Institut des Actuaires

Une courbe de taux pour les assureurs

Version mise à jour de l'article paru dans la Tribune de l'Assurance en novembre 2001

Pourquoi ?

L'arrêté du 26 décembre 2000 qui modifie les articles A332 et A334 du code des assurances a introduit de nouvelles exigences pour les compagnies d'assurances en matière de gestion actif-passif.
Le nouvel état trimestriel T3 doit notamment permettre de mesurer la sensibilité du bilan d'une compagnie d'assurance aux variations des taux d'intérêt. Les engagements envers les assurés doivent être évalués « en valeur de marché » à l'aide d'une « courbe des taux ».

Comment ?

L'Institut des Actuaires, association professionnelle unique des actuaires français, a considéré qu'il était de son devoir répondre à ce besoin nouveau. En effet, il est possible de trouver de nombreuses courbes de taux utilisées dans la gestion des actifs mais aucune qui puisse servir de référence commune aux assureurs.
La courbe des taux de référence publiée par l'IA est donc une courbe de taux destinée aux assureurs pour la valorisation de leur passif. Elle est cohérente avec les évaluations de l'actif car elle est calculée à partir de cours de marché.

Un comité scientifique « courbe des taux » a été constitué au sein de l'IA. Il regroupe des spécialistes des marchés financiers et de la gestion actif-passif. Le calcul pratique a été confié à FININFO, spécialiste européen de l'analyse obligataire.

Le modèle de Vasicek-Fong a été retenu (voir annexe méthodologique).
Le comité scientifique a fixé un certain nombre de règles pour l'élaboration de la courbe, afin de garantir sa fiabilité :

- L'échantillon qui permet le calcul est constitué de bons du Trésor, d'emprunts d'états et d'OAT, d'un montant en circulation supérieur à 8 milliards d'euros.
- Les cours retenus dans le calcul sont des cours de clôture officiels du dernier jour de bourse du trimestre. Il y a ainsi cohérence avec l'évaluation des actifs du bilan.

Le comité se réunit une fois par trimestre dans les jours suivant la fin du trimestre pour optimiser les paramètres et valider les calculs.

La courbe IA est publiée dans les tout premiers jours du trimestre sur le site internet de l'IA : www.institutdesactuaires.com .

Elle se présente sous la forme d'un fichier EXCEL qui comprend un taux zéro-coupon par mois sur une période de 100 ans. Ce taux est un taux zéro-coupon actuariel (tronqué à deux ou à cinq décimales) calculé à partir des facteurs d'actualisation résultats du modèle de Vasicek-Fong, c'est-à-dire de la forme $(1+i)^t$.

La courbe peut alors être utilisée pour calculer simplement les valeurs actuelles des engagements par actualisation de chacun des flux futurs au taux zéro-coupon de la courbe.

Conclusion

Le recours à une courbe des taux zéro-coupons pour l'évaluation des passifs des compagnies d'assurance montre une évolution déterminante de l'approche retenue dans le cadre de l'analyse des équilibres actif-passif.
L'IA soutient cette démarche et souhaite qu'elle se généralise avec l'introduction de scénarios d'évolution des taux à plusieurs paramètres.

Annexe méthodologique

La représentation :

Classiquement, on représente les taux zéro-coupons par un ou plusieurs polynômes, voire des exponentielles de polynômes.
Nous avons préféré prendre la représentation de la courbe des coefficients d'actualisation A, en utilisant la méthode de Vasicek-Fong.
Cette représentation repose sur deux idées :

- Changement de l'échelle de temps t :
    - X=1-exp(-at)
    - Pour t croissant de 0 à l'infini, X croît de 0 à 1.
    - Il faut choisir a.
    - Ce changement permet de mieux tenir compte dans l'estimation de **A** du fait qu'il y a peu de flux au delà de 25 ans.
- Utilisation de deux polynômes $P_1(X)$ et $P_2(X)$ pour représenter **A**, avec raccord en valeur et en dérivée à une date t_c.
    - On prend pour P_1 un polynôme de degré 3 et pour P_2 de degré 5.

Posons $X_c = 1\text{-exp}(-at_c)$, $0 < X_c < 1$
On a :

$$\mathbf{A(X) = P_1(X) = a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3 \text{ pour } X \leq X_C}$$

(1)

$$\mathbf{A(X) = P_2(X) = P_1(X) + (X-X_C)^2(b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3) \text{ pour } X \geq X_C}$$

Les (a_i, b_j) sont des coefficients à estimer
t_C est un paramètre à choisir.

L'avantage de cette représentation est d'obtenir une bonne approximation avec des degrés beaucoup plus faibles qu'avec un seul polynôme.

Les contraintes :

Notons τ le taux d'actualisation continu associé à **A**(X).
On a : **A**(X) = $\exp(-\tau\, t)$

1) pour t=X=0, le coefficient d'actualisation est égal à 1, donc :
   $a_0 = 1$ (2)

2) Quand t tend vers l'infini, et X vers 1, le coefficient d'actualisation tends vers 0, d'où
   $A(1) = P_2(1) = 0$ (3)

Remarque : on démontre alors que le taux actuariel τ tend vers a quand t tend vers l'infini.

Estimation de A(X):

On a N produits de taux O_n (obligations, BTAN ,BTF,…).

Chaque produit O_n est caractérisé à la date t_0 par son prix de marché P'_n et son échéancier ($t_{k,n}$, $F_{k,n}$) où $F_{k,n}$ est le flux à la date $t_{k,n}$ et k varie de 1 à K_n.

Utilisant les coefficients d'actualisations **A**(X) et en posant

$X(k,n) = 1 - \exp(-at_{k,n})$

on a pour valeur théorique de O_n :

$$P_n = \sum_{k=1}^{K_n} F_{k,n} \; A(X(k,n))$$

Pour un choix de a et de t_C, on estime les coefficients (a_i, b_j) de **A**(X) en minimisant :

(4) $$\sum_{k=1}^{N} (P'_n - P_n)^2$$

sous les contraintes (2) et (3).

L'avantage de cette méthode est que P_n est linéaire en les coefficients (a_i, b_j) ; on peut donc résoudre exactement (4).