.
- BEUIL, G. (2010). Estimation du taux d'actualisation : cas particulier du très long terme. Mémoire d'Actuariat. Brest : EURIA.
- BRIYS, E. et VARENNE, F. (2017). Life insurance in a contingent claim framework : pricing and regulatory implications. *The geneva papers on risk and insurance theory 19*.
- BUREAU, F. (2017). IFRS 17, la nouvelle norme comptable pour les assureurs. *Insurance speaker, le blog assurance des consultants Wavestone*.
- CHENG, P. et PLANCHET, F. (2018a). Stochastic deflator for an economic scenario generator with five factors. *Laboratoire des sciences actuarielle et financière*.
- CHENG, P. et PLANCHET, F. (2018b). Supplementary material of Stochastic deflator for an economic scenario generator with five factors. *Laboratoire des sciences actuarielle et financière*.
- DASTARAC, H. et SAUVEPLANE, P. (2010). Les Déflateurs stochastiques : quelle utilisation en assurance ? Mémoire d'Actuariat. Paris : ENSAE ParisTech.
- DONIO, M. et DEBAERE, F. (2021). M2 Actuariat - Gestion Actif Passif d'une société d'assurance. Support de cours. Université Paris Dauphine.
- GUIRRERI, S. S. (2013). YieldCurve-package : Modelling and estimation of the yield curve. R Foundation for Statistical Computing. URL : <https://cran.r-project.org/web/packages/YieldCurve/index.html>.
- HENON, S. et TURINICI, G. (2020). Modèles de taux.

- KAROUI, N. E., LOISEL, S., PRIGENT, J. et VEDANI, J. (2017). Market inconsistencies of the market-consistent European life insurance economic valuations : pitfalls and practical solutions. *European Actuarial Journal*.
- MONFERRINI, J. (2018). Projection des taux négatifs sous la probabilité monde réel. Mémoire d'Actuariat. Lyon : ISFA.
- NDIAYE, A., NDOYE, B. et ROMMEL, T. (2014). La valorisation du passif d'assurance dans la zone CIMA. Mémoire d'Actuariat. Brest : EURIA.
- OHNOUNA, E. (2008). Evaluation « Best estimate » de contrats d'épargne en euros. Mémoire d'Actuariat. Strasbourg : Université Louis Pasteur.
- PLANCHET, F. (2020-2021). Modélisation des obligations : présentation et utilisation en assurance. Support de cours. ISFA.
- R CORE TEAM (2021). R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. URL : <https://www.R-project.org/>.
- RYAN, J. A. et ULRICH, J. M. (2020). xts: eXtensible Time Series. R package version 0.12.1. R Foundation for Statistical Computing. URL : <https://CRAN.R-project.org/package=xts>.
- SELMA (2016). Cohérences et incohérences de marché, le risque neutre de la finance à l'assurance. *Périckès Actuarial*.
- SURU, A. (2011). Le rachat : modélisations et préconisations. Mémoire d'Actuariat. Paris : Université Paris Dauphine.
- TEAM, R. C. et contributors WORLDWIDE (2021). stats-package : R statistical functions. R Foundation for Statistical Computing. URL : <https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/stats/html/00Index.html>.
- THÉRON, P. (2010). IFRS Contrats d'assurance phase 2. Support de cours. Ecole d'été de l'Institut des Actuaire. URL : [http://www.therond.fr/wp-content/uploads/presentations/seminar/100723\\_IA\\_EcoleEte\\_IFRS.pdf](http://www.therond.fr/wp-content/uploads/presentations/seminar/100723_IA_EcoleEte_IFRS.pdf).
- THÉRON, P. (2013). Génération de scénarios économiques : Modélisation des taux d'intérêt. Support de cours. ISFA.
- TICHT, D. (2019). Construction d'un modèle ALM pour l'analyse de l'impact d'une remontée des taux sur la solvabilité d'un assureur vie. Mémoire d'Actuariat. Paris : ENSAE ParisTech.
- WICKHAM, H., CHANG, W., HENRY, L., PEDERSEN, T. L., TAKAHASHI, K., WILKE, C., WOO, K., YUTANI, H., DUNNINGTON, D. et RSTUDIO (2021). ggplot2: Create Elegant Data Visualisations Using the Grammar of Graphics. R Foundation for Statistical Computing. URL : <https://cran.r-project.org/web/packages/ggplot2/index.html>.



# Annexe A

## Données

### A.1 Courbes de taux zéro-coupon de l'institut des actuaires

	A	B	C
1	Date	Taux zero coupon (2 décimales)	Taux zero coupon (5 décimales)
2	31/08/2011	0,86	0,86114
3	30/09/2011	0,93	0,93214
4	31/10/2011	0,99	0,99387
5	30/11/2011	1,05	1,04737
6	31/12/2011	1,09	1,09361
7	31/01/2012	1,13	1,13351
8	29/02/2012	1,17	1,16792
9	31/03/2012	1,20	1,19762
10	30/04/2012	1,22	1,22335
11	31/05/2012	1,25	1,24578
12	30/06/2012	1,27	1,26552
13	31/07/2012	1,28	1,28314
14	31/08/2012	1,30	1,29916
15	30/09/2012	1,31	1,31403
16	31/10/2012	1,33	1,32816
17	30/11/2012	1,34	1,34192
18	31/12/2012	1,36	1,35563
19	31/01/2013	1,37	1,36956
20	28/02/2013	1,38	1,38395
21	31/03/2013	1,40	1,39898
22	30/04/2013	1,41	1,41481
23	31/05/2013	1,43	1,43154

FIGURE A.1: Extrait de la courbe de taux zéro-coupon du 29 Juillet 2011.

Commentaires sur la figure A.1 :

**Colonne A :** Les courbes de taux de l'institut des actuaires proposent des taux sur une période de 100 ans.

Sur les 50 premières années, la courbe comprend un taux zéro-coupon par mois. Cela fait  $50 \times 12 = 600$  maturités mensuelles. Le premier taux (ligne 2) calculé dans la figure A.1 est le taux zéro-coupon  $R(0, 1)$  « dans un mois vu à fin juillet 2011 », il est donc de maturité 1 mois par rapport à la date d'observation, et ainsi de suite. Sur les 50 années suivantes, la courbe comprend 1 taux zéro-coupon par an à fin juillet (31/07/2011).

Les fichiers contiennent 650 maturités, dont 600 à pas mensuel, et 50 à pas annuel.

**Colonne B et colonne C :** Les courbes de taux sont présentées respectivement avec deux et cinq décimales après la virgule.



## Annexe B

# Autres idées de processus de calibrage non traitées

### B.1 Estimation par la méthode des moments

La loi du processus CIR  $x$  étant connue (cf. paragraphe 2.3.2), les moments du CIR ++  $r$  peuvent en être déduit. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $\mathbb{E}[r^n(t)] = \mathbb{E}[(x(t) + \varphi(t))^n]$ , en gardant à l'esprit que  $\varphi$  est déterministe.

De plus si  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r^n(t)] = g(k, \theta, \sigma)$ , alors  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[r^n(t)] = g(\tilde{k}, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma})$ .

En égalisant les moments théoriques avec les moments numériques, la méthode des moments permet à l'aide de la résolution du système, de déterminer les paramètres de la loi. Il y a trois paramètres à estimer, il faut donc trois équations.

Les moments de la Khi-deux non centrée n'ont pas des allures propices aux calculs « à la main ». Pour simplifier la détermination des moments théoriques, les moments non centrés sont retenus. Considérons un n-échantillon  $(r_1, \dots, r_n)$  du taux court instantané.

**Moment d'ordre 1 de  $r(t)$  :**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n r_i &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[r(t)], \\ \sum_{i=1}^n r_i &= \frac{\tilde{\nu} + \tilde{\gamma}}{\tilde{c}} + \tilde{\varphi}(t). \end{aligned} \tag{B.1}$$

**Moment d'ordre 2 de  $r(t)$  :**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n r_i^2 &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[r^2(t)], \\ \sum_{i=1}^n r_i^2 &= \frac{(\tilde{\nu} + \tilde{\gamma})^2 + 2(\tilde{\nu} + 2\tilde{\gamma})}{\tilde{c}} + \frac{2(\tilde{\nu} + \tilde{\gamma})\tilde{\varphi}(t)}{\tilde{c}} + \tilde{\varphi}^2(t). \end{aligned} \tag{B.2}$$

**Moment d'ordre 3 de  $r(t)$  :**

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n r_i^3 &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[r^3(t)], \\
\sum_{i=1}^n r_i^3 &= \frac{(\tilde{\nu} + \tilde{\gamma})^3 + 6(\tilde{\nu} + \tilde{\gamma})(\tilde{\nu} + 2\tilde{\gamma}) + 8(\tilde{\nu} + 3\tilde{\gamma})}{\tilde{c}^3} + \tilde{\varphi}^3(t) \\
&+ \frac{3[(\tilde{\nu} + \tilde{\gamma}) + 2(\tilde{\nu} + 2\tilde{\gamma})]\varphi(t)}{\tilde{c}^2} \\
&+ \frac{3(\tilde{\nu} + \tilde{\gamma})\tilde{\varphi}^2(t)}{\tilde{c}}.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

## B.2 Estimation par minimisation de l'écart quadratique

Le prix zéro-coupon évalué à la date  $t$  d'échéance  $T$  du processus CIR ++ sous  $\mathbb{P}$  s'écrit  $P^{TH}(t, T) = \bar{A}(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$ . Les modèles de taux qui présentent une écriture de la forme précédente de l'obligation zéro-coupon sont dits « affines ». L'annexe technique ARMEL et PLANCHET (2020a) fournit une définition et une présentation détaillée des modèles de taux par structure par termes affines.

$P^M(0, T)$  est le prix observé en 0 de l'obligation zéro-coupon de maturité  $T$ . Les notations sont précisées ci dessous :

$$\bar{A}(t, T) = \frac{P^M(0, T)A(0, t) \exp\{-B(0, t)x_0\}}{P^M(0, t)A(0, T) \exp\{-B(0, T)x_0\}} A(t, T) e^{B(t, T)\varphi^{CIR}(t; \alpha)},$$

$$A(t, T) = \left[ \frac{2h \exp\left\{\frac{(k+h)(T-t)}{2}\right\}}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}},$$

$$B(t, T) = \frac{2(\exp\{(T-t)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)},$$

$$\text{et } h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}.$$

La relation entre le prix d'une obligation zéro-coupon  $P(t, T)$  et le taux d'une obligation zéro-coupon  $R(t, T)$ , à l'instant  $t$  pour l'échéance  $T$  est établi comme :  $P(t, T) = \exp(-(T-t)R(t, T))$ , qui s'écrit aussi  $P(\tau) = \exp(-\tau R(\tau))$ , avec  $\tau = T - t$  la maturité. Ainsi, il est facile d'en déduire l'expression théorique du taux zéro-coupon (cf. B.4), avec les notations ci-dessus.

$$\begin{aligned}
R^{TH}(t, T) &= \frac{1}{T-t} \left( \ln \left( \frac{P^M(0, t)A(0, T) \exp\{-B(0, T)x_0\}}{A(t, T)P^M(0, T)A(0, t) \exp\{-B(0, t)x_0\}} \right) - B(t, T)\varphi^{CIR}(t; \alpha) \right. \\
&\quad \left. + B(t, T)r(t) \right).
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Pour ajuster les paramètres  $\alpha = (k, \theta, \sigma)$  du CIR ++, une estimation par minimisation de l'écart quadratique entre le taux théorique et le taux observé peut être effectuée.

Par exemple, considérons un historique de  $n$  courbes de taux zéro-coupon. Pour une maturité  $\tau$  choisie, une chronologie de  $n$  taux zéro-coupon de maturité  $\tau$  peut être constituée.  $\alpha$  est alors déterminé selon l'équation B.5.

$$\hat{\alpha} = \operatorname{argmin}_{\alpha} \sum_{i=1}^n (R^{TH}(i, i + \tau, \alpha) - R(i, i + \tau))^2. \quad (\text{B.5})$$

Les termes  $(R^{TH}(i, i + \tau, \alpha) - R(i, i + \tau))$  pourraient éventuellement être pondérés pour donner plus de poids aux années les plus récentes, par exemple.



# Annexe C

## Nelson Siegel

### C.1 Coefficients de Nelson-Siegel avec le package Yield Curve

t	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\tau_1$	$\beta_0 + \beta_1$
1	3.76	-3.29	5.39	0.01	0.47
2	3.57	-2.97	5.96	0.01	0.60
3	4.46	-3.74	3.41	0.02	0.73
4	4.28	-3.33	3.37	0.01	0.95
5	3.87	-2.95	4.56	0.01	0.92
6	4.17	-3.13	4.66	0.01	1.04
7	1.23	-0.42	10.01	0.01	0.81
8	0.01	0.25	11.82	0.01	0.27
9	0.02	0.31	13.38	0.01	0.33
10	2.71	-2.55	8.70	0.01	0.16
11	2.56	-2.96	8.42	0.01	-0.40
12	1.04	-1.11	11.58	0.01	-0.07
13	0.01	-0.28	13.45	0.01	-0.27
14	0.00	-0.35	13.53	0.01	-0.34
15	0.36	-0.70	13.07	0.01	-0.34
16	0.00	-0.44	11.85	0.01	-0.43
17	4.52	-4.26	-5.89	0.05	0.25
18	4.00	-3.74	-6.31	0.05	0.26
19	4.05	-3.75	-6.48	0.05	0.29
20	0.01	0.34	12.71	0.01	0.35
21	4.18	-3.92	-6.33	0.05	0.26
22	4.14	-3.89	-6.15	0.05	0.25
23	4.20	-3.98	-6.16	0.04	0.22
24	4.00	-3.70	-6.42	0.04	0.31
25	4.06	-3.82	-5.10	0.04	0.24
26	4.20	-3.94	-6.08	0.04	0.26
27	4.24	-3.95	-6.27	0.04	0.29
28	3.90	-3.66	-5.76	0.04	0.24
29	4.20	-4.00	-5.72	0.04	0.20
30	4.30	-4.14	-5.31	0.04	0.16

t	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\tau_1$	$\beta_0 + \beta_1$
31	4.32	-4.07	-5.74	0.04	0.25
32	4.49	-4.23	-5.79	0.04	0.26
33	4.43	-4.13	-6.04	0.04	0.30
34	4.31	-3.99	-6.12	0.04	0.32
35	4.37	-4.03	-6.38	0.04	0.33
36	4.35	-3.95	-6.34	0.05	0.39
37	4.13	-3.72	-6.41	0.04	0.41
38	4.15	-3.75	-6.15	0.04	0.39
39	4.08	-3.64	-6.11	0.04	0.44
40	3.91	-3.49	-5.85	0.04	0.42
41	3.79	-3.41	-5.95	0.04	0.38
42	3.72	-3.45	-5.80	0.04	0.28
43	3.49	-3.24	-5.49	0.04	0.26
44	3.18	-2.96	-5.11	0.03	0.22
45	3.34	-3.13	-5.50	0.03	0.21
46	3.28	-3.08	-5.26	0.03	0.20
47	3.03	-2.88	-4.60	0.03	0.15
48	2.88	-2.77	-4.50	0.03	0.11
49	2.14	-2.12	-3.26	0.03	0.02
50	2.16	-2.14	-3.60	0.03	0.02
51	1.62	-1.68	-2.62	0.03	-0.07
52	1.94	-2.06	-2.73	0.03	-0.13
53	2.26	-2.33	-3.59	0.03	-0.07
54	3.05	-3.06	-4.72	0.03	-0.01
55	2.64	-2.67	-4.30	0.03	-0.03
56	2.82	-2.88	-4.34	0.03	-0.06
57	2.74	-2.77	-4.38	0.03	-0.03
58	2.59	-2.70	-4.32	0.03	-0.11
59	2.82	-3.00	-4.68	0.03	-0.19
60	2.97	-3.20	-4.63	0.03	-0.23

t	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\tau_1$	$\beta_0 + \beta_1$
61	2.60	-2.80	-4.67	0.03	-0.19
62	2.39	-2.64	-4.42	0.03	-0.25
63	2.28	-2.59	-3.86	0.03	-0.31
64	2.65	-3.05	-4.04	0.03	-0.40
65	2.43	-2.81	-3.95	0.03	-0.38
66	1.64	-2.14	-2.93	0.02	-0.50
67	1.54	-1.93	-3.18	0.03	-0.39
68	1.78	-2.28	-3.32	0.02	-0.50
69	1.83	-2.36	-3.47	0.02	-0.53
70	2.08	-2.70	-3.24	0.03	-0.62
71	2.32	-2.90	-4.31	0.04	-0.58
72	2.41	-3.06	-4.25	0.03	-0.65
73	2.86	-3.28	-4.74	0.04	-0.42
74	2.69	-3.21	-4.31	0.03	-0.52
75	2.84	-3.28	-4.31	0.03	-0.44
76	2.64	-3.00	-4.89	0.03	-0.36
77	2.66	-3.06	-4.84	0.03	-0.40
78	2.62	-3.10	-4.11	0.03	-0.47
79	2.61	-3.09	-4.25	0.03	-0.48
80	2.53	-3.03	-4.34	0.03	-0.50
81	2.61	-3.02	-4.68	0.03	-0.41
82	2.54	-3.09	-4.36	0.03	-0.54
83	2.55	-3.24	-3.54	0.03	-0.70
84	2.65	-3.23	-3.66	0.03	-0.58
85	2.41	-3.00	-3.03	0.03	-0.59
86	2.35	-2.95	-3.22	0.03	-0.60
87	2.21	-2.75	-3.26	0.03	-0.55
88	2.24	-2.77	-3.37	0.03	-0.52
89	2.31	-2.79	-3.68	0.03	-0.48
90	2.30	-2.82	-3.69	0.03	-0.52
91	2.31	-2.82	-3.42	0.03	-0.51
92	2.33	-2.87	-3.50	0.03	-0.54
93	2.34	-2.93	-2.96	0.03	-0.59
94	2.29	-2.94	-3.09	0.03	-0.65
95	2.37	-2.96	-3.43	0.03	-0.58



## C.2 Historique du taux court avec le package Yield Curve

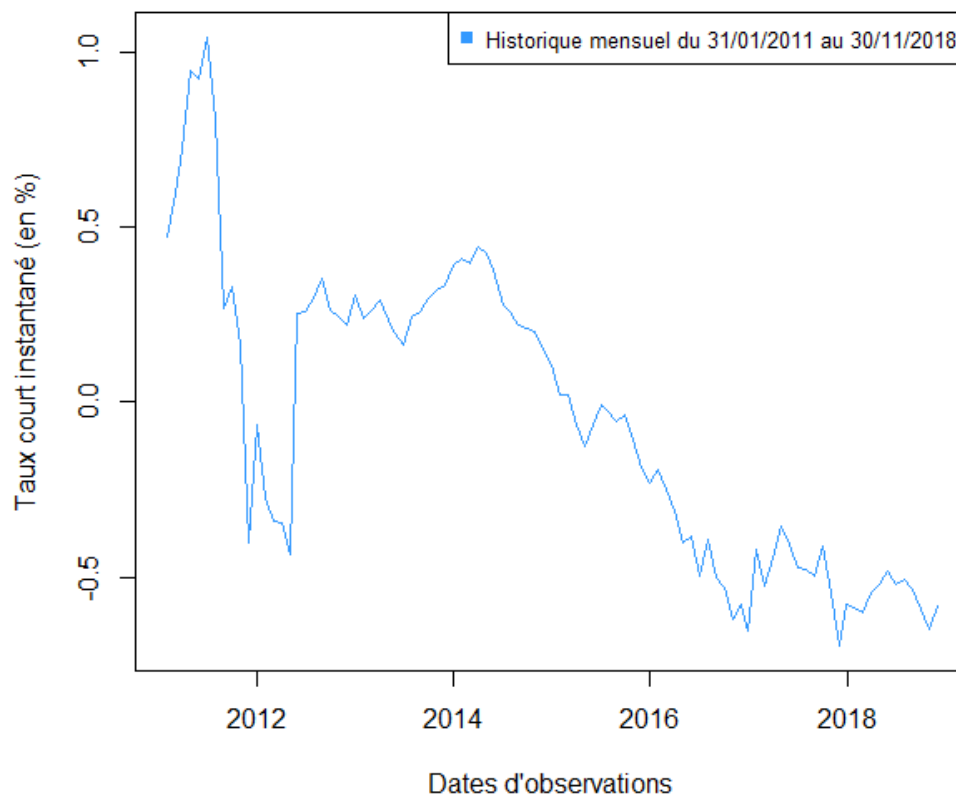


FIGURE C.1: Extraction du taux court  $\beta_0 + \beta_1$  avec la fonction *Nelson.Siegel* du package *YieldCurve* de R CORE TEAM (2021).



## Annexe D

# Re-calibrage : annualisation des paramètres

### D.1 Re-calibrage pour la méthode 1 : EMV sur la loi du taux court instantané

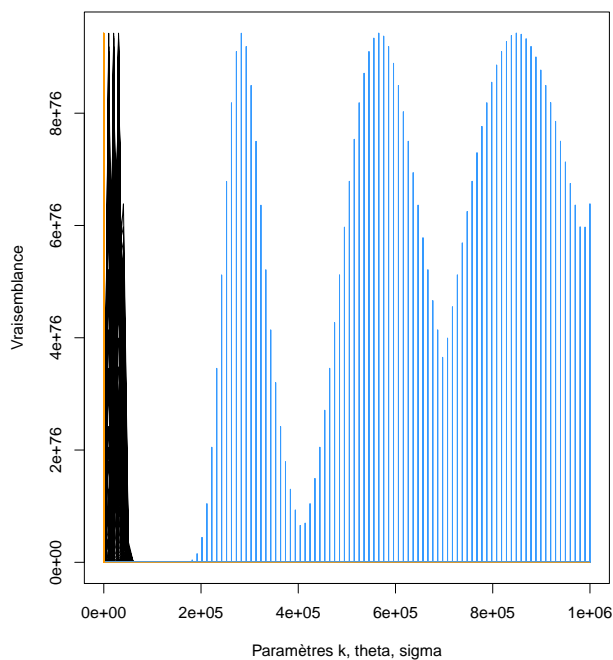


FIGURE D.1: Illustration des valeurs de la vraisemblance en fonction de chacun des paramètres.  $k$  en noir,  $\sigma$  en orange et  $\theta$  en bleu.

La figure D.1 illustre la non unicité du maximum de la vraisemblance. Cette approche n'a pas été retenue. La plus petite valeur pour laquelle le maximum est atteint et pour  $\theta$  supérieur à  $2 \times 10^5$ , ce qui ne paraît pas crédible.

## D.2 Re-calibrage pour la méthode 2 : EMV sur la loi du taux zéro-coupon

Sur le pavé D.1 de  $\mathbb{R}^3$  les irrégularités de la vraisemblance sont limitées (cf. figure D.2), et la log-vraisemblance négative y est minimisée. Les résultats de l'algorithme d'optimisation en fonction des valeurs initiales sont répertoriées dans le tableau D.1.

$$\begin{aligned}
 4.00\% &\leq k \leq 10.00\% \\
 80.00\% &\leq \theta \leq 100.00\% \\
 20.00\% &\leq \sigma \leq 26.00\%
 \end{aligned}
 \tag{D.1}$$

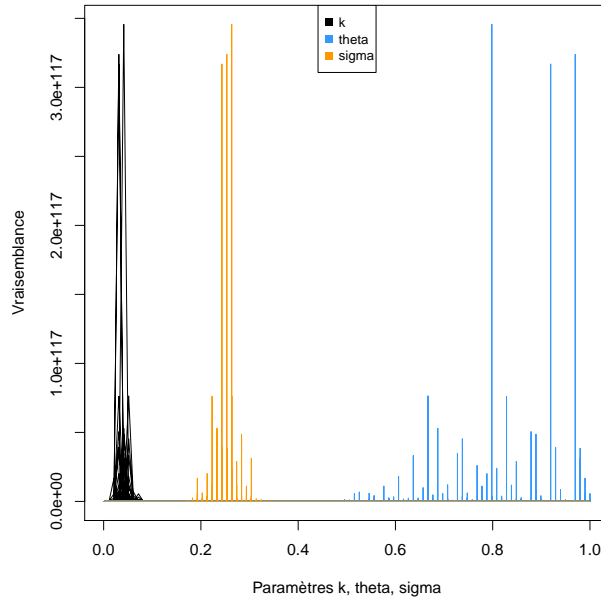


FIGURE D.2: Illustration des valeurs de la vraisemblance en fonction de chacun des paramètres.

Valeurs initiales			Minimiseurs			Minimum
0.06	0.90	0.20	0.042	0.81	0.25	-253.15
0.04	0.80	0.26	0.042	0.80	0.26	-266.09
0.04	1.00	0.26	0.04	1.00	0.026	-239.19
0.08	1.00	0.25	0.043	0.81	0.26	-258.30

TABLE D.1: Résultats de la minimisation de la log-vraisemblance négative sur D.1 en fonction de la valeur initiale.